MATEMATİK 102 ARASINAV 26 Mart 2011

SORU 1 Aşağıdaki boşluklar öğrenci tarafından doldurulacaktır. (Puan Hariç)

Soyadı:	Adı:	Grup No:	Sıra No:	Puan
İmza:	Elektronik Posta(e-mail) adresi:	Öğrenci No:		

Lütfen bu soruyu bu kağıdın ön yüzünü ve gerekirse arka yüzünü kullanarak cevaplayınız.

[12pn] a) Genel terimi $\mathbf{a_n = n(3^{1/n} - 1)}$ olan $\{\mathbf{a_n}\}$ dizisinin limitini hesaplayınız.

[13pn] b) $\mathbf{a_1 = -2,\ a_{n+1} = \dfrac{n\, a_n}{n+1}}$ rekürans bağıntısı ile verilen $\{\mathbf{a_n}\}$ dizisinin monotonluğunu ve sınırlılığını inceleyiniz.

a) $\lim a_n = \lim n(3^{\frac{1}{n}} - 1)$

$$= \lim \frac{3^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}$$

$$= \lim \frac{-\frac{1}{n^2} \cdot 3^{\frac{1}{n}} \cdot \ln 3}{-\frac{1}{n^2}}$$

$$= \lim 3^{\frac{1}{n}} \cdot \ln 3$$

$$= \ln 3$$

b) $a_{n+1} = \frac{n}{n+1} a_n \qquad a_1 = -2.$

$\frac{n}{n+1} > 0$ (her $n \geq 1$ için)

$\Rightarrow$ tüm a_n ler aynı işarete sahiptir.

$a_1 = -2 < 0 \Rightarrow a_n < 0$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1$, $a_n < 0 \Rightarrow a_{n+1} > a_n$

$\Rightarrow \{a_n\}$ artandır.

$a_1 = -2$, $a_n < 0$ $\{a_n\}$ 0 ile üstten sınırlıdır.

Monoton artan üstten sınırlı olduğundan dizi yakınsaktır

MATEMATİK 102 ARASINAV 26 Mart 2011

SORU 2 Aşağıdaki boşluklar öğrenci tarafından doldurulacaktır. (Puan Hariç)

Soyadı:	Adı:	Grup No:	Sıra No:	**Puan**
İmza:	Elektronik Posta(e-mail) adresi:	Öğrenci No:		

Lütfen bu soruyu bu kağıdın ön yüzünü ve gerekirse arka yüzünü kullanarak cevaplayınız.

a) [6pn] i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(4n-2)(4n+2)}$ serisinin toplamını hesaplayınız.

[6pn] ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+\sqrt{2n+1}}$ serisinin yakınsaklığını koşullu ve mutlak yakınsaklık bakımından inceleyiniz.

b) Aşağıda verilen serilerin yakınsaklığını inceleyiniz.

[6pn] i) $\sum_{n=2}^{\infty} (\frac{n-1}{n+1})^{n(n-1)}$ [7pn] ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{3!\ n!\ 3^n}$

a) i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(4n-2)(4n+2)}$

$$\frac{4}{(4n-2)(4n+2)} = \frac{A}{4n-2} + \frac{B}{4n+2}$$

$$(4A+4B)n + (2A-2B) = 4 \Rightarrow \begin{array}{l} A=-B \\ 4A=4 \Rightarrow A=1,\ B=-1 \end{array}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(4n-2)(4n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n+2}\right)$$

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

$$s_n = \left(\frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{6}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{6}} - \cancel{\frac{1}{10}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{10}} - \cancel{\frac{1}{12}}\right) + \dots + \left(\cancel{\frac{1}{4n-2}} - \frac{1}{4n+2}\right)$$

$$s_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{4n+2} \qquad \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(4n-2)(4n+2)} = \frac{1}{2}$$

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4n+2}\right) = \frac{1}{2}$$

a) ii) $\bullet \sum_{n=1} |a_n| = \sum_{n=1} \left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+\sqrt{2n+1}} \right| = \sum_{n=1} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{2n+1}}$

$b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ ıraksaktır. $(p=\frac{1}{2}<1)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{2n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\sqrt{2+\frac{1}{n}}} = \frac{1}{1+\sqrt{2}}$$

Limit karşılaştırma testine göre $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ıraksaktır.

$\bullet \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ Leibniz kriterini kullanalım:

i) $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{2n+1}} > 0$

ii) $u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{2n+3}} < \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{2n+1}} = u_n$

iii) $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{2n+1}} = 0$ $\quad \sum a_n$ yakınsak.

$\Rightarrow \sum a_n$ koşullu yakınsaktır.

b) i) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{(n-1)}$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^{n+1}\right]^{\frac{n-1}{n+1}} = \frac{1}{e^2} < 1$$

Kök testine göre yakınsaktır.

ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3!} \frac{(n+4)!}{(n+1)!\, 3^{n+1}} \cdot \frac{3!\, n!\, 3^n}{(n+3)!}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+4)}{n+1} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} < 1$$

Oran kriterine göre yakınsaktır.

MATEMATİK 102 ARASINAV 26 Mart 2011

SORU 3 Aşağıdaki boşluklar öğrenci tarafından doldurulacaktır. (Puan Hariç)

Soyadı:	Adı:	Grup No:	Sıra No:	**Puan**
İmza:	Elektronik Posta(e-mail) adresi:	Öğrenci No:		

Lütfen bu soruyu bu kağıdın ön yüzünü ve gerekirse arka yüzünü kullanarak cevaplayınız.

