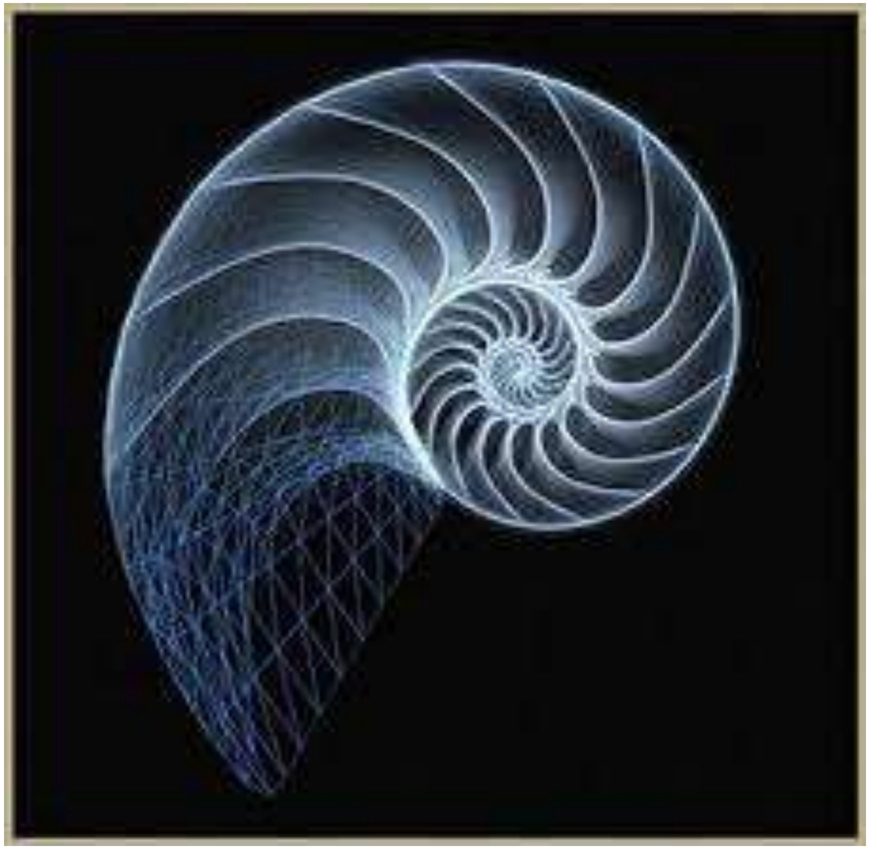
Successioni numeriche



Successione numerica

Si definisce successione numerica ogni funzione f: N→R.

Il dominio di una successione può essere $A \subset$ N, in genere di cardinalità infinita.

Gli elementi di Im(N) sono detti termini della successione

$a_0, \quad a_1, \quad a_2, \quad \dots\ a_n=f(n), \dots$

Limite di una successione

L'unico punto di accumulazione per il dominio è + ∞

Cosa accade al valore di a_n al crescere di n?

- Cresce/decresce in modo indeterminato? → ∞
- Si attesta su un valore finito? → *l*
- Non sono in grado di stabilirlo.

