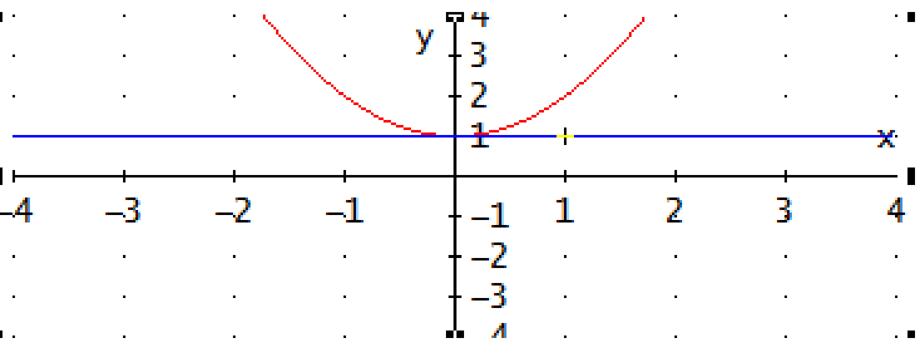
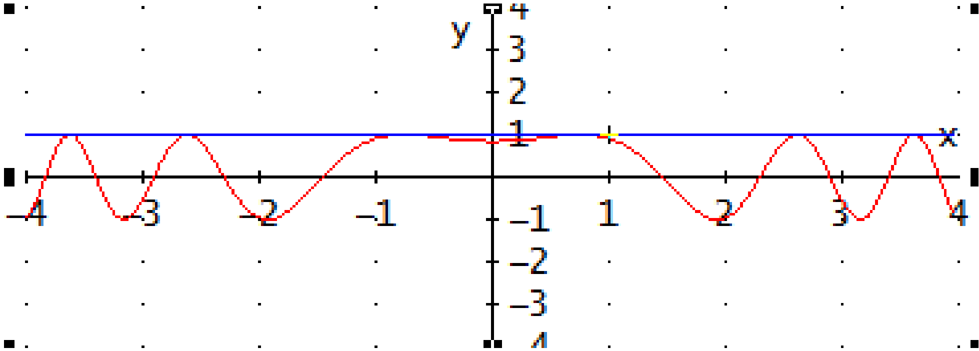
Calcolo differenziale

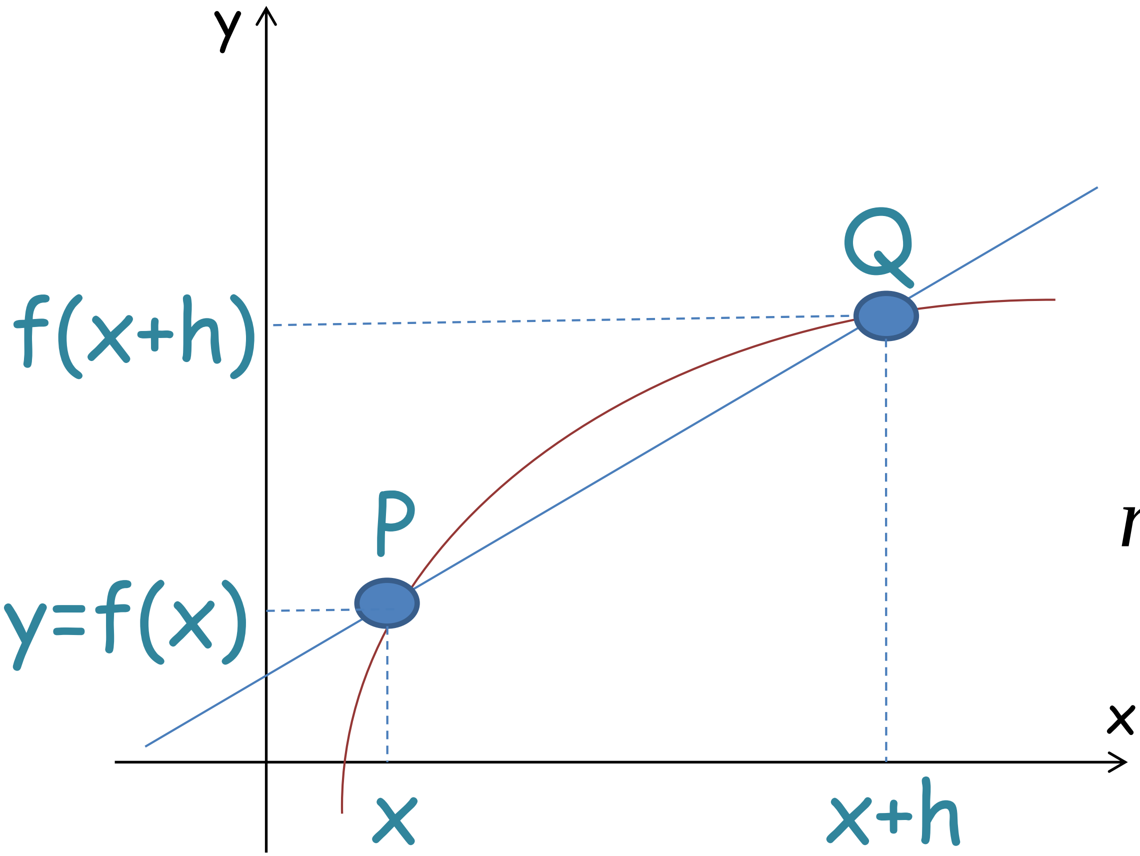
L'operazione di derivata

Sia f: A→R. Si vuole conoscere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione in un punto.





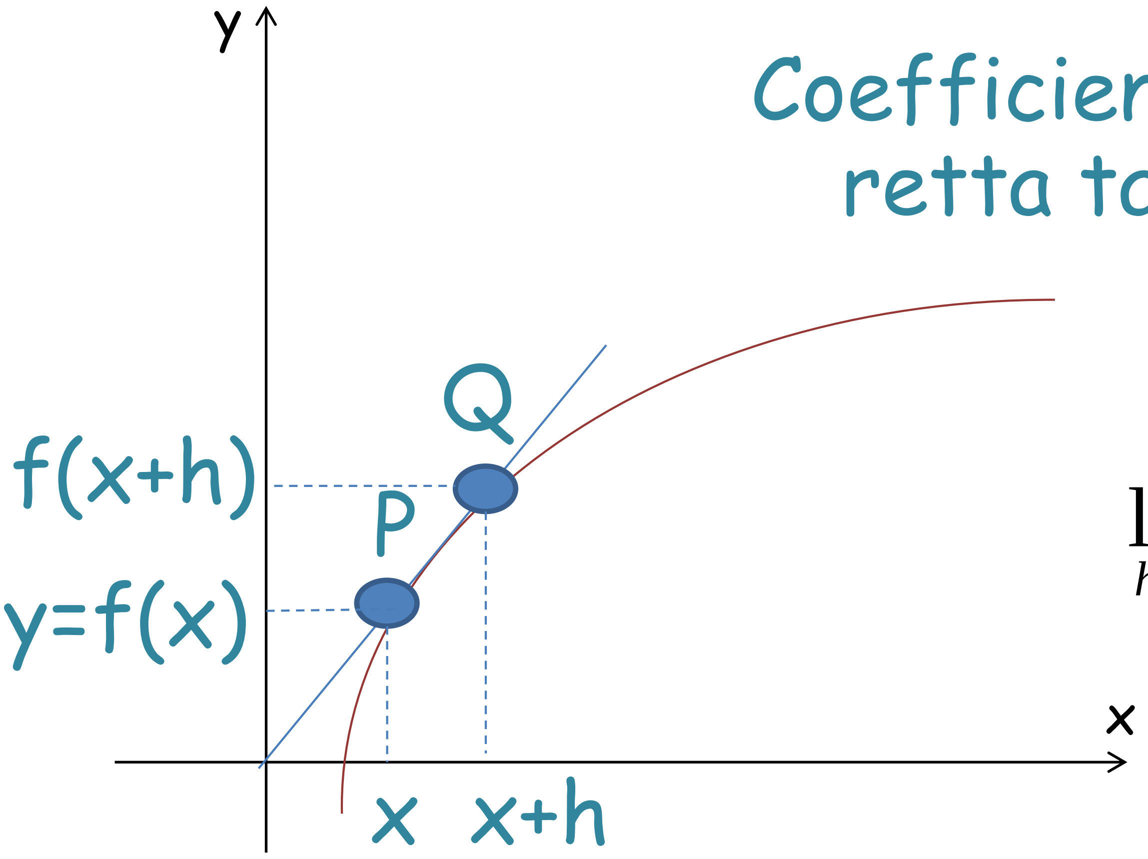
Retta secante



Rapporto incrementale

$$m = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Retta tangente



Coefficiente angolare della retta tangente a f in P

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Derivata di f in un punto

Sia f: A→ R e sia $x \in A$. Diciamo che la funzione f è derivabile in x se $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ esiste ed è finito.

