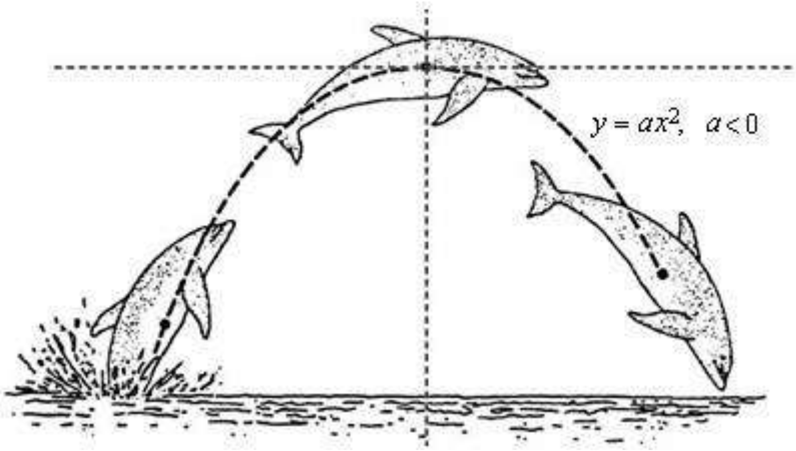
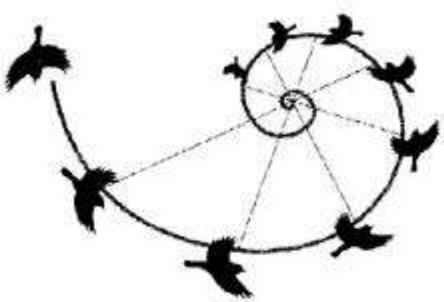
Funzioni Reali





Modello di un fenomeno

Un modello è una costruzione ideale basata su alcune caratteristiche essenziali del fenomeno, dette variabili.

Un modello è ovviamente una approssimazione del fenomeno che nella realtà può essere molto complesso.

Modello di un fenomeno

Dall'analisi del fenomeno si individuano:

- le caratteristiche (variabili) che ricorrono sempre e che quindi caratterizzano il fenomeno
- le eventuali <u>relazioni</u> tra di esse.

Le variabili possono essere

- *Quantitative: descrivono quantità misurabili attraverso numeri interi (discrete) o reali (continue) e opportune unità di misura*
- *Qualitative: altrimenti*

Funzioni

Analitiche

Razionali intere
Razionali fratte
Irrazionali
Trascendenti
- logaritmiche
- esponenziali
- trigonometriche

Valore assoluto
A gradini

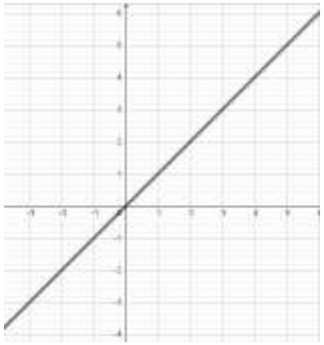
Empiriche

Funzioni

Due funzioni sono uguali quando hanno lo stesso dominio, lo stesso codominio e sono descritte dalla stessa legge.

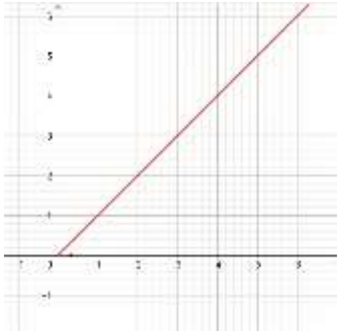
$f: R \to R$

$x \rightsquigarrow y=f(x)=x$



$f: R+ \to R$

$x \rightsquigarrow y=f(x)=x$



Somma di funzioni

Siano date 2 funzioni f e g così definite

$$f: A \to R \qquad x \rightsquigarrow f(x)$$

$$g: A \to R \qquad x \rightsquigarrow g(x)$$

Si definisce funzione somma di f e g la funzione $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$

$$f+g : A \to R \qquad x \rightsquigarrow f(x)+g(x)$$

Somma di funzioni

Siano date 2 funzioni f e g così definite

$$f: A \to R \qquad x \rightsquigarrow f(x)$$

$$g: B \to R \qquad x \rightsquigarrow g(x)$$

Si definisce funzione somma di f e g la funzione $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$

$$f+g : A \cap B \to R \qquad x \rightsquigarrow f(x)+g(x)$$

Somma di funzioni

Siano date 2 funzioni f e g così definite

$$f: R \to R \qquad x \rightsquigarrow f(x)=x+4$$

$$g: R \to R \qquad x \rightsquigarrow g(x)=3x-2$$

La funzione somma f+g sarà definita come:

$$f+g : R \to R$$

$$x \rightsquigarrow f(x)+g(x) = (x+4)+(3x-2) = 4x+2$$

Differenza di funzioni

Siano date 2 funzioni f e g così definite

$$f: A \to R \qquad x \rightsquigarrow f(x)$$

$$g: A \to R \qquad x \rightsquigarrow g(x)$$

Si definisce funzione differenza di f e g la funzione $(f-g)(x) = f(x)-g(x)$

$$f-g : A \to R \qquad x \rightsquigarrow f(x)-g(x)$$

Prodotto di funzioni

Siano date 2 funzioni f e g così definite

$$f: A \to R \qquad x \rightsquigarrow f(x)$$

$$g: A \to R \qquad x \rightsquigarrow g(x)$$

Si definisce funzione prodotto di f e g la funzione $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

$$f \cdot g : A \to R \qquad x \rightsquigarrow f(x) \cdot g(x)$$

Rapporto di funzioni

Siano date 2 funzioni f e g così definite

$f: A \to R$ $\qquad$ $g: A \to R$

$x \rightsquigarrow f(x)$ $\qquad$ $x \rightsquigarrow g(x)$

Si definisce funzione rapporto di f e g la funzione $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$

$$f/g : A \setminus \{x \in A \mid g(x)=0\} \to R$$

$$x \rightsquigarrow f(x)/g(x)$$

Esercizi

Sia $A=\{1,2,3\}$ e siano f e g due funzioni così definite

$$f: A \rightarrow R \qquad x \rightsquigarrow 2x$$

$$g: A \rightarrow R \qquad x \rightsquigarrow 3-x$$

Determinare l'espressione di $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ e f/g.
Calcolare le precedenti funzioni in $x=2$.

Esercizi

$$f: R \to R \qquad x \rightsquigarrow x$$

$$g: R\backslash\{0\} \to R \qquad x \rightsquigarrow 1/x$$

Determinare $h(x) = f \cdot g$.

Calcolare la precedente funzione in $x=0$.

$$\cancel{h: R \to R \qquad x \rightsquigarrow 1}$$

$$\boxed{h: R\backslash\{0\} \to R \qquad x \rightsquigarrow 1}$$

Esercizi

$$f: R \to R$$
$$x \rightsquigarrow x$$

$$g: R \to R$$
$$x \rightsquigarrow x^3+2x$$

Determinare $h(x) = f/g(x)$.

Calcolare la precedente funzione in $x=0$.

$$\cancel{\begin{array}{l} h: R \to R \\ x \rightsquigarrow 1/(x^2+2) \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} h: R\backslash\{0\} \to R \\ x \rightsquigarrow 1/(x^2+2) \end{array}}$$

Determinazione del dominio

Il Dominio è l'insieme dei valori che possono essere assunti dalla variabile indipendente.

Le limitazioni possono derivare

dalla coerenza della legge col fenomeno

Es. Legge di Stevino

$p=\rho gh$ con $h \geq 0$

da motivazioni matematiche.

Es. $\sqrt{x+2}$

Valida per $x>-2$

Determinazione del dominio

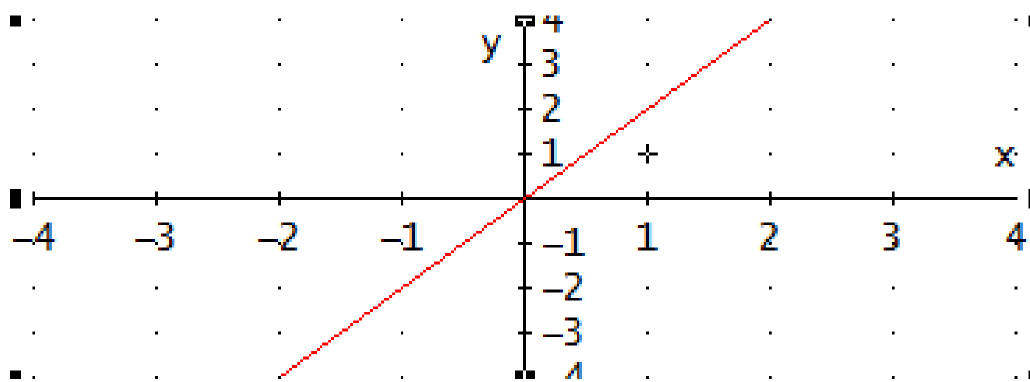
Razionali intere → polinomi

Dominio: R

Funzioni lineari Rette

$y = mx$

$y = mx+q$



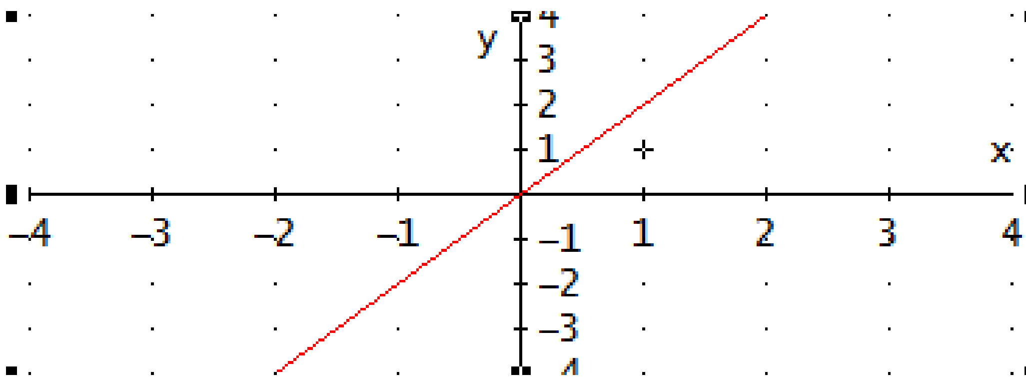
Determinazione del dominio

Due grandezze sono direttamente proporzionali se il loro rapporto è costante.

