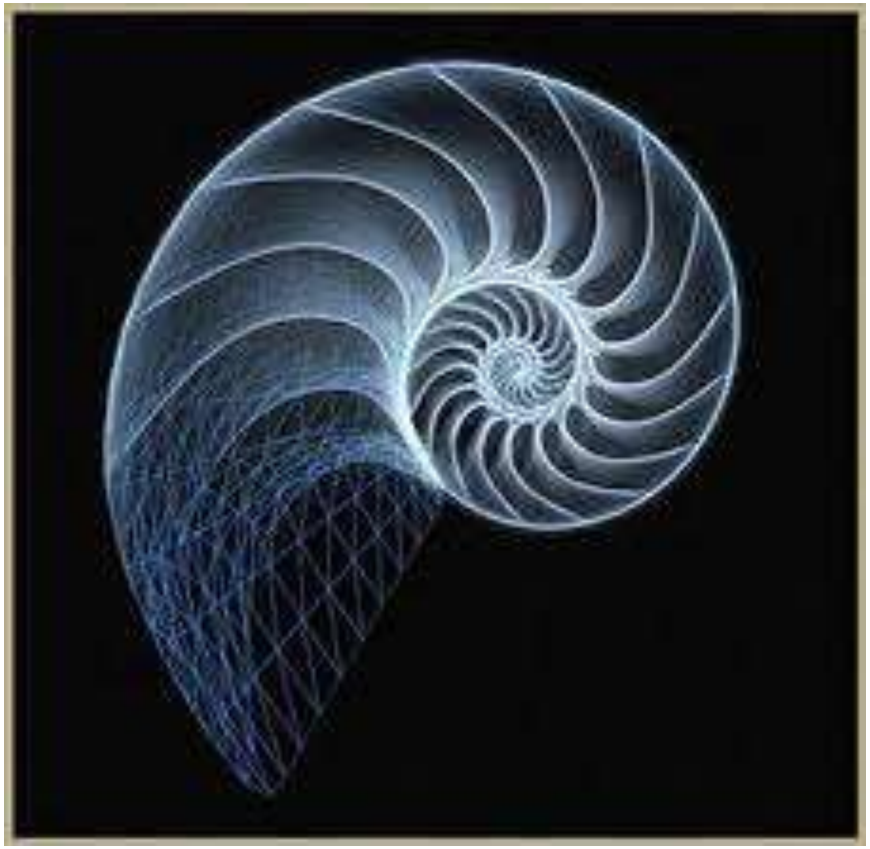
Successioni e Serie numeriche



Successione numerica

Si definisce successione numerica ogni funzione f: N→R.

Il dominio di una successione può essere $A \subset$ N, in genere di cardinalità infinita.

Gli elementi di Im(N) sono detti termini della successione

$a_0, \quad a_1, \quad a_2, \quad \ldots\ a_n=f(n),\ \ldots$

Limite di una successione

L'unico punto di accumulazione per il dominio è $+\infty$

Cosa accade al valore di a_n al crescere di n?

- Cresce/decresce in modo indeterminato? $\rightarrow \infty$
- Si attesta su un valore finito? $\rightarrow l$
- Non sono in grado di stabilirlo.