Il risultato del limite si chiama derivata della funzione f in x.

La derivata di f in un punto è un numero.

Derivata di f in un punto

La derivata di f in un punto si può definire anche ponendo $x+h = x_0$ e si ha $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

e si rappresenta come

$f'(x_0)$ $\qquad$ $D(f)|_{x_0}$

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0}$$

Retta tangente al grafico di f in $P(x_0, y_0)$

Sia $f: A \to R$ derivabile in x_0.

$x_0 \quad y_0$

La retta tangente al grafico di f in P (x_0,y_0) è

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

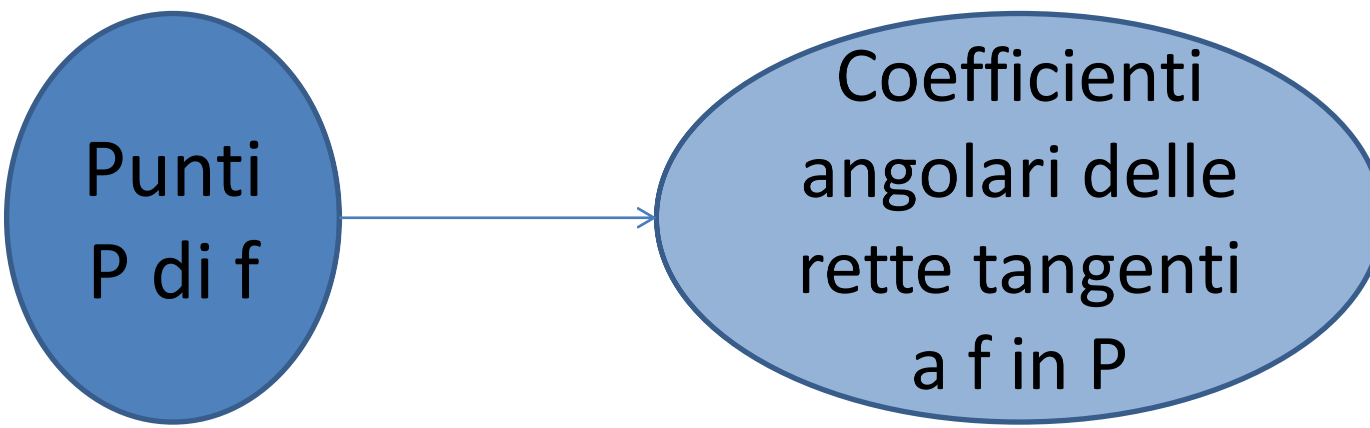
$$\downarrow$$

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

Derivata di f in un intervallo

Sia f: A→ R se $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ esiste ed

è finito per tutti i punti di I⊂A allora la funzione è derivabile in I.



Continuità delle funzioni derivabili

Sia f: A→ R. Se f è derivabile in x_0 allora è continua in x_0.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} \left[f(x) - f(x_0) \right] \stackrel{?}{=} 0$$

$$\lim_{x \to x_0} \left[f(x) - f(x_0) \right] \frac{x - x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} \left[x - x_0 \right]$$

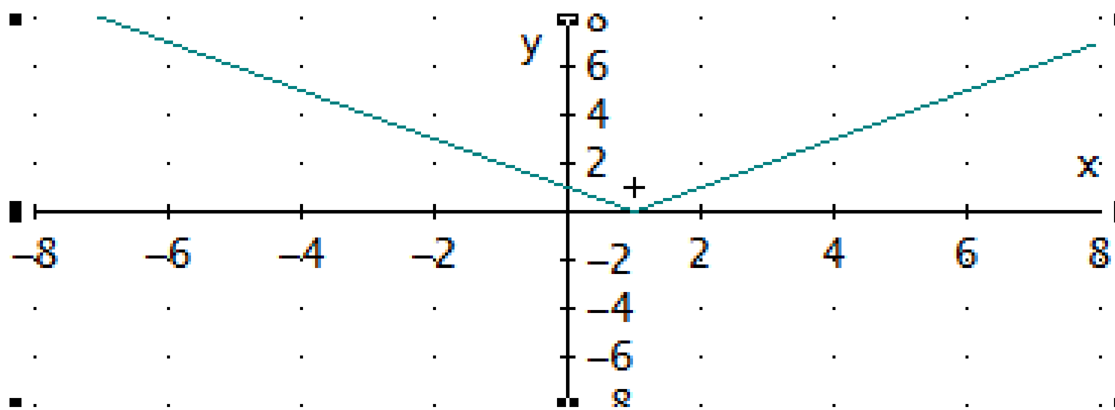
$$f'(x_0) \quad \cdot \quad 0$$

Continuità delle funzioni derivabili

Sia f: A→ R. Se f è derivabile in x_0 allora è continua in x_0.

ATTENZIONE: Non vale il viceversa.

Punti angolosi

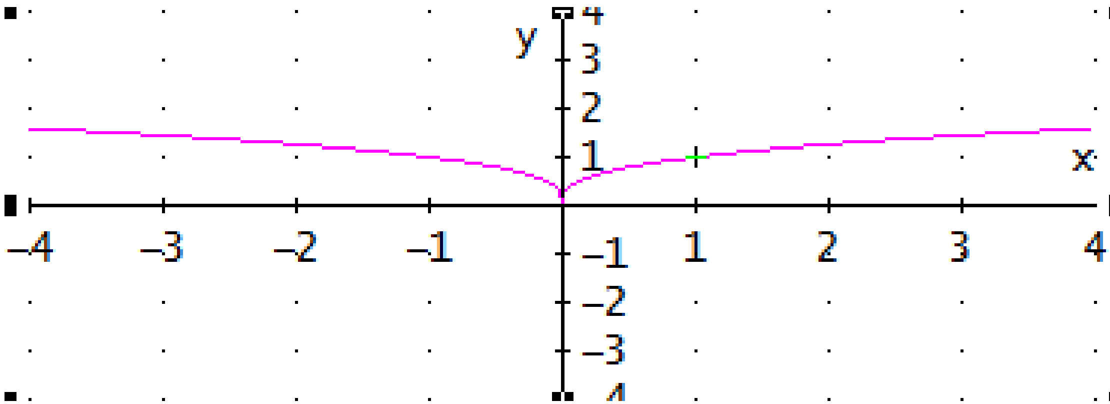


Continuità delle funzioni derivabili

Sia f: $A \to R$. Se f è derivabile in x_0 allora è continua in x_0.

ATTENZIONE: Non vale il viceversa.

