

Ayrık Matematik

Yüklemeler ve Kümeler

H. Turgut Uyar Ayşegül Gençata Yayımlı Emre Harmancı

2001-2013

Lisans



©2001-2013 T. Uyar, A. Yayımlı, E. Harmancı

You are free:

- ▶ to Share – to copy, distribute and transmit the work
- ▶ to Remix – to adapt the work

Under the following conditions:

- ▶ Attribution – You must attribute the work in the manner specified by the author or licensor (but not in any way that suggests that they endorse you or your use of the work).
- ▶ Noncommercial – You may not use this work for commercial purposes.
- ▶ Share Alike – If you alter, transform, or build upon this work, you may distribute the resulting work only under the same or similar license to this one.

Legal code (the full license):

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/>

Konular

Yüklemeler

Giriş
Niceleyiciler
Çoklu Niceleyiciler

Kümeler

Giriş
Altküme
Küme İşlemleri
İçleme-Dışlama

1 / 43

2 / 43

Çalışma Evreni

Tanım

çalışma evreni: \mathcal{U}

izin verilen seçenekler kümesi

▶ örnekler:

- ▶ \mathbb{Z} : tamsayılar
- ▶ \mathbb{N} : doğal sayılar
- ▶ \mathbb{Z}^+ : pozitif tamsayılar
- ▶ \mathbb{Q} : rasyonel sayılar
- ▶ \mathbb{R} : reel sayılar
- ▶ \mathbb{C} : karmaşık sayılar

3 / 43

4 / 43

Yüklem Örnekleri

Örnek

$\mathcal{U} = \mathbb{N}$

$p(x)$: $x + 2$ bir çift sayıdır

$p(5)$: Y

$p(8)$: D

$\neg p(x)$: $x + 2$ bir çift sayı değildir

Örnek

$\mathcal{U} = \mathbb{N}$

$q(x, y)$: $x + y$ ve $x - 2y$ birer çift sayıdır

$q(11, 3)$: Y , $q(14, 4)$: D

5 / 43

6 / 43

Niceleyiciler

Tanım
varlık niceleyicisi:
yüklem bazı değerler için doğru

- ▶ simgesi: \exists
- ▶ okunuşu: *vardır*
- ▶ simge: $\exists!$
- ▶ okunuşu: *vardır ve tektir*

Tanım
evrensel niceleyici:
yüklem bütün değerler için doğru

- ▶ simgesi: \forall
- ▶ okunuşu: *her*

Niceleyiciler

varlık niceleyici

$\mathcal{U} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$
 $\exists x p(x) \equiv p(x_1) \vee p(x_2) \vee \dots \vee p(x_n)$

- ▶ *bazı x'ler için p(x) doğru*

evrensel niceleyici

$\mathcal{U} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$
 $\forall x p(x) \equiv p(x_1) \wedge p(x_2) \wedge \dots \wedge p(x_n)$

- ▶ *her x için p(x) doğru*

7 / 43

8 / 43

Niceleyici Örnekleri

Örnek

$$\mathcal{U} = \mathbb{R}$$

- ▶ $p(x) : x \geq 0$
- ▶ $q(x) : x^2 \geq 0$
- ▶ $r(x) : (x-4)(x+1) = 0$
- ▶ $s(x) : x^2 - 3 > 0$

yandaki ifadeler doğru mudur?

- ▶ $\exists x [p(x) \wedge r(x)]$
- ▶ $\forall x [p(x) \rightarrow q(x)]$
- ▶ $\forall x [q(x) \rightarrow s(x)]$
- ▶ $\forall x [r(x) \vee s(x)]$
- ▶ $\forall x [r(x) \rightarrow p(x)]$

Niceleyicilerin Değillenmesi

- ▶ \forall yerine \exists , \exists yerine \forall konur
- ▶ yüklem değillenir

$$\begin{aligned}\neg \exists x p(x) &\Leftrightarrow \forall x \neg p(x) \\ \neg \exists x \neg p(x) &\Leftrightarrow \forall x p(x) \\ \neg \forall x p(x) &\Leftrightarrow \exists x \neg p(x) \\ \neg \forall x \neg p(x) &\Leftrightarrow \exists x p(x)\end{aligned}$$

9 / 43

10 / 43

Niceleyicilerin Değillenmesi

Teorem

$$\neg \exists x p(x) \Leftrightarrow \forall x \neg p(x)$$

Tanıt.

$$\begin{aligned}\neg \exists x p(x) &\equiv \neg [p(x_1) \vee p(x_2) \vee \dots \vee p(x_n)] \\ &\Leftrightarrow \neg p(x_1) \wedge \neg p(x_2) \wedge \dots \wedge \neg p(x_n) \\ &\equiv \forall x \neg p(x)\end{aligned}$$

