

SORU 1

Aşağıdaki boşluklar öğrenci tarafından doldurulacaktır. (Puan Hariç)

| | | | | |
|---------|----------------------------------|-------------|----------|------|
| Soyadı: | Adı: | Grup No: | Sıra No: | Puan |
| İmza: | Elektronik Posta(e-mail) adresi: | Öğrenci No: | | |

Lütfen bu soruyu bu kağıdın ön yüzünü ve gerekirse arka yüzünü kullanarak cevaplayınız.

[12 puan] a) $a_n = \frac{n^3}{(3n^2+1)n^{1/n}} \cdot \tan \frac{1}{n}$ dizisinin yakınsak veya ıraksak olduğunu araştırınız.[13 puan] b) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2n+1}{(n^2+n)^2}$ serisinin toplamını bulunuz.

$$\begin{aligned}
 a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{(3n^2+1)n^{1/n}} \cdot \tan \frac{1}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{3n^2+1} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \cdot \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{\cos \frac{1}{n}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{3n^2+1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\cos \frac{1}{n}} \\
 &= \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

olduğundan dizi yakınsaktır.

$$b) \frac{2n+1}{(n^2+n)^2} = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$S_n = a_3 + a_4 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

$$= \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} \right) + \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2} \right) + \dots + \left(\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2} \right) + \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right)$$

$$= \frac{1}{9} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) = \frac{1}{9}$$

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2n+1}{(n^2+n)^2} = \frac{1}{9}$$

SORU 2

Aşağıdaki boşluklar öğrenci tarafından doldurulacaktır. (Puan Hariç)

| | | | | |
|---------|----------------------------------|-------------|----------|------|
| Soyadı: | Adı: | Grup No: | Sıra No: | Puan |
| İmza: | Elektronik Posta(e-mail) adresi: | Öğrenci No: | | |

Lütfen bu soruyu bu kağıdın ön yüzünü ve gerekirse arka yüzünü kullanarak cevaplayınız.

[10 puan] a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$ serisinin yakınsak veya ıraksak olduğunu belirleyiniz.[15 puan] b) $f(x) = \frac{1}{1+4x^2}$ fonksiyonunu temsil eden kuvvet ~~serisini~~ ^{nasıl serinin} bulunuz ve yakınsaklık aralığını belirleyiniz.

$$d) \ln n < n \Rightarrow \frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}} > \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 \neq 0$ olduğundan $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ serisi ıraksaktır. Genel

terimi bu serinin genel teriminden büyük olan $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$ serisi de ıraksaktır.

$$b) 4x^2 = u \text{ denirse } f(u) = \frac{1}{1+u} = (1+u)^{-1}$$

$$f'(u) = -(1+u)^{-2}$$

$$f''(u) = 2(1+u)^{-3}$$

$$f'''(u) = -3! (1+u)^{-4}$$

$$f^{(n)}(u) = (-1)^n n! (1+u)^{-(n+1)}$$

$$f^{(n)}(0) = (-1)^n n!$$

$$\frac{1}{1+u} \approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} u^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u^n \quad |u| < 1 \text{ yakınsak}$$

$$|4x^2| < 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{1+4x^2} \approx \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (4x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n x^{2n}$$

$$= 1 - 4x^2 + 16x^4 - 64x^6 + \dots + (-1)^n 4^n x^{2n} + \dots$$

SORU 3

Aşağıdaki boşluklar öğrenci tarafından doldurulacaktır. (Puan Hariç)

| | | | | |
|---------|----------------------------------|-------------|----------|------|
| Soyadı: | Adı: | Grup No: | Sıra No: | Puan |
| İmza: | Elektronik Posta(e-mail) adresi: | Öğrenci No: | | |

a)

[13 puan] b) $(-1, 2, 1)$ noktası ile $x + y - z = 2$ ve $2x - y + 3z = 1$ düzlemlerinin arakesit doğrusundan geçen düzlemin denklemini bulunuz.

a)

b) $x + y - z = 2$ düzleminin normali $n_1 = \langle 1, 1, -1 \rangle$ dir.
 $2x - y + 3z = 1$ düzleminin normali $n_2 = \langle 2, -1, 3 \rangle$ dir.
iki düzlemin arakesit doğrusunun doğrultusu $n_1 \times n_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \langle 2, -5, -3 \rangle$
Bir doğru üzerinde bir nokta $z=0$ alındığında $x=y=1$, yani $(1, 1, 0)$ dir.
Buna göre doğrunun parametrik denklemleri
 $x = 1 + 2t, \quad y = 1 - 5t, \quad z = -3t$
dir. Doğru üzerinde bir başka nokta $(t=-1), (-1, 6, 3)$ dir. Düzlem üzerinde
iki vektör $\langle 2, -1, -1 \rangle$ ve $\langle 0, 4, 2 \rangle$ dir. Buna göre $(-1, 2, 1)$ noktasından
ve arakesit doğrusundan geçen düzlemin normali
 $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \langle 2, -4, 8 \rangle$
dir. $2x - 4y + 8z = k$, $(1, 1, 0) \Rightarrow k = -2$ olduğundan düzlemin denklemleri
dir.
 $x - 2y + 4z = -1$

SORU 4

Aşağıdaki boşluklar öğrenci tarafından doldurulacaktır. (Puan Hariç)

| | | | | |
|---------|----------------------------------|-------------|----------|------|
| Soyadı: | Adı: | Grup No: | Sıra No: | Puan |
| İmza: | Elektronik Posta(e-mail) adresi: | Öğrenci No: | | |

Lütfen bu soruyu bu kağıdın ön yüzünü ve gerekirse arka yüzünü kullanarak cevaplayınız.

[10 puan] a) \mathbf{r} , ikinci türevi $\mathbf{r}'' = (\mathbf{r}')'$ var olan, bir vektör fonksiyonu ise $\frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t)] = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}''(t)$ olduğunu gösteriniz.

[15 puan] b) $(0, \frac{1}{4}, 1)$ noktasında $\mathbf{x} = t \cos 2\pi t$, $\mathbf{y} = t \sin 2\pi t$, $\mathbf{z} = 4t$ parametrik denklemleri ile verilen eğrinin teğet doğrusunun parametrik denklemlerini bulunuz.

$$\begin{aligned} a) \quad \frac{d}{dt} [\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t)] &= \frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t) + \mathbf{r}(t) \times \frac{d}{dt} \mathbf{r}'(t) \\ &= \mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}'(t) + \mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}''(t) \end{aligned}$$

$\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}'(t)$ paralel olduğu için sıfırdır. Sonuçta

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t)] = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}''(t)$$

dir.

b) $\mathbf{r}(t) = (t \cos 2\pi t, t \sin 2\pi t, 4t)$ eğrisinin herhangi bir noktada teğet vektörü

$$\mathbf{r}'(t) = (\cos 2\pi t - 2\pi t \sin 2\pi t, \sin 2\pi t + 2\pi t \cos 2\pi t, 4)$$

dır. $(0, \frac{1}{4}, 1)$ noktasında, yani $t = \frac{1}{4}$ de, teğet vektör

$$\langle -\frac{\pi}{2}, 1, 4 \rangle$$

dir. Teğet doğrusunun parametrik denklemi

$$x = -\frac{\pi}{2} t$$

$$y = \frac{1}{4} + t$$

$$z = 1 + 4t$$

dir.