Cuspidi

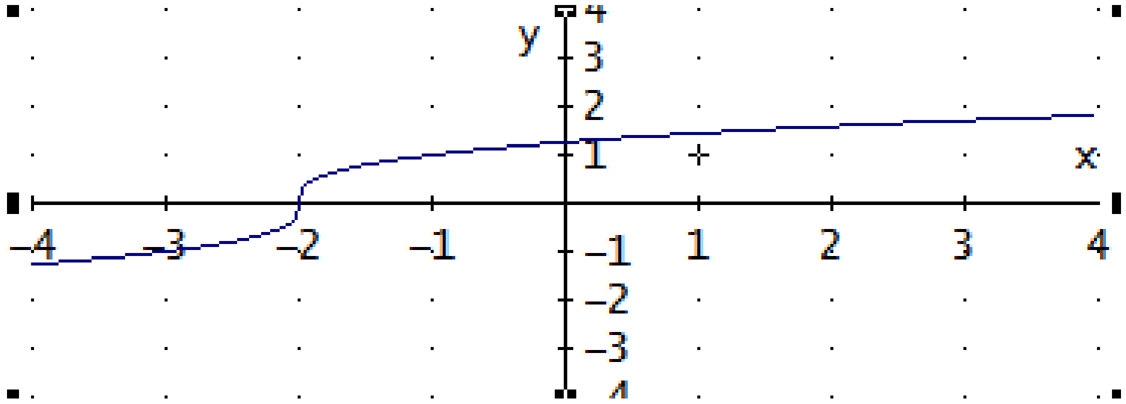


Continuità delle funzioni derivabili

Sia f: A→ R. Se f è derivabile in x_0 allora è continua in x_0.

ATTENZIONE: Non vale il viceversa.

Flessi a tangente verticale



Derivate fondamentali

Sia $f: R \rightarrow R$.

$x \qquad k$

$f'(x)=0$

Sia $f: R \rightarrow R$.

$x \qquad x$

$f'(x)=1$

Sia $f: R \rightarrow R$.

$x \qquad x^n$

$f'(x)=nx^{n-1}$

Derivate fondamentali

Sia $f: R \to R$. $\quad f'(x)=\cos x$

$x \mapsto \sin x$

Sia $f: R \to R$. $\quad f'(x)=-\sin x$

$x \mapsto \cos x$

Derivate fondamentali

Sia f: R→ R.

$x \quad a^x$

$f'(x) = a^x \ln a$

Sia f: R→ R.

$x \quad \log_a x$

$f'(x) = \frac{1}{x} \log_a e$

Operazioni con le derivate

Somma

Siano f e g: A → R derivabili in $x \in A$.
Allora anche la funzione (f+g)(x) è derivabile in x e D(f+g)=Df+Dg.

$$y = x^3 + \ln x$$

Operazioni con le derivate

Differenza

Siano f e g: $A \rightarrow R$ derivabili in $x \in A$.
Allora anche la funzione (f-g)(x) è derivabile in x e D(f-g)=Df-Dg.

$$y = \sqrt[3]{x} - \sin x$$

Operazioni con le derivate

Prodotto

Siano f e g: $A \rightarrow R$ derivabili in $x \in A$.
Allora anche la funzione $(f \cdot g)(x)$ è derivabile in x e
$D(f \cdot g) = f' \cdot g + f \cdot g'$

In particolare $D(cf) = cD(f)$.

$$y = (2x + 1) \cdot \cos x$$

Operazioni con le derivate

Divisione

Siano f e g: A → R derivabili in $x \in A$ | $g(x) \neq 0$.
Allora anche la funzione $(f/g)(x)$ è derivabile in x e $D\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f`(x)g(x) - f(x)g`(x)}{g^2(x)}$

$$y = \tan x$$

Derivata di funzione composta

Siano f: A → B e g: B → C. Sia f derivabile in $x \in A$ e g derivabile in $y=f(x) \in B$, allora g(f(x)) è derivabile in x e $Dg(f(x)) = g`(f(x)) \cdot f`(x)$

$$y = \cos(x^3 - 2x)$$

Esercizi

$$\ln(\sin x - x^2) \qquad \frac{\cos 2x}{e^{x+3}}$$

$$\sqrt{\ln(2x^3+1)} \qquad x^2 \cdot \sqrt[3]{x+3}$$

$$\cos\left[\ln(x^2)\right] \qquad \sqrt[3]{\frac{x+3}{x^2}}$$

Derivata di funzione inversa

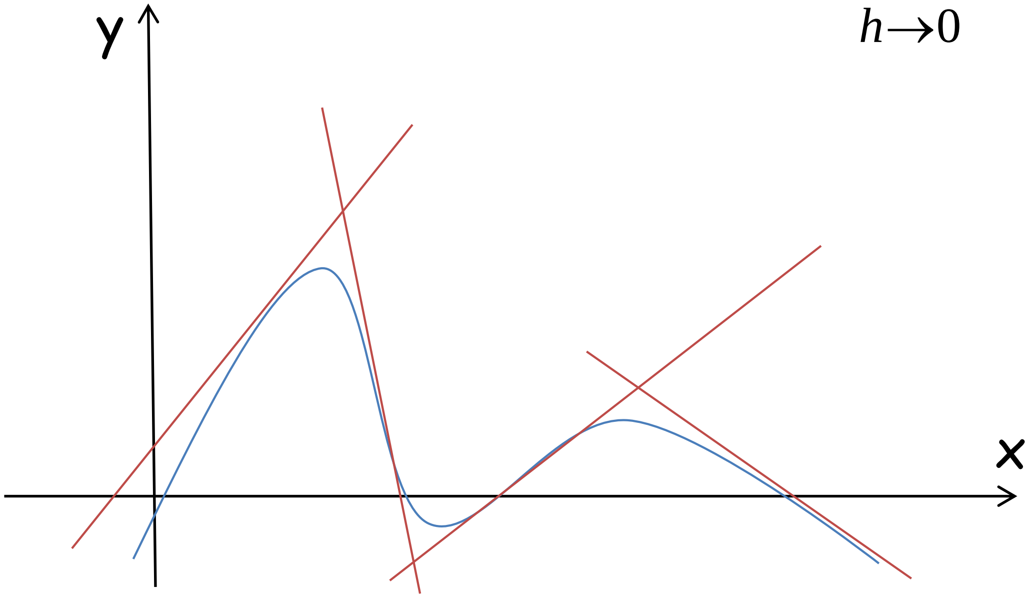
Sia f: A → B invertibile e derivabile in x $\in$ A e sia f'(x)≠0, allora $f^{-1}(y)$ è derivabile in y=f(x) e

$$D(f^{-1}(y)) = \left.\frac{1}{D(f(x))}\right|_{x=f^{-1}(y)}$$

$$y = \sqrt{x} \qquad\qquad y = \ln x$$

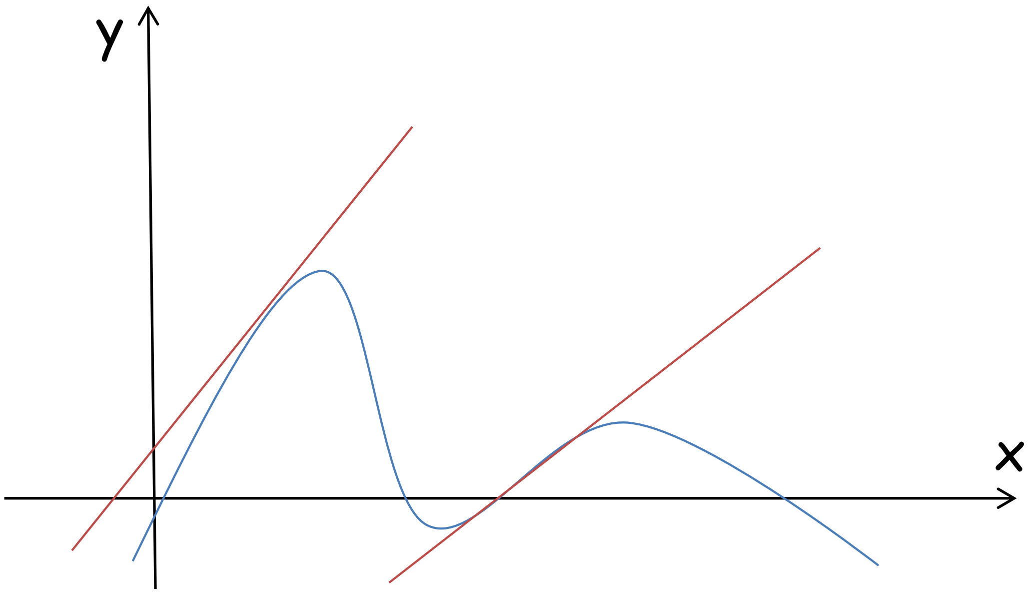
Uso della derivata per lo studio della monotonia di una funzione