Retta per l'origine

$y = mx$

$$\frac{y}{x} = m$$



Determinazione del dominio

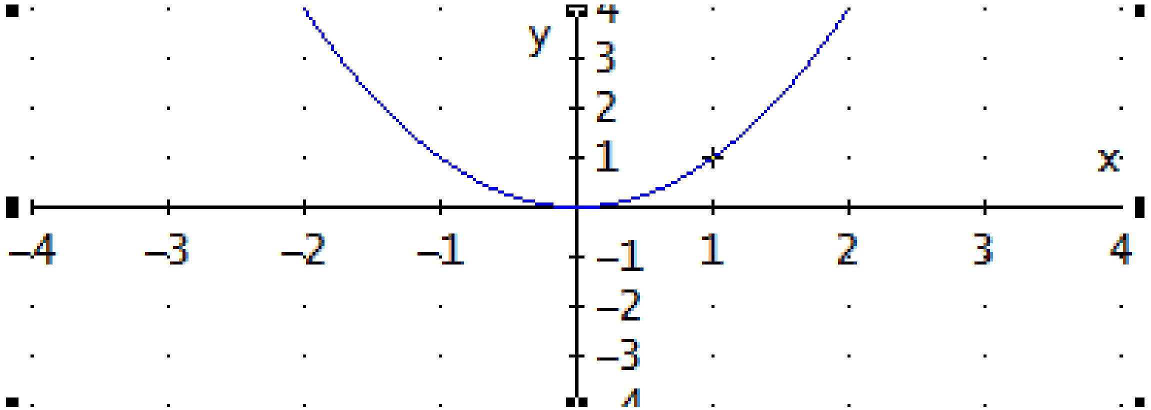
Razionali intere → polinomi

Dominio: R

Parabole

$y = ax^2+bx+c$

$y = ax^2$

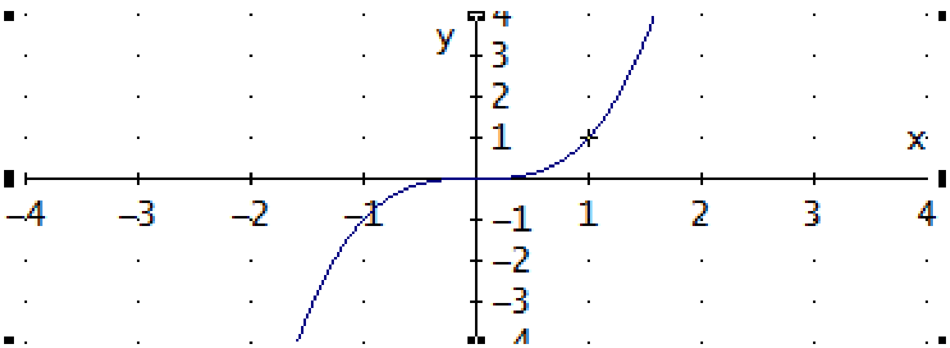


Determinazione del dominio

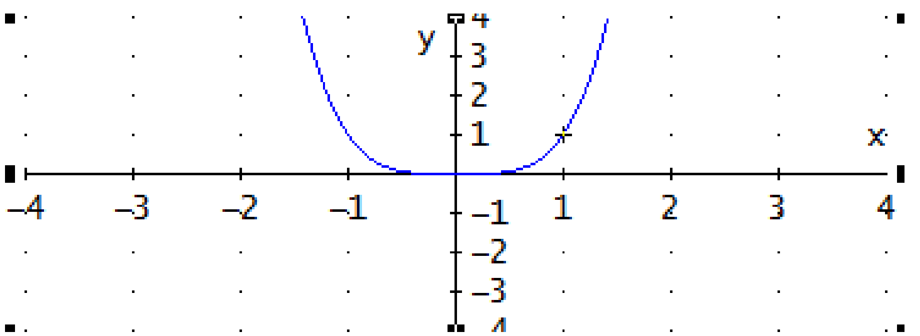
Razionali intere → polinomi

Dominio: R

$y = x^3$



$y = x^4$

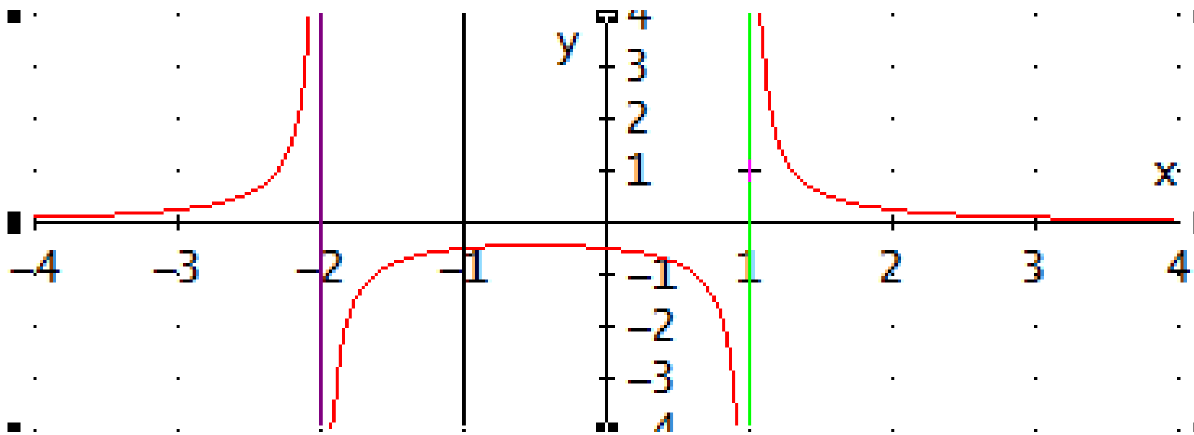


Determinazione del dominio

Razionali fratte

Dominio: R\{punti che annullano il denominatore}

$$y = \frac{1}{(x-1)(x+2)}$$



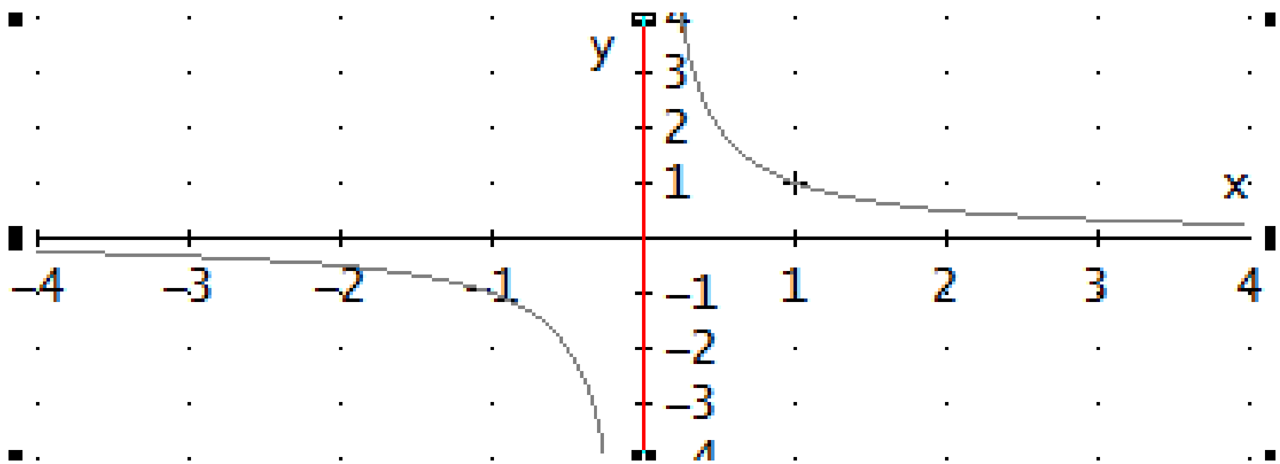
Determinazione del dominio

Due grandezze sono inversamente proporzionali se il loro prodotto è costante.

