FI 勉強会　ルベグ積分

（Y）中島

2019 年 8 月 27 日

1　はじめに

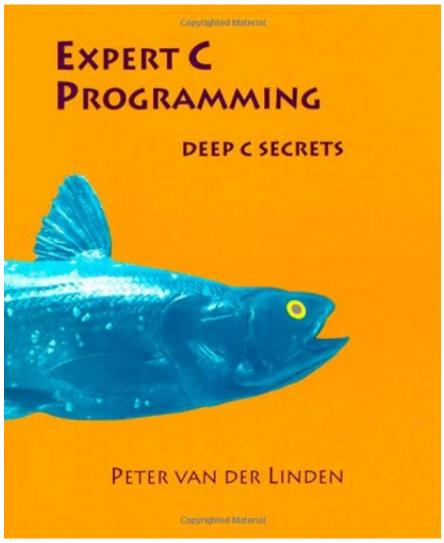
そもそも測度論よくわかっていません．たぶん間違ってます．

1.1　本日の前提

リーマン積分（の定義と限界），（通常の $\mathbb{R}$ の）位相 $\mathscr{O}_{\mathbb{R}}$，（通常の）測度とその性質

1.2　本日のポイント

- 測度の完備性とは？
- $(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}_{\mathbb{R}^n}, \mu_{\mathbb{R}^n})$ の性質（この資料で厳密な理解は不可能）
- 可測関数とは？
- ルベグ積分の構成法
- 単調収束定理，ルベグ収束定理
- リーマン積分とルベグ積分の違い



1.3 本日扱わないが重要そうなこと

置換積分，カラテオドリ外測度，カラテオドリ・ハーンの拡張定理，LS 測度，直積測度，フビニの定理（測度の分解，ラドン・ニコディムの定理，有界変動関数，L^p 空間，フーリエ変換，ソボレフ空間...）

1.4 復習

いくつかの基本的な定義及び性質を羅列する．

Def. 1.4.1 (σ-加法族と測度)
次の性質を満たす X 上の集合族 $\mathscr{S}$ を σ-加法族とよぶ.[*1]
$(S1)$ $E \in \mathscr{S} \Rightarrow E^c \in \mathscr{S}$
$(S2)$ $E_j \in \mathscr{S} \Rightarrow \bigcup_j^\infty E_j \in \mathscr{S}$
次の条件を満たす $\mu : \mathscr{S} \to [0, \infty]$ を測度とよぶ.
$(M1)$ $\mu(\emptyset) = 0$
$(M2)$ $\mu(\bigsqcup_j^\infty E_j) = \sum_j^\infty \mu(E_j)$

Prop. (測度の性質)

- 単調性：$E \subset F \Rightarrow \mu(E) \leq \mu(F)$
  $\mu(E) < \infty \Rightarrow \mu(F - E) = \mu(F) - \mu(E)$
- σ-劣加法性：$\mu(\bigcup_j^\infty E_j) \leq \sum_j^\infty \mu(E_j)$
- $E_j \nearrow E \Rightarrow \mu(\bigcup_j^\infty E_j) = \mu(E)$
- $E_j \searrow E,\ \mu(E_1) < \infty \Rightarrow \mu(\bigcap_j^\infty E_j) = \mu(E)$

Proof.
有名なので省略.

Prop. (最小の σ-加法族)
$\mathscr{E}$ を X 上の集合族とするとき，$\mathcal{B}[\mathscr{E}]$ は X 上に一意に存在．ただし，$\mathcal{B}[\mathscr{E}]$ は $\mathscr{E}$ を含む最小の σ-加法族を表す.

Proof.
$\mathscr{E}$ を含む σ-加法族全体を $\{M_\lambda\}$ として，$\mathcal{B}[\mathscr{E}] = \bigcup_\lambda M_\lambda$ と定めればよい.

Def. 1.4.2 (ボレル集合族)
$\mathcal{B}[\mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}]$ をボレル集合族とよぶ.

1.5 測度の完備性

Def. 1.5.1 (完備測度空間)
測度空間 $(X, \mathscr{S}, \mu)$ が次の条件を満たすとき，完備であるという.
$\mu(E) = 0 \Rightarrow^\forall F \subset E\ s.t.\ F \in \mathscr{S}$

[*1] とりあえず，空集合の公理を暗に要請する．細かいことは気にしない.

Def. 1.5.2 (完備化)
測度空間 (X, M, μ) の完備化とは，以下のように測度空間 $(X, \overline{M}, \overline{\mu})$ を構成することである．

- $\mathcal{N} = \{N \in M \mid \mu(N) = 0\}$
- $\overline{\mathcal{N}} = \{F \subset X \mid N \in \mathcal{N},\ F \subset N\}$
- $\overline{\mathcal{M}} = \{E \cup F |\ E \in M,\ F \in \overline{\mathcal{N}}\}$
- $\overline{\mu}(E \cup F) = \mu(E)$

Remark.
要するに，非完備の原因となっている部分集合を，零測度集合として添加しているだけである．

Prop.
$\overline{\mu}$ は well − defined であり，$(X, \overline{M}, \overline{\mu})$ は完備測度空間である．

Proof.
$E \cup F \in \overline{M},\ F \subset N \in \mathcal{N}$ として，$(E \cup F)^c = (E \cup F \cup N)^c \cup (E \cup F \cup N^c)^c$ であることから，σ-加法族であることを示す．その他に関しては簡単な計算によりほぼ自明に示せる．

Prop.
$\overline{M}$ 上の測度 λ が，M 上で $\overline{\mu}$ と一致するとき，$\lambda = \overline{\mu}$.

