Algèbre linéaire : Espaces vectoriels

1 Espaces vectoriels et Sous-espaces vectoriels

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ représente soit l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ soit celui des complexes $\mathbb{C}$.
Soit $\mathbb{E}$ un ensemble non vide. On munit $\mathbb{E}$ d'une loi de composition :

- interne « + » (addition) : $\forall (x,y) \in \mathbb{E}^2$, on a $x+y \in \mathbb{E}$;
- externe « $\bullet$ » (multiplication par un scalaire) : $\forall x \in \mathbb{E},\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$ on a $\lambda \bullet x \in \mathbb{E}$.

1.1 Espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$

Déf 1.1. Soit $\mathbb{E}$ un ensemble muni d'une loi de composition interne notée + et d'une loi de composition externe à opérateurs dans K notée $\bullet$. On dit que ($\mathbb{E}$, +, $\bullet$) est un$\mathbb{K}$-espace vectoriel s'il vérifie les dix propriétés suivantes :

1. $(\mathbb{E},+)$ est un groupe commutatif, c'est-à-dire que :
   (a) l'opération + est une loi de composition interne sur E : $\forall (x,y) \in \mathbb{E}^2$, on a $x+y \in \mathbb{E}$;
   (b) Pour tout triplet (x,y,z) d'éléments de $\mathbb{E}$, on a $(x+y)+z = x+(y+z)$;
   (c) Il existe une éléments $0_{\mathbb{E}}$ dans $\mathbb{E}$, tel que pour tout $x \in \mathbb{E}$, on a $x+0_{\mathbb{E}} = 0_{\mathbb{E}}+x = x$;
   (d) Pour tout élément x de $\mathbb{E}$ il existe un élément y de $\mathbb{E}$ tel que $x+y = y+x = 0_{\mathbb{E}}$. On note cet élément $-x$;
   (e) Pour tout couple (x,y) d'éléments de $\mathbb{E}$ on a $x+y = y+x$;
2. La loi $\bullet$ vérifie les cinq propriétés suivantes :
   (a) L'opération $\bullet$ est une loi de composition externe : $\forall x \in \mathbb{E},\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$ on a $\lambda \bullet x \in \mathbb{E}$;
   (b) Pour tout $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$ et pour tout $x \in \mathbb{E}$, on a $\lambda \bullet (\mu \bullet x) = (\lambda\mu) \bullet x$;
   (c) Pour tout $x \in \mathbb{E}$, $1 \bullet x = x$;
   (d) Pour tout $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$ et pour tout $x \in \mathbb{E}$, on a $(\lambda+\mu) \bullet x = \lambda \bullet x + \mu \bullet x$;
   (e) Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{E}^2$, on a $\lambda \bullet (x+y) = \lambda \bullet x + \lambda \bullet y$.

Vocabulaire : Les éléments de $\mathbb{E}$ sont appelés des **vecteurs** et ceux de $\mathbb{K}$ des **scalaires**.

Remarque 1.1. *Le vecteur nul $0_{\mathbb{E}}$, élément neutre pour l'addition des vecteurs, est unique et nous avons, pour tout scalaire λ et tout vecteur x, l'équivalence $\lambda \bullet x = 0_{\mathbb{E}} \Longleftrightarrow (\lambda = 0)$ ou $(x = 0_{\mathbb{E}})$. Tout espace vectoriel contient au moins le vecteur nul et n'est donc pas vide.*

Exemple 1.1. On rappel ici quelques exemples classique d'espace vectoriels :

1. L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ muni des lois habituelles (somme de polynômes et multiplication de polynôme par un scalaire) est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

2. Pour tout entiers naturels non nuls n et p, l'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices de n lignes et p colonnes munit de la somme de matrices et de la multiplication d'une matrice par un scalaire est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
3. Pour tout entier naturel non nul n, l'ensemble $\mathbb{K}^n$ des n-uplets de scalaire est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Déf 1.2. On appelle **famille finie de vecteurs** tout n-uplet de n vecteurs où n est un entier naturel non nul.

Déf 1.3. Un vecteur x de E est dit **combinaison linéaire** d'une famille $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ s'il existe n scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$.
L'ensemble des combinaisons linéaires de $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est noté $\mathrm{Vect}(\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \ldots, \mathrm{e}_\mathrm{n})$.