Limite di una successione

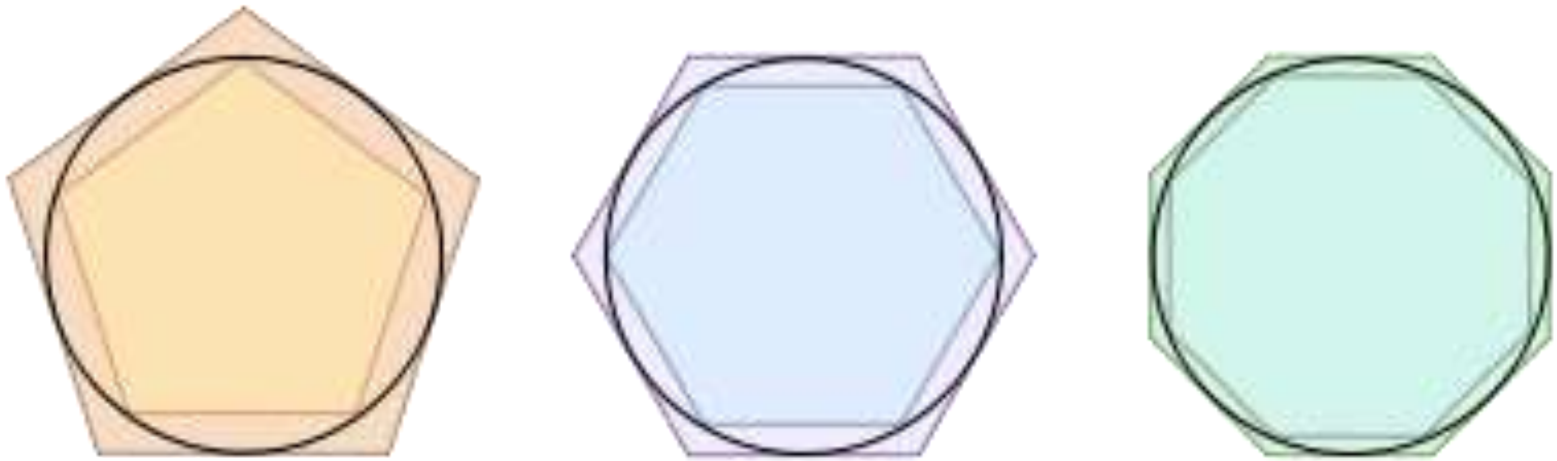
$$\lim_{n \to \infty} a_n = \infty$$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = l$$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \nexists$$

Le definizioni sono analoghe a quelle fornite per i limiti di funzione, per $x \to \infty$.

Limite di una successione
Metodo di Esaustione



f: N→R.

Ad ogni numero naturale associa l'area del poligono regolare <u>inscritto,</u> con quel numero di lati

A

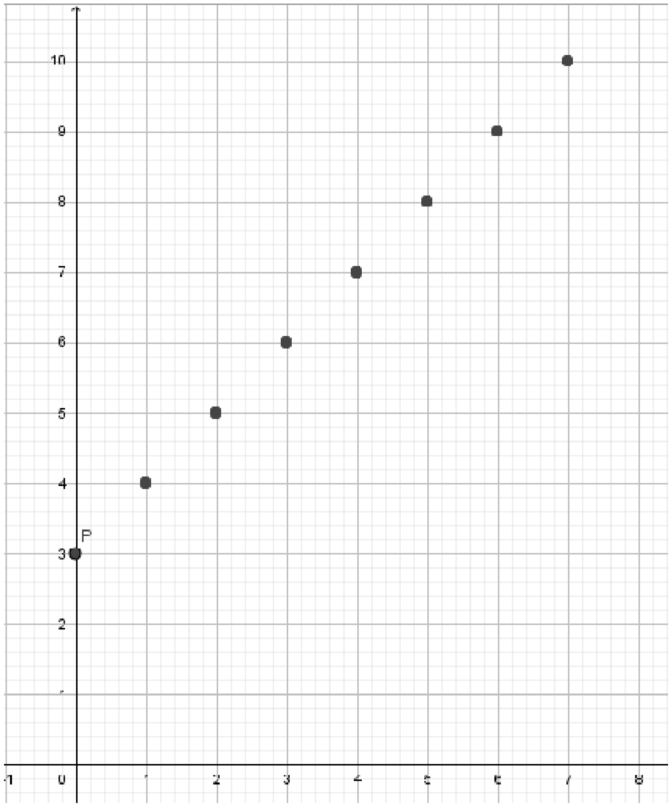
Ad ogni numero naturale associa l'area del poligono regolare <u>circoscritto,</u> con quel numero di lati

Successione numerica

Definizione analitica

Viene fornita una espressione algebrica che definisce il termine generico della successione