Proof.
$E \cup F \in \overline{M},\ F \subset N \in \mathcal{N}$ として，$E \cup F = (E \cap N^c) \cup ((E \cap N) \cup F)$ の測度をとればよい．

Def. 1.5.3 (ほとんど至るところで)
(X, M, μ) を測度空間として，$P(x)$ を x を変数とする命題とする．このとき．$P(x)$ が "ほとんど至るところ $(a.e.)$ で" 成立するとは $N := \{x \in X \mid P(x)$ が成立しない $\}$ に対して，$\mu(N) = 0$ となることである．

2 ルベグ測度

$\mathbb{R}^n$ において，体積の概念を一般化すると，ルベグ可測集合 $\mathscr{L}_{\mathbb{R}^n}$ 及び，ルベグ測度 $\mu_{\mathbb{R}^n}$ が構成される．具体的には，点集合の体積を外側から測った外測度という概念を導入し，可測集合の特徴付け[*2]を行うことで測度空間 $(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}_{\mathbb{R}^n}, \mu_{\mathbb{R}^n})$ という流れになる．抽象的な構成も含めて，一度きちんと議論を追わないと絶対にわからないのでは？

2.1 ルベグ測度・ルベグ可測集合

$(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}_{\mathbb{R}^n}, \mu_{\mathbb{R}^n})$ の特徴を列挙する．

- $(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}_{\mathbb{R}^n}, \mu_{\mathbb{R}^n})$ は完備
- $\mu_{\mathbb{R}^n}((a,b)) = \mu_{\mathbb{R}^n}(b) - \mu_{\mathbb{R}^n}(a)$ where $b \geq a,\ n = 1$
- $\mathcal{B}[\mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}] \subsetneq \mathscr{L}_{\mathbb{R}^n}$
- $\mu_{\mathbb{R}^n}(aE) = |a|^n \mu_{\mathbb{R}^n}(E),\ \mu_{\mathbb{R}^n}(E+y) = \mu_{\mathbb{R}^n}(E)$

最後の定数倍・平行移動不変性により，$\mathbb{R}^n$ でルベグ積分の計算を実行することができるようになる場合がある．

Def. 2.1.1 ($\mathbb{R}^n$ 上のボレル測度空間)
$(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}[\mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}], \mu_{\mathbb{R}^n}|\mathcal{B}[\mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}])$ をボレル測度空間とよぶ．

2.2 ユークリッド空間上の積測度

$\mathbb{R}^{n+l}$ と，$\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^l$ の直積測度は次のような関係にある．ただし，n 次元ルベグ測度及びボレル測度を μ_n, m_n と表記した．

Thorem. 2.2.1 (ボレル測度空間の直積の関係)
$(\mathbb{R}^{n+l}, \mathcal{B}_n \otimes \mathcal{B}_l, m_n \times m_l) = (\mathbb{R}^{n+l}, \mathcal{B}_{n+l}, m_{n+l})$

Thorem. 2.2.2 (ルベグ測度空間の直積の関係)
$(\mathbb{R}^{n+l}, \overline{\mathscr{L}_n \otimes \mathscr{L}_l}, \overline{\mu_n \times \mu_l}) = (\mathbb{R}^{n+l}, \mathscr{L}_{n+l}, \mu_{n+l})$

Remark.
$\overline{\mathcal{B}_n \otimes \mathcal{B}_l} \neq \overline{\mathcal{B}_n} \otimes \overline{\mathcal{B}_l}$ であることがわかる．

[*2] 開集合に正しい体積を与えるものとして特徴付けるのが最も自然であると個人的には思う．カラテオドリによる特徴づけは，$E \in \mathscr{L}_{\mathbb{R}^n} \ \Leftrightarrow\ |^{\forall}A|_e = |A \cap E|_e + |A - E|_e$ となる．位相を回避しているのがポイント．これによって，抽象的な測度空間を構成することが可能になる．

3　ルベグ積分

本章では，測度空間 (X, M, μ) から $\overline{\mathbb{R}}$ or $\mathbb{C}$ への関数について述べる.[*3]

3.1　可測関数

可測関数を定義するが，これは，通常の文脈では連続関数の一般化と考えればよい.

Def. 3.1.1 (可測関数)
$f : X \to \overline{\mathbb{R}}$[*4]が M 可測関数であるとは，　$f^{-1}((^\forall a, \infty]) \in M$ が成立することである.[*5]

Prop.
任意の区間及び $\{\pm\infty\}$ を含む点集合は M 可測となる.

Proof.
計算すればよい.