Limite di una successione

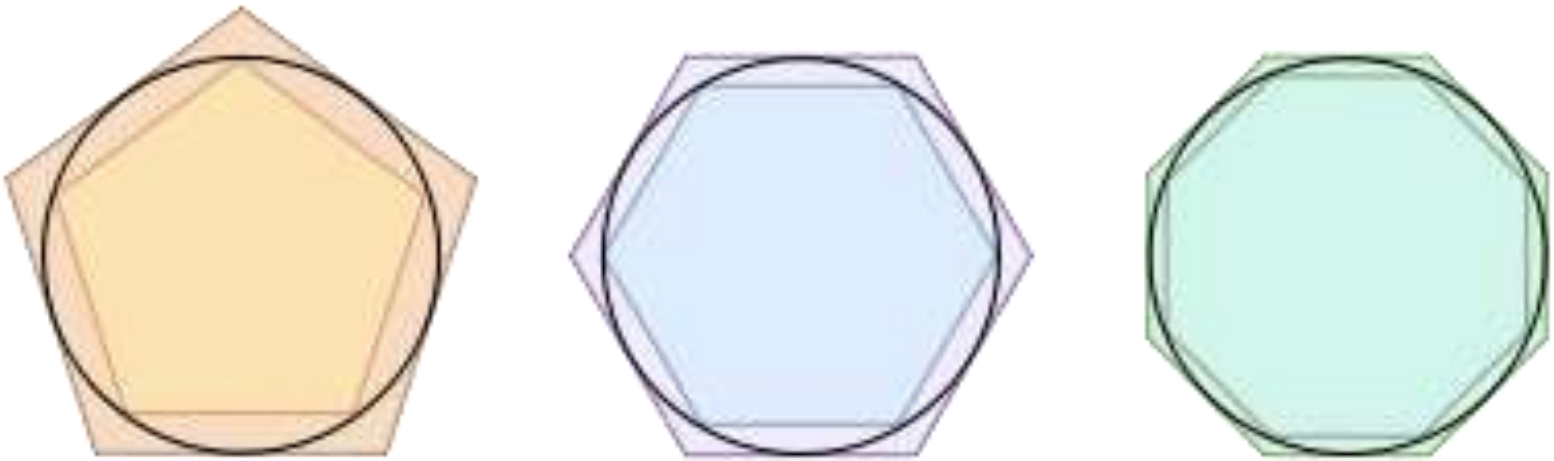
$$\lim_{n \to \infty} a_n = \infty$$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = l$$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \nexists$$

Le definizioni sono analoghe a quelle fornite per i limiti di funzione, per $x \to \infty$.

Limite di una successione
Metodo di Esaustione



$f: N \rightarrow R.$

Ad ogni numero naturale associa l'area del poligono regolare <u>inscritto,</u> con quel numero di lati

A

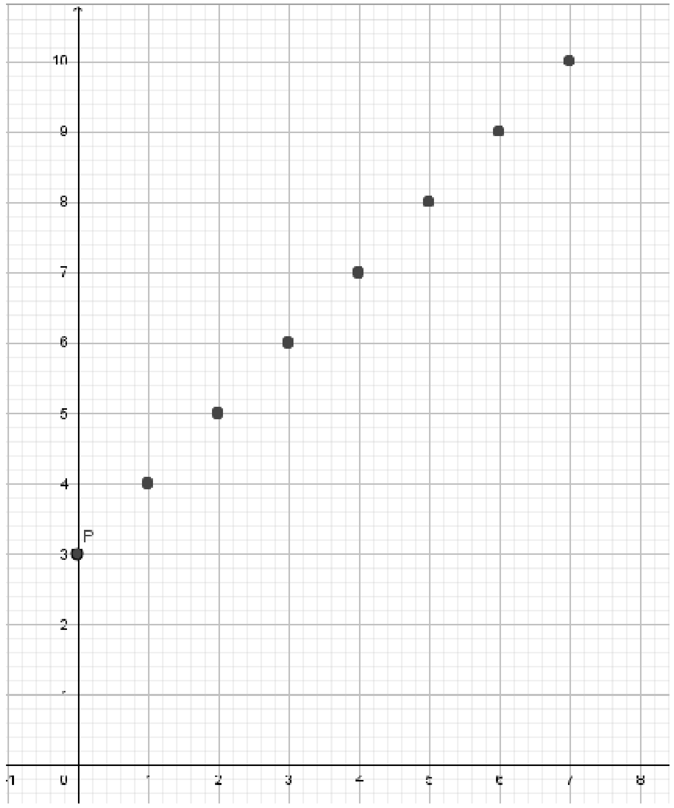
Ad ogni numero naturale associa l'area del poligono regolare <u>circoscritto,</u> con quel numero di lati

Successione numerica

Definizione analitica

Viene fornita una espressione algebrica che definisce il termine generico della successione