Exemple 1.2.

1. Dans l'ensemble $\mathbb{K}^3$ des triplets de scalaires, le vecteur (2,5,9) est combinaison linéaire de la famille de vecteurs $\{ (1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$, en effet
$$(2,5,9) = 2(1,1,1) + 3(0,1,1) + 4(0,0,1).$$
2. Dans $\mathbb{R}[X]$, on a : $\mathrm{Vect}(1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2) = \{\mathrm{aX}^2 + \mathrm{bx} + \mathrm{c} \mid (\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}) \in \mathbb{R}^3\} = \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ l'ensemble des polynômes de degré au plus deux à coefficients réels.

1.2 Sous-espaces vectoriel (sev)

Déf 1.4. Soient $\mathbb{E}$ un espace vectoriel et F un sous-ensemble de $\mathbb{E}$. On dit que F est un **sous-espace vectoriel** de $\mathbb{E}$ si F est non vide et s'il vérifie les deux propriétés suivantes :

1. Pour tout couple (x, y) de vecteurs de F, le vecteur x + y appartient à F ;
2. Pour tout scalaire λ et tout vecteur x de F, le vecteur $\lambda \bullet x$ appartient à F.

Exemple 1.3.

1. Tout espace vectoriel $\mathbb{E}$ a toujours au moins deux sous espaces qui sont $\mathbb{E}$ et $\{0_\mathbb{E}\}$.
2. L'ensemble $\{(x, 0, y) | (x, y) \in \mathbb{K}^2\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{K}^3$.

Exo 1.1. Montrer que l'ensemble $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x + y\}$ est un sev de $\mathbb{R}^3$.

***Solution* 1.1.**

- $(0,0,0) \in F$ *car* $0 = 0 + 0$. *Donc* $F \neq \emptyset$.
- *Soient* (x, y, z) *et* (x', y', z') *deux éléments de* F. *Alors* $z = x + y$ *et* $z' = x' + y'$. *Donc* $z + z' = x + x' + y + y'$. *D'où* $(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z') \in F$.
- *Soient* (x, y, z) *et* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Alors* $z = x + y$ *et donc* $\lambda z = \lambda x + \lambda y$. *Il vient que* $\lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \in F$.

On conclut que F est bien un sev de $\mathbb{R}^3$

Exo 1.2. Montrer que $E = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(x) - xP'(x) = 0\}$ est un espace vectoriel.

***Solution* 1.2.** *On commence par constater que $E \subset \mathbb{R}[X]$ qui est un espace vectoriel. Il suffit donc de vérifier que E est un sev de $\mathbb{R}[X]$.*

- *Le polynôme nul $0_{\mathbb{R}[X]}$ est de dérivée nulle. Par définition de E, $0_{\mathbb{R}[X]} \in E \neq \emptyset$.*
- *Soient P et Q deux éléments de E . Alors $P(x) - xP'(x) = 0$ et $Q(x) - xQ'(x) = 0$. Donc $P(x) + Q(x) - x(P'(x) + Q'(x)) = 0$. D'où $P + Q \in E$.*
- *Soit $P \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $P(x) - xP'(x) = 0$. En multipliant cette inégalité par λ, on obtient : $\lambda P(x) - x\lambda P'(x) = 0$. Donc $\lambda P \in E$.*

On conclut que E est bien un sev de $\mathbb{R}[X]$.

Prop 1.1. Toute intersection de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel est un sous-espace vectoriel.

Démonstration. Soit F une intersection de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel $\mathbb{E}$; $0_{\mathbb{E}}$ appartient à chacun des sous-espaces donc à F qui est de ce fait non vide. Une combinaison linéaire d'éléments de F appartient à chacun des sous-espaces donc à leur intersection F. L'ensemble F est non vide, stable par combinaison linéaire : c'est un sous-espace de E $\square$

2 Familles de vecteurs génératrices, libres

2.1 Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteur

Prop 2.1. Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{E}$. L'ensemble $\mathrm{Vect}(\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \ldots, \mathrm{e}_\mathrm{n})$ des combinaison linéaire de cette famille est un sev de $\mathbb{E}$. C'est le sev engendré par $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$.

