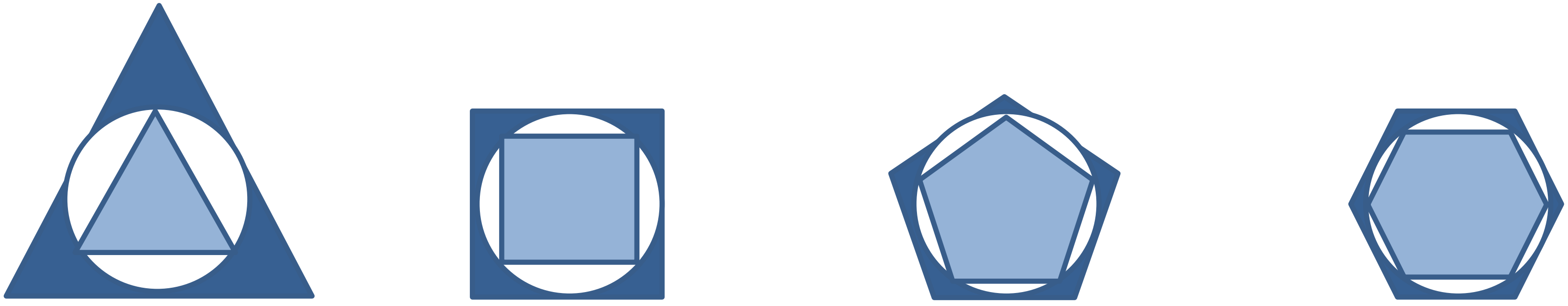
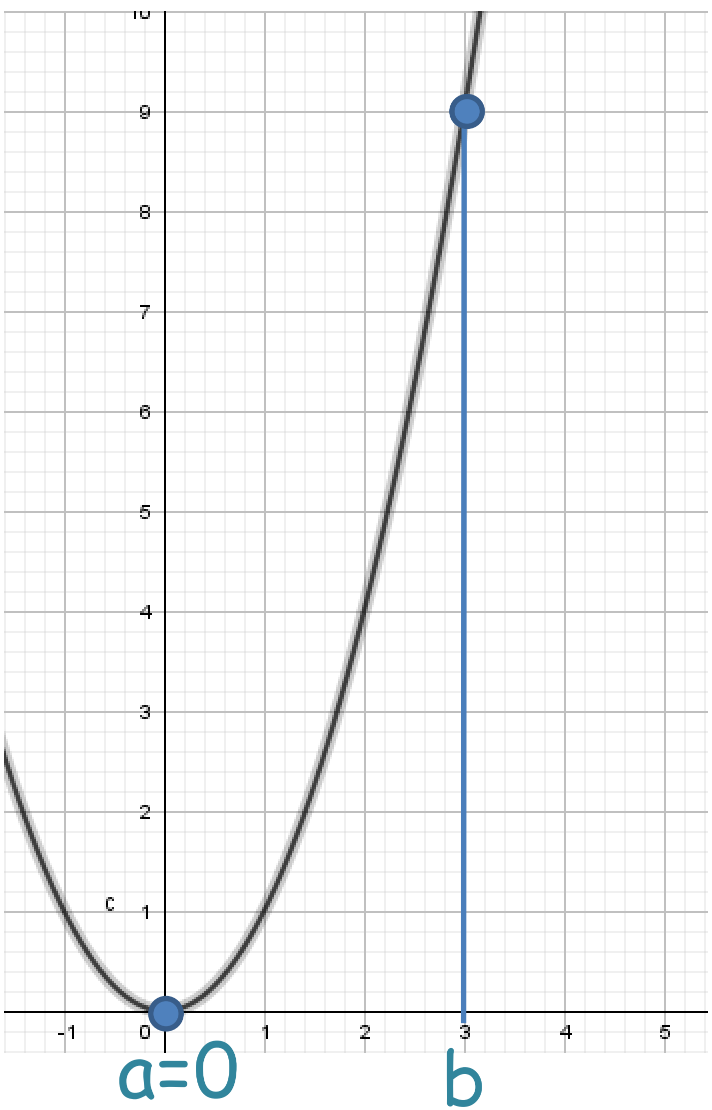
Calcolo integrale

