MATEMATİK 102 ARA SINAV 24.03.2012

SORU 1 Aşağıdaki boşluklar öğrenci tarafından doldurulacaktır. (Puan Hariç)

Soyadı:	Adı:	Grup No:	Sıra No:	Puan
İmza:	Elektronik Posta(e-mail) adresi:	Öğrenci No:		

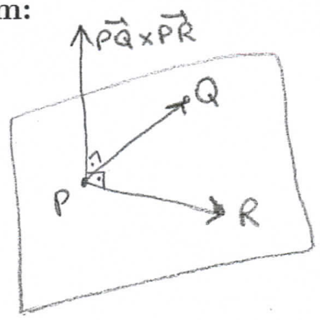
`Lütfen bu soruyu bu kağıdın ön yüzünü ve gerekirse arka yüzünü kullanarak cevaplayınız.`

[13 Puan] **a)** $\mathbf{P(2,-1,3)}$, $\mathbf{Q(1,1,-1)}$, $\mathbf{R(0,-2,1)}$ noktalarından geçen düzlemin denklemini bulunuz.

[12 Puan] **b)** $\vec{\mathbf{r}}(\mathbf{t}) = \ln \mathbf{t}\ \vec{\mathbf{i}} + \sqrt{\mathbf{2}}\ \mathbf{t}\ \vec{\mathbf{j}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{t}^2\ \vec{\mathbf{k}}$ vektörel denklemi ile verilen eğrinin $\mathbf{1 \le t \le e}$ arasındaki uzunluğunu hesaplayınız.

Çözüm:

a)



$$\overrightarrow{PQ} = (1-2)\vec{i} + (1+1)\vec{j} + (-1-3)\vec{k} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$$

$$\overrightarrow{PR} = (0-2)\vec{i} + (-2+1)\vec{j} + (1-3)\vec{k} = -2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$$

$$\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & -4 \\ -2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = (-4-4)\vec{i} - (2-8)\vec{j} + (1+4)\vec{k}$$

$= -8\vec{i} + 6\vec{j} + 5\vec{k}$ düzlemin normal vektörüdür.

$\Rightarrow$ $P(2,-1,3)$ noktasından geçen, normali $\vec{N} = -8\vec{i} + 6\vec{j} + 5\vec{k}$ olan düzlemin

denklemi; $-8(x-2) + 6(y+1) + 5(z-3) = 0$

$$\boxed{-8x + 6y + 5z = -7}$$

b) $L = \int_{t_1}^{t_2} |\vec{v}|\,dt$, $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{1}{t}\vec{i} + \sqrt{2}\,\vec{j} + t\,\vec{k}$

$$|\vec{v}| = \sqrt{\frac{1}{t^2} + 2 + t^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{t} + t\right)^2} = \left|\frac{1}{t} + t\right|$$

$$\Rightarrow L = \int_1^e |\vec{v}|\,dt = \int_1^e \left(\frac{1}{t} + t\right) dt = \left(\ln t + \frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_1^e = \left(\underbrace{\ln e}_{1} + \frac{e^2}{2}\right) - \left(\underbrace{\ln 1}_{0} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{e^2}{2} + \frac{1}{2}$$

MATEMATİK 102 ARA SINAV 24.03.201

SORU 2 Aşağıdaki boşluklar öğrenci tarafından doldurulacaktır. (Puan Hariç)

Soyadı:	Adı:	Grup No:	Sıra No:	Puan
İmza:	Elektronik Posta(e-mail) adresi:	Öğrenci No:		

Lütfen bu soruyu bu kağıdın ön yüzünü ve gerekirse arka yüzünü kullanarak cevaplayınız.

[12 Puan] a) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+xy-y}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $f(x,y)$ fonksiyonu $(0,0)$ noktasında sürekli midir? Açıklayınız.

[13 Puan] b) $f(x,y,z) = x^2+y^2-z$ fonksiyonunun $(1,1,-1)$ noktasındaki doğrultu türevini $\vec{r}(t) = \sqrt{t}\,\vec{i} + \sqrt{t}\,\vec{j} - \frac{1}{4}(t+3)\,\vec{k}$ eğrisinin $t=1$ noktasındaki birim teğet vektörü doğrultusunda hesaplayınız.

