SORU 1 Aşağıdaki boşluklar öğrenci tarafından doldurulacaktır. (Puan Hariç)

Soyadı:	Adı:	Grup No:	Sıra No:	**Puan**
İmza:	Elektronik Posta(e-mail) adresi:	Öğrenci No:		

Lütfen bu soruyu bu kağıdın ön yüzünü ve gerekirse arka yüzünü kullanarak cevaplayınız.

[12pt] a) $\mathbf{a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + \frac{1}{7^n}}$ dizisinin yakınsaklığını araştırınız.

[13pt] b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n\sqrt{n^4+1}} x^n$ serisinin yakınsaklık yarıçapını, mutlak yakınsak ve şartlı yakınsak olduğu x değerlerini ve yakınsaklık aralığını bulunuz.

(a) $a_1 = 1 \quad a_2 = 1 + \frac{1}{7}, \quad a_3 = 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} \quad \dots \quad a_n = 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{7^{n-1}}$

$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{1-\frac{1}{7}} = \frac{7}{6} \Rightarrow$ dizi yakınsak

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n\sqrt{n^4+1}} x^n$

$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{(n+1)\ x^{n+1}}{5^{n+1}\sqrt{(n+1)^4+1}} \cdot \frac{5^n\sqrt{n^4+1}}{n\ x^n}\right| = \frac{n+1}{n} \frac{\sqrt{n^4+1}}{\sqrt{(n+1)^4+1}} \frac{|x|}{5}$

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{|x|}{5} < 1 \qquad |x| < 5 \Rightarrow R=5$

$-5 < x < 5$ mutlak yakınsaklık aralığı

$x = -5 \qquad \sum (-1)^n \frac{n}{\sqrt{n^4+1}} \qquad 1.\ u_n = \frac{n}{\sqrt{n^4+1}} > 0$

$u_n = \frac{n}{\sqrt{n^4+1}}$

$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^4+1}} \Rightarrow f'(x) = \frac{\sqrt{x^4+1} - x\, 4x^3 \frac{1}{\sqrt{x^4+1}}}{x^4+1} = \frac{x^4+1-4x^4}{(x^4+1)\sqrt{x^4+1}} = \frac{-3x^4+1}{(\quad)} > 0$

$f'(x) < 0$, $f(x)$ azalan $\Rightarrow u_n$ azalan

$u_n = \frac{n}{\sqrt{n^4+1}} \to 0 \Rightarrow$. seri şartlı yakınsak

$x = 5 \qquad \sum \frac{n}{\sqrt{n^4+1}} \qquad \frac{\frac{n}{\sqrt{n^4+1}}}{\frac{1}{n}} = \frac{n^2}{\sqrt{n^4+1}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}} \to 1$

$\sum \frac{1}{n}$ $p=1$ ıraksak old. $\sum \frac{n}{\sqrt{n^4+1}}$ de ıraksak

SORU 2 Aşağıdaki boşluklar öğrenci tarafından doldurulacaktır. (Puan Hariç)

Soyadı:	Adı:	Grup No:	Sıra No:	**Puan**
İmza:	Elektronik Posta(e-mail) adresi:	Öğrenci No:		

`Lütfen bu soruyu bu kağıdın ön yüzünü ve gerekirse arka yüzünü kullanarak cevaplayınız.`

[12pt] a) $\mathbf{x = 3}$ de $\mathbf{f(x) = \ln x}$ fonksiyonu ile doğrulan Taylor serisini bulunuz.
[13pt] b) $\ln \mathbf{5}$ in değerini $\mathbf{10^{-1}}$ den daha küçük bir hata ile hesaplayınız.

$$f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$f''(x) = (-1)\, x^{-2}$$

$$f'''(x) = (-1)(-2)\, x^{-3}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{x^n} \qquad n \geq 1$$

$$f^{(n)}(3) = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{3^n}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(3)}{n!} (x-3)^n = \ln 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\, 3^n} (x-3)^n$$

$$\ln 3 + \frac{1}{3}(x-3) - \frac{(x-3)^2}{2 \cdot 3^2} + - - + (-1)^{n+1} \frac{(x-3)^n}{n \cdot 3^n} + \cdots$$

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| \frac{(x-3)^{n+1}}{(n+1)\, 3^{n+1}} \frac{n\, 3^n}{(x-3)^n} \right| = \frac{n}{n+1} \frac{|x-3|}{3}$$

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{|x-3|}{3} < 1 \Rightarrow |x-3| < 3$$

$$-3 < x-3 < 3$$

$$0 < x < 6$$

$$\ln 5 = \ln 3 + \frac{1}{3} \cdot 2 - \frac{2^2}{2 \cdot 3^2} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{2^n}{n\, 3^n} + R_n(5)$$

$$R_n(5) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} 2^{n+1} = \frac{1}{n+1} \frac{(-1)^{n+2}}{c^{n+1}} 2^{n+1} \qquad 3 < c < 5$$

$$|R_n(5)| = \frac{1}{n+1} \frac{2^{n+1}}{c^{n+1}} < \frac{1}{n+1} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} < 10^{-1}$$

$$n=1 \qquad \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{2 \cdot 3^2} = \frac{2}{9} \nless 10^{-1}$$

$$n=2 \qquad \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{81} < 10^{-1}$$

$$\ln 5 = \ln 3 + \frac{2}{3} - \frac{2^2}{2 \cdot 3^2}$$

SORU 3

Aşağıdaki boşluklar öğrenci tarafından doldurulacaktır.