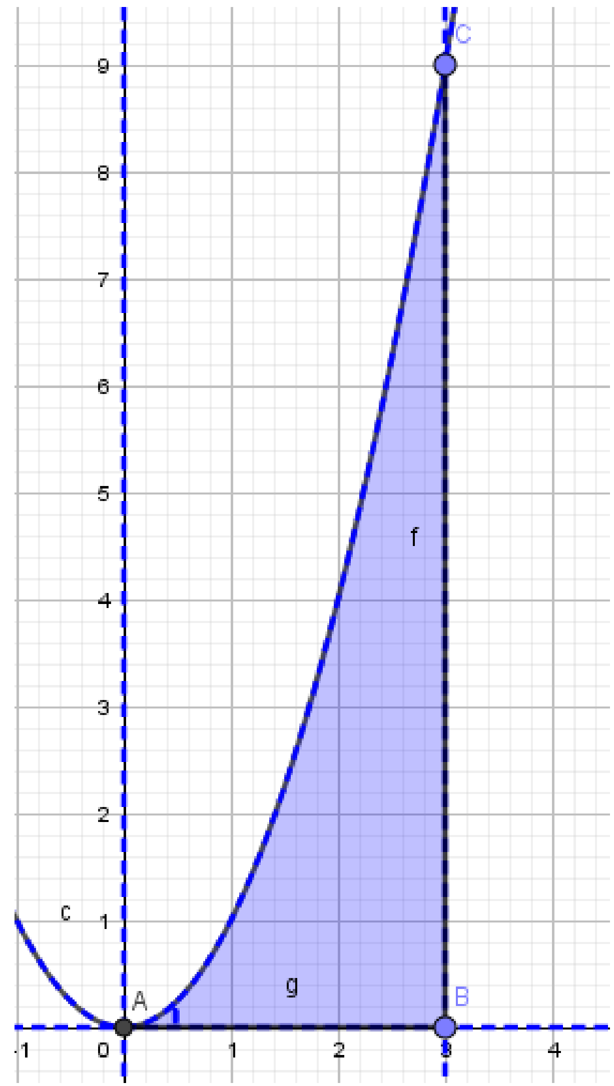
Il metodo di esaustione



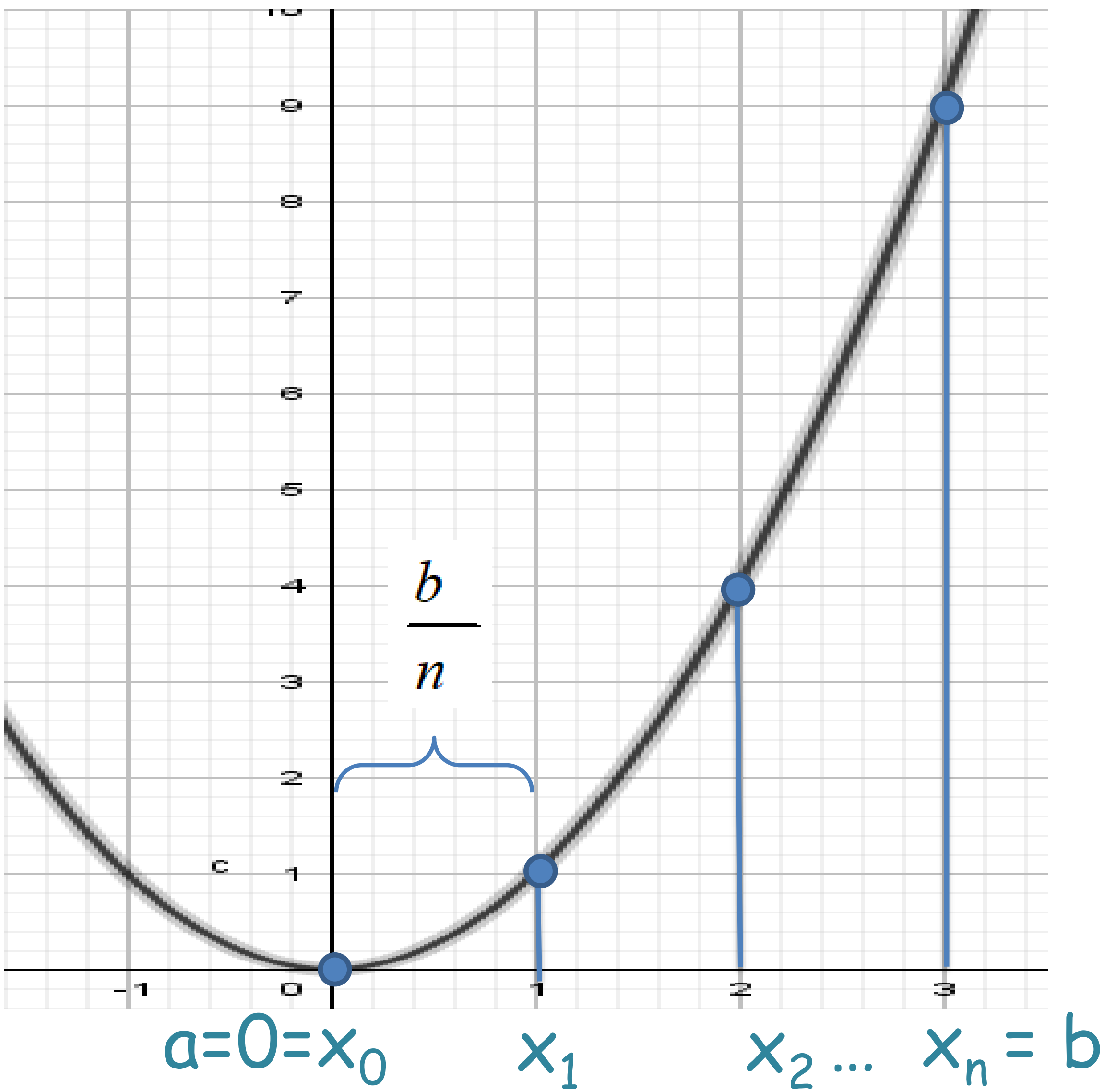
Il metodo di esaustione



$y=x^2$



Il metodo di esaustione

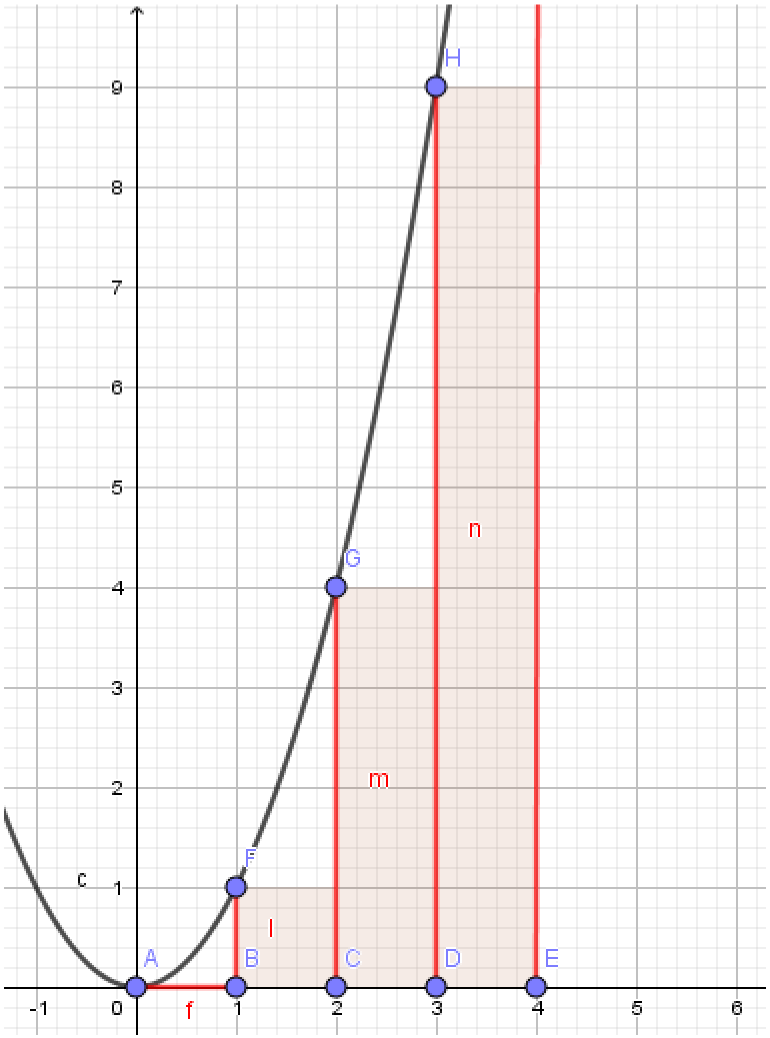


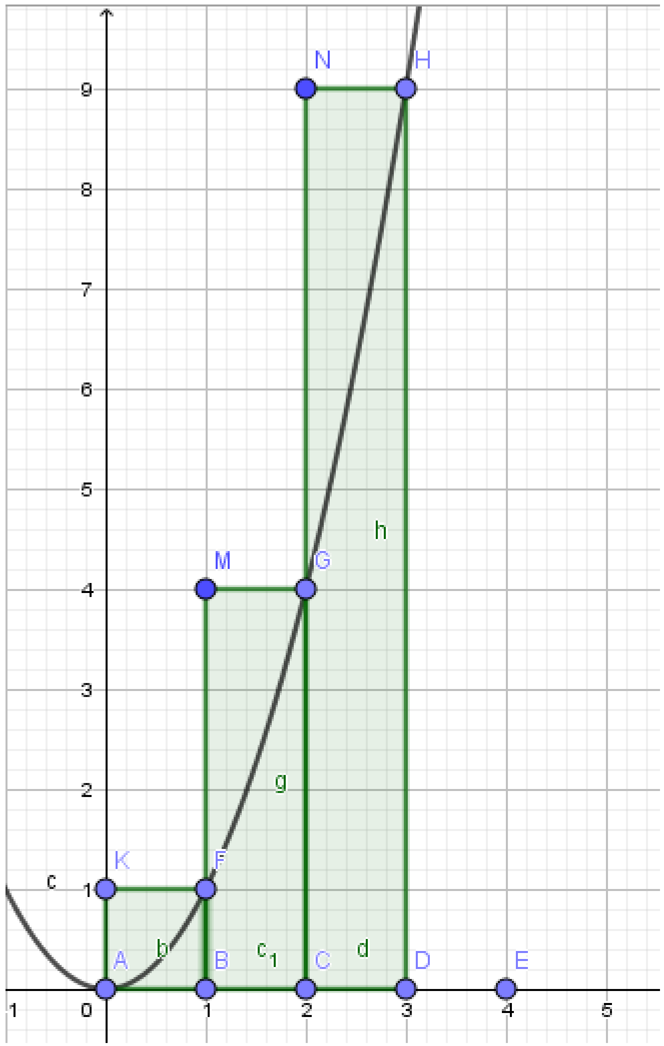
$y = x^2$

$$x_k = k\,\frac{b}{n}$$

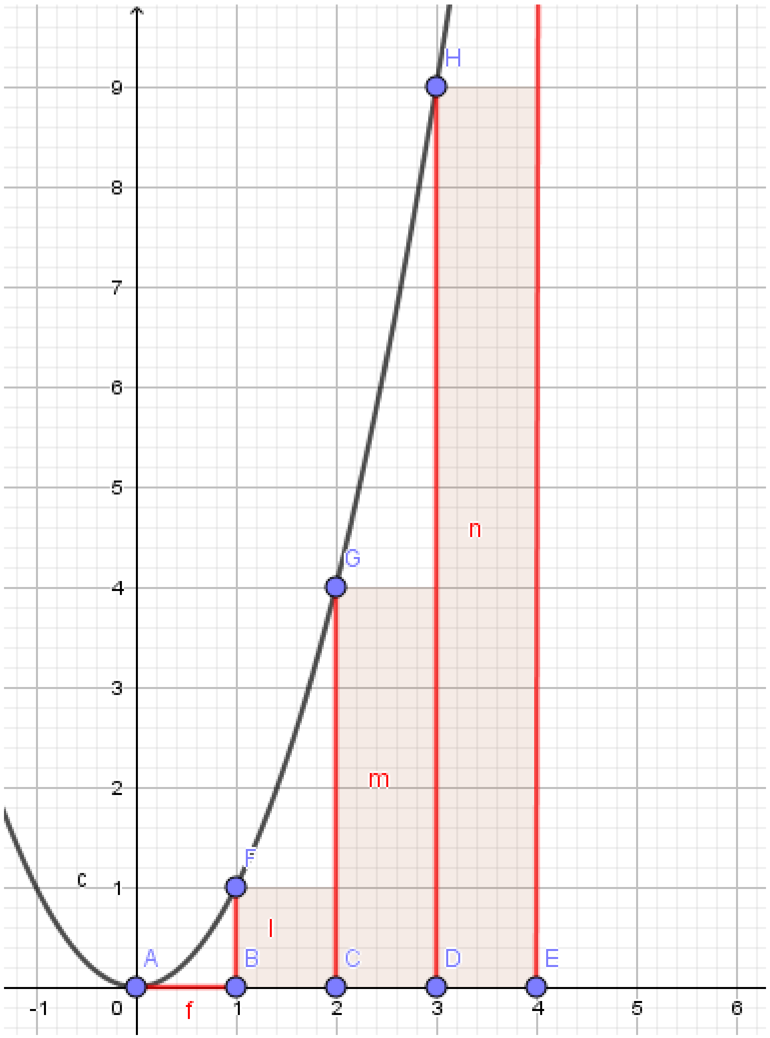
$$f(x_k) = \left(\frac{kb}{n}\right)^2$$