□

11 / 43

Niceleyici Eşdeğerlilikleri

Teorem

$$\exists x [p(x) \vee q(x)] \Leftrightarrow \exists x p(x) \vee \exists x q(x)$$

Teorem

$$\forall x [p(x) \wedge q(x)] \Leftrightarrow \forall x p(x) \wedge \forall x q(x)$$

12 / 43

Niceleyici Gerektirmeleri

Teorem

$$\forall x \ p(x) \Rightarrow \exists x \ p(x)$$

Teorem

$$\exists x \ [p(x) \wedge q(x)] \Rightarrow \exists x \ p(x) \wedge \exists x \ q(x)$$

Teorem

$$\forall x \ p(x) \vee \forall x \ q(x) \Rightarrow \forall x \ [p(x) \vee q(x)]$$

Çoklu Niceleyiciler

► $\exists x \exists y \ p(x, y)$

► $\forall x \exists y \ p(x, y)$

► $\exists x \forall y \ p(x, y)$

► $\forall x \forall y \ p(x, y)$

13 / 43

14 / 43

Çoklu Niceleyici Örnekleri

Örnek

$$\mathcal{U} = \mathbb{Z}$$

$$p(x, y) : x + y = 17$$

- $\forall x \exists y \ p(x, y)$:
her x için öyle bir y bulunabilir ki $x + y = 17$ olur
- $\exists y \forall x \ p(x, y)$:
öyle bir y bulunabilir ki her x için $x + y = 17$ olur
- $\mathcal{U} = \mathbb{N}$ olsa?

15 / 43

16 / 43

Çoklu Niceleyiciler

Örnek

$$\mathcal{U}_x = \{1, 2\} \wedge \mathcal{U}_y = \{A, B\}$$

$$\begin{aligned}\exists x \exists y \ p(x, y) &\equiv [p(1, A) \vee p(1, B)] \vee [p(2, A) \vee p(2, B)] \\ \exists x \forall y \ p(x, y) &\equiv [p(1, A) \wedge p(1, B)] \vee [p(2, A) \wedge p(2, B)] \\ \forall x \exists y \ p(x, y) &\equiv [p(1, A) \vee p(1, B)] \wedge [p(2, A) \vee p(2, B)] \\ \forall x \forall y \ p(x, y) &\equiv [p(1, A) \wedge p(1, B)] \wedge [p(2, A) \wedge p(2, B)]\end{aligned}$$

Kaynaklar

Okunacak: Grimaldi

- Chapter 2: Fundamentals of Logic
 - 2.4. The Use of Quantifiers

Yardımcı Kitap: O'Donnell, Hall, Page

- Chapter 7: Predicate Logic

15 / 43

16 / 43

Küme

Tanım

küme:

- birbirinden ayrıt edilebilien
 - aralarında sıralama yapılmamış
 - yinelenmeyen
- elemanlar topluluğu

17 / 43

18 / 43

Küme Gösterilimi

- ▶ **açık gösterilim**
elemanlar süslü parantezler içinde listelenir: $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$
- ▶ **kapalı gösterilim**
bir yüklemi doğru kılan elemanlar: $\{x|x \in G, p(x)\}$
- ▶ \emptyset : boş küme
- ▶ S bir küme, a bir nesne olsun
 - ▶ $a \in S$: a nesnesi S kümesinin elemanıdır
 - ▶ $a \notin S$: a nesnesi S kümesinin elemanı değildir
- ▶ $|S|$: eleman sayısı (**kardinalite**)

19 / 43

Açık Gösterilim Örneği

Örnek

$$\begin{aligned} &\{3, 8, 2, 11, 5\} \\ &11 \in \{3, 8, 2, 11, 5\} \\ &|\{3, 8, 2, 11, 5\}| = 5 \end{aligned}$$

20 / 43

Kapalı Gösterilim Örnekleri

Örnek

$$\begin{aligned} &\{x|x \in \mathbb{Z}^+, 20 < x^3 < 100\} \equiv \{3, 4\} \\ &\{2x - 1|x \in \mathbb{Z}^+, 20 < x^3 < 100\} \equiv \{5, 7\} \end{aligned}$$

Örnek

$$A = \{x|x \in \mathbb{R}, 1 \leq x \leq 5\}$$

Örnek

$$\begin{aligned} E &= \{n|n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N} [n = 2k]\} \\ A &= \{x|x \in E, 1 \leq x \leq 5\} \end{aligned}$$