[13pn] a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(2x+1)^n}{(2n+1)2^n}$ serisinin yakınsaklık yarıçapını, koşullu ve mutlak yakınsak olduğu x değerlerini belirleyiniz.

[12pn] a) $f(x) = 1/\sqrt{x}$ fonksiyonunu a=9 civarında Taylor serisine açınız.

a) $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)}{(2n+3)} \cdot \frac{1}{2^{\cancel{n}+1}} \cdot \frac{(2n+1)\cdot \cancel{2^n}}{(n+1)} |2x+1|$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{2n+1}{2n+3} \cdot \frac{|2x+1|}{2} = \frac{|2x+1|}{2}$

$\frac{|2x+1|}{2} < 1$ için seri mutlak yakınsaktır.

$-2 < 2x+1 < 2$ $\quad -\frac{3}{2} < x < \frac{1}{2}$ $\rightsquigarrow$ mutlak yakınsaklık aralığı.

• $x = -\frac{3}{2}$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1}(-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n$

$|a_n| = \left|\frac{n+1}{2n+1}\right|$ $\quad \lim_{n\to\infty} |a_n| = \frac{1}{2} \neq 0$ n inci terim testine göre

$a_n = (-1)^n u_n$ $\quad \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow$ ıraksak

• $x = \frac{1}{2}$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1}$ $\quad a_n = \frac{n+1}{2n+1}$ $\quad \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2} \neq 0$

n inci terim testine göre ıraksak

$\Rightarrow$ (mutlak) yakınsaklık aralığı : $-\frac{3}{2} < x < \frac{1}{2}$.

yakınsaklık yarıçapı $R = 1$

koşullu yakınsak olduğu x değeri yoktur.

b) $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ $\qquad f(9) = 3^{-1}$

$f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{3}{2}}$ $\qquad f'(9) = (-1)\frac{1}{2}\, 3^{-3}$

$f''(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)x^{-5/2}$ $\qquad f''(9) = (-1)^2\, \frac{1.3}{2^2} \cdot 3^{-5}$

$f'''(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)x^{-7/2}$ $\qquad f'''(9) = (-1)^3\, \frac{1.3.5}{2^3}\, 3^{-7}$

$$\Rightarrow \quad f^{(n)}(9) = (-1)^n\, \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n} \cdot 3^{-(2n+1)}$$

Taylor serisi :

$$\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(9)\, \frac{(x-9)^n}{n!} = f(9) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\, \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n} \cdot 3^{-(2n+1)} \cdot \frac{(x-9)^n}{n!}$$

$$= \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\, \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{n!} \cdot \frac{(x-9)^n}{2^n\, 3^{2n+1}}$$

MATEMATİK 102 ARASINAV 26 Mart 2011

SORU 4 Aşağıdaki boşluklar öğrenci tarafından doldurulacaktır. (Puan Hariç)

Soyadı:	Adı:	Grup No:	Sıra No:	**Puan**
İmza:	Elektronik Posta(e-mail) adresi:	Öğrenci No:		

`Lütfen bu soruyu bu kağıdın ön yüzünü ve gerekirse arka yüzünü kullanarak cevaplayınız.`

[13pn] a) $\vec{r}(t) = (t\sin t + \cos t)\,\vec{i} + (t\cos t - \sin t)\,\vec{j}, \quad \sqrt{2} \le t \le 2$

için eğri uzunluğunu ve birim teğet vektörü bulunuz.

[12pn] b) $P(2,2,3)$ noktasının, koordinat eksenlerini sırası ile $x = 2, y = 3$ ve $z = 1$ de kesen düzleme olan uzaklığını bulunuz.

a) $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = (\sin t + t\cos t - \sin t)\vec{i} + (\cos t - t\sin t - \cos t)\vec{j}$

$\vec{v} = t\cos t\,\vec{i} - t\sin t\,\vec{j}$

$|\vec{v}| = \sqrt{t^2\cos^2 t + t^2\sin^2 t} = |t|$

$\vec{T} = \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \cos t\,\vec{i} - \sin t\,\vec{j}$ ⇝ birim teğet vektör

$L = \displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{2} |\vec{v}(t)|\,dt = \int_{\sqrt{2}}^{2} |t|\,dt = \int_{\sqrt{2}}^{2} t\,dt$

$= \dfrac{t^2}{2}\Big|_{\sqrt{2}}^{2} = \dfrac{1}{2}(4-2) = 1.$ ⇝ eğri uzunluğu

b) $A(2,0,0)$ $B(0,3,0)$ $C(0,0,1)$

$$\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k}$$

↳ düzlemin normali

$A(2,0,0)$, $\vec{n} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k}$

$$3(x-2) + 2y + 6z = 0$$

$$3x + 2y + 6z = 6 \rightarrow \text{düzlemin denklemi}$$

$P(2,2,3)$

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 - D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$d = \frac{|3.2 + 2.2 + 6.3 - 6|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 6^2}} = \frac{22}{7}$$

VEYA $P(2,2,3)$, $S(2,0,0)$ $\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k}$

$$d = \left| \vec{PS} \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \right|$$

$$d = \left| \frac{(0\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}).(3\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k})}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 6^2}} \right|$$

$$d = \frac{|-4 - 18|}{7} = \frac{22}{7}$$