Démonstration. Il suffit de vérifier que $\mathrm{Vect}(\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \ldots, \mathrm{e}_\mathrm{n})$ est non vide et stable par combinaison linéaire. $\square$

Exo 2.1. Montrer que $E = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & b \\ a & a-b \end{pmatrix} \middle| (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

***Solution* 2.1.** *Par définitions de E, on a :*

$$
\begin{aligned}
E &= \left\{ a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \middle| (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\
&= \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}
$$

C'est donc un sev de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$.

2.2 Familles génératrices d'un espace vectoriel, familles libres

Déf 2.1. Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et F un sev de $\mathbb{E}$. Une famille $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de n vecteur de $\mathbb{E}$ est dite **génératrice** de F si F=Vect$(\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \ldots, \mathrm{e}_\mathrm{n})$.

Exo 2.2. Montrer que $F = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 2y = 0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ et déterminer une famille génératrice de F.

***Solution* 2.2.** *Par définitions de F, on a :*

$$\begin{aligned} F &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 2y = 0\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 2y\right\} = \{y(2,1) \mid y \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\{(2,1)\} \end{aligned}$$

C'est donc un sev de $\mathbb{R}^2$ et $\{(2,1)\}$ en est une famille génératrice.

Exo 2.3. Montrer que $F_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 2z = 0\right\}$ et $F_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y + z = 0\right\}$ sont des sev de $\mathbb{R}^3$ et déterminer dans chaque cas une famille génératrice du sev.

***Solution* 2.3.** *On a :*

$$\begin{aligned} F_1 &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y - 2z\right\} = \{y(1,1,0) + z(-2,0,1) \mid (y,z) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}\{(1,1,0), (-2,0,1)\} \\ F_2 &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = -z\right\} = \{x(1,0,0) + z(0,-1,1) \mid (x,z) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}\{(1,0,0), (0,-1,1)\} \end{aligned}$$

Propriété 2.1 (Familles génératrices)**.** Soient $\mathbb{E}$ un espace vectoriel et $(e_i)_{1 \le i \le n}$ une famille de vecteur de $\mathbb{E}$. Soit F=Vect$(\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \ldots, \mathrm{e}_\mathrm{n})$. Si

- on change l'ordre des vecteurs de la famille $(e_i)_{1 \le i \le n}$,
- ou on ajoute à un vecteur de la famille $(e_i)_{1 \le i \le n}$ une combinaison linéaire des autres,
- ou on multiplie un vecteur de la famille $(e_i)_{1 \le i \le n}$ par un scalaire non nul,
- ou on ajoute à la famille $(e_i)_{1 \le i \le n}$ un nombre p d'autres vecteurs de F,
- ou on enlève de la famille $(e_i)_{1 \le i \le n}$ un de ses vecteurs qui lui-même est une combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille,

alors le sous-espace engendré par chacune de ces nouvelles familles est encore égal à F.
En particulier ceci est vrai pour une famille finie génératrice de E lui même.

Déf 2.2. Une famille $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est dite **libre** si pour tout n-uplet de scalaire $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ on a $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$. On dit aussi que les vecteurs $e_1, e_2, \ldots, e_n$ sont **linéairement indépendants** . Une famille de vecteurs qui n'est pas libre est dite **liée**.

Exemple 2.1. Dans $\mathbb{R}^2$, la famille $\left\{\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\right\}$ est linéairement indépendante. En effet, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on a

$$a\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix}3a\\a+2b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Longleftrightarrow a = b = 0.$$

Propriété 2.2 (Familles liées). Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel.

- Une famille finie de vecteurs liée dont on change l'ordre des vecteurs reste une famille liée.
- La famille $\{e\}$ est liée si, et seulement si, le vecteur e est nul.
- La famille $\{e_1, e_2\}$ est liée si, et seulement si, l'un des vecteurs est égal à l'autre multiplié par un scalaire ; on dit dans ce cas que les vecteurs e_1 et e_2 sont **colinéaires**.
- La famille $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ est liée si, et seulement si, l'un des e_i est égal à une combinaison linéaire des autres.

Propriété 2.3 (Familles libres). Soient $\mathbb{E}$ un espace vectoriel et $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{E}$.

- Une famille finie de vecteurs libre dont on change l'ordre des vecteurs reste une famille libre ?
- Si la famille $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est libre, toute sous-famille de $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est aussi libre
- La famille $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est libre si, et seulement si, tout vecteur de $\mathrm{Vect}(\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_\mathrm{n})$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de cette famille.