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f`(x)$$



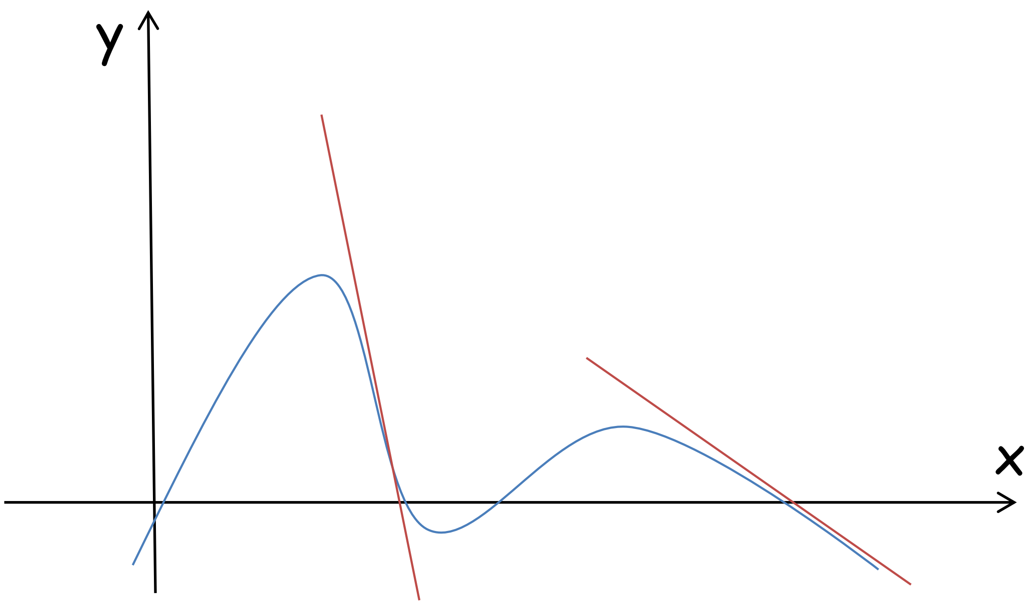
Uso della derivata per lo studio della monotonia di una funzione

Sia $f: A \rightarrow B$ derivabile in $I \subset A$. f è crescente in $I \subset A \Leftrightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in I$.



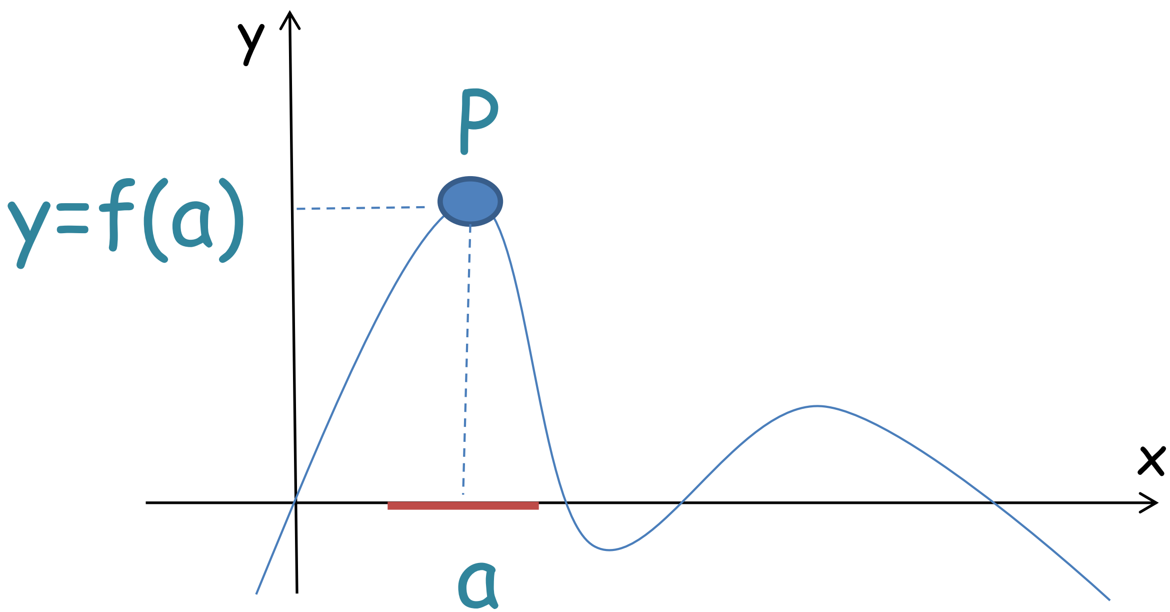
Uso della derivata per lo studio della monotonia di una funzione

Sia $f: A \rightarrow B$ derivabile in $I \subset A$. f è decrescente in $I \subset A \Leftrightarrow f'(x) \leq 0,\ \forall x \in I$.



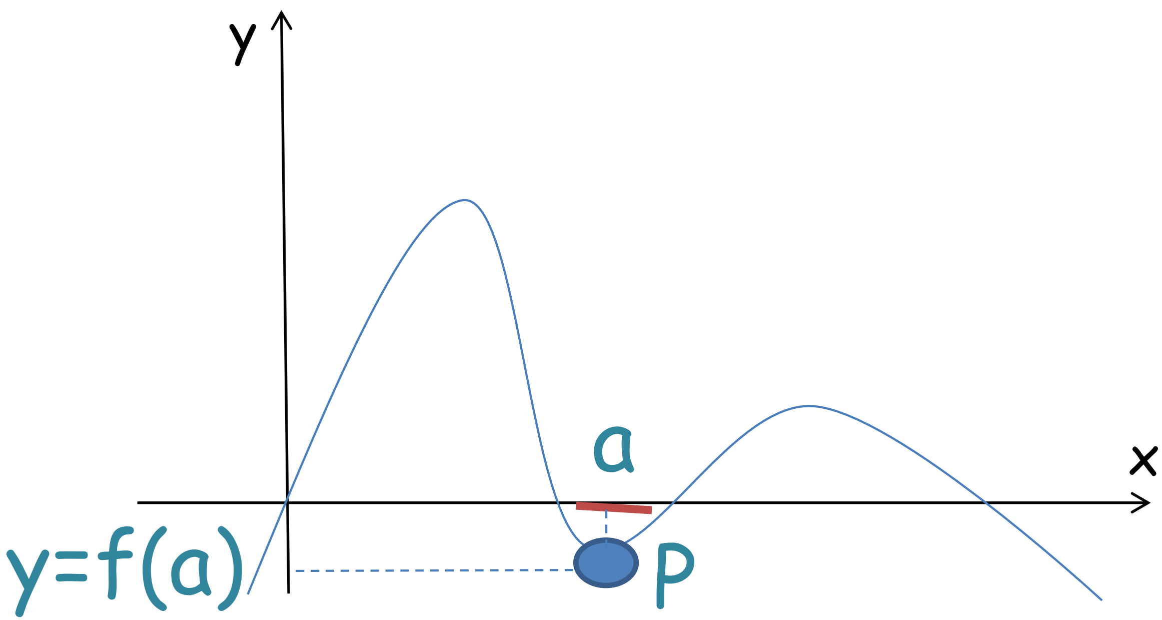
Massimi relativi

Sia $f: A \rightarrow B$ e $a \in A$. Il punto $P(a, f(a))$ è un punto di massimo relativo per la funzione f se $\exists\, I(a) \mid f(a) \geq f(x)\ \forall x \in I(a)$.



Minimi relativi

Sia $f: A \rightarrow B$ e $a \in A$. Il punto $P(a, f(a))$ è un punto di minimo relativo per la funzione f se $\exists\ I(a) |\ f(a) \leq f(x)\ \forall x \in I(a)$.



Massimi e minimi relativi

Se a è interno al dominio allora I(a) deve essere un intorno circolare.

Se a è un estremo del dominio allora I(a) sarà un intorno destro o sinistro.