Iperbole equilatera

$$y = \frac{1}{x}$$

$y \cdot x = m$



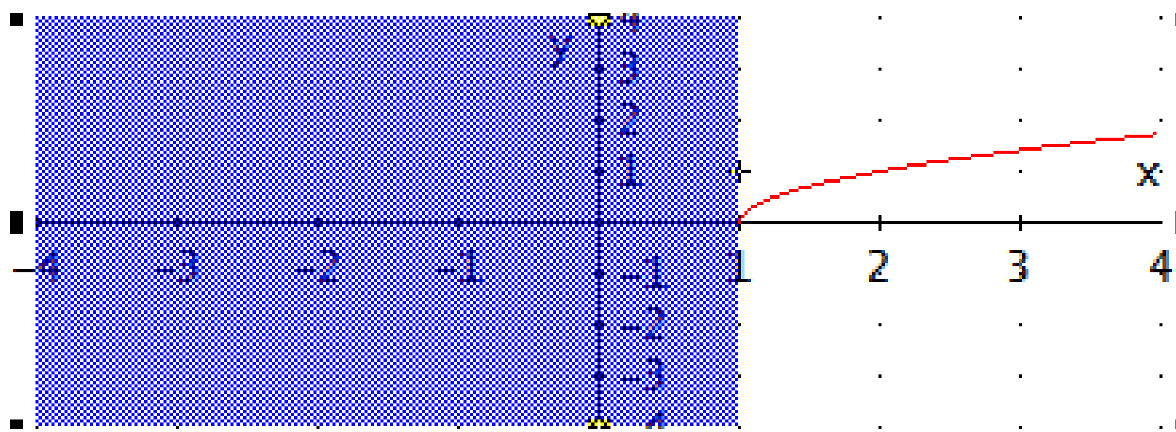
Determinazione del dominio

Irrazionali → radici

Radici di indice pari

Dominio: { R | l'argomento della radice ≥ 0}

$$y = \sqrt{x-1}$$



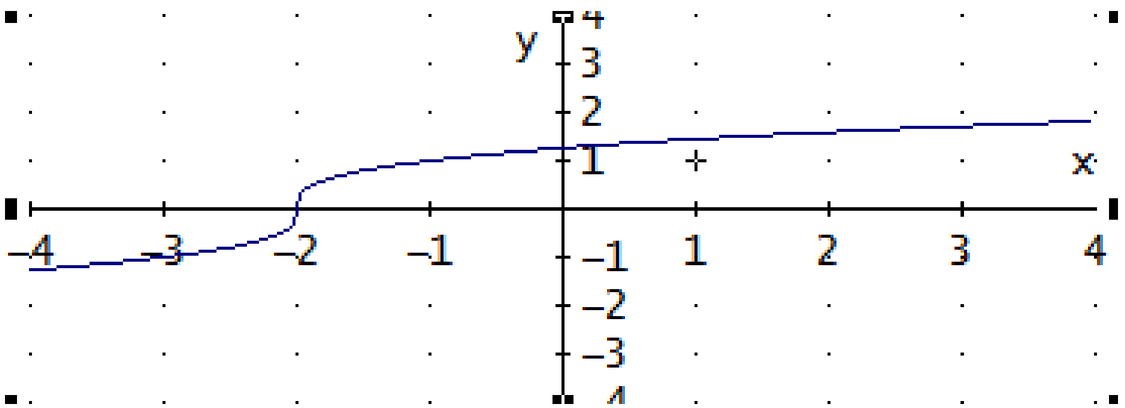
Determinazione del dominio

Irrazionali → radici

Radici di indice dispari

Dominio: R

$$y = \sqrt[3]{x+2}$$

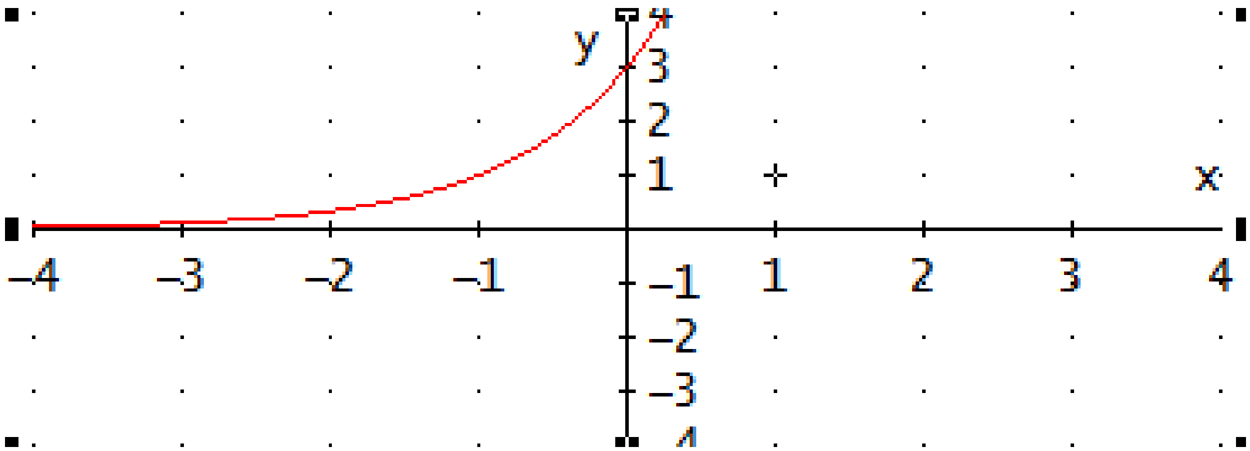


Determinazione del dominio

Esponenziali

Dominio: R

$$y = 3^{x+1}$$

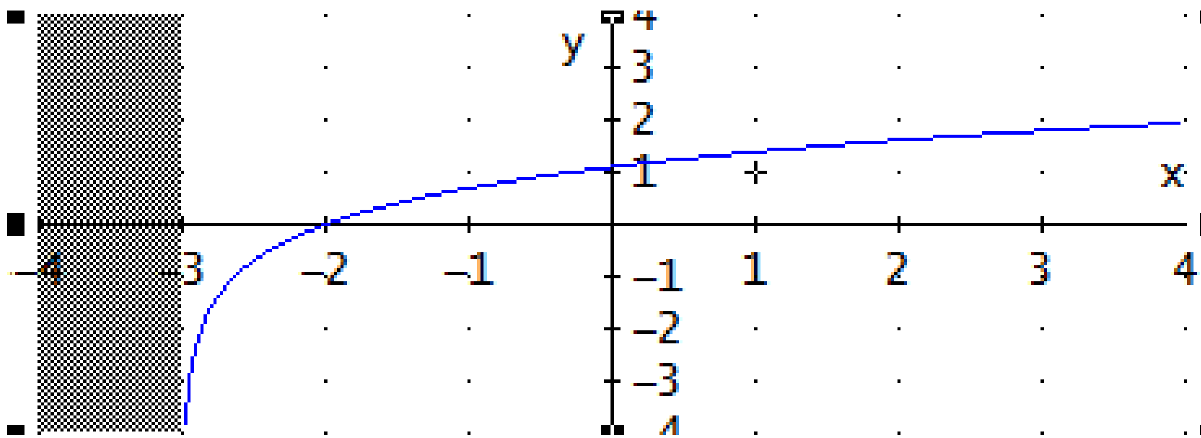


Determinazione del dominio

Logaritmi

Dominio: {R | argomento del logaritmo > 0}

$$y = \ln(x+3)$$

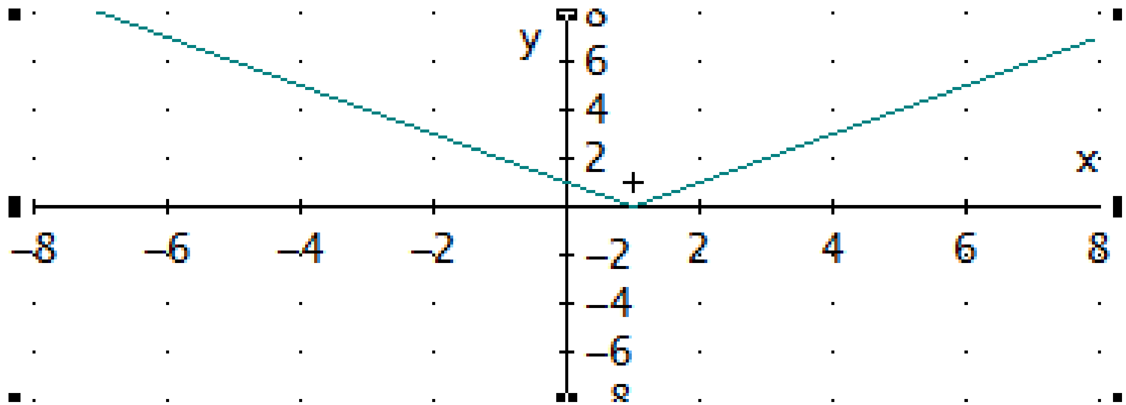


Determinazione del dominio

Valore assoluto

$$y = |x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{se } x-1 \geq 0 \\ -(x-1) & \text{se } x-1 < 0 \end{cases}$$

Dominio: R



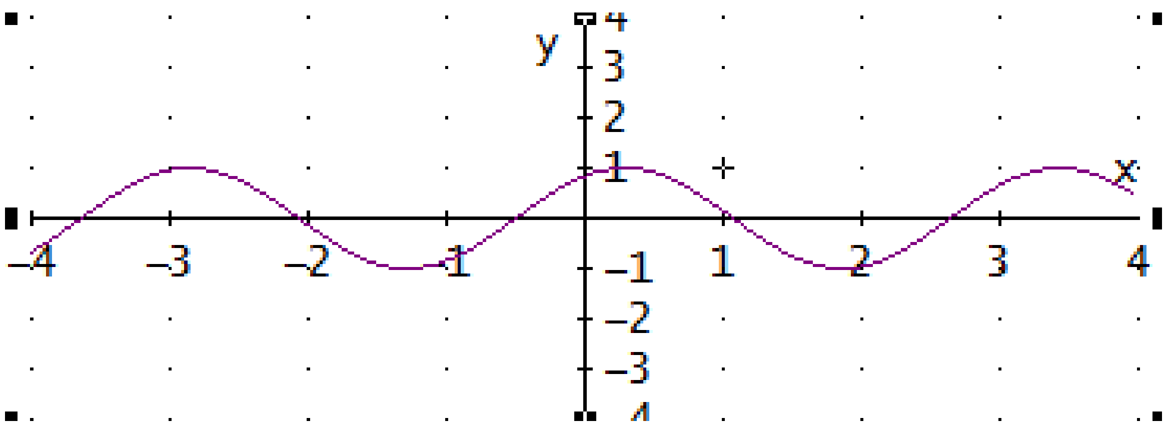
Determinazione del dominio

Trigonometriche

Seno

Dominio: R

$$y = \sin(2x+1)$$



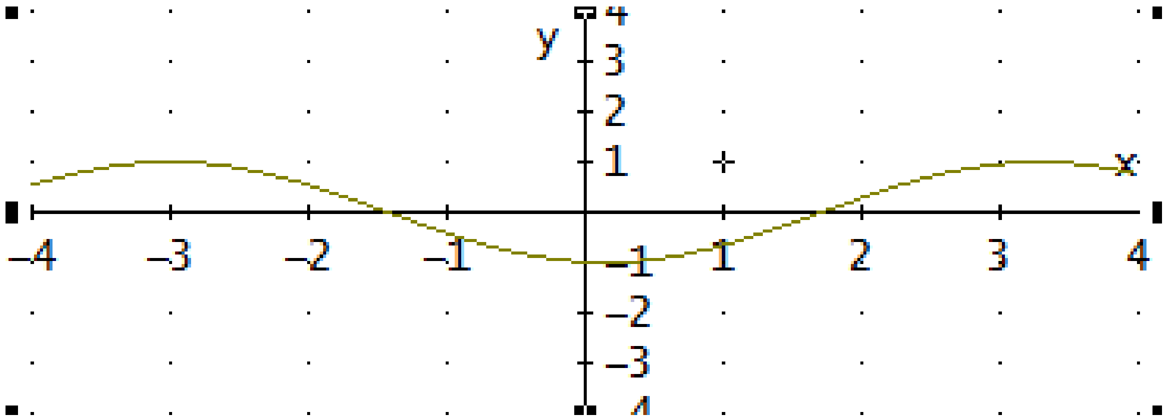
Determinazione del dominio

Trigonometriche

Coseno

Dominio: R

$$y = \cos(x+3)$$



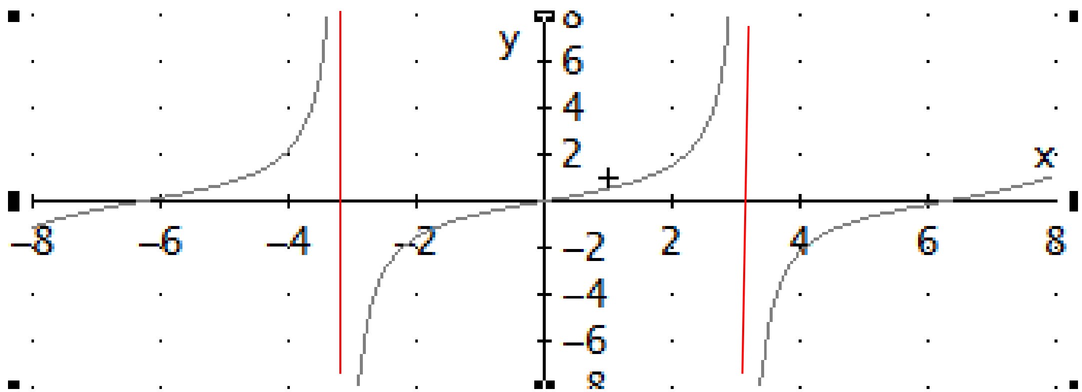
Determinazione del dominio

Trigonometriche

Tangente

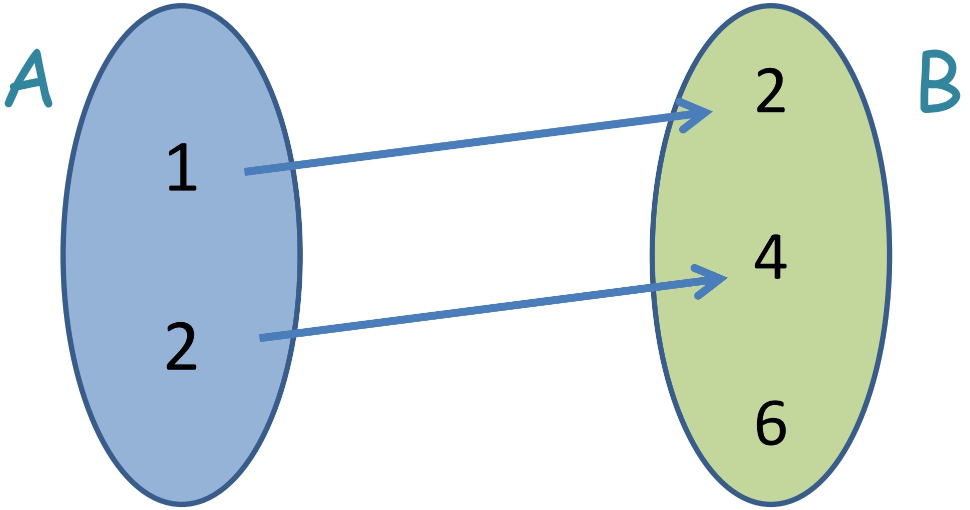
Dominio: {R | l'argomento ≠ π/2 + kπ}

$$y = \tan\left(\frac{x}{2} - \pi\right)$$



Funzioni limitate

Una funzione f:A → B si dice limitata se Im (A) è un insieme limitato.



Dominio: A
Codominio: B
Immagine di A: {2,4}

Funzioni limitate

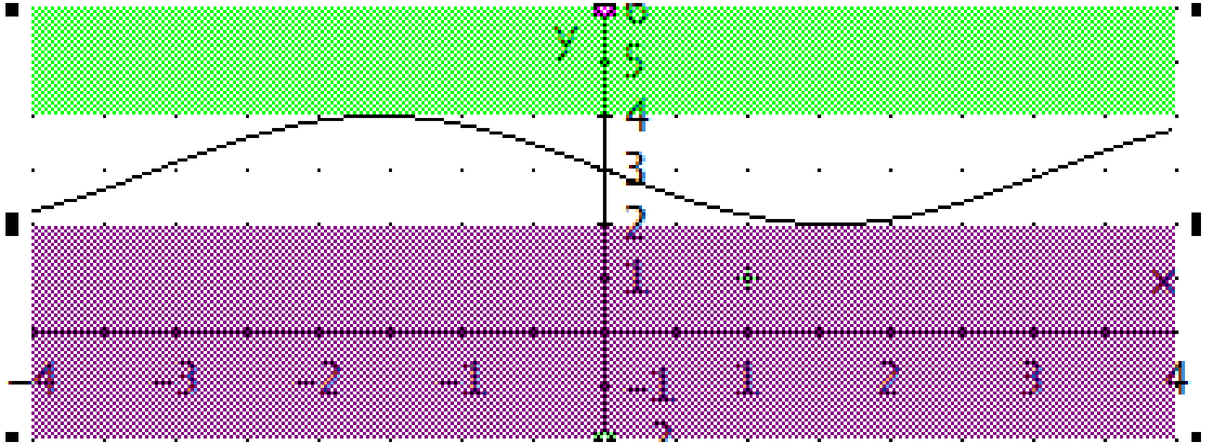
Se Im (A) è un insieme limitato allora ammette estremo superiore e/o estremo inferiore.

$f: R \to R$

$x \rightsquigarrow y = f(x) = 3 - \sin x$

$A = R$

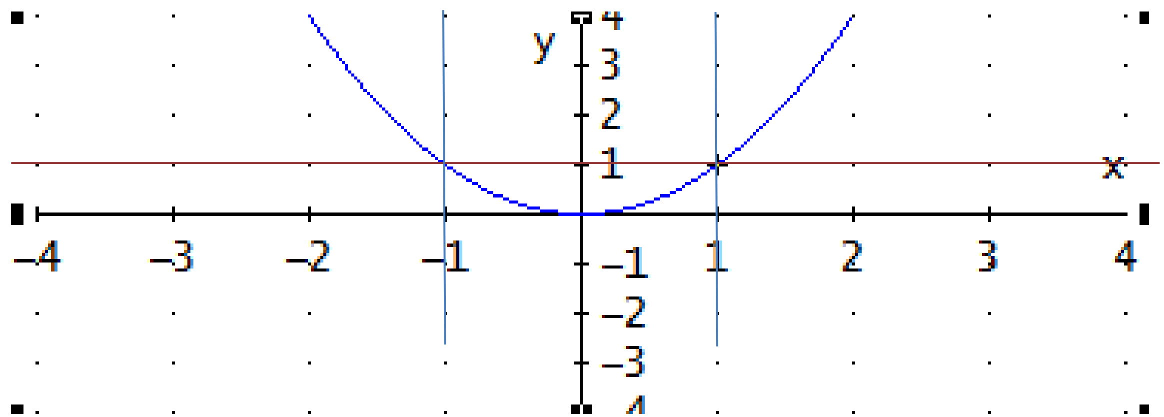
$Im(A) = [2,4]$



Funzioni pari

Una funzione f: $A \subseteq \mathbf{R} \rightarrow B \subseteq \mathbf{R}$ si dice pari se $\forall x \in \boldsymbol{A}\ f(x)=f(-x)$.