3 Base, dimension d'un espace vectoriel

3.1 Base d'un espace vectoriel

Déf 3.1. Une base $\mathcal{B}$ d'un espace vectoriel $\mathbb{E}$ est une famille qui est à la fois libre et génératrice de $\mathbb{E}$.

Exemple 3.1. $\mathcal{B} = \{(1,0), (0,1)\}$ *est une base de* $\mathbb{R}^2$.

Propriété 3.1 (Propriété caractéristique). $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{E}$ si et seulement si tout vecteur de $\mathbb{E}$ s'écrit comme combinaison linéaire unique des vecteurs de $\mathcal{B}$.

Exemple 3.2. La famille $\{(1,1), (1,0), (0,1)\}$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^2$. En effet,

$$(1,1) = 1(1,1) + 0(1,0) + 0(0,1) = 0(1,1) + 1(1,0) + 1(0,1).$$

Déf 3.2. Soit $\mathcal{B} = \{u_1, ..., u_n\}$ une base de $\mathbb{E}$. Alors d'après la propriété caractéristique, pour tout $x \in \mathbb{E}$, il existe un unique n-uplet $(x_1, ..., x_n)$ de scalaires tel que : $x = x_1.u_1 + ... + x_n.u_n$. Le n-uplet $(x_1, ..., x_n)$ s'appelle les coordonnées de x dans $\mathcal{B}$.

Certains des espaces vectoriels que nous rencontrerons ont une base particulièrement simple que l'on appelle **base canonique**. Elles sont décrites ci-dessous :

1. **Base canonique de** $\mathbb{K}^n$: $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ avec $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ où c'est la $i^{\text{ème}}$ coordonnée qui fait 1.
2. **Base canonique de** $\mathbb{K}_n[X]$: $\mathscr{B} = \{1, X, \ldots, X^n\}$.
3. **Base canonique de** $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: $\mathscr{B} = \{E_{ij} \mid 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq p\}$ avec $E_{ij} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ telle que seul le coefficient qui est sur la ligne i et la colonne j vaut 1 et tous les autres 0.

3.2 Dimension d'un espace vectoriel

Déf 3.3. Un espace vectoriel est de **dimension finie** s'il admet une base avec un nombre fini de vecteurs.

Propriété 3.2. Si une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{E}$ a n vecteurs alors toute base de $\mathbb{E}$ a n vecteurs. Ce nombre s'appelle la dimension de $\mathbb{E}$ et on note $\dim \mathbb{E} = n$.

Exo 3.1. Montrez que $\mathbb{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 2a+b & b \\ a+c & -a \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, en donner une base et la dimension.

Solution 3.1. *Par définition de $\mathbb{E}$, on a :*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} &= \left\{ \begin{pmatrix} 2a+b & b \\ a+c & -a \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ a\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

Par ailleurs, $a\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ si et seulement si $a = b = c = 0$. Donc $\mathbb{E}$ est un sev de dimension 3 de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exo 3.2. Montrez que $\mathbb{E} = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(2) = P(1) = 0\}$ est un espace vectoriel. Donner une base de $\mathbb{E}$ et la dimension de $\mathbb{E}$.

Solution 3.2. *Soit $P \in \mathbb{E}$. Alors P est un polynôme de degré au plus 3 et $P(1) = P(2) = 0$. Il existe donc $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $P(X) = (X-1)(X-2)(aX+b) = a(X^3 - 3X^2 + 2X) + b(X^2 - 3X + 2)$. On en déduit que*

$$\mathbb{E} = \{a(X^3 - 3X^2 + 2X) + b(X^2 - 3X + 2) \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\{\mathrm{X}^3 - 3\mathrm{X}^2 + 2\mathrm{X}\ ,\ \mathrm{X}^2 - 3\mathrm{X} + 2\}.$$

De plus, la famille $\{X^3 - 3X^2 + 2X\ ,\ X^2 - 3X + 2\}$ est libre. Donc $\mathbb{E}$ est un sev de dimension 2 de $\mathbb{R}_3[X]$.

Convention : On considère qu'un espace vectoriel réduit au vecteur nul est de dimension 0.