Teorema di Fermat

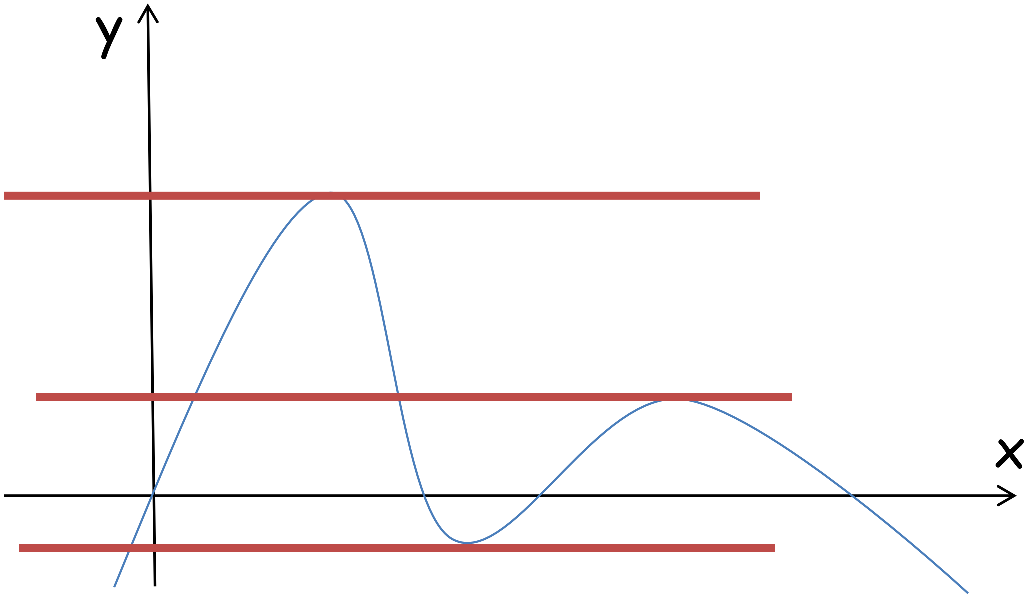
Sia $f\colon A \to B$ e $a \in A$. Condizione necessaria affinché il punto $P(a,f(a))$ sia un massimo o un minimo relativo è che $f'(a)=0$.

I punti del dominio in cui $f'(a)=0$ si chiamano punti critici o stazionari.

La condizione $f'(a)=0$ non consente però di discriminare tra i diversi punti stazionari.

Significato geometrico dei punti stazionari

I punti del dominio in cui $f'(a)=0$ si chiamano punti critici o stazionari.



Nei punti stazionari la curva ha retta tangente orizzontale.

Esercizio

Dimostrare che il punto di ascissa $x=3$ non è un massimo per la funzione $y=\sqrt{x}$.

Condizione sufficiente

Sia f: $A \rightarrow B$ continua e derivabile in I(a), $a \in A$. Condizione sufficiente affinché il punto P(a,f(a)) sia un massimo è che $f'(x)>0$ in $I^-(a)$ e $f'(x)<0$ in $I^+(a)$.

Sia f: $A \rightarrow B$ continua e derivabile in I(a), $a \in A$. Condizione sufficiente affinché il punto P(a,f(a)) sia un minimo è che $f'(x)<0$ in $I^-(a)$ e $f'(x)>0$ in $I^+(a)$.

Esercizio

Determinare i massimi ed i minimi relativi della funzione $y=\sin x$ nell'intervallo $[0,2\pi]$.

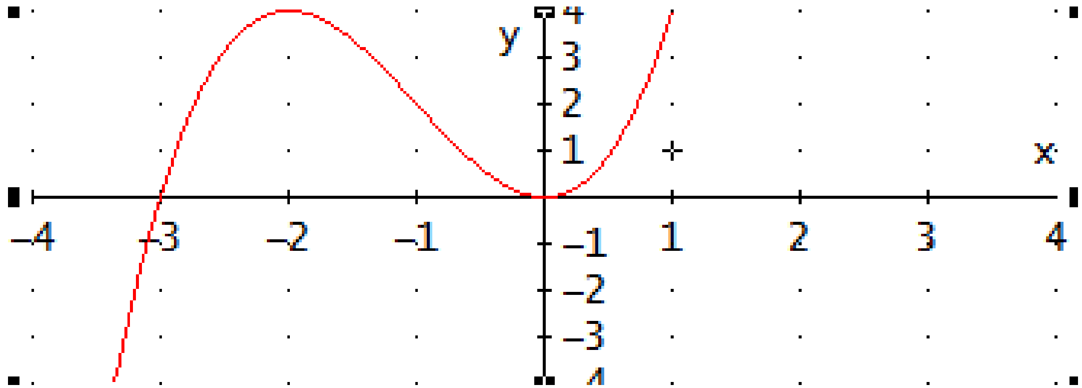
Dimostrare che la funzione $y=\ln x$ è sempre crescente.

Massimi e minimi assoluti

Sia f: [a,b] → R e siano P_1, P_2, … , P_n i punti di massimo (minimo) relativo della funzione f. Il massimo (minimo) assoluto della funzione f è il punto di ordinata massima (minima) tra f(a), f(b) e le ordinate dei punti P_1, P_2, … , P_n.

Esercizio

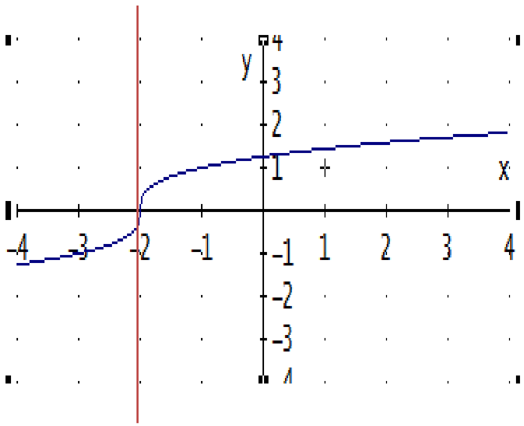
Determinare i massimi ed i minimi assoluti della funzione $y=x^3+3x^2$ nell'intervallo $[-3/2,2]$.



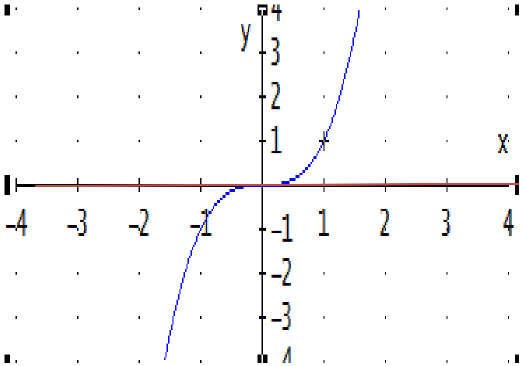
Flesso

Sia f: $A \to R$ e $a \in A$, si dice che il punto $P(a, f(a))$ è un flesso se in quel punto la curva attraversa la retta tangente.