$y = ax^2$

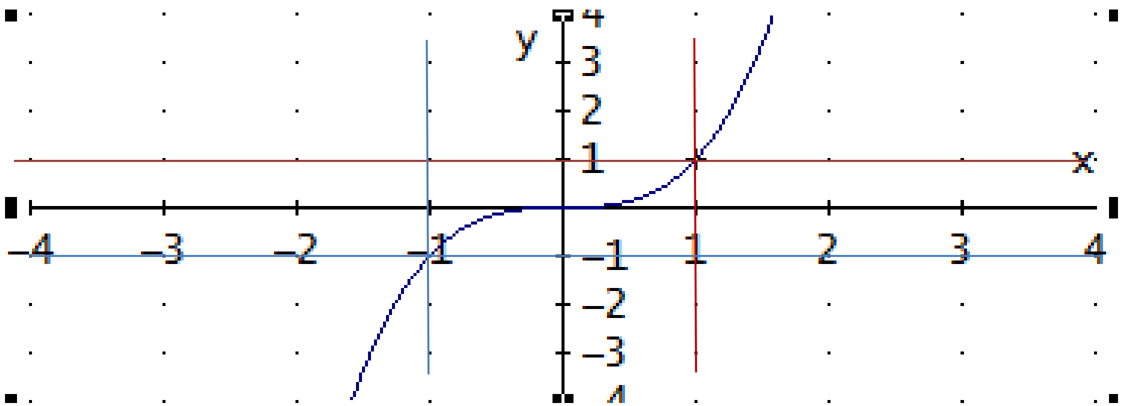


Le funzioni pari sono simmetriche rispetto all'asse delle ordinate.

Funzioni dispari

Una funzione f: $A \subseteq \mathbf{R} \rightarrow B \subseteq \mathbf{R}$ si dice dispari se $\forall x \in \boldsymbol{A}$ $f(x)=-f(-x)$.

$y = ax^3$

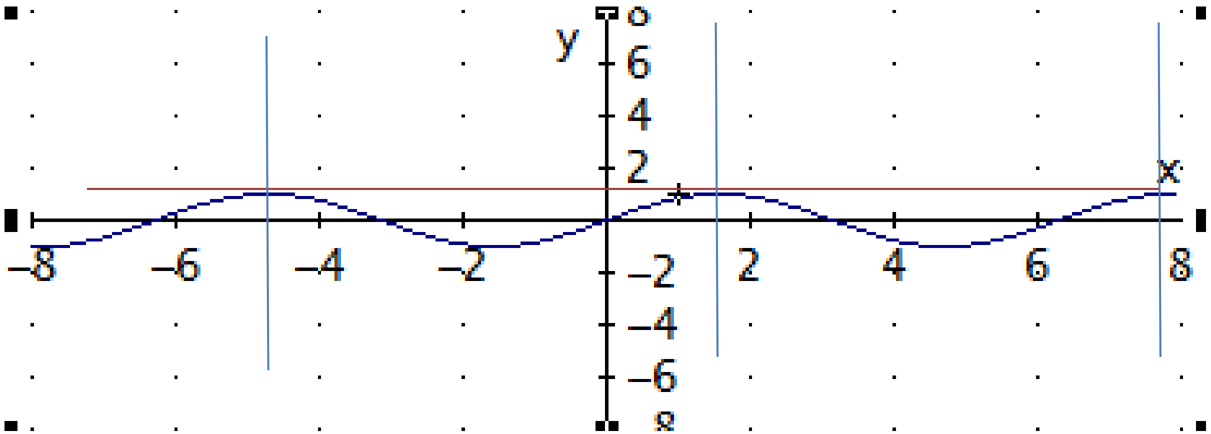


Le funzioni dispari sono simmetriche rispetto all'origine.

Funzioni periodiche

Una funzione f: $A \subseteq \mathbf{R} \rightarrow B \subseteq \mathbf{R}$ si dice periodica di periodo T se $\forall x \in A$ $f(x)=f(x+kT)$.

$y = \sin x$



$$y = e^{\sin x}$$

$$y = \frac{\sin x}{1+\cos x}$$

T=2π

Esercizi

Si consideri la funzione

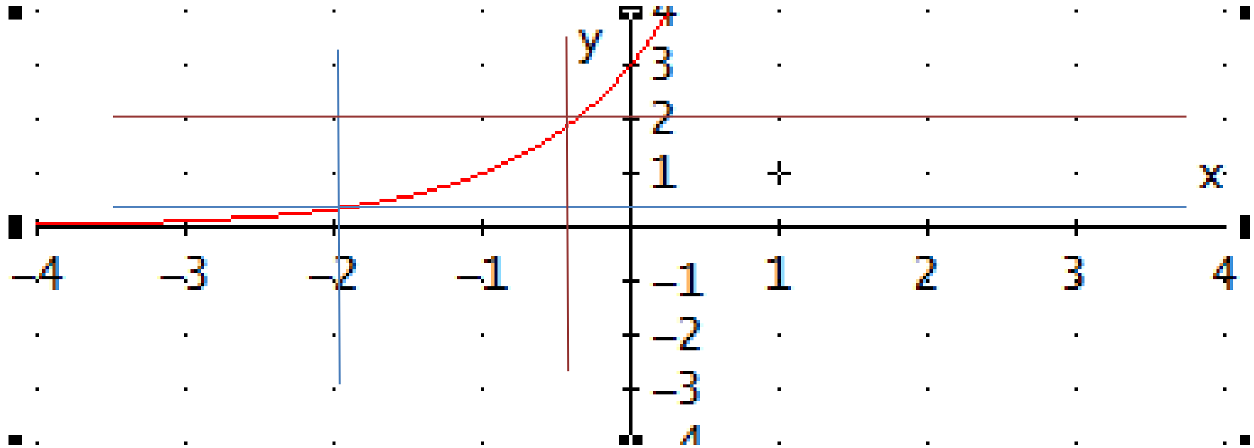
$$
\begin{aligned}
f:\ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\
& x \rightsquigarrow \cos x + x^2
\end{aligned}
$$

Stabilire se la funzione è limitata, pari, dispari, periodica.

Funzione crescente

Una funzione f: $A \subseteq \mathbf{R} \rightarrow B \subseteq \mathbf{R}$ si dice crescente se $\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

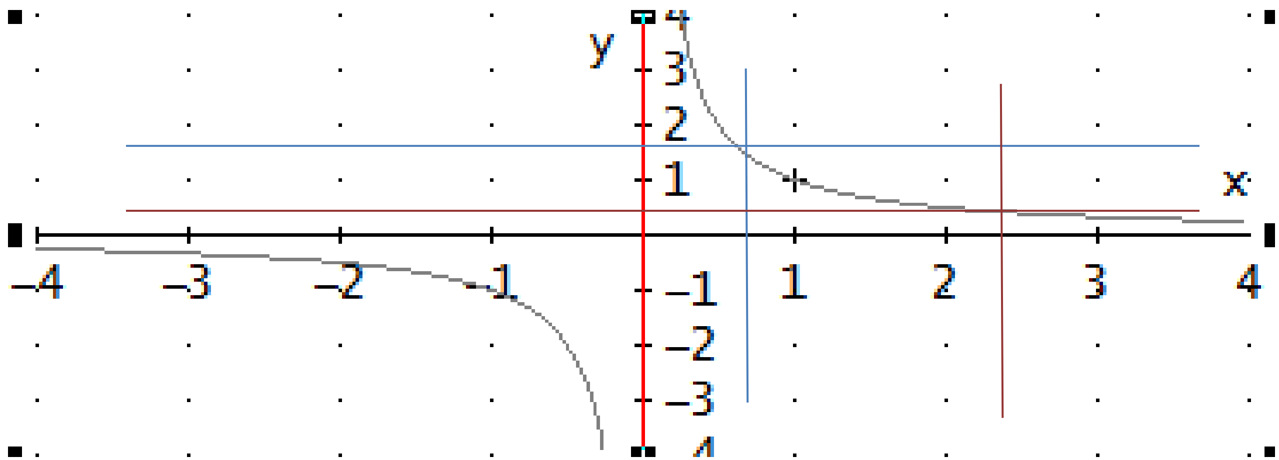
$$y = 3^{x+1}$$



Funzione decrescente

Una funzione $f\colon A \subseteq \mathbf{R} \to B \subseteq \mathbf{R}$ si dice decrescente se $\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

$$y = \frac{1}{x}$$



Funzioni monotòne

Una funzione $f: A \subseteq \mathbf{R} \rightarrow B \subseteq \mathbf{R}$ si dice monotòna in un intervallo $I \subset A$ se è sempre crescente o decrescente in I.

Una funzione si dice monotòna se è sempre crescente (o sempre decrescente) in tutto il suo dominio.

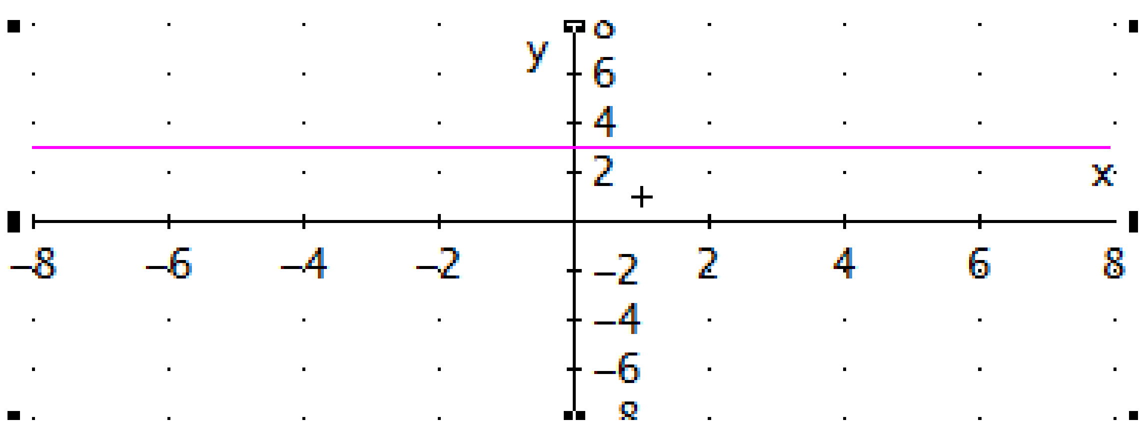
Funzioni monotòne

Una funzione f: $A \subseteq \mathbf{R} \to B \subseteq \mathbf{R}$ si dice costante in un intervallo $I \subset A$ se $f(x)=c$, $\forall x \in I$, $c \in R$.

Una funzione si dice costante se $f(x)=c$ in tutto il suo dominio.

$y=3$

retta parallela all'asse delle x.



Funzioni monotòne

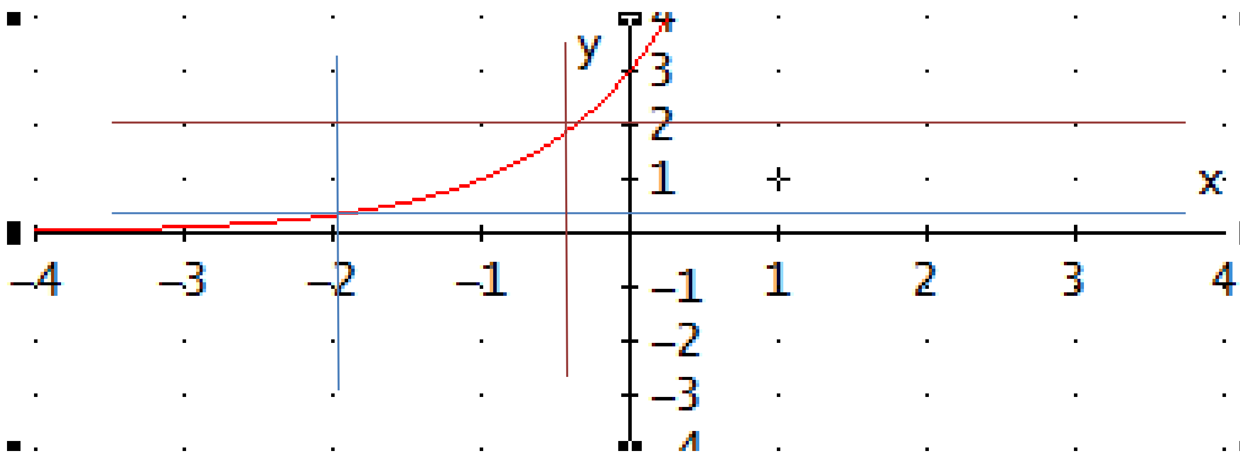
L'accrescimento di una popolazione batterica segue andamenti monotòni e fasi costanti.