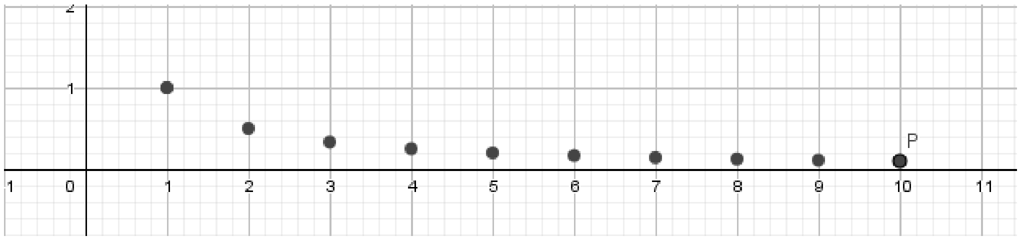
$$a_n = n+3$$



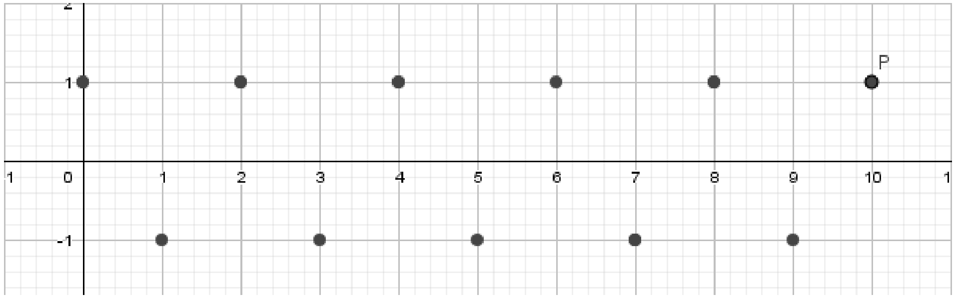
Successione numerica

Definizione analitica

$a_n = 1/n$



$a_n = (-1)^n$



Successione numerica

Definizione ricorsiva

Vengono definiti un certo numero di termini della successione (in genere il primo o i primi due) e la legge che permette di determinare gli altri elementi in termini dei precedenti

Successione di Fibonacci

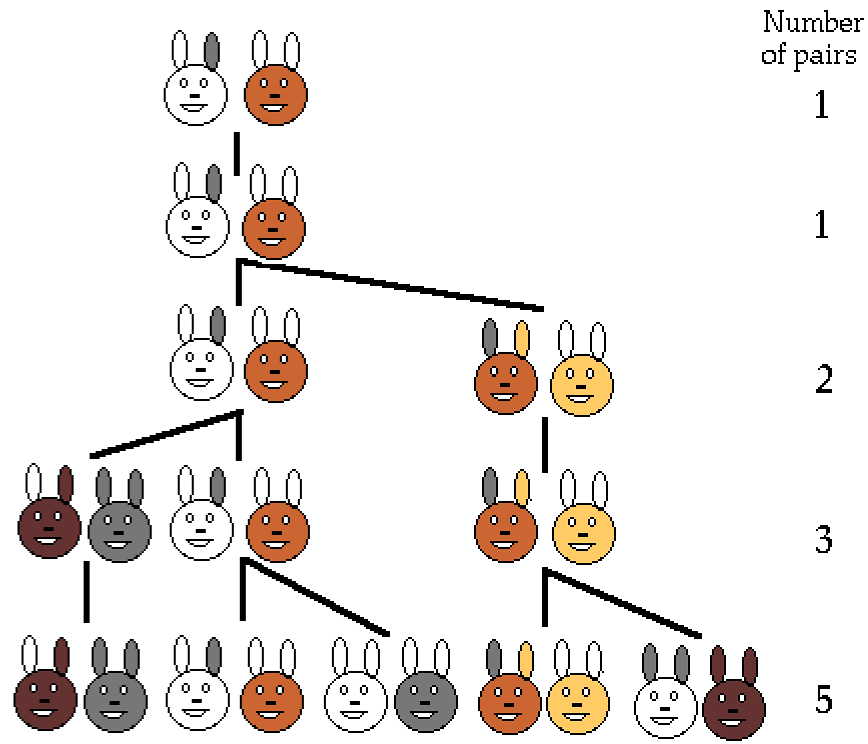
$$a_0 = 0$$
$$a_1 = 1$$
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