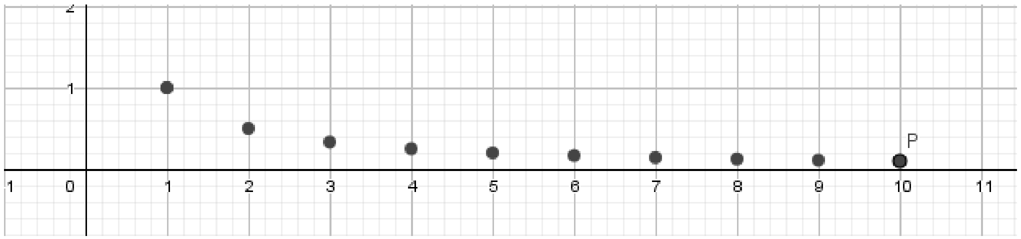
$$a_n = n+3$$



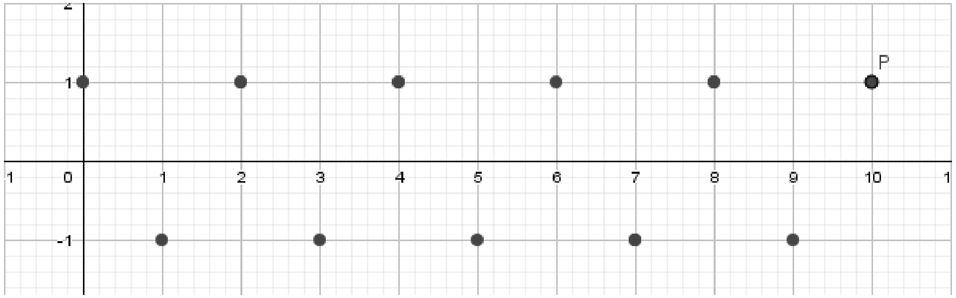
Successione numerica

Definizione analitica

$a_n = 1/n$



$a_n = (-1)^n$



Successione numerica

Definizione ricorsiva

Vengono definiti un certo numero di termini della successione (in genere il primo o i primi due) e la legge che permette di determinare gli altri elementi in termini dei precedenti

Successione di Fibonacci

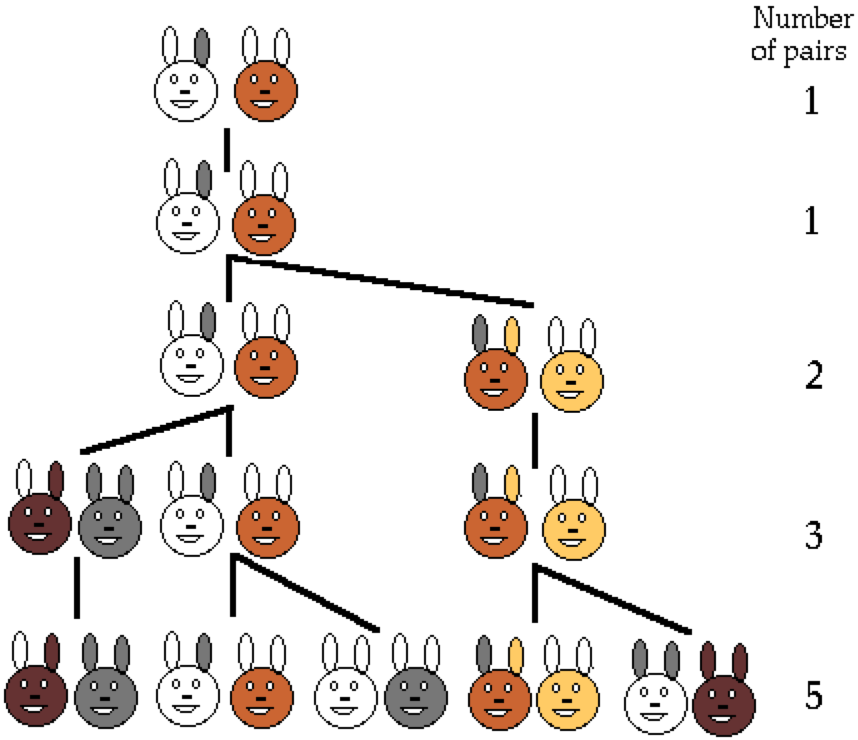
$$a_0 = 0$$
$$a_1 = 1$$
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