Il metodo di esaustione





Il metodo di esaustione

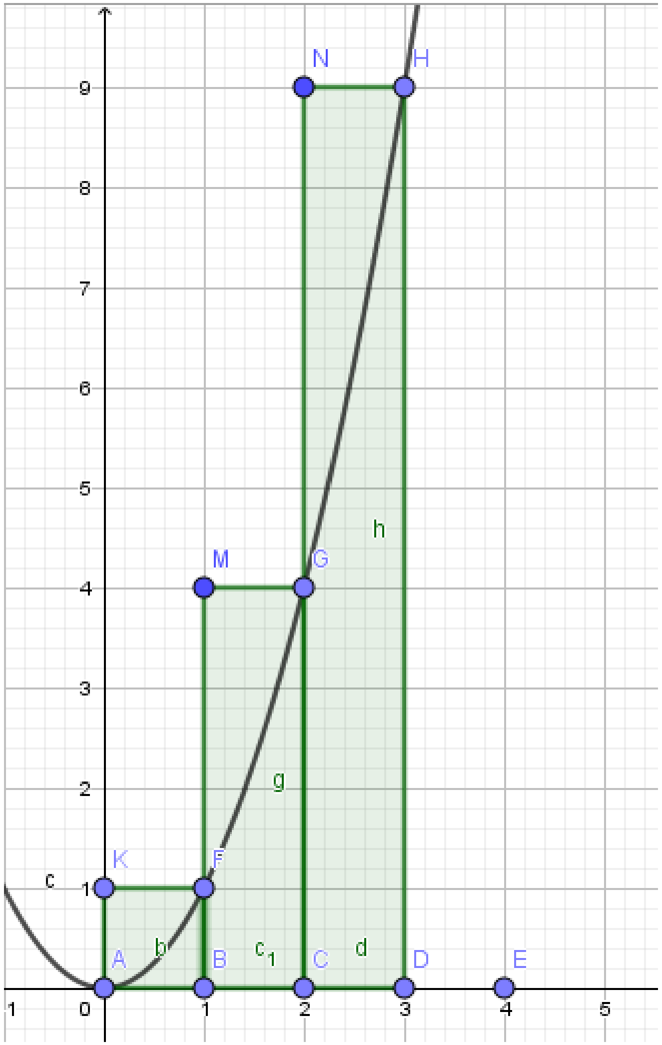


$$x_k = k\frac{b}{n}$$

$$f(x_k) = \left(\frac{kb}{n}\right)^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{b}{n}\left(\frac{b(k-1)}{n}\right)^2$$

Il metodo di esaustione

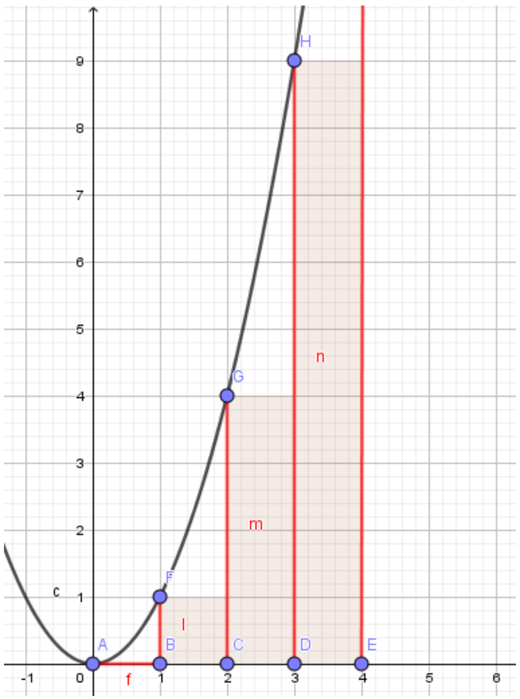


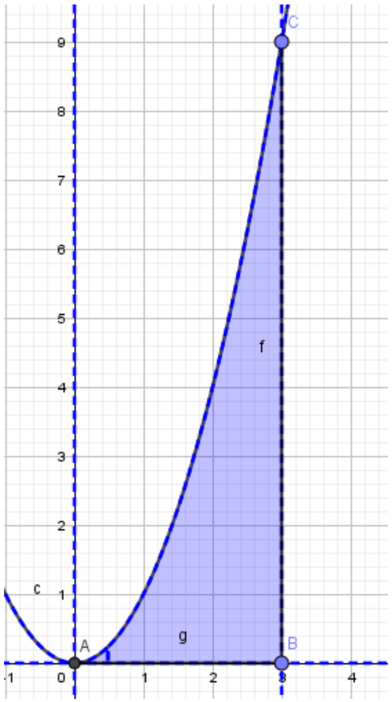
$$x_k = k\frac{b}{n}$$

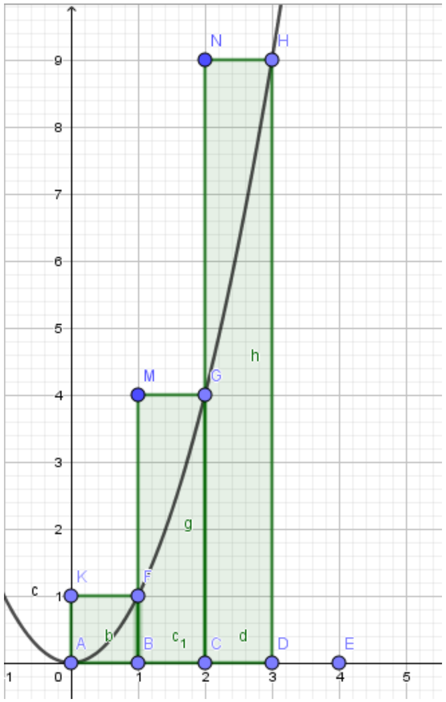
$$f(x_k) = \left(\frac{kb}{n}\right)^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{b}{n}\left(\frac{bk}{n}\right)^2$$

Il metodo di esaustione







$$\sum_{k=1}^{n} \frac{b}{n}\left(\frac{b(k-1)}{n}\right)^2 \leq A \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{b}{n}\left(\frac{bk}{n}\right)^2$$

Il metodo di esaustione

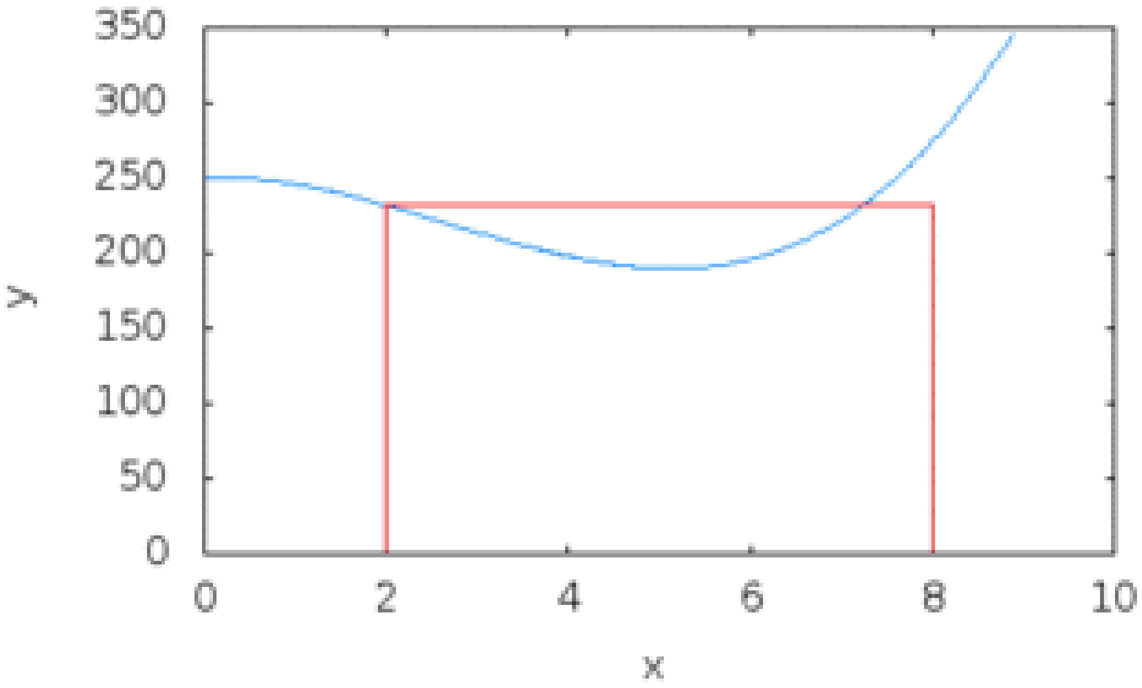
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{b}{n}\left(\frac{b(k-1)}{n}\right)^2 \leq A \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{b}{n}\left(\frac{bk}{n}\right)^2$$

$$\sum_{x=1}^{n} (x)^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b^3}{n^3} \frac{(n-1)n[2(n-1)]}{6} \leq A \leq \lim_{n\to\infty} \frac{b^3}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