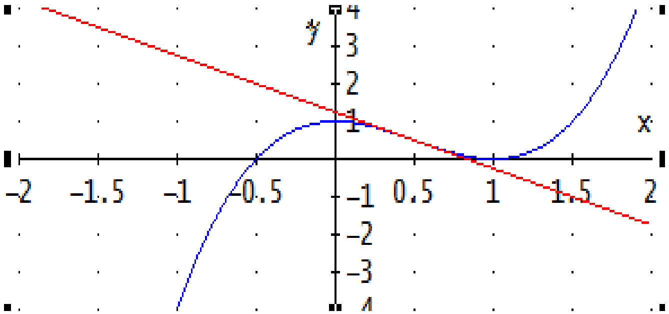
Flesso a tangente verticale



Flesso a tangente orizzontale



Flesso a tangente obliqua



Esercizi

$$y = \sqrt[3]{x}$$

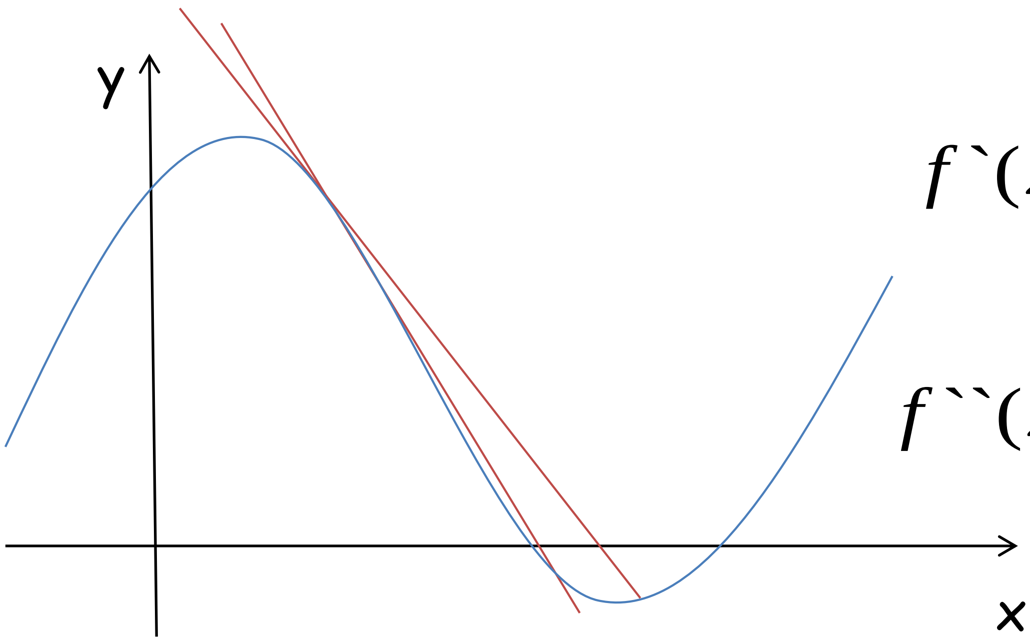
$$y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

Derivate successive

Sia f: A→ R, derivabile in I(x), con x $\in$ A. Diciamo che la funzione f è derivabile due volte in x se $\lim_{h\to 0}\frac{f`(x+h)-f`(x)}{h}$ esiste ed è finito.

Il risultato del limite si chiama derivata seconda della funzione f in x e si indica con f''(x), D^2f o $\frac{d^2 f}{dx^2}$.

Significato geometrico della derivata seconda



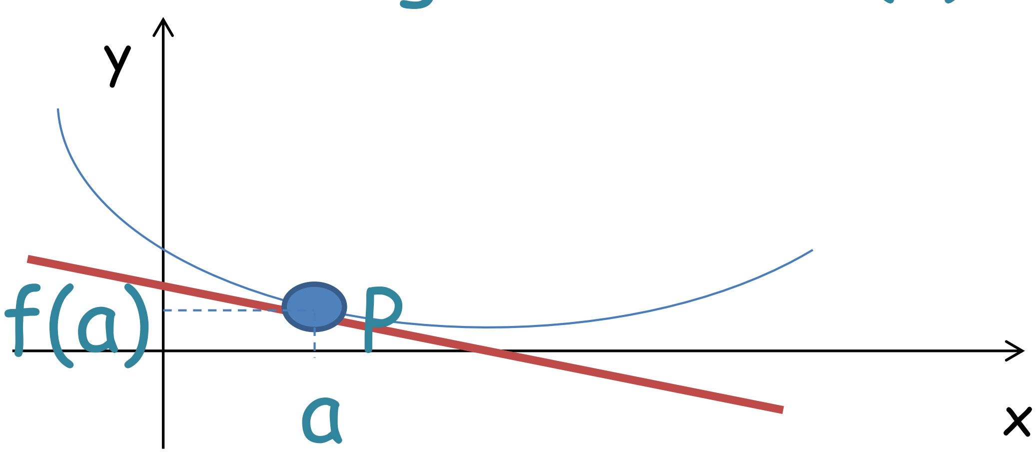
$$f`(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f``(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f`(x+h) - f`(x)}{h}$$

La derivata seconda rappresenta il tasso di variazione della curva dall'andamento rettilineo.

Concavità di una funzione

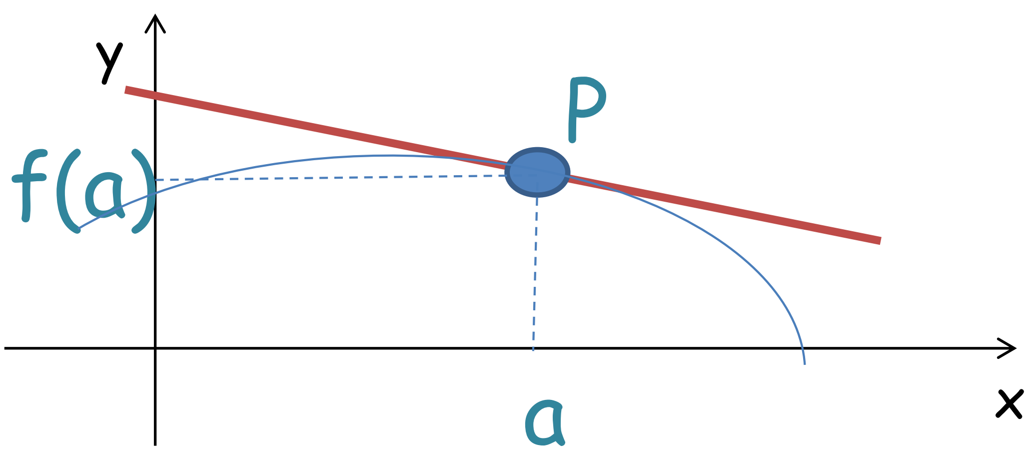
Sia $f: A \rightarrow R$ e $a \in A$. La funzione rivolge la concavità verso l'alto in $P(a, f(a))$ se $\exists\, I(a) |$ il grafico della funzione sta sopra quello della retta tangente $\forall x \in I(a)$.



$$f(x) \geq f'(a)(x-a)+f(a)$$

Concavità di una funzione

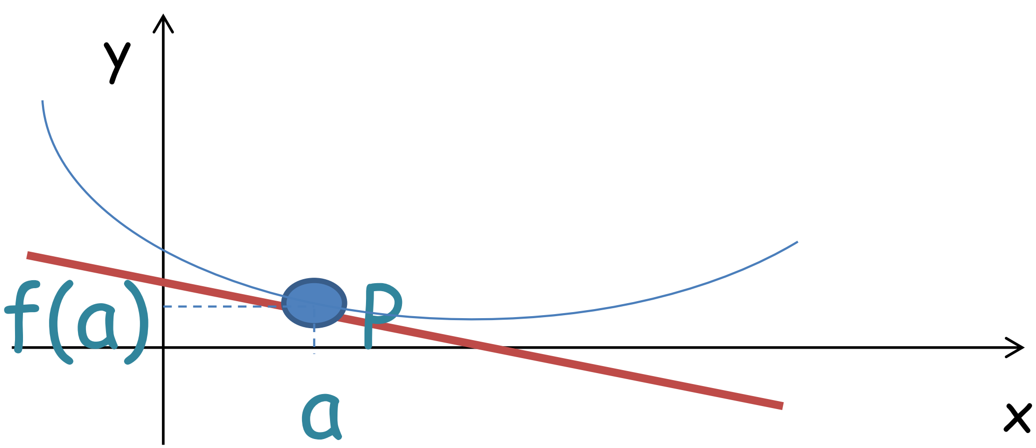
Sia $f: A \to R$ e $a \in A$. La funzione rivolge la concavità verso il basso in $P(a, f(a))$ se $\exists\, I(a) |$ il grafico della funzione sta sotto quello della retta tangente $\forall x \in I(a)$.



$$f(x) \leq f'(a)(x-a)+f(a)$$

Studio della concavità di una funzione tramite derivata seconda

Sia $f: A \to R$ e $a \in A$. La funzione rivolge la concavità verso l'alto (il basso) in $P(a, f(a))$ se e solo se $f''(a)>0$ (<).