Successione numerica

Definizione ricorsiva

Successione di Fibonacci

$$a_0 = 0$$
$$a_1 = 1$$
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

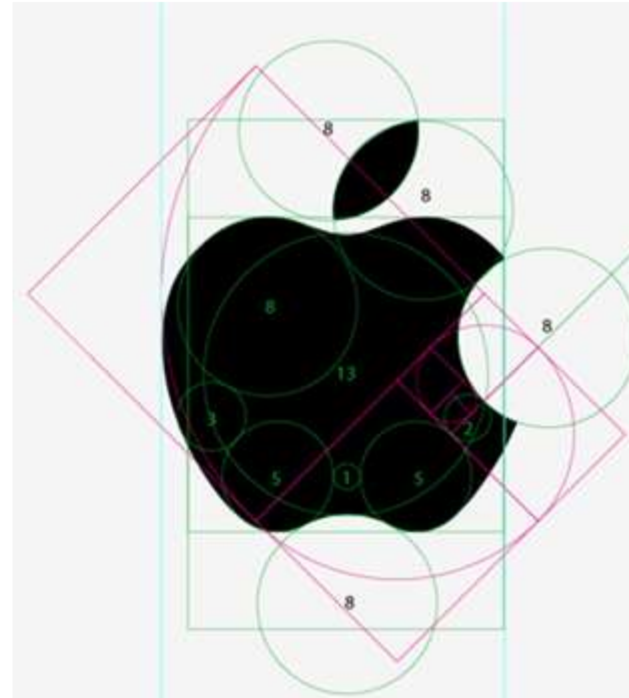


Successione numerica

Definizione ricorsiva

Successione di Fibonacci

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \varphi \ (il\ numero\ aureo)$$


8
8
8
8
13
3
2
5
1
5
8

Successione numerica

Definizione ricorsiva

Successione di Erone

$$a_0 = p$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n + \frac{p}{a_n}}{2}$$

Descrive un processo per il calcolo delle radici quadrate infatti -> $\sqrt{p}$

Successione numerica

Il numero di Nepero

$$a_n = (1 + 1/n)^n$$

$$\downarrow$$

$$e \sim 2{,}71828 \ldots$$

Successioni limitate

Una successione $f: A \subseteq N \to R$ si dice limitata superiormente se $\forall n \in A,\ a_n \leq L \in R$

Una successione $f: A \subseteq N \to R$ si dice limitata inferiormente se $\forall n \in A,\ a_n \geq \ell \in R$

Una successione $f: A \subseteq N \to R$ si dice limitata se è limitata inferiormente e superiormente, cioè se esistono $L, \ell \in R$ tali che $\forall n \in A,\ \ell \leq a_n \leq L$

Successioni monotòne

Una successione $f: A \subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ si dice crescente se $\forall i, j \in A,\ i<j \Rightarrow a_i \leq a_j$

Una successione $f: A \subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ si dice decrescente se $\forall i, j \in A,\ i<j \Rightarrow a_i \geq a_j$

Una successione $f: A \subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ si dice monotòna se è crescente o decrescente.
Si dice oscillante se non è monotòna.

Esercizi

Date le seguenti successioni dire se sono limitate, monotòne o oscillanti

$$a_n = \frac{2}{2-n}$$ **Attenzione: n≠2**

$$a_n = (-1)^n$$

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = 3\, a_n \end{cases}$$

Teoremi importanti

1) *Unicità del limite*
2) *Permanenza del segno*
3) *Operazioni tra limiti*
4) *Confronto tra infiniti e infinitesimi*

Vedi limiti di funzioni

1) Ogni successione monotòna e limitata converge.
2) Ogni successione crescente (decrescente) e illimitata superiormente (inferiormente) diverge positivamente (negativamente)

Esercizi

Calcolare, se esiste, il limite delle seguenti successioni

- $a_n = \frac{2}{2-n}$
- $a_n = (-1)^n$

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = 3\,a_n \end{cases}$$

Esercizi

Calcolare, se esiste, il limite delle seguenti successioni

- $a_n = -n + \log n$
- $a_n = (2)^n - n$

$$\begin{cases} a_n = 0 \text{ se } n \text{ pari} \\ a_n = \frac{1}{n} \text{ se } n \text{ dispari} \end{cases}$$

- $a_n = \frac{n-1}{n}$
- $a_n = (2)^{-n}$
- $a_n = \frac{n^2}{n!}$

Serie numeriche

Data una successione numerica $a_0, a_1, \dots a_n, \dots$ si chiama **serie numerica** la somma dei termini della successione

$$a_0 + a_1 + \dots + a_n + \dots = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i$$

Termini della serie

Termine generale della serie

Serie numeriche

La serie può partire da 0 o da qualsiasi altro numero naturale.