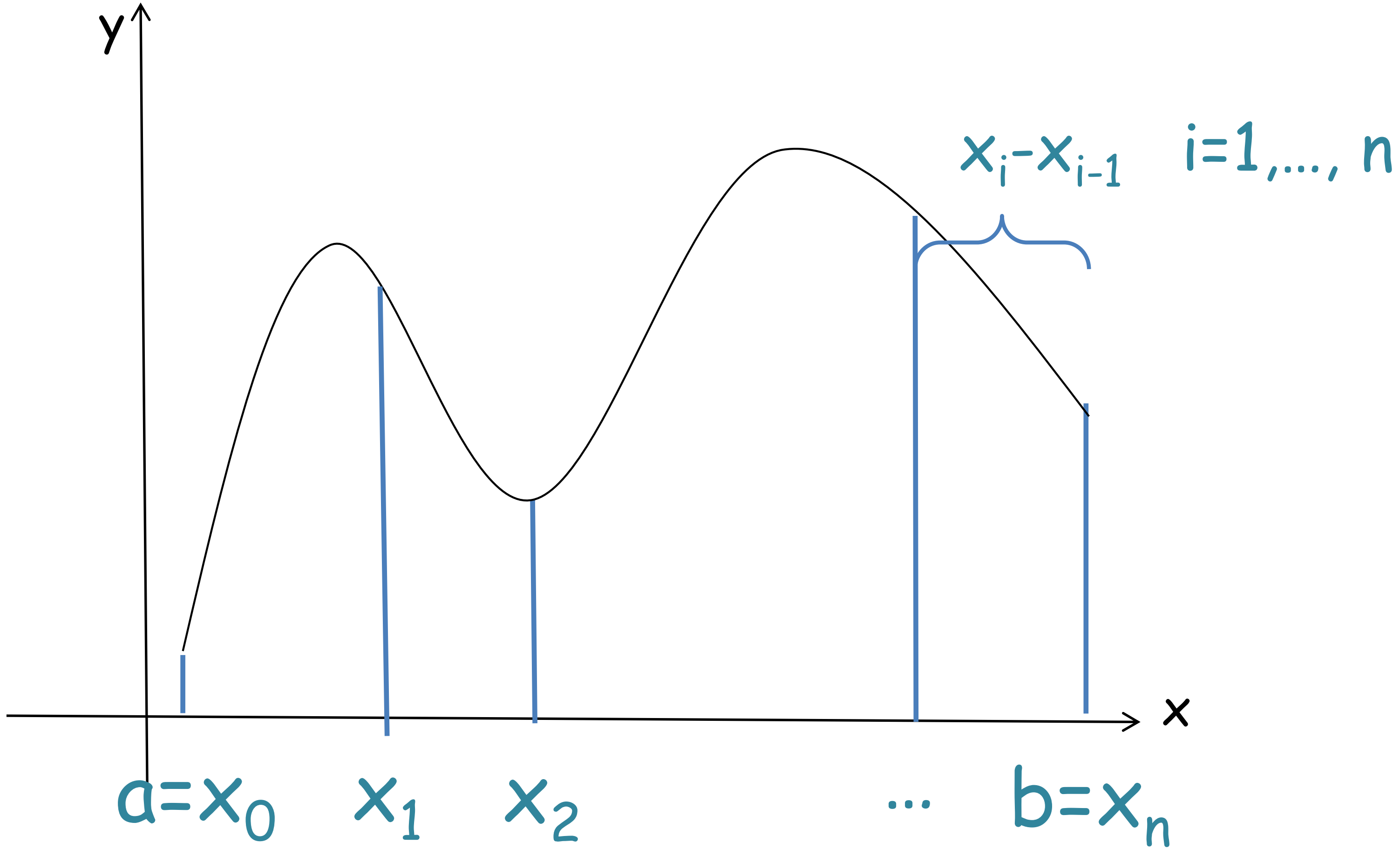
$$\frac{b^3}{3} \qquad\qquad \frac{b^3}{3} = A$$

Il metodo di esaustione



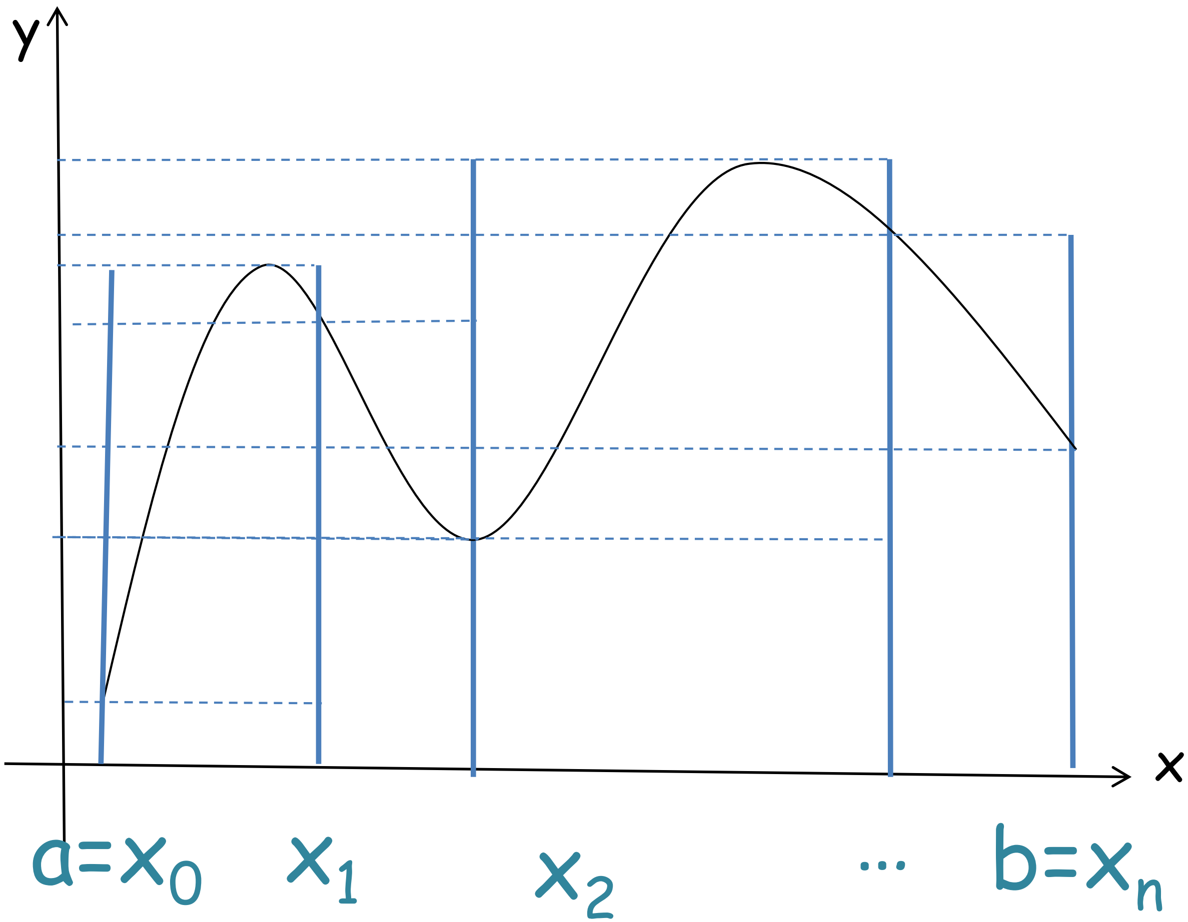
Integrale definito

Sia f: [a,b]→ R, positiva e continua.



Integrale definito

Sia f: [a,b]→ R, positiva e continua.