Funzione iniettiva

Una funzione f: $A \subseteq \mathbf{R} \rightarrow B \subseteq \mathbf{R}$ si dice iniettiva se

$$\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

$$y = 3^{x+1}$$



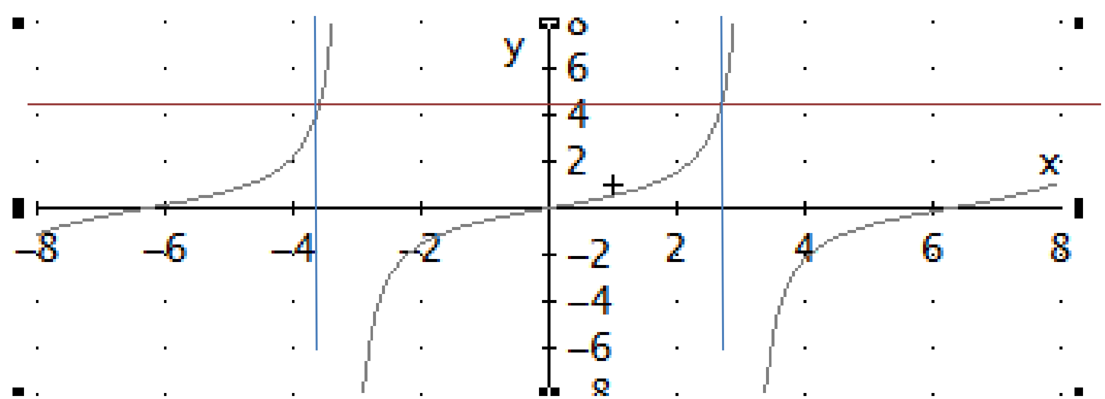
Ogni funzione monotòna in tutto il dominio è iniettiva.

Funzione suriettiva

Una funzione f: A$\subseteq$**R**$\rightarrow$ B$\subseteq$**R** si dice suriettiva se Im(D)=B

Una funzione f: A$\subseteq$**R**$\rightarrow$ B$\subseteq$**R** si dice suriettiva se $\forall y \in B$, $\exists\, x \in A \mid f(x)=y$.

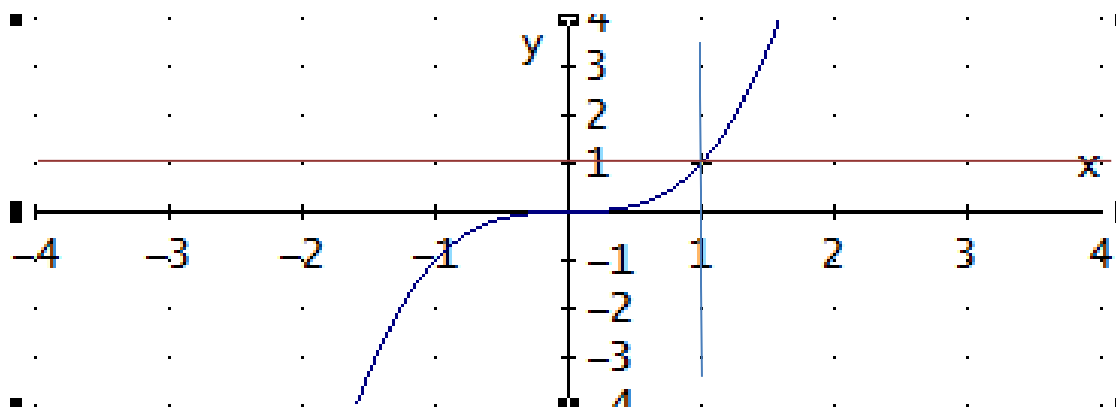
$$y = \tan\left(\frac{x}{2} - \pi\right)$$



Funzione bigettiva o biunivoca

Una funzione f: $A \subseteq \mathbf{R} \rightarrow B \subseteq \mathbf{R}$ si dice bigettiva se è iniettiva e suriettiva.

$y = x^3$



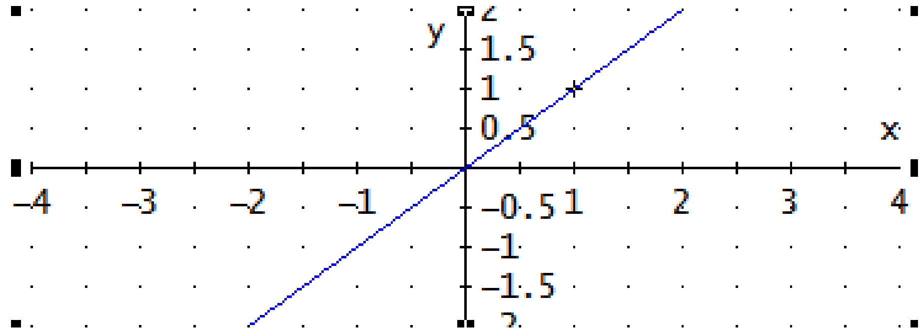
Una funzione è biunivoca nei suoi intervalli di monotònia.

Funzione identità

La funzione identità è una funzione su un insieme che ad ogni elemento del dominio fa corrispondere l'elemento stesso.

$$i: R \rightarrow R$$

$$x \rightsquigarrow y = f(x) = x$$



Composizione di funzioni

Siano date 2 funzioni f e g così definite

$f: A \to B$ $\qquad$ $g: B \to C$

$x \rightsquigarrow y = f(x)$ $\qquad$ $y \rightsquigarrow z = g(y)$

Per poter definire la funzione composta di f e g è indispensabile che il dominio di g sia l'immagine del dominio di f.

Allora la funzione $h = g \circ f: A \to C$

$$x \rightsquigarrow y = g(f(x))$$

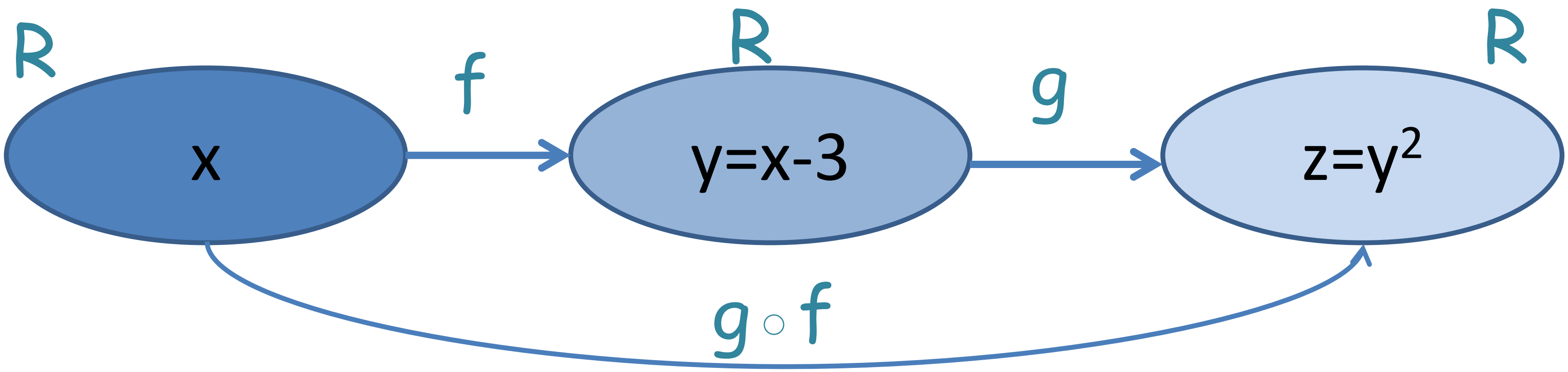
Funzioni composte

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \rightsquigarrow y = x-3$

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$y \rightsquigarrow z = y^2$



$g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

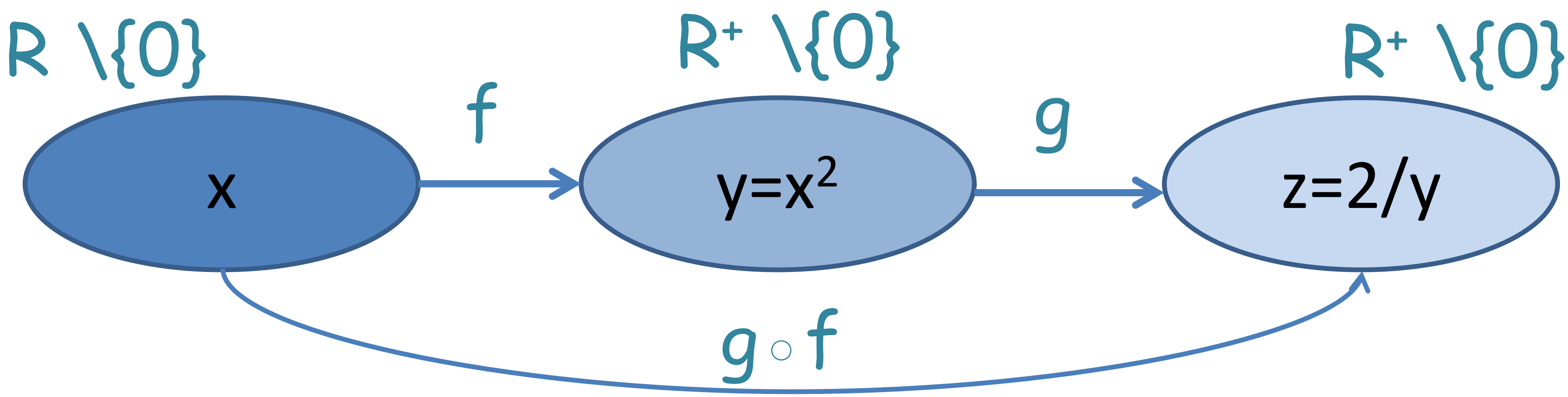
$x \rightsquigarrow z = g(f(x))=(x-3)^2$

In questo caso non abbiamo dovuto imporre restrizioni sul dominio di f e di g per effettuare la composizione

Funzioni composte

$f: R \rightarrow R$
$x \rightsquigarrow y = x^2$

$g: R\setminus\{0\} \rightarrow R$
$y \rightsquigarrow z = 2/y$



$g \circ f : R\setminus\{0\} \rightarrow R^+\setminus\{0\}$
$x \rightsquigarrow z = g(f(x)) = 2/x^2$

In questo caso dobbiamo imporre restrizioni sul dominio di f e di g per poter effettuare la composizione.

Funzioni composte

Determinare il dominio delle seguenti funzioni.

$$y = \sqrt{\frac{x}{x-3}}$$

$$y = \ln(\sqrt[3]{x-2})$$

$$y = e^{\tan x}$$

Funzione inversa

Sia data una funzione <u>biunivoca</u>

$$f: A \to B$$
$$x \rightsquigarrow y = f(x)$$

Si definisce funzione inversa di f la funzione f^{-1}

$$f^{-1}: B \to A$$
$$y \rightsquigarrow x \mid f(x) = y$$

Anche la funzione inversa è biunivoca e invertibile.

Funzione inversa

Se si definisce funzione inversa di f la funzione g tale che $g \circ f = i$ allora posso concludere che $(f^{-1})^{-1} = f$.

Funzione inversa

Funzioni lineari   Rette

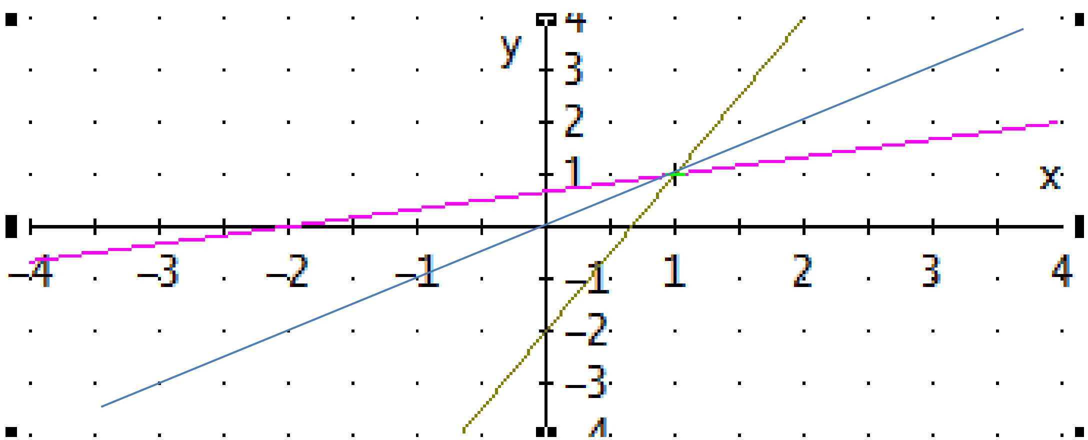
$f: R \to R$

$x \rightsquigarrow y = f(x) = mx+q$

$f^{-1}: R \to R$

$y \rightsquigarrow x = (y-q)/m$

$x \qquad y = (x-q)/m$



Funzione inversa

$f: R \to R$

$x \rightsquigarrow y = f(x)$

grafico di $f = \{(x, f(x))\}$

$f^{-1}: R \to R$

$y \rightsquigarrow x = f^{-1}(y)$

$x \mid f(x) = y$

grafico di $f^{-1} = \{(y, f^{-1}(y))\}$

$= \{(f(x), x)\}$

I grafici di una funzione e della sua inversa sono simmetrici rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante.