Çözüm:

a) (0,0) noktasına $y=x$ doğrusu boyunca yaklaşalım:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\(y=x)}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^2+x^2-x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x-1} = \frac{0}{-1} = 0$$

(0,0) noktasına $y=x^2$ boyunca yaklaşalım:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\(y=x^2)}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^2+x^3-x^2} = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

$\Rightarrow$ $(x,y)\to(0,0)$ için limit yola bağlı olarak farklı değerler aldığından $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ mevcut değildir.

O halde $f(x,y)$ fonks. (0,0) noktasında sürekli değildir.

b) $$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}}\vec{i} + \frac{1}{2\sqrt{t}}\vec{j} - \frac{1}{4}\vec{k}$$

$$\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{t=1} = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} - \frac{1}{4}\vec{k}$$

$t=1$ de birim teğet vektör $\vec{u} = \dfrac{\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} - \frac{1}{4}\vec{k}}{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}}} = \frac{2}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} - \frac{1}{3}\vec{k}.$

$$\vec{\nabla} f = f_x\vec{i} + f_y\vec{j} + f_z\vec{k} \quad , \quad f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$$

$$= 2x\vec{i} + 2y\vec{j} - \vec{k}$$

$$\left.\vec{\nabla} f\right|_{(1,1,-1)} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$$

$$\Rightarrow \left.D_{\vec{u}} f\right|_{(1,1,-1)} = \left.\vec{\nabla} f\right|_{(1,1,-1)} \cdot \vec{u}$$

$$= (2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}) \cdot \left(\frac{2}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} - \frac{1}{3}\vec{k}\right) = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{1}{3} = 3.$$

MATEMATİK 102 ARA SINAV 24.03.20[illegible]

SORU 3 Aşağıdaki boşluklar öğrenci tarafından doldurulacaktır. (Puan Hariç)

Soyadı:	Adı:	Grup No:	Sıra No:	Puan
İmza:	Elektronik Posta(e-mail) adresi:	Öğrenci No:		

Lütfen bu soruyu bu kağıdın ön yüzünü ve gerekirse arka yüzünü kullanarak cevaplayınız.

[12 Puan] **a)** Lagrange çarpanları yöntemini kullanarak, $\mathbf{f(x,y,z) = x - 2y + 2z}$ fonksiyonunun $\mathbf{x^2 + y^2 + z^2 = 9}$ küresi üzerinde maksimum ve minimum değerlerini bulunuz.

[13 Puan] **b)** $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \int_{\frac{y}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{4-y^2}} \sqrt{(4-x^2-y^2)^3}\, dx\, dy$ integralinin integrasyon bölgesini çiziniz ve kutupsal koordinatları kullanarak değerini hesaplayınız.

Çözüm:

a) $\vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g$

$f(x,y,z) = x - 2y + 2z$

$g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-9 = 0$

$\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k} = \lambda(2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k})$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} 1 &= 2x\lambda \\ -2 &= 2y\lambda \\ 2 &= 2z\lambda \\ x^2+y^2+z^2 &= 9 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$x = \frac{1}{2\lambda}$, $y = -\frac{1}{\lambda}$, $z = \frac{1}{\lambda}$

$x^2+y^2+z^2 = \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 9$

$\frac{9}{4\lambda^2} = 9 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{1}{4}$

$\boxed{\lambda = \mp \frac{1}{2}}$

$\lambda = \frac{1}{2}$ ise $x = 1$, $y = -2$, $z = 2$

$\lambda = -\frac{1}{2}$ ise $x = -1$, $y = 2$, $z = -2$

$\Rightarrow$ $A(1,-2,2)$, $B(-1,2,-2)$ noktalarında $f(x,y,z) = x - 2y + 2z$ fonks. maks. ve min. değerlerini alır.

