MAT 102 ARASINAV 12 Nisan 2014

SORU 1 Aşağıdaki boşluklar öğrenci tarafından doldurulacaktır. (Puan Hariç)

Soyadı:	Adı:	Grup No:	Sıra No:	Puan
İmza:	Elektronik Posta(e-mail) adresi:	Öğrenci No:		

Lütfen bu soruyu bu kağıdın ön yüzünü ve gerekirse arka yüzünü kullanarak cevaplayınız.

[13 puan] (a) $\vec{A} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ ve $\vec{B} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ vektörlerine dik olan bir vektörü skaler çarpımdan (yani iç çarpımdan) yararlanarak bulunuz. Bulduğunuz bu vektörü birim vektör haline getiriniz.

[12 puan] (b) $D_1: \ x+y+z-1=0$ ve $D_2: \ 2x-3y+z+2=0$ düzlemlerinin arakesit doğrusunun parametrik denklemlerini bulunuz.

Çözüm

(a) Her iki vektöre dik olan vektöre $\vec{V} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ diyelim.

$\vec{A} \perp \vec{V} \Rightarrow \vec{A}.\vec{V} = 0 \quad \Rightarrow \quad 3a + 2b + c = 0 \quad \Rightarrow \quad 3a + c = -2b.$

$\vec{B} \perp \vec{V} \Rightarrow \vec{B}.\vec{V} = 0 \quad \Rightarrow \quad a + 2b + 3c = 0 \quad \Rightarrow \quad a + 3c = -2b.$

Böylece $3a + c = a + 3c = -2b \quad \Rightarrow \quad a = c, \quad b = -2c \quad \Rightarrow \vec{V} = ci - 2cj + ck$ olur.

$$\vec{U} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} = \frac{c\vec{i} - 2c\vec{j} + c\vec{k}}{\sqrt{c^2 + 4c^2 + c^2}} = \frac{c}{|c|\sqrt{6}}(\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}) = \frac{\pm 1}{\sqrt{6}}(\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}).$$

(b) $D_1: \ x + y + z - 1 = 0$ ve $D_2: \ 2x - 3y + z + 2 = 0$ düzlemlerinin arakesitine paralel olan vektör:

$$\vec{V} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + \vec{j} + -5\vec{k} \quad \text{dir.}$$

Düzlem denklemlerinde $z = -1$ (keyfi) alarak

$x + y = 2 \quad , \quad 2x - 3y = -1 \quad \Rightarrow \quad \vec{r_0} = (x_0, y_0, z_0) = (1, 1, -1)$ elde edilir.

Arakesit doğrusunun parametrik denklemleri $\vec{r} - \vec{r}_0 = t\vec{V}$ şeklindedir. Buna göre arakesit doğrusunun parametrik denklemleri

$$\left\{ \begin{array}{l} x - x_0 = v_1 t \\ y - y_0 = v_2 t \\ z - z_0 = v_3 t \end{array} \right\}$$

$x - 1 = 4t \quad , \quad y - 1 = t, \quad z + 1 = -5t$ olarak bulunur. $\{ t \in (-\infty, \infty) \}$

MAT 102 ARASINAV 12 Nisan 2014

SORU 2 Aşağıdaki boşluklar öğrenci tarafından doldurulacaktır. (Puan Hariç)

Soyadı:	Adı:	Grup No:	Sıra No:	Puan
İmza:	Elektronik Posta(e-mail) adresi:	Öğrenci No:		

Lütfen bu soruyu bu kağıdın ön yüzünü ve gerekirse arka yüzünü kullanarak cevaplayınız.

[15 puan] (a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{\sin(xy)}{x}$ limitini hesaplayınız.

[10 puan] (b) $\varphi(x,y,z) = xye^z + xze^y + yze^x$ fonksiyonunun pozitif z ekseni doğrultusundaki türevini hesaplayınız.

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{\sin(xy)}{x} = \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{\sin[r\cos\theta(r\sin\theta+1)]}{r\cos\theta}$

$\left(\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta + 1 \end{array} \right)$

$= \lim\limits_{r\to 0} \underbrace{(r\sin\theta+1)}_{\to 1} \underbrace{\dfrac{\sin[r\cos\theta(r\sin\theta+1)]}{r\cos\theta(r\sin\theta+1)}}_{\to 1}$

$= 1 \cdot 1 = 1$ //

b) $\dfrac{\partial\varphi}{\partial z} = xye^z + xe^y + ye^x$; İstenen doğrultu türevi, z- değişkenine göre kısmi türevi ifade etmektedir.

VEYA

$D_{\vec{u}}f = \vec{\nabla}f \cdot \vec{u}$; pozitif z-ekseni doğrultusundaki birim vektör:

$\vec{u} = \langle 0,0,1 \rangle$

$\vec{\nabla}f = [ye^z + ze^y + yze^x]\hat{i} + [xe^z + xze^y + ze^x]\hat{j} + [xye^z + xe^y + ye^x]\hat{k}$

$\Rightarrow D_{\vec{u}}f = xye^z + xe^y + ye^x$

MAT 102 ARASINAV 12 Nisan 2014

SORU 3 Aşağıdaki boşluklar öğrenci tarafından doldurulacaktır. (Puan Hariç)

Soyadı:	Adı:	Grup No:	Sıra No:	Puan
İmza:	Elektronik Posta(e-mail) adresi:	Öğrenci No:		

`Lütfen bu soruyu bu kağıdın ön yüzünü ve gerekirse arka yüzünü kullanarak cevaplayınız.`

[12 puan] (a) $\mathbf{f(x,y) = -x^3+4xy-2y^2+1}$ fonksiyonunun maksimum, minimum ve eyer noktalarını bulunuz.