Funzione inversa

Ogni funzione monotòna è iniettiva.
Se restringiamo il codominio all'immagine del dominio rendiamo la funzione suriettiva.

Quindi, considerando per il dominio un intervallo per cui la funzione è monotona e restringendo opportunamente il codominio, possiamo rendere ogni funzione R→ R biunivoca e quindi invertibile.

Funzione inversa

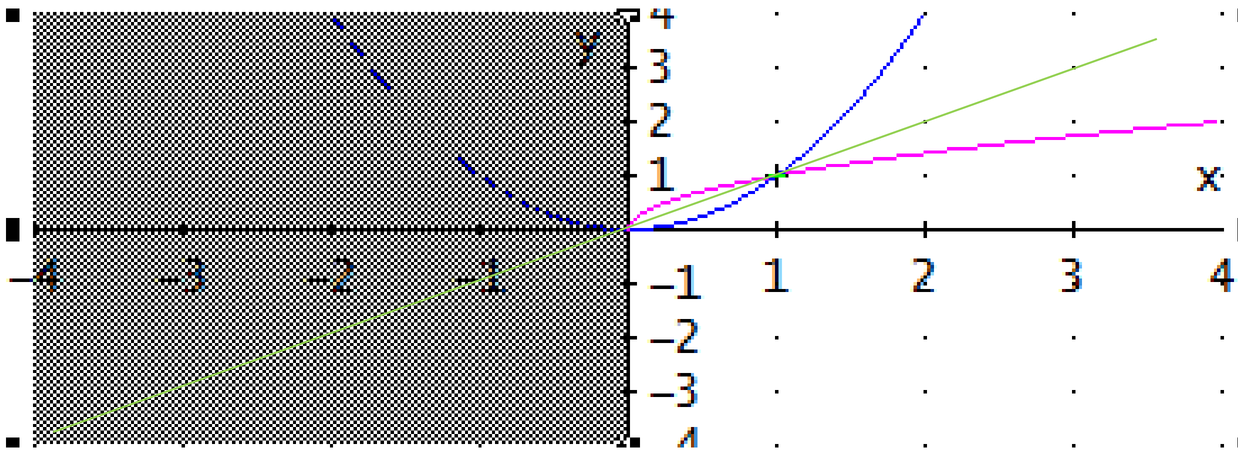
Polinomi di secondo grado

$f: R+ \rightarrow R+$

$x \rightsquigarrow y = x^2$

$f^{-1}: R+ \rightarrow R+$

$y \rightsquigarrow x = \sqrt{y}$



Funzione inversa

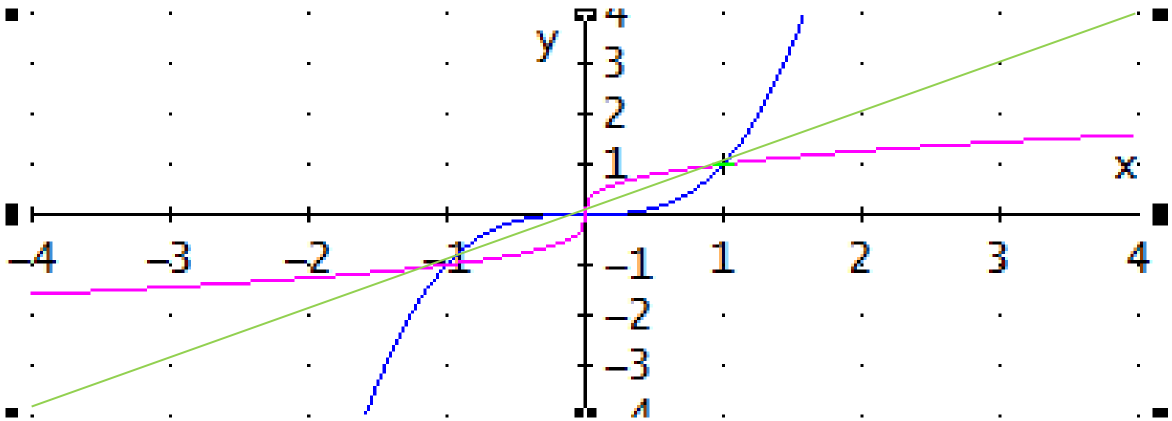
Polinomi di terzo grado

$f: R \to R$

$x \rightsquigarrow y = x^3$

$f^{-1}: R \to R$

$y \rightsquigarrow x = \sqrt[3]{y}$



Funzione inversa

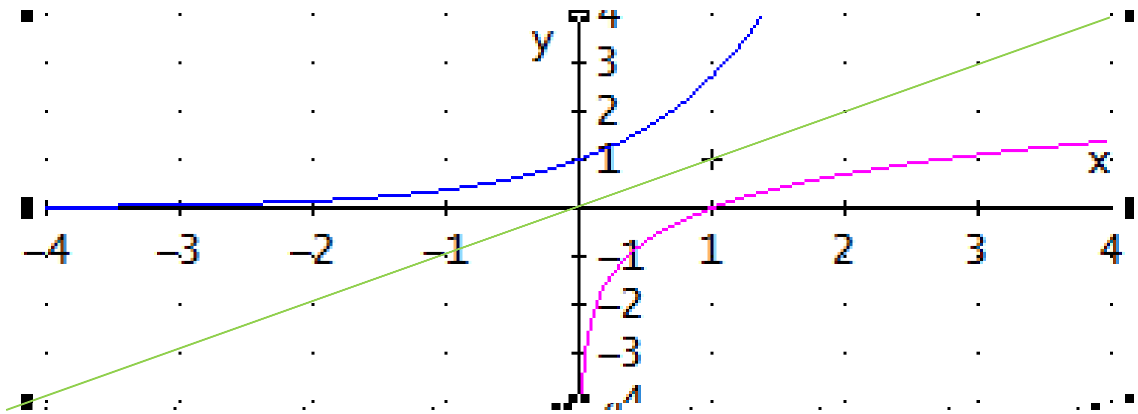
Esponenziali

$f: R \to R+\backslash\{0\}$

$x \rightsquigarrow y = e^x$

$f^{-1}: R+\backslash\{0\} \to R$

$y \rightsquigarrow x = \ln y$

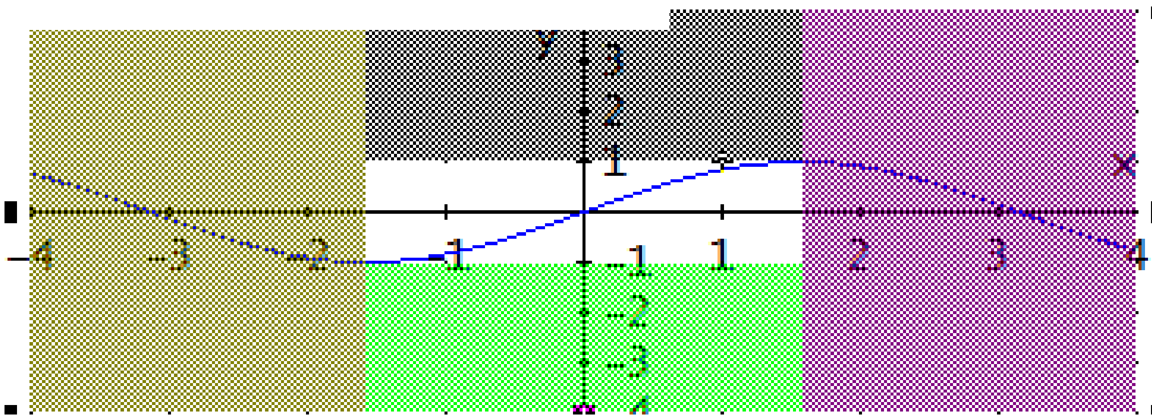


Funzione inversa

Sinusoide

f: [-π/2, π/2] → [-1,1]

$x \rightsquigarrow y = \sin x$



Funzione inversa

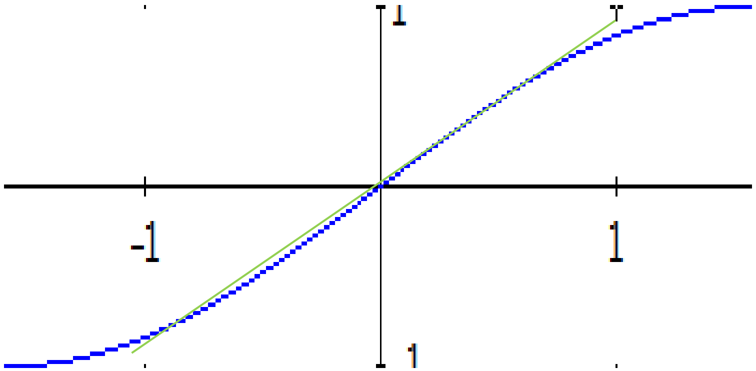
Sinusoide

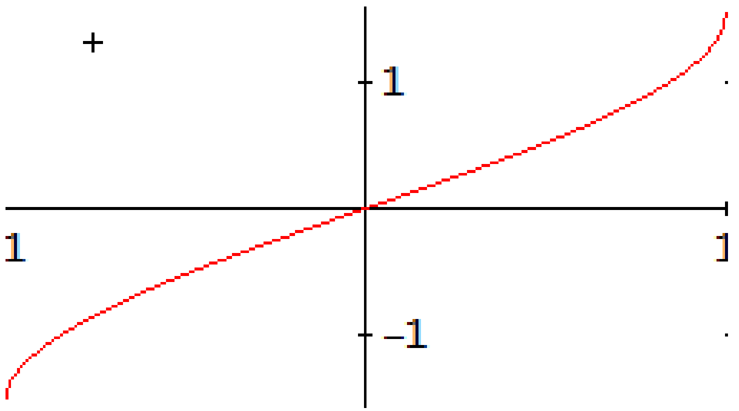
$f: [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow [-1,1]$