Öğrenci No:	Elektronik posta (e-mail) adresi:	Grup No:	Sıra No:	Puan
Adı:	Soyadı:		Imza:	

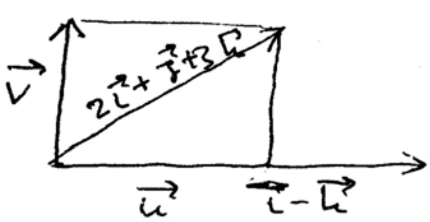
Lütfen bu soruyu yalnız bu kağıdın ön yüzünü ve gerekirse arka yüzünü kullanarak cevaplandırınız.

a)[10p.] $\vec{u}$ vektörü $\vec{i}-\vec{k}$ vektörüne paralel, $\vec{v}$ vektörü $\vec{i}-\vec{k}$ vektörüne dik olmak üzere $\vec{u}+\vec{v}=2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$ eşitliğini sağlayan $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörlerini bulunuz.

b)[15p.] $L_1: x=1+t, y=-1+t, z=t$ $(-\infty<t<\infty)$ doğrusunu dik kesen ve $6y+3z-4x=0$ düzleminde kalan doğrunun denklemini bulunuz.

a) $\vec{u}$ = $2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$ vektörünün $\vec{i}-\vec{k}$ vektörü üzerinde izdüşümü

$$\vec{u}=\left(\frac{(2\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k})\cdot(\vec{i}-\vec{k})}{|\vec{i}-\vec{k}|^2}\right)(\vec{i}-\vec{k})=-\frac{\vec{i}}{2}+\frac{\vec{k}}{2}$$



$$\vec{V}=2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}-\vec{u}$$
$$=\frac{5}{2}\vec{i}+\vec{j}+\frac{5}{2}\vec{k}$$

b) Verilen düzlem $6y+3z-4x=0$

Verilen doğru $x=1+t$, $y=-1+t$, $z=t$

İstenen doğru L

Verilen doğrunun düzlemi kestiği nokta aynı zamanda aradığımız doğruya ait olacaktır.

$6(-1+t)+3t-4(1+t)=0$: $6t+3t-4t=6+4$

$t=\underline{2}$

$x=3$, $y=1$, $z=2$ $\quad (3,1,2)$

L doğrusunun doğrultu vektörü hem düzlemin normaline hem de verilen doğrunun doğrultu vektörüne dik olduğundan bu ikisinin vektörel çarpımı yönündedir, $-\infty<t<\infty$

$$\vec{V}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -4 & 6 & 3\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=3\vec{i}+7\vec{j}-10\vec{k}\Rightarrow L: x=3t+3,\ y=7t+1$$
$$z=2-10t \text{ dir}$$

MAT 102 ARASINAVI 13 TEMMUZ 2010

SORU 4 Aşağıdaki boşluklar öğrenci tarafından doldurulacaktır.

Öğrenci No:	Elektronik posta (e-mail) adresi:	Grup No:	Sıra No:	Puan
Adı:	Soyadı:		İmza:	

Lütfen bu soruyu yalnız bu kağıdın ön yüzünü ve gerekirse arka yüzünü kullanarak cevaplandırınız.

a)[13p.] C eğrisi $x = 2+\sqrt{2}\cos t$, $y = 1-\sin t$, $z = 3+\sin t$ denklemleri ile parametrize edilmiş olsun. C eğrisinin yay uzunluğu parametresini $t_0 = 0$ için bulup bunu eğrinin $0 \le t \le \pi$ aralığı için uzunluğunu hesaplamada kullanınız.

b)[12p.] Bir parçacık $\vec{r}(t)$ vektörel fonksiyonu ile parametrize edilmiş bir eğri boyunca hareket etsin ve $|\vec{r}(t)|$ sabit olsun. Parçacığın hız vektörü $\vec{v}(t)$ ile konum vektörü $\vec{r}(t)$' nin birbirine dik olduklarını gösteriniz.

a) $\vec{r}(t) = (2+\sqrt{2}\cos t)\vec{i} + (1-\sin t)\vec{j} + (3+\sin t)\vec{k}$

$\vec{r}(t)' = \vec{v}(t) = -\sqrt{2}\sin t\,\vec{i} - \cos t\,\vec{j} + \cos t\,\vec{k}$

$|\vec{v}(t)| = \sqrt{2\sin^2 t + \cos^2 t + \cos^2 t} = \sqrt{2}$

$S(t) = \int_0^t |\vec{v}(z)|\,dz = \int_0^t \sqrt{2}\,dz = \sqrt{2}\,t$

$\Rightarrow$ uzunluk $t = 0, \pi$ $\boxed{L = \sqrt{2}\,\pi}$

b) $|\vec{r}(t)| = k = \text{sabit}$

$|\vec{r}(t)|^2 = \vec{r}(t)\cdot\vec{r}(t) = k^2 = \text{sabit}$

turev alırsak

$\frac{d}{dt}(\vec{r}(t)\cdot\vec{r}(t)) = 0 \qquad 2\vec{r}\,'(t)\cdot\vec{r}(t) = 0$

$\vec{v}(t)\cdot\vec{r}(t) = 0 \Rightarrow \vec{v} \perp \vec{r}$

$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}}$