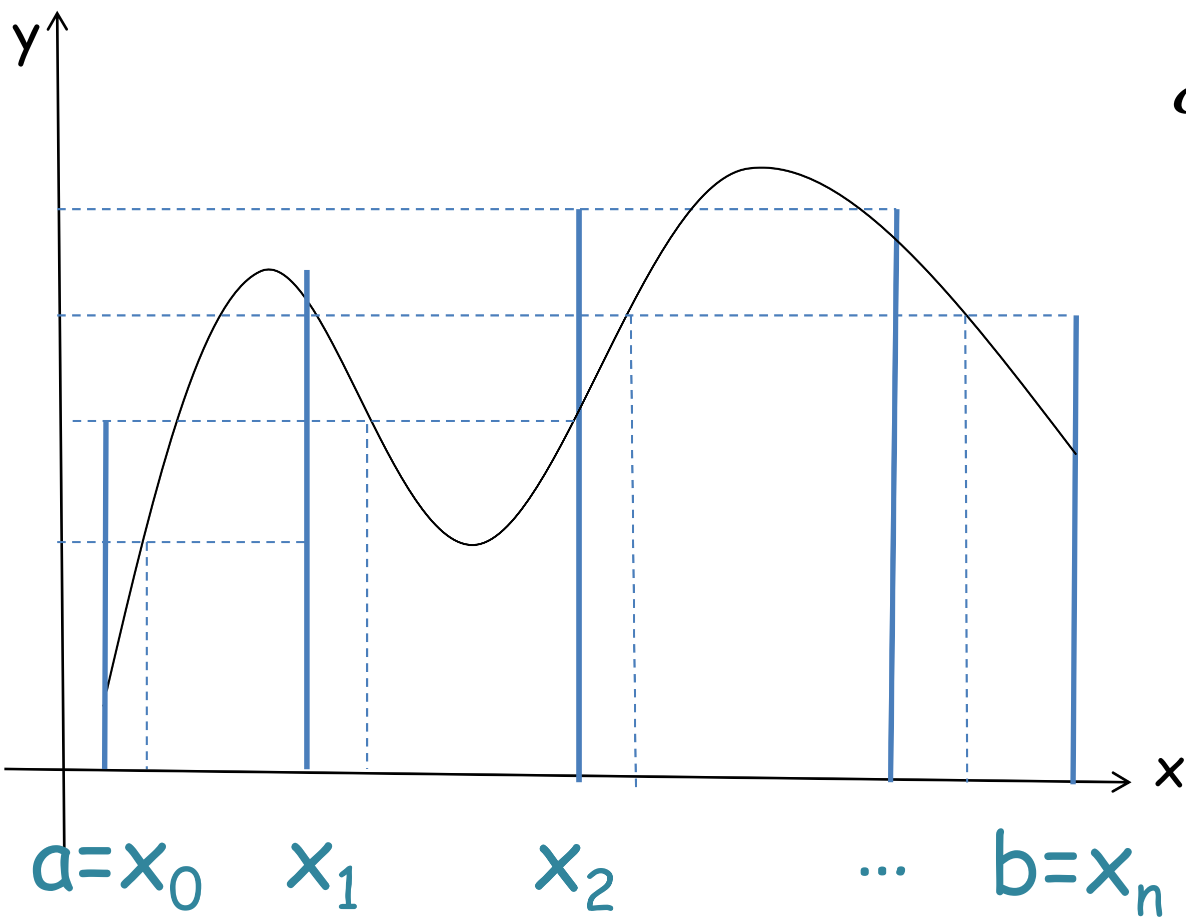
$x_i - x_{i-1}$ $\quad i=1,\dots, n$

$$m_i = \min_{x_{i-1}<x<x_i} f(x)$$

$$M_i = \max_{x_{i-1}<x<x_i} f(x)$$

Somme di Riemann

Sia f: [a,b]→ R, positiva e continua.



$$\delta = \max_{i=1,\ldots n}(x_i - x_{i-1})$$

$$x_{i-1} < \xi_i < x_i$$

$$m_i < f(\xi_i) < M_i$$

Somme di Riemann

Sia f: [a,b]→ R continua.
Essa è integrabile in [a,b] se esiste ed è

finito il $\lim_{\delta \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) f(\xi_k) = \int_a^b f(x)dx$

Calcolo delle Aree

Sia f: [a,b]→ R positiva e continua.
L'area sottesa dal grafico di f nell'intervallo [a,b] è $= \int_a^b f(x)dx$.

Sia f: [a,b]→ R negativa e continua.
L'area sottesa dal grafico di f nell'intervallo [a,b] è $= -\int_a^b f(x)dx$.

Proprietà di linearità dell'integrale definito

Siano f e g: [a,b]→ R integrabili nel dominio, allora:

1. $$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

2. $$\int_a^b c\cdot f(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

Proprietà dell'integrale definito

Sia f : [a,b]→ R integrabile nel dominio, allora:

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$
2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Calcolo delle Aree

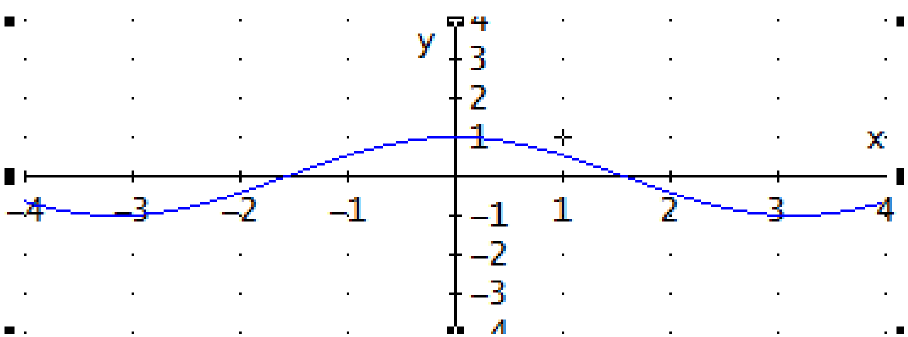
Sia f: [a,b]→ R continua.
Sia D+ il sottoinsieme del dominio in cui la funzione f è positiva e D- il sottoinsieme del dominio in cui la funzione f è negativa.
L'area sottesa dal grafico di f nell'intervallo [a,b] è $= \int_{D+} f(x)dx - \int_{D-} f(x)dx$.

Integrale definito di funzioni pari

Sia f: [-a,a]→ R integrabile e pari.

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx$$

$$= \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

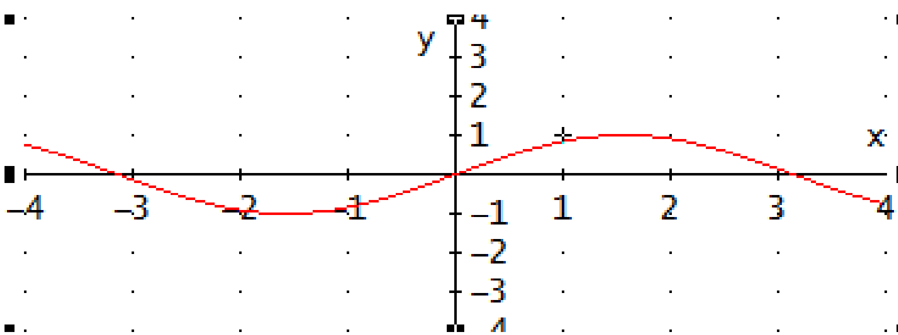


Integrale definito di funzioni dispari

Sia f: [-a,a]→ R integrabile e dispari.

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx$$

$$= \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx \quad = 0$$



Proprietà dell'integrale definito

Siano f e g : [a,b]→ R integrabili nel dominio, allora:

1. $\int_a^b c \cdot dx = c(b-a)$
2. se $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in [a,b]$ $\quad \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

Teorema

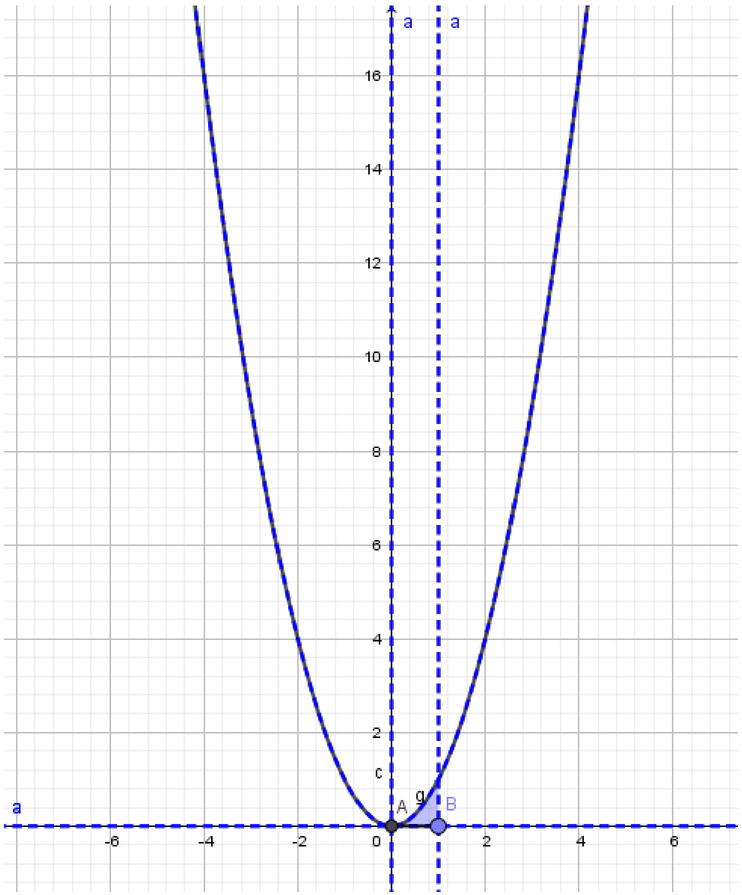
Sia $f : [a,b] \to R$ continua nel dominio, allora f è integrabile in A.