Propriété 3.3. Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel de dimension n , alors :

1. Le cardinal d'une famille libre de $\mathbb{E}$ est inférieur ou égal à n.
2. Le cardinal d'une famille génératrice de $\mathbb{E}$ est supérieur ou égal à n.
3. Si le cardinal d'une famille libre de $\mathbb{E}$ est exactement égal à n (On parle de famille libre maximale) alors c'est une base de $\mathbb{E}$.
4. Si le cardinal d'une famille génératrice de $\mathbb{E}$ est exactement égal à n (On parle de famille génératrice minimale) alors c'est une base de $\mathbb{E}$.

Propriété 3.4 (Théorème de la base incomplète)**.** Soit $\{e_1, \ldots, e_k\}$ une famille libre de $\mathbb{E}$ un espace vectoriel de dimension finie $n > k$. Alors il existe des vecteurs $e_{k+1}, \ldots, e_n$ de $\mathbb{E}$ tels que $\{e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n\}$ soit une base de $\mathbb{E}$.

3.3 Somme de sous espaces vectoriels

Déf 3.4. Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F_1 et F_2 deux sous-espaces de $\mathbb{E}$.
L'ensemble $H = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in F_1, x_2 \in F_2\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$ appelé somme de F_1 et F_2 et noté $F_1 + F_2$.

Exo 3.3. On considère les deux sous-espaces vectoriels $F_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x - y + z = 0 \text{ et } t = 0\}$ et $F_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid y - z - 2t = 0 \text{ et } x = 0\}$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$. Déterminer une base et la dimension de chacun des sous-espaces vectoriels $F_1, F_2, F_1 \cap F_2$ et $F_1 + F_2$.

***Solution* 3.3.** *On a :*

- $F_1 = \mathrm{Vect}\{(1,0,-3,0),(0,1,1,0)\}$ *et la famille* $\{(1,0,-3,0),(0,1,1,0)\}$ *est libre dans* $\mathbb{R}^4$*, c'est donc une base de* F_1 *dans* $\mathbb{R}^4$*. Donc* $\dim F_1 = 2$.
- $F_2 = \mathrm{Vect}\{(0,1,1,0),(0,2,0,1)\}$ *et la famille* $\{(0,1,1,0),(0,2,0,1)\}$ *est libre dans* $\mathbb{R}^4$*, c'est donc une base de* F_2 *dans* $\mathbb{R}^4$*. Donc* $\dim F_2 = 2$.
- *Par définition de* F_1 *et* F_2*, on a :* $F_1 \cap F_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \| x = t = 0 \text{ et } y = z\}$*. Donc* $F_1 \cap F_2 = \mathrm{Vect}\{(0,1,1,0)\}$*. Comme le vecteur* $(0,1,1,0)$ *est non nul alors* $\{(0,1,1,0)\}$ *est une base de* $F_1 \cap F_2$*. Donc* $\dim F_1 \cap F_2 = 1$.
- *Par définition, on a*

$$\begin{aligned} F_1 + F_2 =& \{x(1,0,-3,0) + y(0,1,1,0) + z(0,1,1,0) + t(0,2,0,1) \mid x,y,z,t \in \mathbb{R}\} \\ =& \{x(1,0,-3,0) + u(0,1,1,0) + t(0,2,0,1) \mid x,u,t \in \mathbb{R}\} \\ =& \mathrm{Vect}\{(1,0,-3,0),(0,1,1,0),(0,2,0,1)\}. \end{aligned}$$

  Comme la famille $\{(1,0,-3,0),(0,1,1,0),(0,2,0,1)\}$ *est libre, on en déduit que c'est une base de* $F_1 + F_2$ *et par suite* $\dim(F_1 + F_2) = 3$.

Déf 3.5. Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces d'un espace $\mathbb{E}$. La somme $F_1 + F_2$ est **directe** si $F_1 \cap F_2 = \{0_{\mathbb{E}}\}$. Elle est alors notée $F_1 \oplus F_2$.

Propriété 3.5. Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces d'un espace $\mathbb{E}$. La somme $F_1 + F_2$ est **directe** si, et seulement si, pour tout $x \in F_1 + F_2$, il existe un et un seul couple $(x_1, x_2) \in F_1 \times F_2$ tel que $x = x_1 + x_2$.

Déf 3.6. Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces d'un espace $\mathbb{E}$. F_1 et F_2 sont dits **supplémentaire** si $F_1 \oplus F_2 = \mathbb{E}$.