21 / 43

Küme İkilemi

- ▶ Bir köyde bir berber yaşıyor.
Kendi traş olmayan herkesi traş ediyor,
Kendi traş olan kimseyi traş etmiyor.
Bu berber kendi traş olur mu?
- ▶ evet → ama kendi traş olan kimseyi traş etmiyor
→ hayır
- ▶ hayır → ama kendi traş olmayan herkesi traş ediyor
→ evet

22 / 43

Küme İkilemi

- ▶ S kendisinin elemanı olmayan kümeler kümesi olsun
 $S = \{A|A \notin A\}$
S kendinin elemanı mıdır?
- ▶ evet → ama yüklemi sağlamaz → hayır
- ▶ hayır → ama yüklemi sağlar → evet

23 / 43

Altküme

Tanım

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x [x \in A \rightarrow x \in B]$$

- ▶ **küme eşitliği:**
 $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$
- ▶ **uygun altküme:**
 $A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (A \neq B)$
- ▶ $\forall S [\emptyset \subseteq S]$

24 / 43

Altküme

altküme değil

$$\begin{aligned} A \not\subseteq B &\Leftrightarrow \neg \forall x [x \in A \rightarrow x \in B] \\ &\Leftrightarrow \exists x \neg [x \in A \rightarrow x \in B] \\ &\Leftrightarrow \exists x \neg [\neg(x \in A) \vee (x \in B)] \\ &\Leftrightarrow \exists x [(x \in A) \wedge \neg(x \in B)] \\ &\Leftrightarrow \exists x [(x \in A) \wedge (x \notin B)] \end{aligned}$$

25 / 43

Altkümeler Kümesi

Tanım

altkümeler kümesi: $\mathcal{P}(S)$

bir kümenin bütün altkümlerinin oluşturduğu küme,
boş küme ve kendisi dahil

- n elemanlı bir kümenin altkümler kümesinin 2^n elemanı vardır

26 / 43

Altkümeler Kümesi Örneği

Örnek

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) = & \{ \\ & \emptyset, \\ & \{1\}, \{2\}, \{3\}, \\ & \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \\ & \{1, 2, 3\} \} \end{aligned}$$

27 / 43

Küme İşlemleri

tümleme

$$\overline{A} = \{x | x \notin A\}$$

kesişim

$$A \cap B = \{x | (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$

- $A \cap B = \emptyset$ ise A ile B **ayırık kümeler**

birleşim

$$A \cup B = \{x | (x \in A) \vee (x \in B)\}$$

28 / 43

Küme İşlemleri

fark

$$A - B = \{x | (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$$

- $A - B = A \cap \overline{B}$

- **bakışıklı fark:**

$$A \triangle B = \{x | (x \in A \cup B) \wedge (x \notin A \cap B)\}$$

29 / 43

Kartezyen Çarpım

Tanım

Kartezyen çarpım:

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$$

$$A \times B \times C \times \cdots \times N = \{(a, b, \dots, n) | a \in A, b \in B, \dots, n \in N\}$$

- $|A \times B \times C \times \cdots \times N| = |A| \cdot |B| \cdot |C| \cdots |N|$

30 / 43

Kartezyen Çarpım Örneği

Örnek

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$$

$$B = \{b_1, b_2, b_3\}$$

$$A \times B = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_2, b_3), (a_3, b_1), (a_3, b_2), (a_3, b_3), (a_4, b_1), (a_4, b_2), (a_4, b_3)\}$$

31 / 43

Eşdeğerlilikler

Cifte Tümleme

$$\overline{\overline{A}} = A$$

Değişme

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

Birleşme

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

Sabit Kuvvetlilik

$$A \cap A = A$$

$$A \cup A = A$$

Terslik

$$A \cap \overline{A} = \emptyset$$

$$A \cup \overline{A} = \mathcal{U}$$

32 / 43

Eşdeğerlilikler

Etkisizlik

$$A \cap \mathcal{U} = A$$

$$A \cup \emptyset = A$$

Baskınlık

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$$

Dağılma

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Yutma

$$A \cap (A \cup B) = A$$

$$A \cup (A \cap B) = A$$

De Morgan Yasaları

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

33 / 43

De Morgan Kuralı

Tanıt.

$$\begin{aligned} \overline{A \cap B} &= \{x | x \notin (A \cap B)\} \\ &= \{x | \neg(x \in (A \cap B))\} \\ &= \{x | \neg((x \in A) \wedge (x \in B))\} \\ &= \{x | \neg(x \in A) \vee \neg(x \in B)\} \\ &= \{x | (x \notin A) \vee (x \notin B)\} \\ &= \{x | (x \in \overline{A}) \vee (x \in \overline{B})\} \\ &= \{x | x \in \overline{A} \cup \overline{B}\} \\ &= \overline{A} \cup \overline{B} \end{aligned}$$