Teorema della media

Sia $f : A=[a,b] \to R$ continua in A, allora $\exists\, x_0 \in A$ |

$$\int_a^b f(x)dx = f(x_0)(b-a)$$

Integrale indefinito



$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x)$$

funzione integranda

funzione integrale

Teorema di Torricelli-Barrow
o
T. fondamentale del calcolo integrale

Sia f : [a,b]→ R integrabile in [a,b] e sia

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Se f(t) è continua allora F(x) è derivabile e F'(x)=f(x).

F(x) è detta primitiva di f(x) ed è quella funzione la cui derivata è f(x).

Integrali indefiniti

Sia f : [a,b]→ R integrabile in [a,b] e sia

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Se F(x) è una primitiva di f(x), anche G(x)=F(x)+c è una primitiva di f(x).

$$F(x) + c = \int_a^x f(t)dt$$

$$F(a) + c = \int_a^a f(t)dt = 0$$

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$$

Integrali indefiniti

Sia f : [a,b]→ R integrabile in [a,b] e sia

$$F(x)+c=\int_a^x f(t)dt$$

allora

$$D[F(x)+c]=D\int f(t)dt=f(x)$$

e

$$G(x)+c=\int D[f(t)]dt$$

$$D[G(x)+c]=D[f(x)] \qquad G(x)+c=f(x)$$

Risoluzione degli integrali definiti

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$$

1. Determinare la primitiva F(x) risolvendo l'integrale indefinito $\int f(t)dt$.

2. Calcolare la primitiva in b e in a e sottrarre i risultati.

Risoluzione degli integrali indefiniti

Integrali immediati

$$\int c \cdot dx = c \cdot x$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$ n ≠ -1

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$ x>0

$$\int e^x dx = e^x + c$$

Risoluzione degli integrali indefiniti

Integrali immediati

$$\int \sin x \cdot dx = -\cos x$$

$$\int \cos x \cdot dx = \sin x$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = arc \tan x + c$$

Esercizi

$$\int \left(\frac{1}{x} - \cos x \right) dx$$

$$\int \tan^2 x \cdot dx$$

$$\int \frac{1 - x^4}{1 - x^2} dx$$

Esercizi

$$\int_{1}^{2}\left(e^{x}+x^{3}\right)dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\cdot dx$$

$$\int_{e}^{e^{3}}\frac{1}{x}\,dx$$

Risoluzione degli integrali indefiniti
Riconoscimento di funzioni composte

$$\int g`[f(x)]\cdot f`(x)dx = g(x)+c$$

$$\int 7\cdot e^{7x}dx$$

$$\int \frac{1}{2x-1}\cdot 2dx$$

$$\int (6x-2)\cos(3x^2-2x)dx$$

Risoluzione degli integrali definiti

Riconoscimento di funzioni composte

$$\int g`[f(x)]\cdot f`(x)dx = g(x)+c$$

$$\int_0^1 e^{3x+1}dx$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}-1}^{\pi-1} \tan(2x+1)dx$$

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} \frac{4x}{\cos^2(2x^2)}dx$$

Risoluzione degli integrali indefiniti

Integrazione per parti

$$\int g`(x) \cdot f(x) \cdot dx = g(x) \cdot f(x) - \int g(x) \cdot f`(x) \cdot dx$$

$$\int x \cdot e^x dx$$

$$\int x^2 \cdot e^x dx$$

$$\int \ln(x) \cdot dx$$

Risoluzione degli integrali definiti

Integrazione per parti

$$\int_a^b g`(x) \cdot f(x) \cdot dx = [g(x) \cdot f(x)]_a^b - \int_a^b g(x) \cdot f`(x) \cdot dx$$

$$\int_0^{\pi} x \cdot \sin x \cdot dx$$

$$\int_{-2}^{1} x \cdot e^{2x} \cdot dx$$

$$\int_1^2 x^2 \cdot \ln(x) \cdot dx$$

Risoluzione degli integrali indefiniti

Integrazione per sostituzione

$$\int f(x)\cdot dx$$ pongo $$x=\varphi(t)$$

con φ invertibile

$$t=\varphi^{-1}(x)$$

$$dx=d\left[\varphi(t)\right]=\varphi`(t)\cdot dt$$

$$\int f(x)\cdot dx=\int f\left[\varphi(t)\right]\varphi`(t)\cdot dt\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}$$

Risoluzione degli integrali indefiniti

Integrazione per sostituzione

$$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$$ pongo $$\sqrt{x}=t$$

$$\int \sqrt{1+x}\cdot dx$$ pongo $$\sqrt{x+1}=t$$

$$\int x\sqrt{x-1}\cdot dx$$ pongo $$\sqrt{x-1}=t$$

Risoluzione degli integrali indefiniti

Integrazione per sostituzione

$$\int_a^b f(x) \cdot dx$$ pongo $$x = \varphi(t)$$ $$t = \varphi^{-1}(x)$$

con φ invertibile

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = F(b) - F(a)$$

$$t_a = \varphi^{-1}(a)$$

$$t_b = \varphi^{-1}(b)$$

$$dx = d\left[\varphi(t)\right] = \varphi`(t) \cdot dt$$

Risoluzione degli integrali definiti

Integrazione per sostituzione

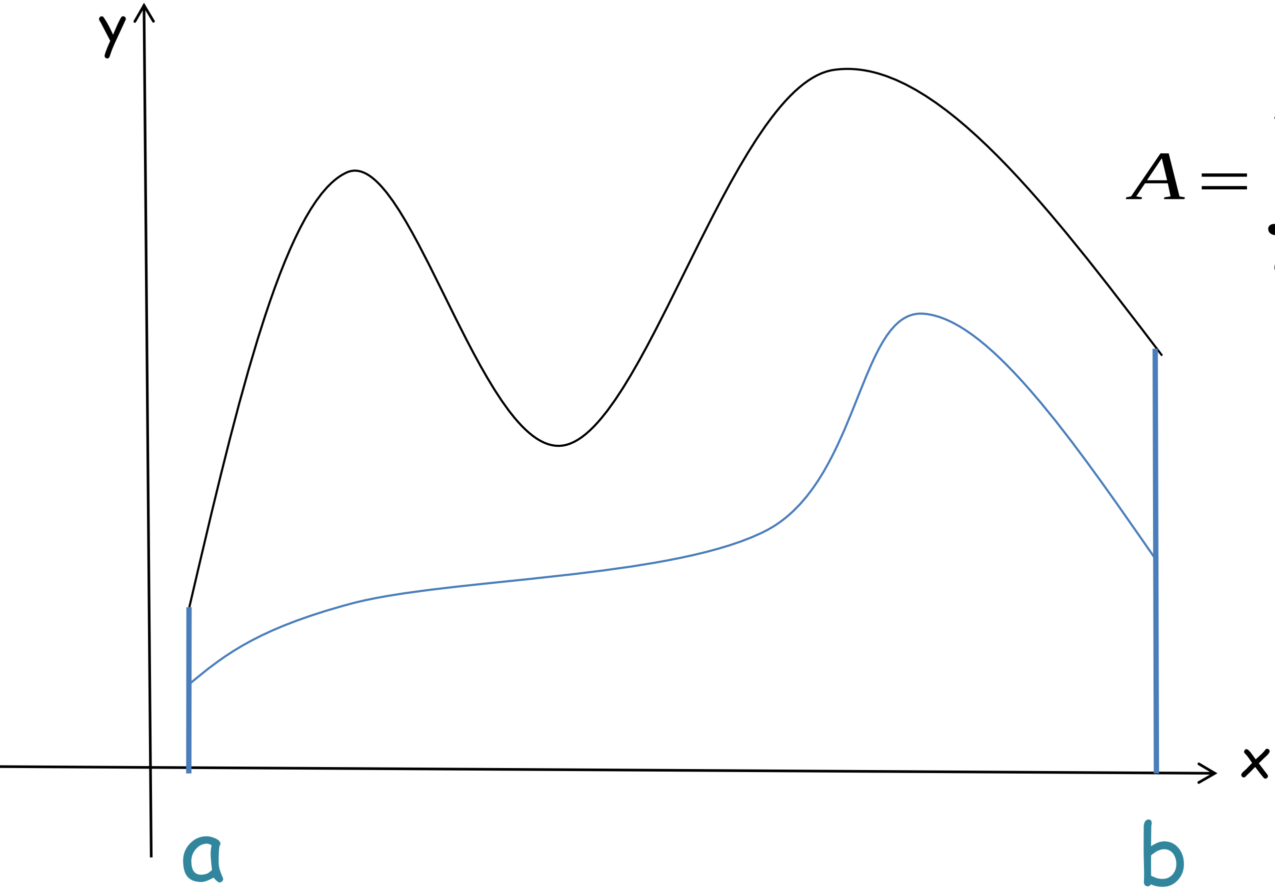
$$\int_1^2 \frac{\sin\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}\,dx \quad \text{pongo} \quad \sqrt{x-1}=t$$