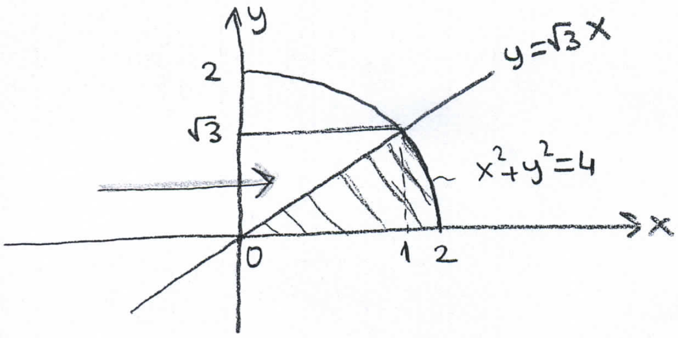
$f(x,y,z)\big|_A = f(1,-2,2) = 1+4+4 = 9$ maksimum değer.

$f(x,y,z)\big|_B = f(-1,2,-2) = -1-4-4 = -9$ minimum değer.

b) $$\int_0^{\sqrt{3}} \int_{\frac{y}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{4-y^2}} \sqrt{(4-x^2-y^2)^3}\, dx\, dy$$

$0 \leq y \leq \sqrt{3}$

$\frac{y}{\sqrt{3}} \leq x \leq \sqrt{4-y^2}$



$x = \frac{y}{\sqrt{3}} \Rightarrow y = \sqrt{3}x$

$x = \sqrt{4-y^2} \Rightarrow x^2+y^2=4$

$y=\sqrt{3}x \;,\; x^2+y^2=4$

$\underbrace{x^2+3x^2}=4$

$4x^2=4 \Rightarrow x = \mp 1$

$x=1 \Rightarrow y=\sqrt{3}$

Kutupsal koordinatlar;

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array}\right\} x^2+y^2=r^2 \Rightarrow$$

$dxdy = r\,dr\,d\theta$

$x^2+y^2=4$

$r^2=4$

$\boxed{r=2}$

$y=\sqrt{3}x$

$r\sin\theta = \sqrt{3}r\cos\theta$

$\tan\theta = \sqrt{3}$

$\boxed{\theta = \frac{\pi}{3}}$

$$\Rightarrow \int_0^{\sqrt{3}} \int_{\frac{y}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{4-y^2}} \sqrt{(4-x^2-y^2)^3}\, dx\, dy = \int_{\theta=0}^{\pi/3} \int_{r=0}^{2} \sqrt{(4-r^2)^3}\, r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{\pi/3} \int_{t=4}^{0} -\frac{1}{2}\, t^{3/2}\, dt\, d\theta \qquad \begin{pmatrix} 4-r^2=t \\ -2rdr=dt \end{pmatrix}$$

$$= \int_{\theta=0}^{\pi/3} -\frac{1}{2}\, \frac{2}{5}\, t^{5/2} \Big|_4^0 \, d\theta$$

$$= -\frac{1}{5}\left(0 - 4^{5/2}\right) \int_{\theta=0}^{\pi/3} d\theta = \frac{2^5}{5} \cdot \frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{32\pi}{15}$$

SORU 4 Aşağıdaki boşluklar öğrenci tarafından doldurulacaktır. (Puan Hariç)

Soyadı:	Adı:	Grup No:	Sıra No:	Puan
İmza:	Elektronik Posta(e-mail) adresi:	Öğrenci No:		

Lütfen bu soruyu bu kağıdın ön yüzünü ve gerekirse arka yüzünü kullanarak cevaplayınız.

[10 Puan] **a)** $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_x^{\pi} \frac{\sin^2 y}{y}\, dy\, dx$ integralini hesaplayınız.

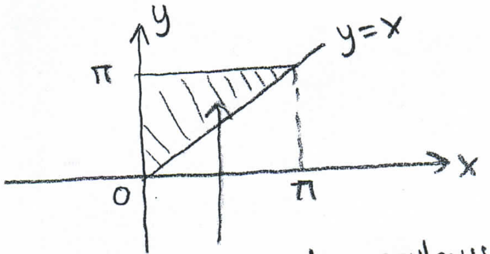
b) Uzayda bir **D** bölgesi $\mathbf{D} = \{(x, y, z) : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9 ,\ z \geq 0\}$ olarak veriliyor.

[9 Puan] • **D** bölgesinin hacmini üç katlı integral ile küresel koordinatlarda hesaplayınız.