L'obiettivo è comprendere quale è il risultato di questa somma di infiniti termini (**carattere della serie**)

$$\sum_{i=0}^{+\infty} a_i = s$$

convergente

$$\sum_{i=0}^{+\infty} a_i = \infty$$

divergente

$$\sum_{i=0}^{+\infty} a_i = \nexists$$

indeterminata o oscillante

Serie numeriche

Si chiamano <u>somme parziali</u> quelle ottenute sommando solo i primi n termini della successione

$$a_0 = \sum_{i=0}^{0} a_i \qquad a_0 + a_1 = \sum_{i=0}^{1} a_i \qquad \ldots$$

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_n = \underbrace{\sum_{i=0}^{n} a_i}_{s_n}$$

$$\boxed{\sum_{i=0}^{+\infty} a_i = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=0}^{n} a_i}$$

Serie numeriche

Si chiamano serie telescopiche quelle del tipo

$$\sum_{i=1}^{+\infty}(a_{i+1}-a_i)$$

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

Serie di Mengoli

$$\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1\,{\scriptstyle +n-n}}{n(n+1)}=\sum_{i=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\lim_{n\to+\infty}s_n=1$$

Serie numeriche

Si chiamano <u>serie telescopiche</u> quelle del tipo

$$\sum_{i=0}^{+\infty}(a_{i+1}-a_i) = \lim_{n\to +\infty} s_n$$

$$a_1 - a_0 + a_2 - a_1 + a_3 - a_2 + \ldots + a_{n+1} - a_n$$

Serie numeriche

Si chiamano <u>serie geometriche</u> quelle del tipo

$$\sum_{i=0}^{+\infty} q^i$$

Ragione della serie

q = 1 $$\sum_{i=0}^{+\infty} q^i = 1 + 1 + \cdots + 1 = +\infty$$

q = −1 $$\sum_{i=0}^{+\infty} q^i = 1 - 1 + 1 - 1 \ldots + 1 = oscillante$$

Serie numeriche

Si chiamano <u>serie geometriche</u> quelle del tipo

$$\sum_{i=0}^{+\infty} q^i$$

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$|q| < 1$

$$\sum_{i=0}^{+\infty} q^i = \lim_{n \to +\infty} s_n = \frac{1}{1-q}$$

$|q| > 1$

$$\sum_{i=0}^{+\infty} q^i = \infty$$

Il segno dipende dal segno di q

Serie numeriche

Si chiama <u>serie armonica</u>

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

La serie armonica è divergente

Serie numeriche

Criteri di convergenza

Condizione necessaria per la convergenza di

una serie $\sum_{i=0}^{+\infty} a_i$, è che $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$

… ma non è condizione sufficiente

Serie numeriche

Criteri di convergenza

Criterio di Cauchy

Condizione necessaria e sufficiente per la convergenza di una serie $\sum_{i=0}^{+\infty} a_i$, è che

$\forall \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0 \mid \left| \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i \right| < \varepsilon, \forall n > \delta$ e $\forall p \in \mathbb{N}$.

Serie numeriche

Criteri di convergenza

Criterio del confronto

Siano a_n e b_n due successioni tali che $0 < a_n < b_n$ allora

$$\sum_{i=0}^{+\infty} b_i = B \Rightarrow \sum_{i=0}^{+\infty} a_i = A$$

$$\sum_{i=0}^{+\infty} a_i = +\infty \Rightarrow \sum_{i=0}^{+\infty} b_i = +\infty$$

Serie numeriche

Criteri di convergenza

Criterio del confronto

Siano a_n , b_n , c_n successioni tali che $a_n < b_n < c_n$

se $\sum_{i=0}^{+\infty} a_i = S$ e $\sum_{i=0}^{+\infty} c_i = S$ allora $\sum_{i=0}^{+\infty} b_i = S$

Serie numeriche

Proprietà

1. $$\sum_{i=0}^{+\infty} a_i = s \Rightarrow \sum_{i=0}^{+\infty} c \cdot a_i = c \cdot s$$

2. $$\sum_{i=0}^{+\infty} a_i = a \wedge \sum_{i=0}^{+\infty} b_i = b \Rightarrow \sum_{i=0}^{+\infty} (a_i + b_i) = a + b$$

Serie numeriche

Proprietà

3. $$\sum_{i=0}^{+\infty} a_i = s \wedge \sum_{i=0}^{k} a_i = a \Rightarrow \sum_{i=k+1}^{+\infty} a_i = s - a$$

4. La proprietà commutativa è valida per serie a termini non negativi. In generale non vale perché non si conosce il segno dei termini.