$$\int_0^3 \sqrt{4-x}\cdot dx \quad \text{pongo} \quad \sqrt{4-x}=t$$

$$\int_{-1}^0 x^2\sqrt{x+1}\cdot dx \quad \text{pongo} \quad \sqrt{x+1}=t$$

Calcolo delle Aree

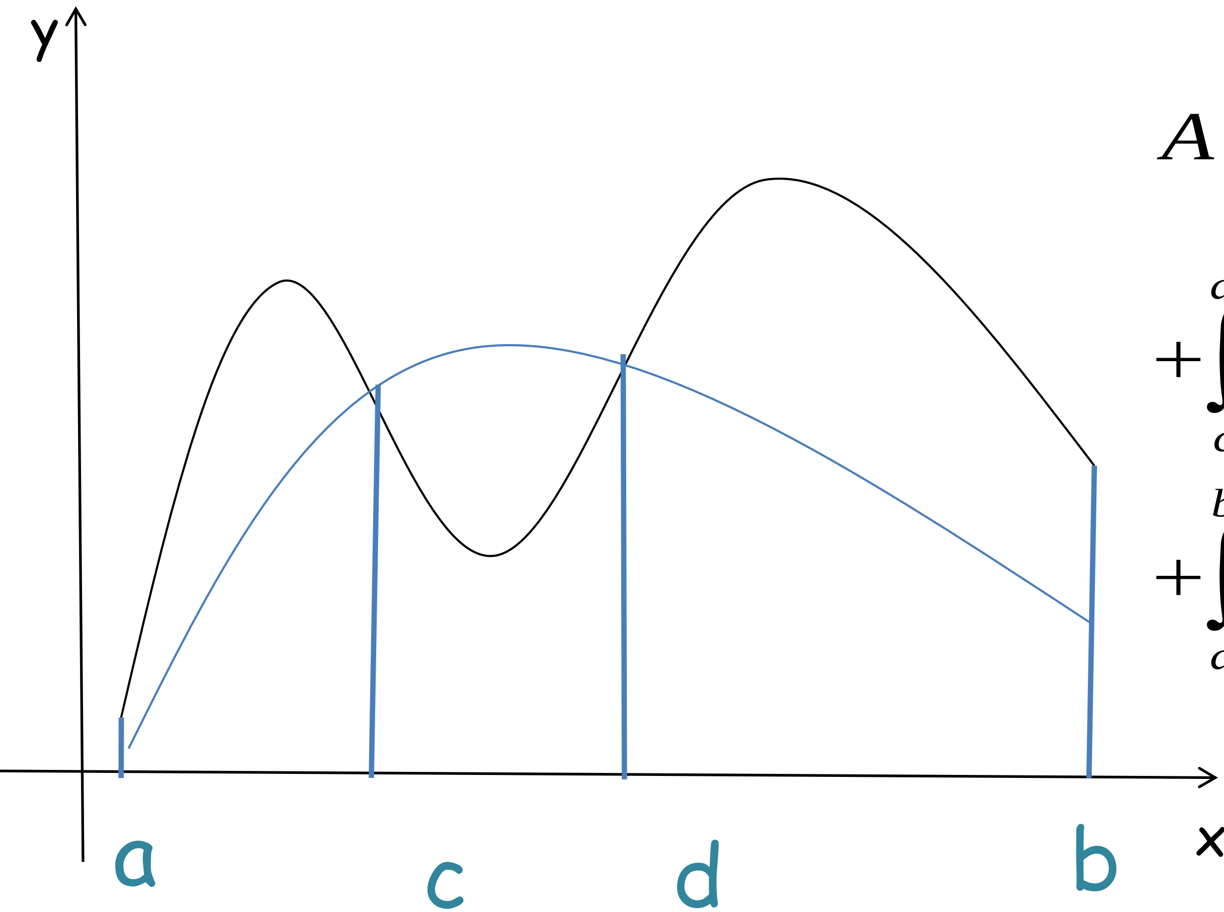
Sia f e g: [a,b]→ R continue | f(x) ≥ g(x).



$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

Calcolo delle Aree

Sia f e g: [a,b]→ R continue.



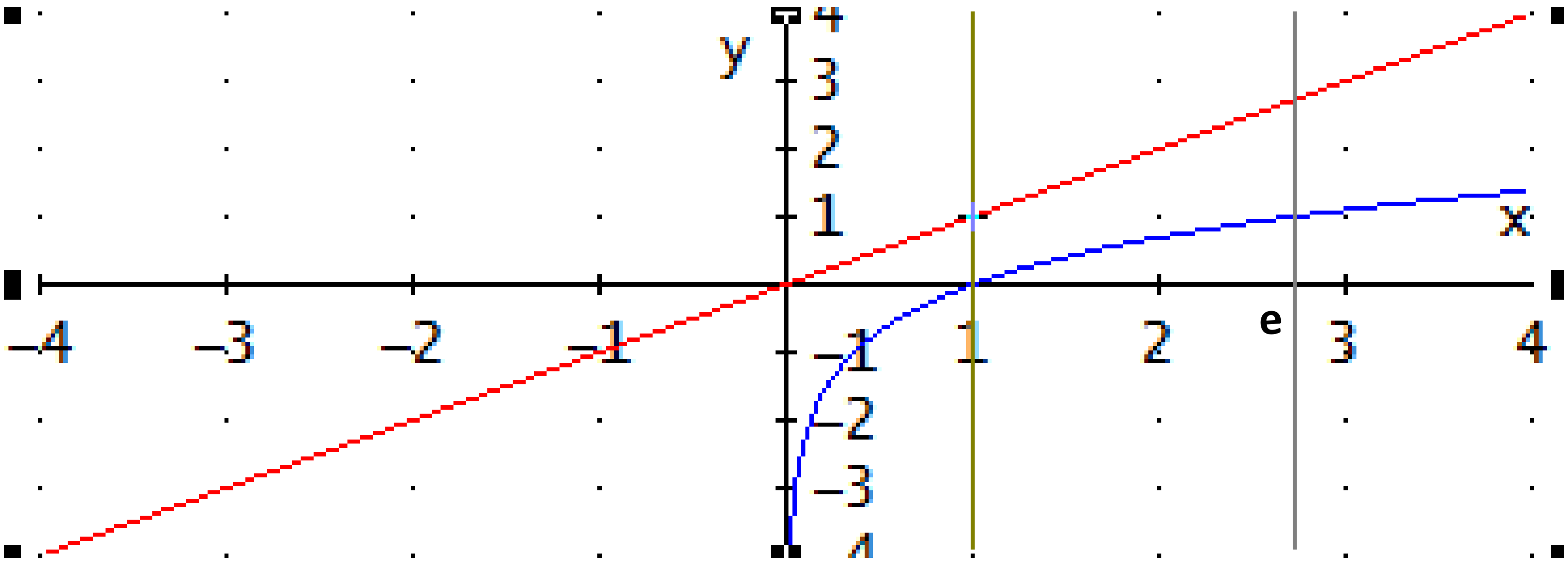
$$A=\int_a^c [f(x)-g(x)]dx$$

$$+\int_c^d [g(x)-f(x)]dx$$

$$+\int_d^b [f(x)-g(x)]dx$$

Calcolo delle Aree

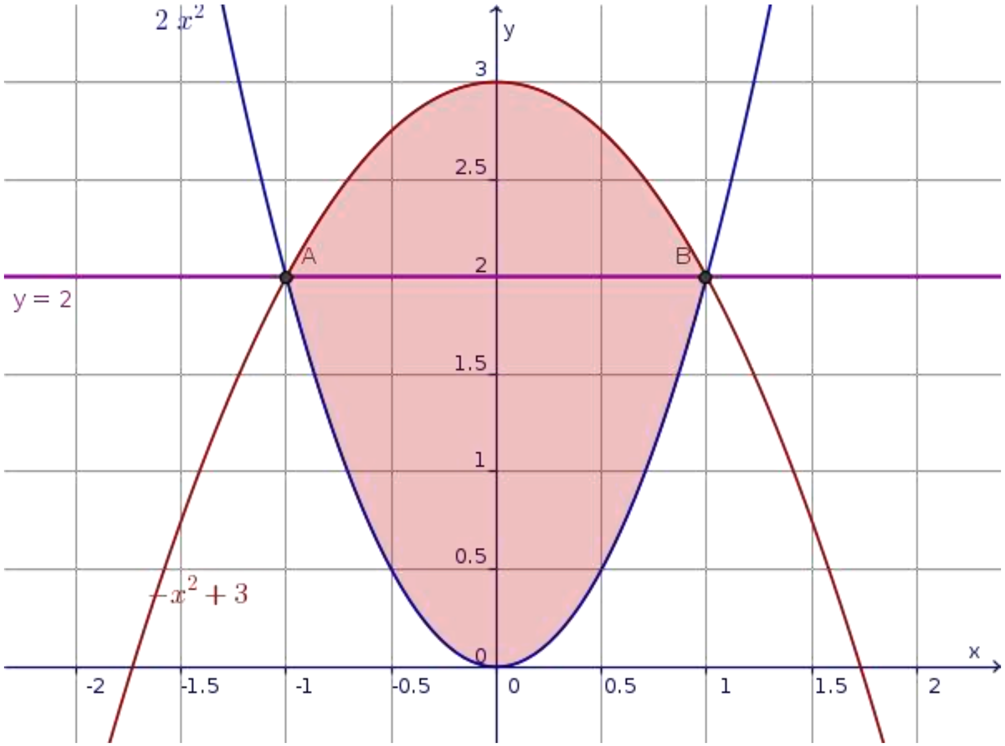
Sia f(x)=x e g(x)=ln(x).



