MAT 102 **ARASINAV** **13 KASIM 2010**

SORU 1 Aşağıdaki boşluklar öğrenci tarafından doldurulacaktır.

Öğrenci No:	Elektronik posta (e-mail) adresi:		Grup No:	Sıra No:	Puan
Adı:		Soyadı:		İmza:	

Lütfen bu soruyu yalnız bu kağıdın ön yüzünü ve gerekirse arka yüzünü kullanarak cevaplandırınız.

[12pt] a) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2 + \alpha a_n$, $n \geq 1$, $(\alpha > 0)$ şeklinde tanımlanan dizinin genel terimini bulunuz ve yakınsaklığını α'nın değerlerine göre inceleyiniz.

[13pt] b) Genel terimi $a_n = \dfrac{n^{3/2}\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{n}}}{n+1}$ olan dizinin limitini bulunuz.

a) Dizinin ilk birkaç terimi yazılırsa;

$$a_1 = 2$$
$$a_2 = 2+\alpha a_1 = 2+\alpha 2$$
$$a_3 = 2+\alpha a_2 = 2+\alpha(2+\alpha 2) = 2(1+\alpha+\alpha^2)$$
$$\vdots$$
$$a_n = 2+\alpha a_{n-1} = 2+\alpha 2+\alpha^2 2+\ldots+\alpha^{n-1}2 = \sum_{k=1}^{n} 2\alpha^{k-1}$$

Görüldüğü gibi $a_n = \sum_{k=1}^{n} 2\alpha^{k-1} = 2\,\dfrac{1-\alpha^n}{1-\alpha}$ yazılır.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 2\dfrac{1}{1-\alpha}, & 0<\alpha<1 \text{ ise} \\ \text{ırak.} & \alpha \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$ old. kullanılırsa

$\{a_n\}$ dizisi $0<\alpha<1$ için yak
" " $\alpha \geq 1$ için ırak. olur.

b)
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{3/2}\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{n}}}{n+1} = \underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}}_{\mathrm{I}} \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}}_{\mathrm{II}}$$

I için: $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}(1+\frac{1}{n})} = 1$,

II için: $\left[u = \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{n}},\ \frac{1}{\sqrt{n}} = \sin u \right]$ ve $n\to\infty$, $u\to 0^+$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin^{-1} 1/\sqrt{n}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{u\to 0^+}\frac{u}{\sin u} = 1$$

I ve II yerlerine yazılırsa,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{3/2}\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{n}}}{n+1} = 1.1 = 1 \text{ olarak bulunur}$$

<u>YADA</u>

L'Hopital Kullanılırsa; $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^{3/2}\sin^{-1}1/\sqrt{n}}{n+1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^{3/2}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-1/n}}\cdot -\frac{1}{2}\cdot n^{-3/2}}{-\frac{1}{2}n^{-3/2}+\left(\frac{-3}{2}\right)n^{-5/2}}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1-\cancel{n^{-1}}}\,(1+3\cancel{n^{-1}})} = 1$$

MAT 102 **ARASINAV** **13 KASIM 2010**

SORU 2 Aşağıdaki boşluklar öğrenci tarafından doldurulacaktır.

Öğrenci No:	Elektronik posta (e-mail) adresi:		Grup No:	Sıra No:	Puan
Adı:		Soyadı:		İmza:	

Lütfen bu soruyu yalnız bu kağıdın ön yüzünü ve gerekirse arka yüzünü kullanarak cevaplandırınız.

[8pt] a) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!}$ serisinin toplamını hesaplayınız. (İpucu: Verilen seriyi teleskop seriye dönüştürünüz.)

[8pt] b) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{3n}\left(\frac{n}{n+2}\right)^{n^2}$ serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

[9pt] c) $\cos x$ fonksiyonunun Maclaurin serisini ve yerine koyma metodunu kullanarak $\cos^2(x+1)$ fonksiyonunun Taylor serisini, $x = -1$ noktasında bulunuz.

a) $\frac{k}{(k+1)!} = \frac{k+1-1}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$ olduğundan,

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} = \left(\frac{1}{2!} - \cancel{\frac{1}{3!}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3!}} - \cancel{\frac{1}{4!}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{n!}} - \frac{1}{(n+1)!}\right) = \frac{1}{2!} - \frac{1}{(n+1)!}$$

olur. Kısmi toplamlar dizisi $\{S_n\}$'in limiti

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{(n+1)!}\right) = \frac{1}{2}$$ olur.