Esercizi

Determinare il carattere delle seguenti serie numeriche e, se possibile, calcolarne la somma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sin\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sin\frac{\pi}{2}\right)^n$$

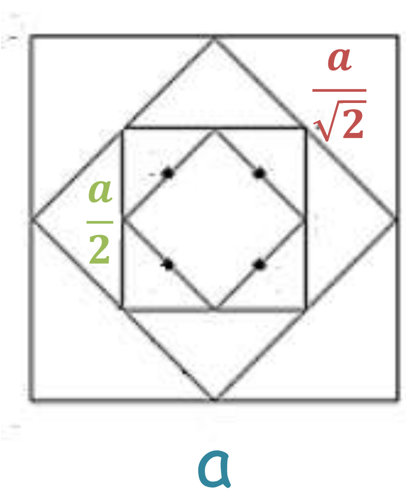
Esercizi

Determinare il carattere delle seguenti serie numeriche e, se possibile, calcolarne la somma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2\left(\frac{1}{3}\right)^n \qquad\qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n}$$

Esercizi

Dato un quadrato di lato a si costruisca un secondo quadrato congiungendone i punti medi e così via. Quanto vale la somma delle aree degli infiniti quadrati che si ottengono?



a^2

$\frac{a^2}{2}$

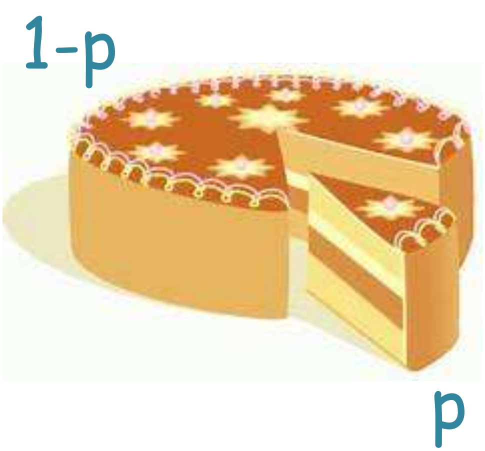
$\frac{a^2}{4}$

...

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^2 \left(\frac{1}{2}\right)^n \longrightarrow 2a^2$$

Esercizi

Da una torta viene prima tagliata una porzione $p<1$ del totale, poi una porzione p della parte rimasta, e così via, asportando ogni volta una porzione p del rimanente. Supponendo di iterare il processo all'infinito, quanta torta resterà alla fine?



$$1-p \longrightarrow \boxed{1-p} - (1-p)p = (1-p)^2$$

$$1-p-(1-p)p-\boxed{(1-p-(1-p)p)}p$$

$$=1-p[1+(1-p)+(1-p)^2]$$

$$1-p\sum_{n=0}^{+\infty}(1-p)^n \longrightarrow 0$$

Achille e la Tartaruga

d

$$s_A = v_A\, t \qquad\qquad s_T = d + v_T\, t$$

$$s_A(t_1) = d$$

$$v_A\, t_N = \ s_A(t_N) = s_T(t_{N-1}) = d + v_T\, t_{N-1}$$

$$t_N - t_{N-1} = \left(\frac{v_T}{v_A}\right)^n t_1$$

$$t_1 + \sum_{k=1}^{+\infty}(t_{k+1}-t_k) = t_1 + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{v_T}{v_A}\right)^k t_1 = t_1\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{v_T}{v_A}\right)^k = \frac{d}{v_A - v_T}$$