$$A = \int_a^b [x - \ln(x)]\,dx$$

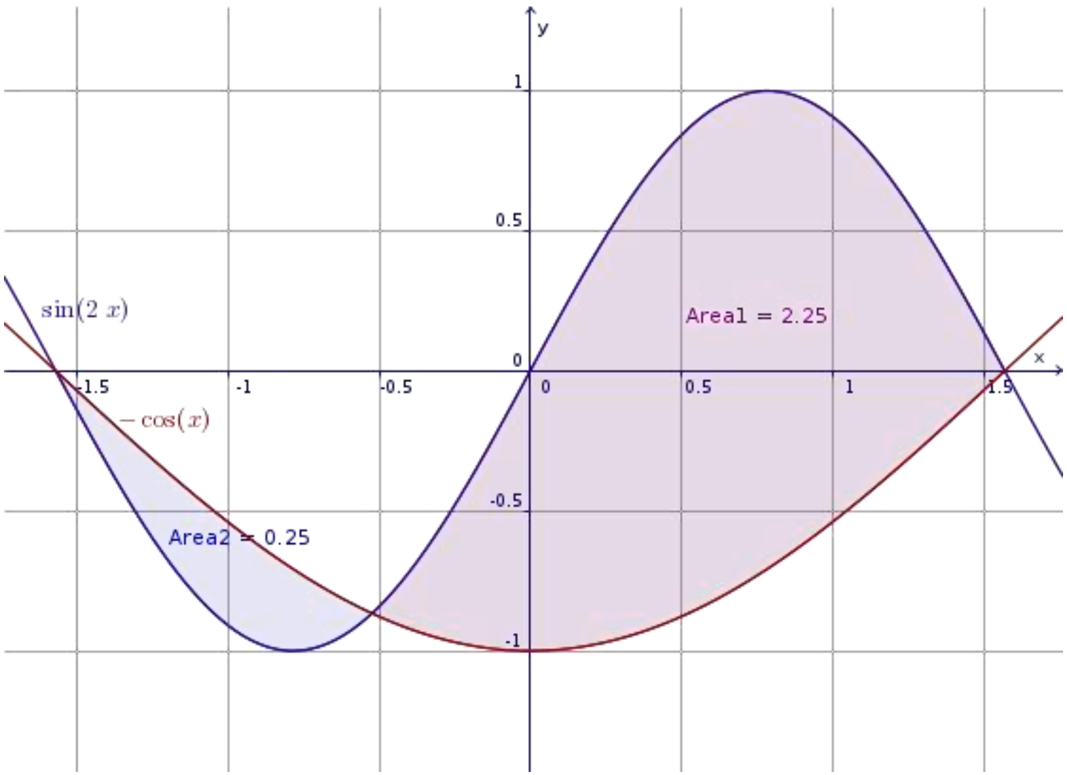
Calcolo delle Aree

Determinare l'area compresa tra i grafici delle due funzioni rappresentate nella seguente figura.

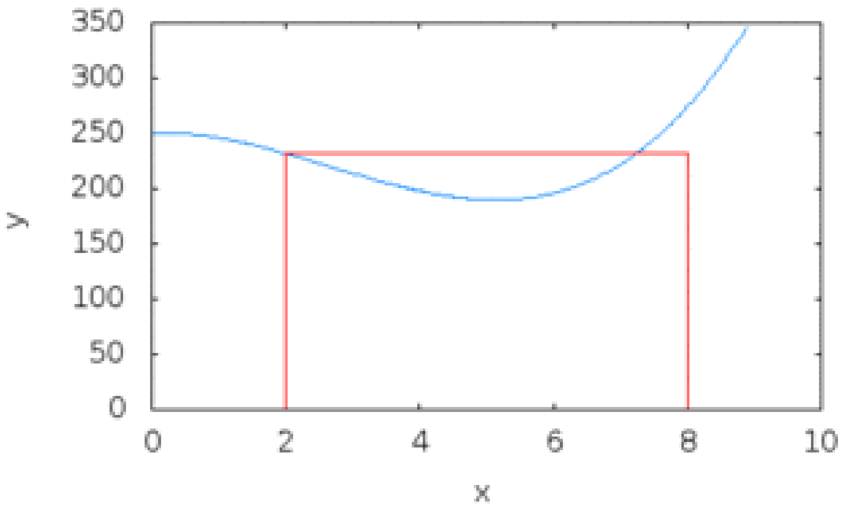


Calcolo delle Aree

Determinare l'area compresa tra i grafici delle due funzioni rappresentate nella seguente figura.

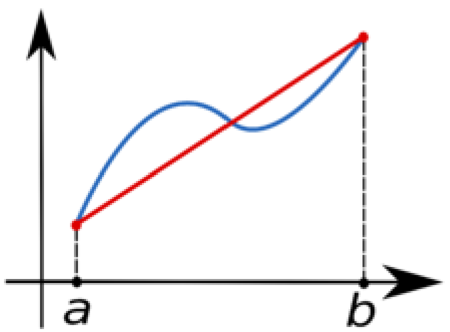


Metodi numerici per il calcolo delle aree

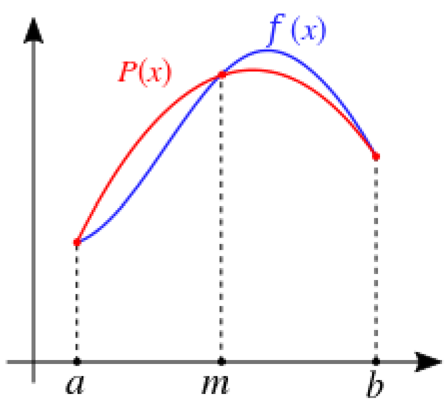


Metodo dei rettangoli

Metodi numerici per il calcolo delle aree



Metodo dei trapezi



Metodo di Cavalieri-Simpson

Integrali generalizzati

Sia f: [a,+∞)→ R continua.

∀ b∈R, b>a, f: [a,b]→ R è continua e quindi integrabile secondo Riemann.

Diciamo che f è integrabile in senso generalizzato se esiste, finito,

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx$$

Integrali generalizzati

Sia f: $(-\infty, b] \to R$ continua.

$\forall\ a \in R$, $a<b$, f: $[a,b] \to R$ è continua e quindi integrabile secondo Riemann.

Diciamo che f è integrabile in senso generalizzato se esiste, finito,

$$\lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)dx = \int_{-\infty}^b f(x)dx$$

Integrali generalizzati

Sia f: (-∞, +∞) → R continua.

∀ a,b∈R, a<b, f: [a,b]→ R è continua e quindi integrabile secondo Riemann.

Diciamo che f è integrabile in senso generalizzato se esiste, finito,

$$\lim_{a \to -\infty} \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

Esercizi

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^2}\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} sinx\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (2x+3)^3\,dx$$

Integrali generalizzati 2

Sia f: [a, b)→ R continua.

∀ε>0 ∈R, f: [a, b-ε]→ R è continua e quindi integrabile secondo Riemann.

Diciamo che f è integrabile in senso generalizzato se esiste, finito,

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Integrali generalizzati 2

Sia f: (a, b] → R continua.

$\forall \varepsilon > 0 \in R$, f: $[a+\varepsilon, b] \rightarrow R$ è continua e quindi integrabile secondo Riemann.

Diciamo che f è integrabile in senso generalizzato se esiste, finito,

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

Integrali generalizzati 2

Sia f: (a, b) → R continua.

∀ε, δ>0 ∈R, f: [a+ε, b-δ]→ R è continua e quindi integrabile secondo Riemann.

Diciamo che f è integrabile in senso generalizzato se esiste, finito,

$$\lim_{\delta\to 0^+}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b-\delta} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Esercizi

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,dx$$

$$\int_0^1 \frac{e^x}{1-e^x}\,dx$$

$$\int_0^{\pi} \frac{cosx}{sinx}\,dx$$

$$\int_1^4 \frac{1}{x-1}\,dx$$

Integrali generalizzati

In tutti i casi precedenti

- se il risultato del limite è infinito allora la funzione non è integrabile in senso generalizzato e l'integrale è divergente.
- se il risultato del limite non esiste allora la funzione non è integrabile in senso generalizzato e l'integrale è indeterminato.