$$f(x) \geq f'(a)(x-a)+f(a)$$

Studio dei punti critici mediante l'uso delle derivate successive

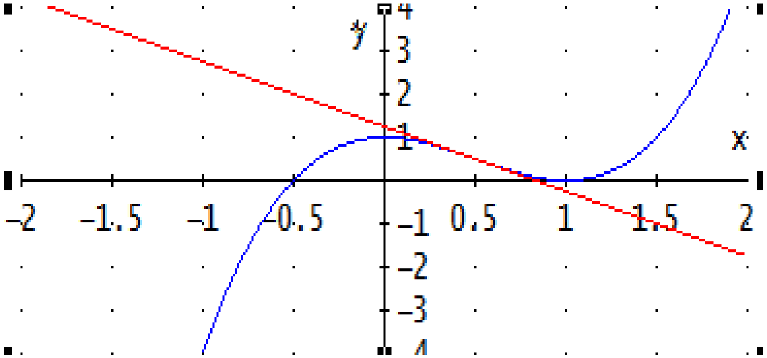
Sia $f: A \to R$, derivabile due volte in $a \in A$.
Condizione sufficiente affinché $P(a, f(a))$ sia un punto di massimo (minimo) è che:

$$f'(a)=0 \quad \wedge \quad f''(a)<0$$

$>$

Flesso

Sia f: $A \rightarrow R$ e $a \in A$, si dice che il punto P(a, f(a)) è un flesso se in quel punto la curva attraversa la retta tangente.



Sia f: $A \rightarrow R$ e $a \in A$, si dice che il punto P(a, f(a)) è un flesso se in quel punto vi è un cambio di concavità.

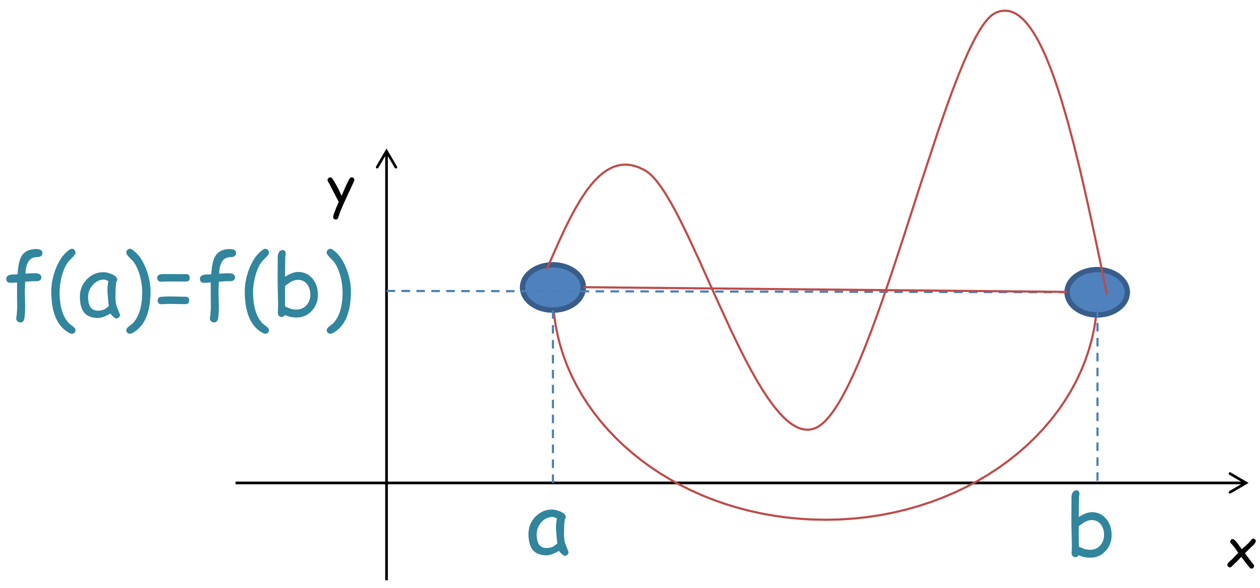
Esercizi

$$y=2x^3-3x^2+1$$

$$y=|\ln(x+1)|$$

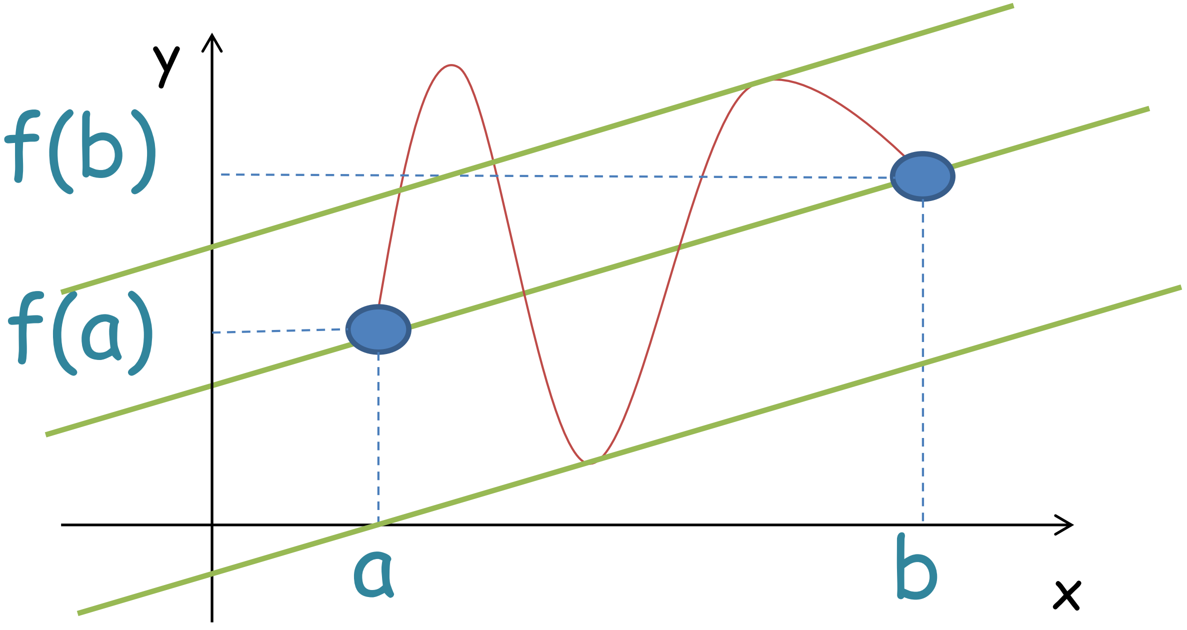
Teorema di Rolle

Sia f: [a,b]→ R, derivabile in (a,b) e f(a)=f(b).
Allora ∃ x ∈ [a,b] | f′(x)=0.



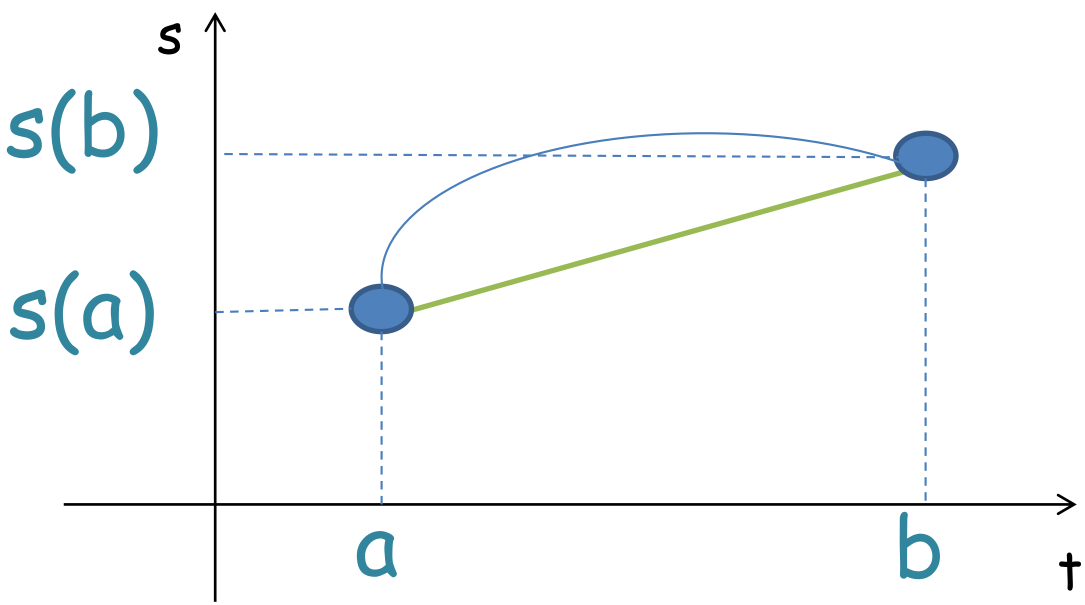
Teorema di Lagrange

Sia f: [a,b]→ R, derivabile in (a,b).
Allora ∃ x ∈ (a,b) | $f'(x) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.