□

34 / 43

Eşdeğerlilik Örneği

Teorem

$$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$$

Eşdeğerlilik Örneği

Tanıt.

$$\begin{aligned} (A \cap B) - (A \cap C) &= (A \cap B) \cap (\overline{A \cap C}) \\ &= (A \cap B) \cap (\overline{A} \cup \overline{C}) \\ &= ((A \cap B) \cap \overline{A}) \cup ((A \cap B) \cap \overline{C}) \\ &= \emptyset \cup ((A \cap B) \cap \overline{C}) \\ &= (A \cap B) \cap \overline{C} \\ &= A \cap (B \cap \overline{C}) \\ &= A \cap (B - C) \end{aligned}$$

□

35 / 43

36 / 43

İçleme-Dışlama İlkesi

- ▶ $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
- ▶ $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) + |A \cap B \cap C|$

Teorem

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| &= \sum_i |A_i| - \sum_{i,j} |A_i \cap A_j| \\&\quad + \sum_{i,j,k} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\&\quad \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|\end{aligned}$$

37 / 43

İçleme-Dışlama İlkesi Örneği

Örnek (Eratosthenes Kalburu)

- ▶ asal sayıları bulmak için bir yöntem

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	15	16	17
2	3	5	7				9	11	13						
19		21	23		25		27	29							

38 / 43

İçleme-Dışlama İlkesi Örneği

Örnek (Eratosthenes Kalburu)

- ▶ 1'den 100'e kadar asal sayıların sayısı
- ▶ 2, 3, 5 ve 7'ye bölünemeyen sayılar
 - ▶ A_2 : 2'ye bölünen sayılar kümesi
 - ▶ A_3 : 3'e bölünen sayılar kümesi
 - ▶ A_5 : 5'e bölünen sayılar kümesi
 - ▶ A_7 : 7'ye bölünen sayılar kümesi
- ▶ $|A_2 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_7|$

39 / 43

İçleme-Dışlama İlkesi Örneği

Örnek (Eratosthenes Kalburu)

- ▶ $|A_2| = \lfloor 100/2 \rfloor = 50$
- ▶ $|A_3| = \lfloor 100/3 \rfloor = 33$
- ▶ $|A_5| = \lfloor 100/5 \rfloor = 20$
- ▶ $|A_7| = \lfloor 100/7 \rfloor = 14$
- ▶ $|A_2 \cap A_3| = \lfloor 100/6 \rfloor = 16$
- ▶ $|A_2 \cap A_5| = \lfloor 100/10 \rfloor = 10$
- ▶ $|A_2 \cap A_7| = \lfloor 100/14 \rfloor = 7$
- ▶ $|A_3 \cap A_5| = \lfloor 100/15 \rfloor = 6$
- ▶ $|A_3 \cap A_7| = \lfloor 100/21 \rfloor = 4$
- ▶ $|A_5 \cap A_7| = \lfloor 100/35 \rfloor = 2$

40 / 43

İçleme-Dışlama İlkesi Örneği

Örnek (Eratosthenes Kalburu)

- ▶ $|A_2 \cap A_3 \cap A_5| = \lfloor 100/30 \rfloor = 3$
- ▶ $|A_2 \cap A_3 \cap A_7| = \lfloor 100/42 \rfloor = 2$
- ▶ $|A_2 \cap A_5 \cap A_7| = \lfloor 100/70 \rfloor = 1$
- ▶ $|A_3 \cap A_5 \cap A_7| = \lfloor 100/105 \rfloor = 0$
- ▶ $|A_2 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_7| = \lfloor 100/210 \rfloor = 0$

41 / 43

İçleme-Dışlama İlkesi Örneği

Örnek (Eratosthenes Kalburu)

$$\begin{aligned}|A_2 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_7| &= (50 + 33 + 20 + 14) \\&\quad - (16 + 10 + 7 + 6 + 4 + 2) \\&\quad + (3 + 2 + 1 + 0) \\&\quad - (0) \\&= 78\end{aligned}$$

- ▶ asalların sayısı: $(100 - 78) + 4 - 1 = 25$

42 / 43

Kaynaklar

Okunacak: Grimaldi

- ▶ Chapter 3: Set Theory
 - ▶ 3.1. Sets and Subsets
 - ▶ 3.2. Set Operations and the Laws of Set Theory
- ▶ Chapter 8: The Principle of Inclusion and Exclusion
 - ▶ 8.1. The Principle of Inclusion and Exclusion

Yardımcı Kitap: O'Donnell, Hall, Page

- ▶ Chapter 8: Set Theory