b) $a_n = e^{3n}\left(\frac{n}{n+2}\right)^{n^2}$, $\forall n \geq 1$ için pozitiftir. n.ci kök testine göre

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{e^{3n}\left(\frac{n}{n+2}\right)^{n^2}} = e^3 \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+2}\right)^n = e^3 \underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+2/n}\right)^n}_{e^{-2}\ (*)} = e^3 \cdot e^{-2} = e > 1$$

olur ve bu nedenden dolayı $\sum a_n$ serisi ıraksaktır.

$$\left\{ (*)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} e^{n \ln\left(\frac{n}{n+2}\right)} = e^{\lim_{n\to\infty} n \ln\left(\frac{n}{n+2}\right)} = e^{\lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{n}{n+2}\right)/\frac{1}{n}} \quad \left(\frac{0}{0}\right) \right.$$

$$\left. e^{\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}}{-\frac{1}{n^2}}} = e^{-2} \right\}$$

c) $\forall x \in \mathbb{R}$ için $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ ve $\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$ olduğu hatırlanıp yerine koyma metodu kullanılırsa;

$$\cos^2(x+1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2(x+1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left[2(x+1)\right]^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, 2^{2n-1} (x+1)^{2n}}{(2n)!} \quad (\forall x$$

Bu bulunan kuvvet serisi $\cos^2(x+1)$ fonksiyonunun $x=-1$ noktası civarındaki Taylor serisi açılımı olmalıdır. (Sonsuz kere türevlenebilir bir fonksiyonun bir nokta civarındaki kuvvet serisi tektir.

MAT 102 **ARASINAV** **13 KASIM 2010**

SORU 3 Aşağıdaki boşluklar öğrenci tarafından doldurulacaktır.

Öğrenci No:	Elektronik posta (e-mail) adresi:	Grup No:	Sıra No:	Puan
Adı:	Soyadı:		İmza:	

Lütfen bu soruyu yalnız bu kağıdın ön yüzünü ve gerekirse arka yüzünü kullanarak cevaplandırınız.

[8pt] a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi şartlı (koşullu) yakınsak olsun. Eğer $\lim_{n\to\infty} n^r|a_n| = 4$ ise $r \le 1$ olması gerektiğini gösteriniz.

[17pt] b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+3)^{2n+1}}{3^n(n^2+1)}$ kuvvet serisinin yakınsaklık aralığını ve yakınsaklık yarıçapını bulunuz. Hangi x ler için seri mutlak, hangi x'ler için şartı (koşullu) yakınsaktır, inceleyiniz.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi şartlı yakınsak olduğuna göre $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ıraksak seri olmalıdır. Diğer tarafta

$\lim_{n\to\infty} n^r |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{\frac{1}{n^r}} = 4 \; (\neq 0, \infty)$ olduğuna göre "limit mukayese testine göre"

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ serileri aynı karakterde olmalılar, yani $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}$ serisi de ıraksak olmalı

Son olarak, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}$ serisinin ıraksak olması için $r \le 1$ olması gereklidir. ..

b) $a_n = \frac{(2x+3)^{2n+1}}{3^n(n^2+1)}$, oran testinden, $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(2x+3)^{2n+3}}{3^{n+1}[(n+1)^2+1]} \cdot \frac{3^n(n^2+1)}{(2x+3)^{2n+1}} \right| < 1$

$$\Rightarrow \frac{|2x+3|^2}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^2+2n+2} < 1 \Rightarrow |2x+3| < \sqrt{3} \text{ bulunur}$$

$$\Rightarrow \left|x + \frac{3}{2}\right| < \frac{\sqrt{3}}{2} \quad R = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ y. yarıçapı}$$

$$\boxed{-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} < x < -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}} \text{ y. aralığı.}$$

Uç noktalarda;

$x = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ için $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{3})^{2n+1}}{3^n(n^2+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{3}}{n^2+1}$ (limit mukayese testi, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ alınarak, kullanılırsa)

serisi yakınsaktır.

$x = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ için $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\sqrt{3})^{2n+1}}{3^n(n^2+1)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{3}}{n^2+1}$ serisi de yakınsaktır.