$x \rightsquigarrow y = \sin x$

$f^{-1}: [-1,1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$

$y \rightsquigarrow x = \arcsin y$



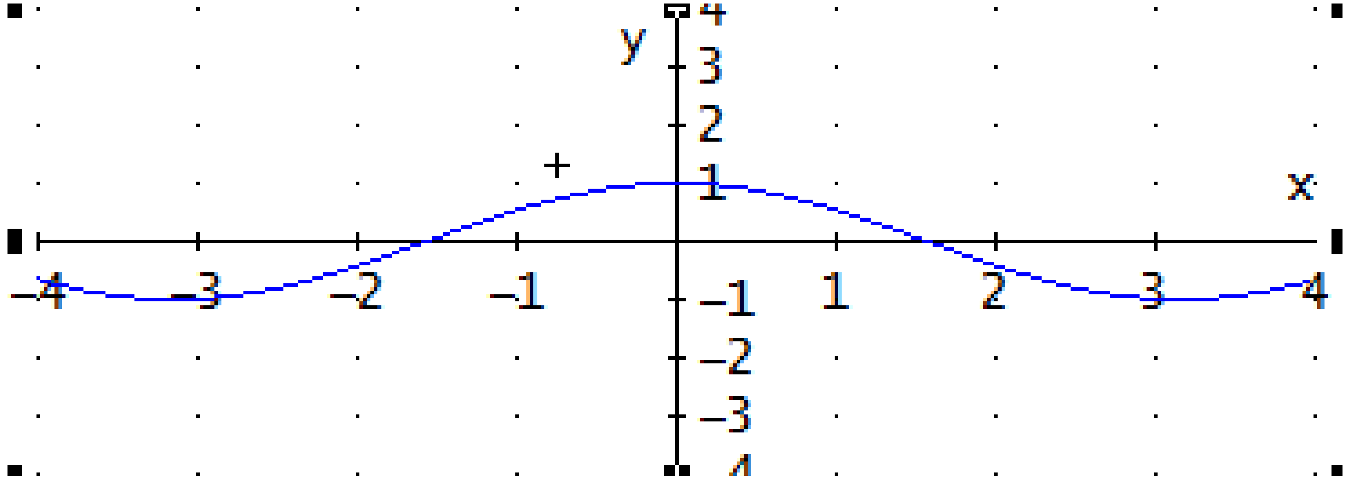


Funzione inversa

Cosinusoide

$f: R \to R$

$x \rightsquigarrow y = \cos x$



Funzione inversa

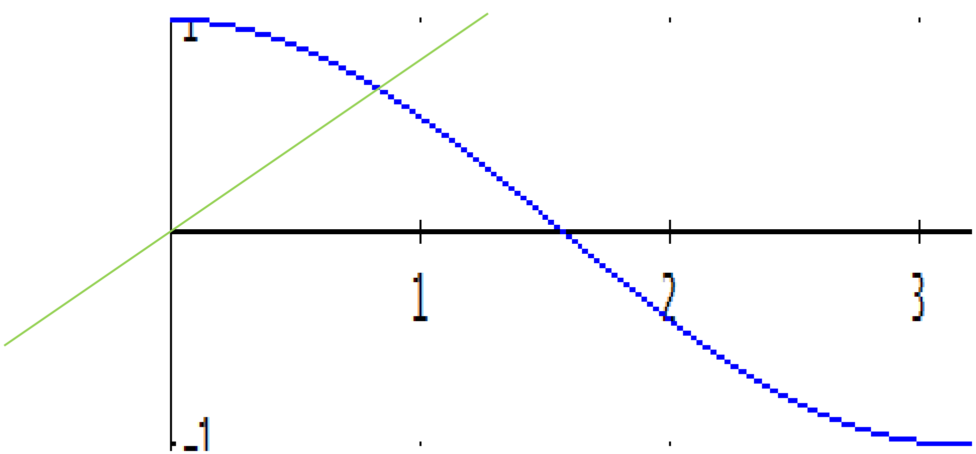
Cosinusoide

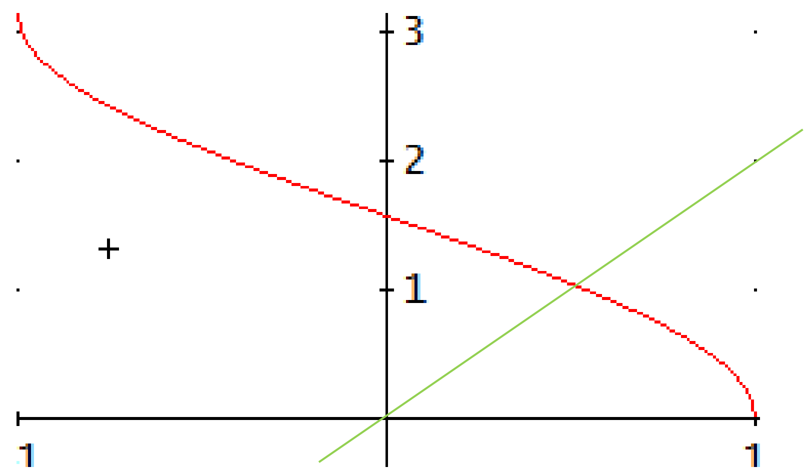
$f: [0, \pi] \to [-1,1]$

$x \rightsquigarrow y = \cos x$

$f^{-1}: [-1,1] \to [0, \pi]$

$y \rightsquigarrow x = \arccos y$



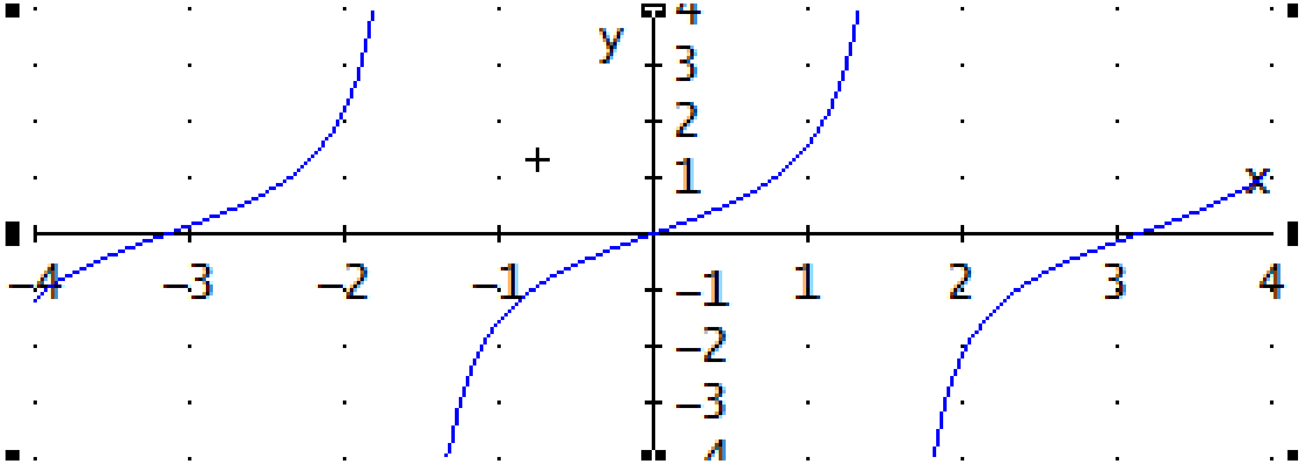


Funzione inversa

Tangentoide

$f: R \to R$

$x \rightsquigarrow y = \tan x$



Funzione inversa

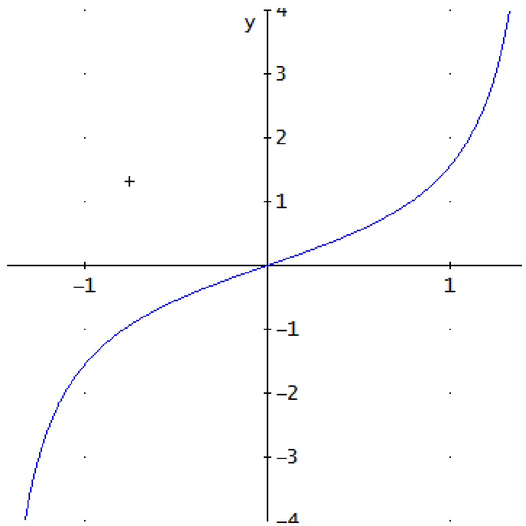
Tangentoide

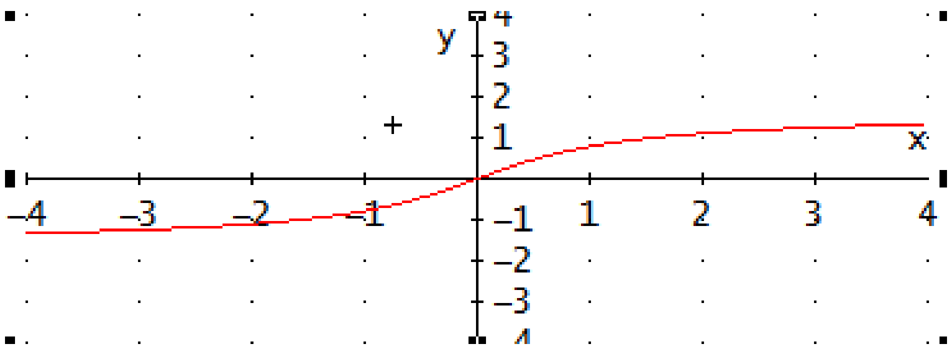
$f: (-\pi/2, \pi/2) \to R$

$x \rightsquigarrow y = \tan x$

$f^{-1}: R \to (-\pi/2, \pi/2)$

$y \rightsquigarrow x = \arctan y$





Intersezioni con gli assi

La ricerca dell'intersezione tra due curve del piano consiste nel determinare i punti del piano comuni alle due curve.

Intersezione con asse x

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases}$$

Intersezione con asse y

$$\begin{cases} y = f(x) \\ x = 0 \end{cases}$$

Studio del segno

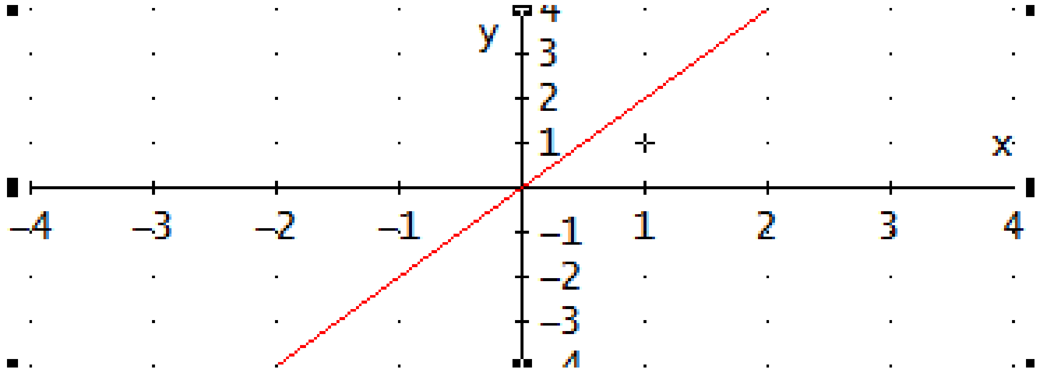
Lo studio del segno di una funzione consente di individuare in quali regioni del piano cartesiano il grafico della funzione sarà al di sopra dell'asse delle x.

Vogliamo individuare per quali valori della x la sua immagine $y > 0$.

Studio del segno

Razionali intere → polinomi

$f(x) > 0$ polinomio >0

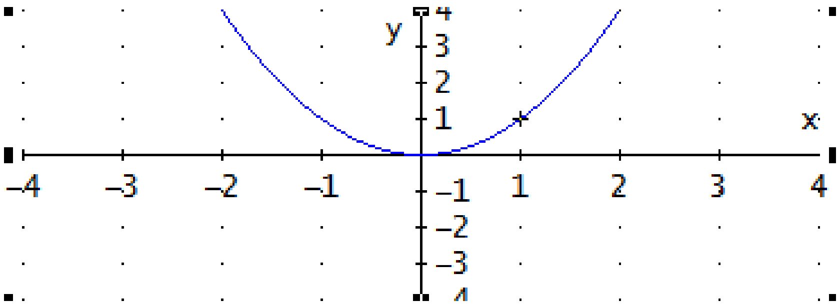


Studio del segno

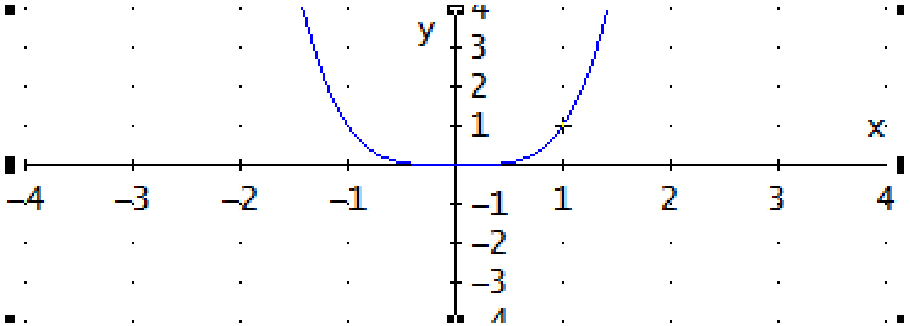
Razionali intere → polinomi

Se il polinomio è la somma di monomi di grado pari a coefficiente positivo, allora la funzione è sempre positiva.