[6 Puan] • **D** bölgesinin hacmini üç katlı integral ile silindirik koordinatlarda yazınız.(İntegrali hesaplamayınız.)

Çözüm:

a) $\left.\begin{array}{l} 0 \leq x \leq \pi \\ x \leq y \leq \pi \end{array}\right\}$



Bu yönde sorulmuş, fakat verilen integral bu yönde çözülemez.

$$\int_0^{\pi}\int_x^{\pi} \frac{\sin^2 y}{y}\, dy\, dx = \int_{y=0}^{\pi}\int_{x=0}^{y} \frac{\sin^2 y}{y}\, dx\, dy$$

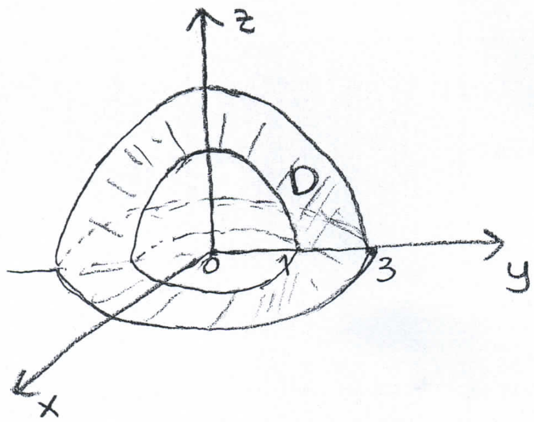
$$= \int_{y=0}^{\pi} \frac{\sin^2 y}{y}\, x\Big|_{x=0}^{y}\, dy = \int_{y=0}^{\pi} \frac{\sin^2 y}{\cancel{y}}\, \cancel{y}\, dy$$

$$= \int_0^{\pi} \sin^2 y\, dy \qquad \left(\sin^2 y = \frac{1-\cos 2y}{2}\right)$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2y}{2}\, dy$$

$$= \frac{1}{2}\left(y - \frac{\sin 2y}{2}\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2}\pi .$$

b) $D: \quad 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 9 \quad , \quad z \geq 0$



Küresel koordinatlar;

$$\left.\begin{array}{l} x = \rho \sin\phi \cos\theta \\ y = \rho \sin\phi \sin\theta \\ z = \rho \cos\phi \end{array}\right\}$$

$$dx\,dy\,dz = \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$x^2+y^2+z^2=9 \Rightarrow \rho^2 = 9 \Rightarrow \rho = 3$$

$$x^2+y^2+z^2=1 \Rightarrow \rho^2 = 1 \Rightarrow \rho = 1$$

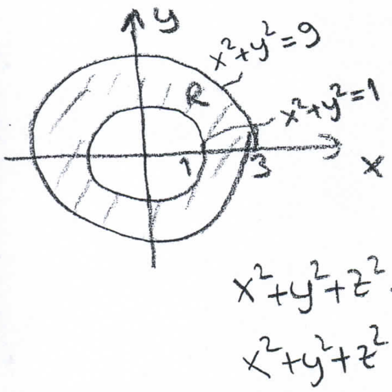
$$V = \iiint_D dx\,dy\,dz = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\phi=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\rho=1}^{3} \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\phi=0}^{\pi/2} \frac{\rho^3}{3} \Big|_1^3 \sin\phi \, d\phi \, d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(9 - \frac{1}{3}\right) (-\cos\phi) \Big|_{\phi=0}^{\frac{\pi}{2}} d\theta$$

$$= \frac{26}{3} \Big(- \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0} + \underbrace{\cos 0}_{1}\Big) \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{26}{3} \cdot 2\pi = \frac{52\pi}{3}.$$

Silindirik koordinatlar;



$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{array}\right\} \quad dx\,dy\,dz = r\,dr\,d\theta\,dz$$

$$V = \iiint_D dv$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2 = 9 \Rightarrow z = \sqrt{9-r^2} \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \Rightarrow z = \sqrt{1-r^2} \end{array}\right\}$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{3} \int_{z=0}^{\sqrt{9-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta - \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} \int_{z=0}^{\sqrt{1-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta.$$