Sonuç olarak,

yakınsaklık y. çapı : $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$

m. yakınsaklık aralığı : $-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \le x \le -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

şartlı yakınsak olduğu nokta yok.

ve bu aralık dışında kuvvet serisi ıraksaktır.

MAT 102 **ARASINAV** **13 KASIM 2010**

SORU 4 **Aşağıdaki boşluklar öğrenci tarafından doldurulacaktır.**

Öğrenci No:	Elektronik posta (e-mail) adresi:		Grup No:	Sıra No:	Puan
Adı:		Soyadı:		İmza:	

Lütfen bu soruyu yalnız bu kağıdın ön yüzünü ve gerekirse arka yüzünü kullanarak cevaplandırınız.

[8pt] **a)** $|\vec{v}| = 2$, $|\vec{w}| = 3$ ve $\vec{v}$ vektörü ile $\vec{w}$ vektörü arasındaki açı $\frac{\pi}{3}$ ise $|\vec{v} - 2\vec{w}|$ uzunluğunu hesaplayınız.

[10pt] **b)** Orijinden geçen ve $2x - y - z = 4$ düzlemine dik olan doğru ile $3x - 5y + 2z = 6$ düzleminin arakesit noktasının koordinatlarını bulunuz.

[7pt] **c)** $\vec{r}(t) = \cos\frac{t}{2}\vec{i} + \sin\frac{t}{2}\vec{j} + \frac{t}{2}\vec{k}$ eğrisinin $t = 0$'dan $t = 2\pi$'ye kadar olan uzunluğunu hesaplayınız.

a) $|\vec{v} - 2\vec{w}|^2 = (\vec{v} - 2\vec{w}).(\vec{v} - 2\vec{w}) = \vec{v}.\vec{v} - 2\vec{v}.\vec{w} - 2\vec{w}.\vec{v} + 4\vec{w}.\vec{w} = |\vec{v}|^2 - 4\vec{v}.\vec{w} + 4|\vec{w}|^2$

Diğer taraftan

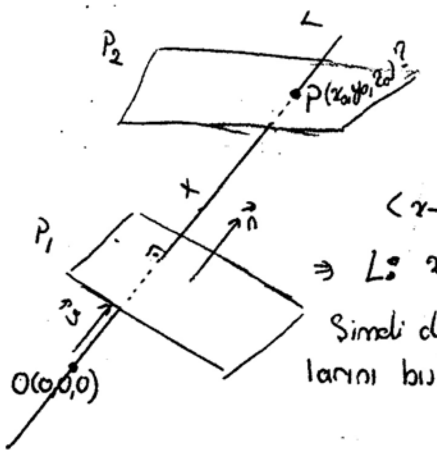
$\vec{v}.\vec{w} = |\vec{v}|.|\vec{w}|.\cos\theta = 2.3.\cos(\frac{\pi}{3}) = 2.3.\frac{1}{2} = 3$

olduğu kullanılırsa

$|\vec{v} - 2\vec{w}|^2 = 2^2 - 4.3 + 4.3^2 = 28$

$\Rightarrow |\vec{v} - 2\vec{w}| = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$ //

b)



İlk olarak L doğrusunun denklemini bulalım:

$\vec{OX} = t\vec{v}$ $\vec{v}$ doğrultman vektörü olarak P_1 düzleminin normali alınabilir; $\vec{n} = \langle 2,-1,-1 \rangle$

$\langle x-0, y-0, z-0 \rangle = \langle 2t, -t, -t \rangle$

$\Rightarrow$ L: $x = 2t$, $y = -t$, $z = -t$ $(\forall t \in \mathbb{R})$ bulunur.

Şimdi de L doğrusu ile P_2 düzleminin arakesit noktasının koordinatlarını bulalım:

$3x - 5y + 2z = 6 \Rightarrow 3(2t) - 5(-t) + 2(-t) = 6 \Rightarrow t = \frac{2}{3}$

$P(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ //

c) $L = \int_\alpha^\beta |\vec{v}(t)|\,dt$, $\vec{r}(t) = \cos\frac{t}{2}\vec{i} + \sin\frac{t}{2}\vec{j} + \frac{t}{2}\vec{k}$

$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}(t) = -\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}\vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k}$

$|\vec{v}(t)| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}}$

$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1}{2}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\,t\Big|_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\pi$ //