Applicazione del T. di Lagrange

Alcuni autovelox (safety tutor) misurano il tempo che impiega un veicolo per coprire lo spazio tra due punti, e ne calcolano la velocità media in quel tratto.
Applicando il teorema di Lagrange, è possibile calcolare se si è superato il limite di velocità.



$$v_m = \frac{s(b) - s(a)}{b - a}$$

$$v_i(t_0) = \lim_{t \to 0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

Teorema di de L'Hôpital

Siano f e g: $A \rightarrow R$ e $x_0 \in A$ punto di accumulazione per A. Sia $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$.

Siano f e g derivabili in $I(x_0) \setminus \{x_0\}$. Se $g(x) \neq 0$ e

$g'(x) \neq 0$ in $I(x_0) \setminus \{x_0\}$, allora $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Siano f e g derivabili in x_0, con derivata continua in x_0 e $g(x_0) \neq 0$.

Esercizi

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{\sin 2x}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2 - 1}{\ln x}$$

$$\lim_{x\to 0} x \cdot \ln x$$

Differenziale

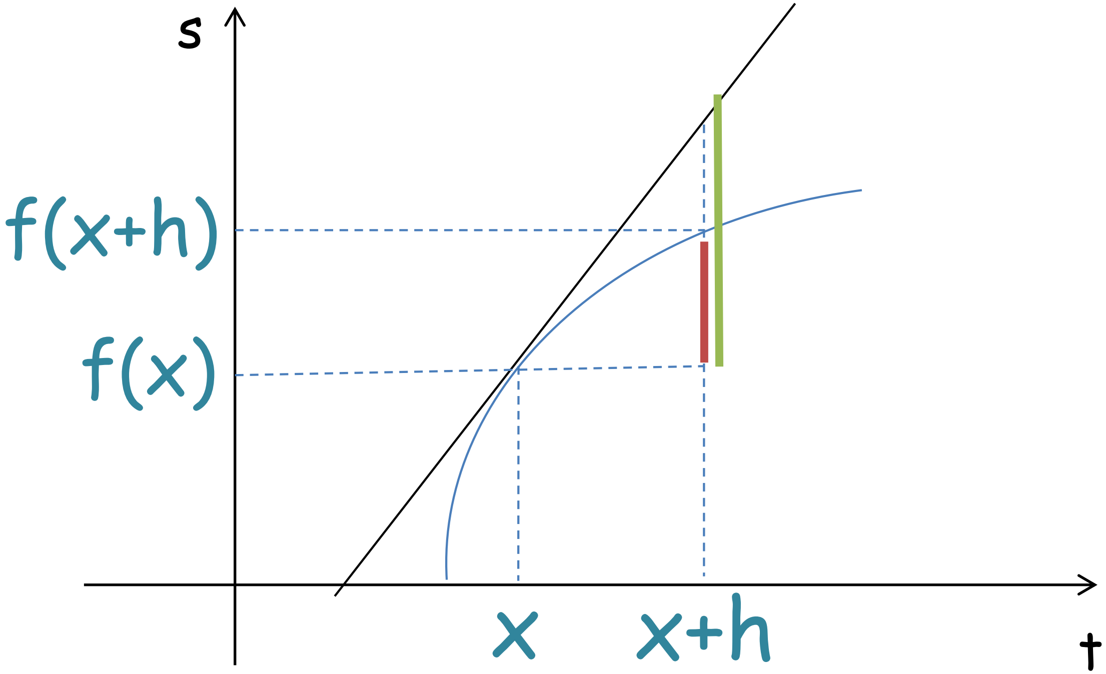
Siano $f : A \to R$ e x punto interno ad A. Si dice che f è differenziabile in x se esiste $c \in R$ | $f(x+h)-f(x)=c\cdot h+o(h)$.

La quantità $c\cdot h$ è detta differenziale di f in x.

La funzione f è differenziabile $\Leftrightarrow$ f è derivabile

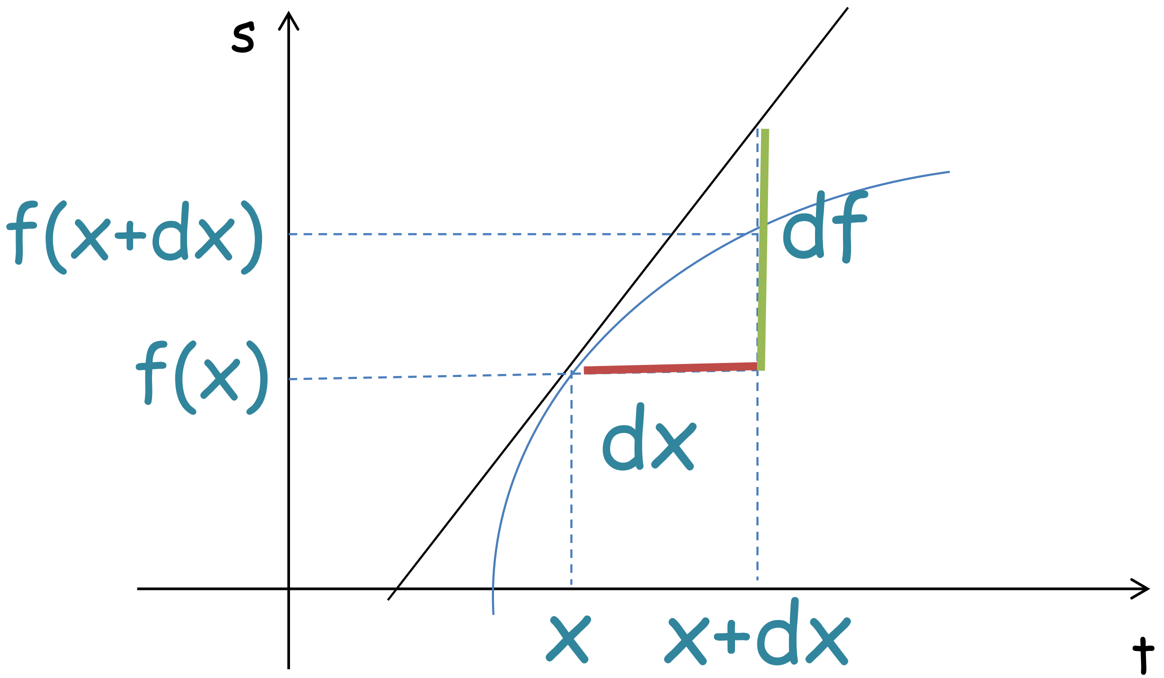
Significato geometrico del differenziale

$$f(x+h)-f(x)=c\cdot h+o(h).$$



Significato geometrico del differenziale

$df = c \cdot dx$



$df = \tan\alpha \cdot dx$

$df = f'(x) \cdot dx$

$$f`(x) = \frac{df}{dx}$$

Operazioni sul differenziale

Siano f e g : A → R, differenziabili in x, punto interno ad A. Allora:

1. f+g è differenziabile e d(f+g)=df+dg
2. f-g è differenziabile e d(f-g)=df-dg
3. f·g è differenziabile e d(f·g)=df·g+ f·dg
4. Se g≠0, f/g è differenziabile e $d\,\frac{f}{g} = \frac{df \cdot g - f \cdot dg}{g^2}$