Successione numerica

Definizione ricorsiva

Successione di Fibonacci

$$a_0 = 0$$
$$a_1 = 1$$
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

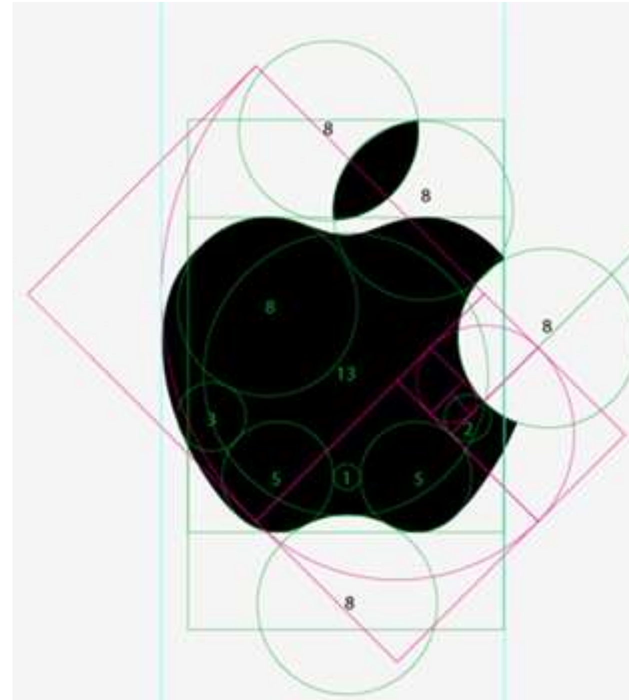


Successione numerica

Definizione ricorsiva

Successione di Fibonacci

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \varphi \ (il\ numero\ aureo)$$


8
8
8
8
13
3
2
5
1
5
8

Successione numerica

Definizione ricorsiva

Successione di Erone

$$a_0 = p$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n + \frac{p}{a_n}}{2}$$

Descrive un processo per il calcolo delle radici quadrate infatti -> $\sqrt{p}$

Succesione numerica

Il numero di Nepero

$$a_n = (1 + 1/n)^n$$

$$\downarrow$$

$$e \sim 2{,}71828\ \ldots$$

Successioni limitate

Una successione $f: A \subseteq N \to R$ si dice limitata superiormente se $\forall n \in A,\ a_n \leq L \in R$

Una successione $f: A \subseteq N \to R$ si dice limitata inferiormente se $\forall n \in A,\ a_n \geq \ell \in R$

Una successione $f: A \subseteq N \to R$ si dice limitata se è limitata inferiormente e superiormente, cioè se esistono $L, \ell \in R$ tali che $\forall n \in A,\ \ell \leq a_n \leq L$

Successioni monotòne

Una successione $f: A \subseteq N \to R$ si dice crescente se $\forall i,j \in A,\ i<j \Rightarrow a_i \leq a_j$

Una successione $f: A \subseteq N \to R$ si dice decrescente se $\forall i,j \in A,\ i<j \Rightarrow a_i \geq a_j$

Una successione $f: A \subseteq N \to R$ si dice monotòna se è crescente o decrescente.
Si dice oscillante se non è monotòna.

Esercizi

Date le seguenti successioni dire se sono limitate, monotòne o oscillanti

$a_n = \frac{2}{2-n}$ Attenzione: $n \neq 2$

$a_n = (-1)^n$

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = 3\, a_n \end{cases}$$

Teoremi importanti

1) *Unicità del limite*
2) *Permanenza del segno*
3) *Operazioni tra limiti*
4) *Confronto tra infiniti e infinitesimi*

Vedi limiti di funzioni

1) Ogni successione monotòna e limitata converge.
2) Ogni successione crescente (decrescente) e illimitata superiormente (inferiormente) diverge positivamente (negativamente)

Esercizi

Calcolare, se esiste, il limite delle seguenti successioni

- $a_n = \frac{2}{2-n}$
- $a_n = (-1)^n$

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = 3\,a_n \end{cases}$$

Esercizi

Calcolare, se esiste, il limite delle seguenti successioni

- $a_n = -n + \log n$
- $a_n = (2)^n - n$

$$\begin{cases} a_n = 0 \text{ se n pari} \\ a_n = \frac{1}{n} \text{ se n dispari} \end{cases}$$

- $a_n = \frac{n-1}{n}$
- $a_n = (2)^{-n}$
- $a_n = \frac{n^2}{n!}$