Serie di funzioni - Cenni

Serie di Taylor

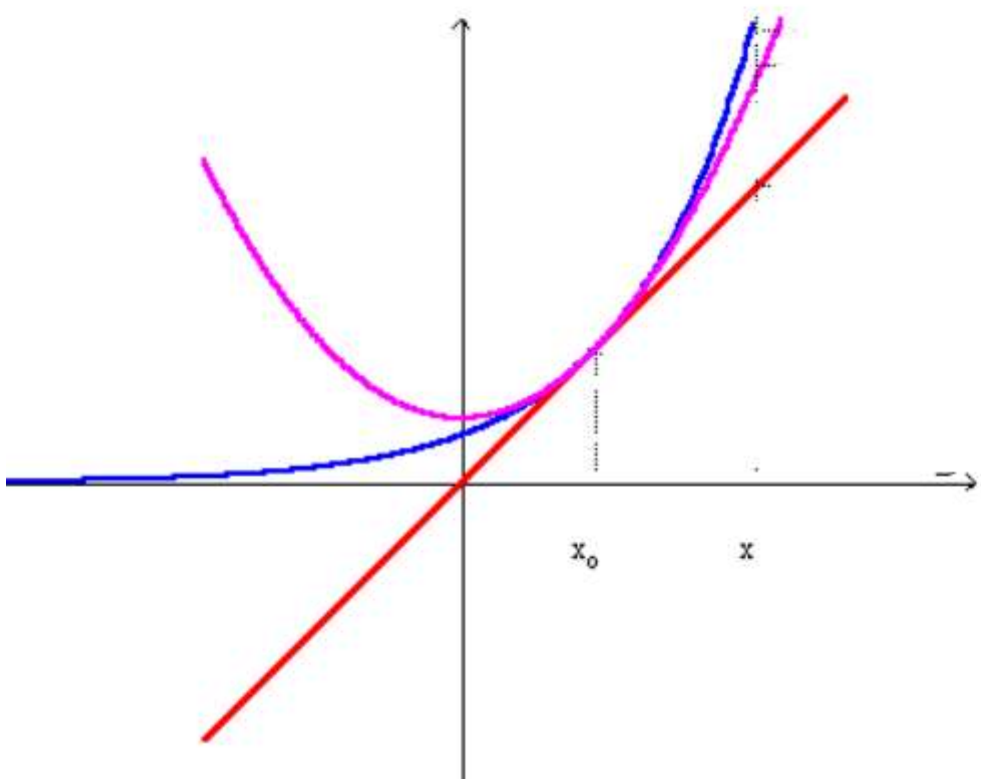
Sia f: $A \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ e $a \in A$. Sia f definita e derivabile infinite volte in a, allora

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \qquad \forall x \in I(a)$$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)(x-a)^2 + \ \ldots$$

Serie di funzioni - Cenni

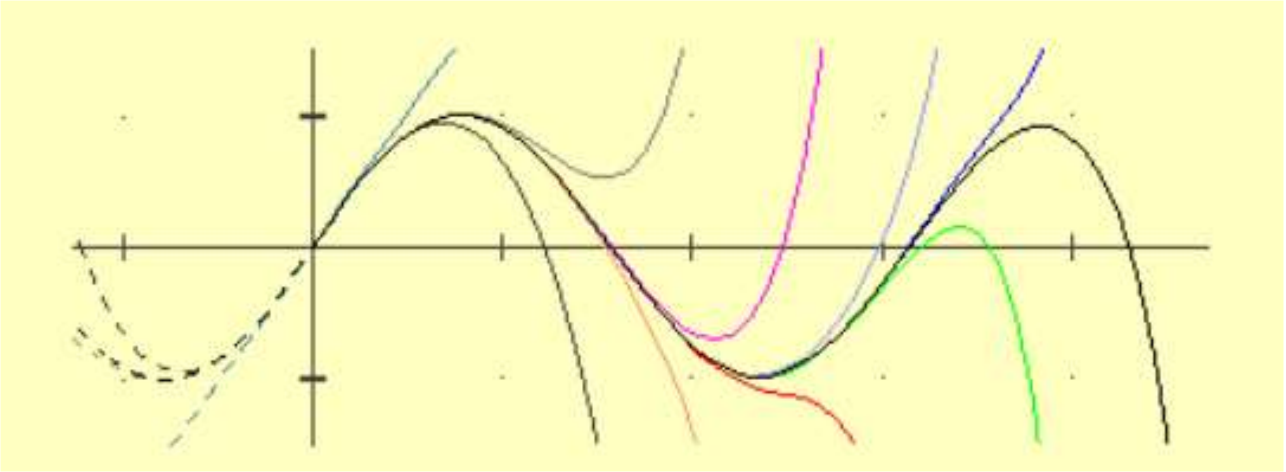
Serie di Taylor



Serie di funzioni - Cenni

Serie di Taylor

$$sin(x) = \mathrm{x} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \qquad \forall \mathrm{x} \in \mathrm{I}(0)$$



Serie di funzioni - Cenni

Serie di Fourier

Sia f: $A \subset R \rightarrow R$ periodica e $a \in A$.

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx$$

Serie di funzioni - Cenni

Serie di Fourier