[13 puan] (b) $\mathbf{f(x,y,z) = 2x^2+y^2+3z^2}$ fonksiyonunun $\mathbf{2x-3y-4z=49}$ düzlemi üzerindeki minimum değerini bulunuz.

Çözüm

(a) $f_x = -3x^2+4y=0$, $f_y = 4x-4y=0 \Rightarrow (x,y)=(0,0),(\frac{4}{3},\frac{4}{3})$. $H(x,y)=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2$ olsun.

Öyleyse $f_{xx}=-6x$, $f_{yy}=-4$, $f_{xy}=4 \Rightarrow H(x,y)=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=24x-16$.

$H(0,0)=-16<0$ olduğundan $(0,0,1)$ bir eyer noktasıdır.

$H(\frac{4}{3},\frac{4}{3})=8\cdot 4-16=16>0$, $f_{xx}(\frac{4}{3},\frac{4}{3})=-8<0 \Rightarrow f(\frac{4}{3},\frac{4}{3})=\frac{59}{27}$ yerel maksimum değerdir.

(b) $g(x,y,z)=2x-3y-4z-49$ olsun. Öyleyse

$$\nabla f = 4x\vec{i}+2y\vec{j}+6z\vec{k},$$

$$\lambda\nabla g = 2\lambda\vec{i}-3\lambda\vec{j}-4\lambda\vec{k}.$$

$\nabla f=\lambda\nabla g \Rightarrow 4x=2\lambda$, $2y=-3\lambda$, $6z=-4\lambda$. Böylece $2x-3y-4z=\lambda+\frac{9}{2}\lambda+\frac{8}{3}\lambda=49 \Rightarrow \lambda=6$ bulunur.

Bundan dolayı $x=3$, $y=-9$, $z=-4$, ve $f(3,-9,-4)=2.3^2+(-9)^2+3(-4)^2=147$ minimum değeri bulunur.

MAT 102

ARASINAV

12 Nisan 2014

SORU 4

Aşağıdaki boşluklar öğrenci tarafından doldurulacaktır. (Puan Hariç)

Soyadı:	Adı:	Grup No:	Sıra No:	Puan
İmza:	Elektronik Posta(e-mail) adresi:	Öğrenci No:		

`Lütfen bu soruyu bu kağıdın ön yüzünü ve gerekirse arka yüzünü kullanarak cevaplayınız.`

[12 puan] (a) $\int_0^2 \int_x^2 \mathbf{x}\sqrt{1+\mathbf{y}^3}\,\mathbf{dydx}$ integralini hesaplayınız.

[13 puan] (b) Alttan $\mathbf{z}^2 = \mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2$, $\mathbf{z} \geq 0$ ve üstten $\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 + \mathbf{z}^2 = 9$ ile sınırlı $\mathbf{D}$ bölgesinin hacmini bulunuz.

Çözüm

(a) Fubini Teoremi'nden,

$$\begin{aligned}\int_0^2 \int_x^2 \mathbf{x}\sqrt{1+\mathbf{y}^3}\,\mathbf{dydx} &= \int_0^2 \int_0^y \mathbf{x}\sqrt{1+\mathbf{y}^3}\,\mathbf{dxdy} = \int_0^2 \left(\int_0^y \mathbf{x}\sqrt{1+\mathbf{y}^3}\mathbf{dx}\right)\mathbf{dy} \\ &= \int_0^2 \left[\frac{\mathbf{x}^2}{2}\sqrt{1+\mathbf{y}^3}\right]_0^y \mathbf{dy} = \int_0^2 \frac{\mathbf{y}^2}{2}\sqrt{1+\mathbf{y}^3}\,\mathbf{dy} \\ &= \int_0^2 \frac{3\mathbf{y}^2}{6}\sqrt{1+\mathbf{y}^3}\,\mathbf{dy}\end{aligned}$$

elde edilir. $\mathbf{u} = 1+\mathbf{y}^3$, $\mathbf{du} = 3\mathbf{y}^2\mathbf{dy}$ olsun. Öyleyse

$$\int_0^2 \int_x^2 \mathbf{x}\sqrt{1+\mathbf{y}^3}\,\mathbf{dydx} = \frac{1}{6}\int_1^9 \sqrt{\mathbf{u}}\,\mathbf{du} = \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}\left[\mathbf{u}^{3/2}\right]_1^9 = \frac{1}{9}(9^{3/2} - 1^{3/2}) = \frac{26}{9}.$$

(b) Küresel koordinatlarda, $\rho^2 = \mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 + \mathbf{z}^2 = 9 \Rightarrow \rho = 3$. Küre ve koni $9 = (\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2) + \mathbf{z}^2 = +\mathbf{z}^2 + \mathbf{z}^2$ veya $\mathbf{z} = \frac{3}{\sqrt{2}}$ iken kesişir. Öyleyse $3\cos\phi = \rho\cos\phi = \mathbf{z} = \frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ veya $\phi = \frac{\pi}{4}$ olur.
Sonuç olarak, $\mathbf{D} = \{(\rho,\phi,\theta) : 0 \leq \rho \leq 3,\ 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4},\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\} \Rightarrow$

$$\begin{aligned}\text{Hacim} = \mathbf{V} = \iiint_{\mathbf{D}} \mathbf{dV} &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^3 \rho^2 \sin\phi\ \mathbf{d}\rho\mathbf{d}\phi\mathbf{d}\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^9 \mathbf{d}\phi\mathbf{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} 9\sin\phi\ \mathbf{d}\phi\mathbf{d}\theta = 9\int_0^{2\pi} [-\cos\phi]_0^{\frac{\pi}{4}}\ \mathbf{d}\theta \\ &= 9\int_0^{2\pi}(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) = 9\pi(2-\sqrt{2}).\end{aligned}$$