$y = x^2$



$y = x^4$

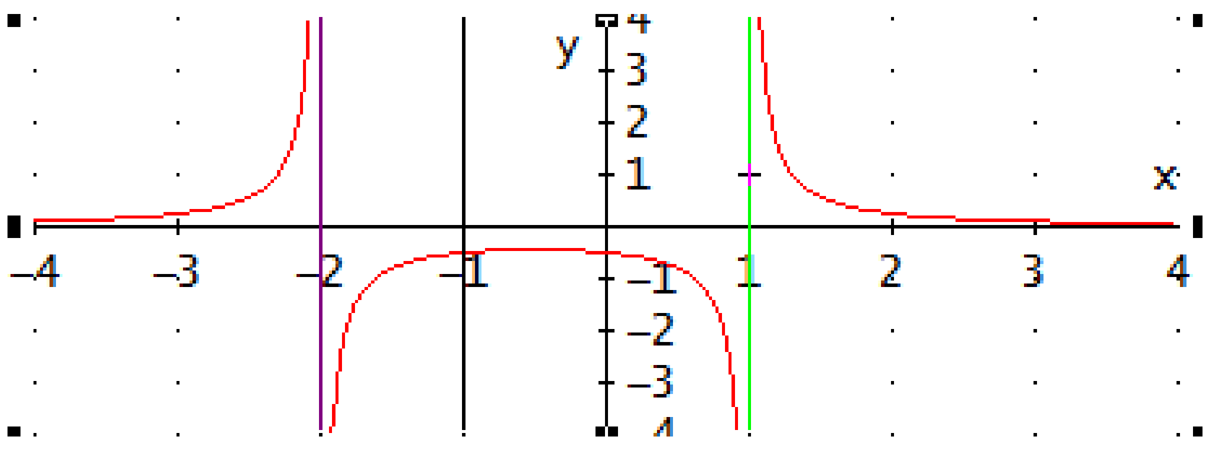


Studio del segno

Razionali fratte

Bisogna risolvere una disequazione fratta.

$$y = \frac{1}{(x-1)(x+2)}$$



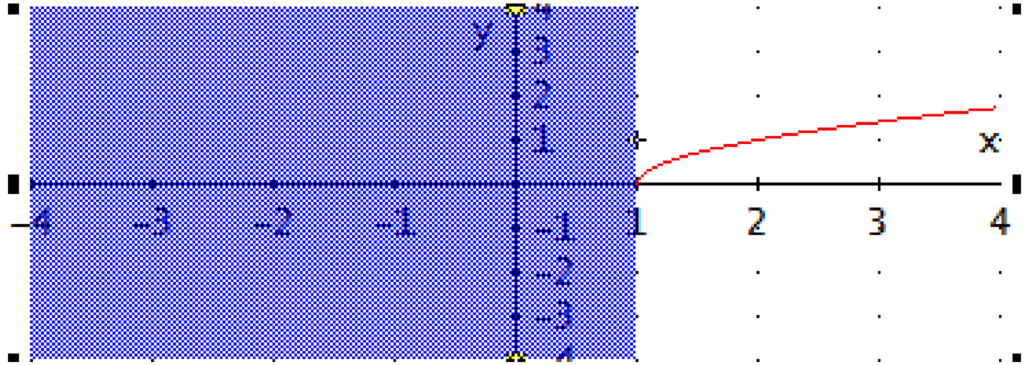
Studio del segno

Irrazionali → radici

Radici di indice pari

Sempre positiva.
Se la radice è preceduta dal segno - allora la funzione è sempre negativa.

$$y = \sqrt{x-1}$$



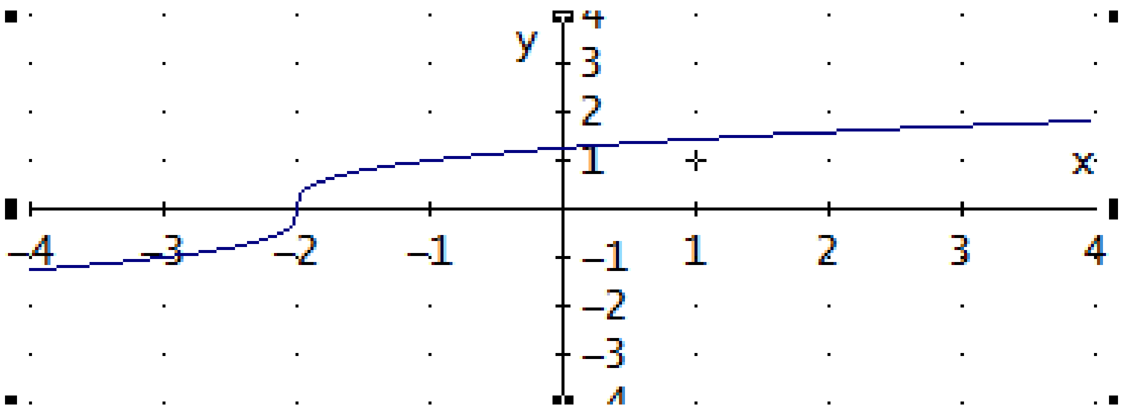
Studio del segno

Irrazionali → radici

Radici di indice dispari

Argomento della radice > 0

$$y = \sqrt[3]{x+2}$$

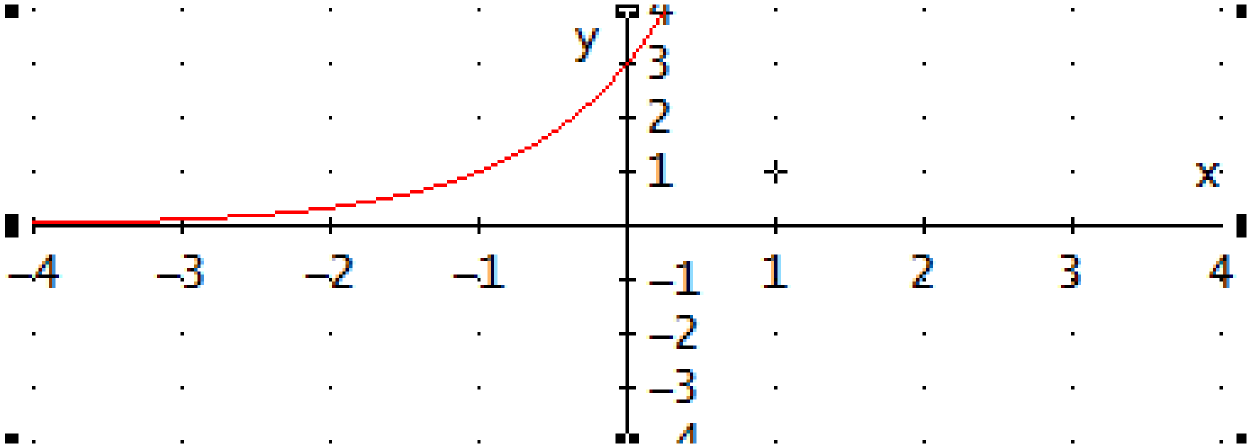


Studio del segno

Esponenziali

Sempre positiva

$$y = 3^{x+1}$$



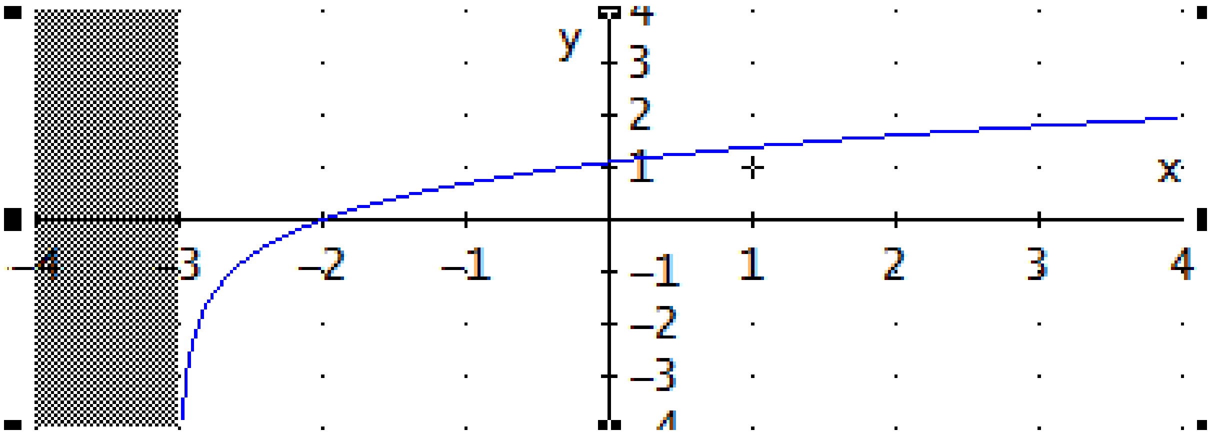
Studio del segno

Logaritmi

Base >1 → Argomento > 1

0<Base <1 → Argomento < 1

$$y = \ln(x+3)$$



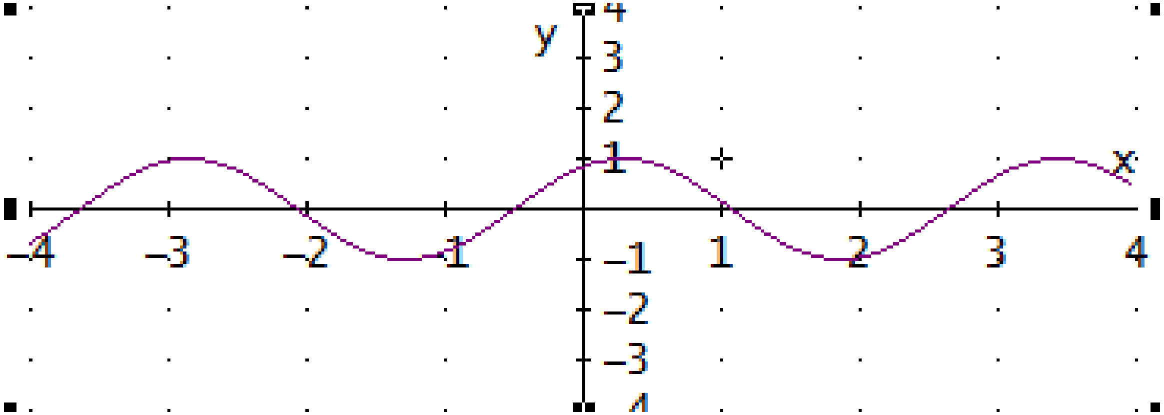
Studio del segno

Trigonometriche

Seno

Disequazione trigonometrica

$$y = \sin(2x+1)$$



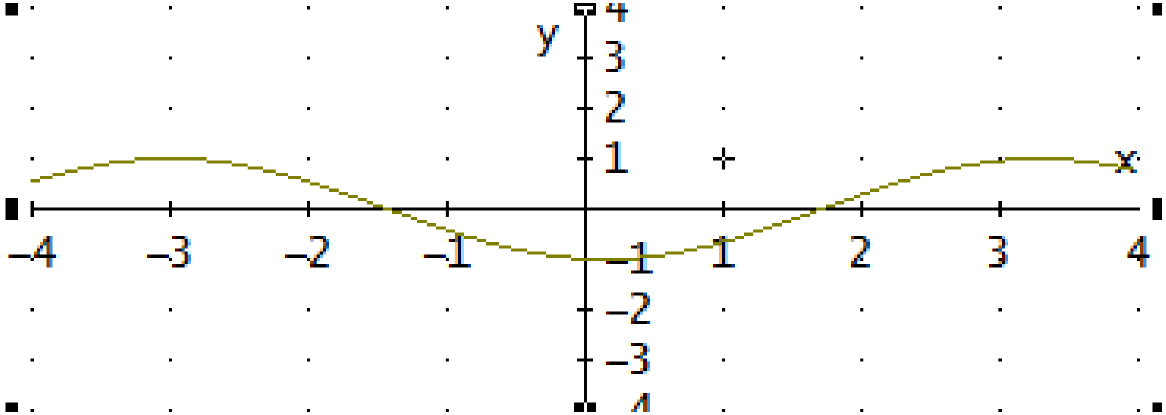
Studio del segno

Trigonometriche

Coseno

Disequazione trigonometrica

$$y = \cos(x+3)$$



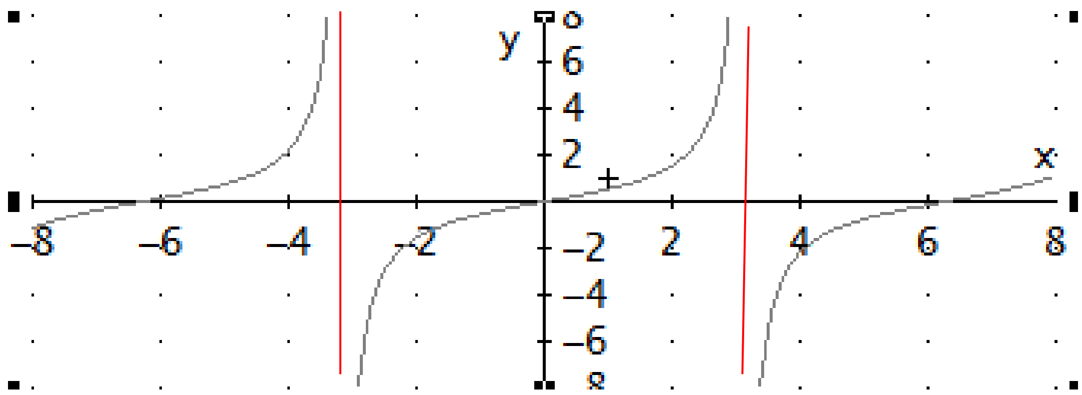
Studio del segno

Trigonometriche

Tangente

Disequazione trigonometrica

$$y = \tan\left(\frac{x}{2} - \pi\right)$$



Studio del segno

Valore assoluto

$$y = |x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{se } x-1 \geq 0 \\ -(x-1) & \text{se } x-1 < 0 \end{cases}$$

Sempre > 0