(補足) : 完備測度空間においては，a.e. による商空間上でギロンを行なうと簡潔になる.
可測関数の四則演算の可測性を考えるために，補題を用意する.

lemma.
M 可測関数 $f_j : X \to \overline{\mathbb{R}}$ に対して，$F : X \to \overline{\mathbb{R}} \times ... \times \overline{\mathbb{R}},\ x \mapsto (f_1(x), ..., f_n(x))$ と定めると，$^\forall O \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}$，$F^{-1}(O) \in M$ が成立する.

Proof.
$O = \sqcup_j^\infty I_j$ と左半開区間で表現すれば，$F^{-1}(I_j) = F^{-1}(\Pi^n(a_j, b_j]) = \cap^n f_j^{-1}((a_j, b_j]) \in M$ より従う.

Prop.　(可測関数の四則演算)
M 可測な $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ に対して，以下成立.
(a) f, g の少なくとも一方が有限の関数であれば，$f \pm g$，fg は M 可測関数.
(b) $-f$ は M 可側関数.
(c) $^\forall x \in X$ に対して，$f(x), g(x) \geq 0$ ならば，$f + g$，fg も M 可測関数.

Proof.
(a) g が有限と仮定しても一般性を失わない.

- $X_\infty^\pm = f^{-1}(\{\pm\infty\})$，$X_0 = f^{-1}(0)$
- $Y^\pm = g^{-1}(\mathbb{R})$，$Y_0 = g^{-1}(0)$
- $F : X \to \overline{\mathbb{R}}^2,\ x \mapsto (f(x), g(x))$
- $\varphi_\pm : \overline{\mathbb{R}}^2 \to \overline{\mathbb{R}},\ (a, b) \mapsto a \pm b$
- $\Psi : \overline{\mathbb{R}}^2 \to \overline{\mathbb{R}},\ (a, b) \mapsto ab$

と定義すれば，以下の合成表現を得る.

[*3] $\overline{\mathbb{R}} = \{\mathbb{R}\} \cup \{\pm\infty\}$．ただし，$0 \times \pm\infty = 0$ と約束する.
[*4] $f : X \to \mathbb{C}$ の場合は，$f(x) = g(x) + ih(x)$ として，g, h に関して考える.
[*5] 一般的には，測度空間の σ-加法族間の引き戻しとして定義される．上記の定義は $(X, M) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ 間の議論に相当する．$X = \mathbb{R}$ の場合は，$M = \mathscr{L}_{\mathbb{R}}$ と取るのが一般的である.

$(f\pm g)(x)=\varphi_\pm\circ F(x),\ (fg)(x)=\Psi\circ F(x)$
定義した記号を用いれば，$(f\pm g)^{-1}((a,\infty])=X_\infty^+\cup(f\pm g)^{-1}((a,\infty))$
$a\geq 0$ として，$(fg)^{-1}((a,\infty])=(X_\infty^+\cap Y^+)\cup(X_\infty^-\cap Y^-)\cup(fg)^{-1}((a,\infty))$
$a<0$ として，$(fg)^{-1}((a,\infty])=(X_\infty^+\cap Y^+)\cup(X_\infty^-\cap Y^-)\cup X_0\cup Y_0\cup(fg)^{-1}((a,0))\cup(fg)^{-1}((a,\infty))$
前補題を利用すれば，$\varphi_\pm,\Psi$ の連続性より可測性が従う．
(b) 逆像の性質より自明．
(c) $(a,\infty]=(a,\infty)\cup X_\infty^+\cup Y_\infty^+$ として，(a) と同様の議論を行えばよい．

Prop. (可測関数列の可測性)
M 可測関数 $f_j:X\to\overline{\mathbb{R}}$ に対して，以下可測．
(a) $g_1(x)=\sup f_j(x)$
(b) $g_2(x)=\inf f_j(x)$
(c) $g_3(x)=\overline{\lim}\, f_j(x)=\inf\sup f_j(x)$
(d) $g_4(x)=\underline{\lim}\, f_j(x)=\sup\inf f_j(x)$

Proof.
(a) $g_1^{-1}((a,\infty])=\cup^\infty f_j^{-1}((a,\infty])$ を示す．
$x\in g_1^{-1}((a,\infty])$ として，$g_1(x)>a+^\exists\epsilon$ であるので，十分に大きな j をとれば，$f_j(x)>f_1(x)-\epsilon>a$.
$x\in\cup^\infty f_j^{-1}((a,\infty])$ として，$^\exists j,\ a<f_j(x)\leq g_1(x)$ より従う．
(b) $\inf f_j=-\sup(-f_j)$ より従う．$(c),(d)$ も自明．

Def. 3.1.2 (階段関数)
$f(x)=\sum_j^N c_j\chi_{E_j}(x),\ E_j\in M$ を階段関数とよぶ．ただし，各 E_j は非交とする．

さて，次の定理がルベグ積分の礎となる．

Thorem. 3.1.1
非負 M 可測関数 $f:X\to\mathbb{R}$ に対して，次の条件を持つ階段関数列 ϕ_j が存在する．

- $0\leq\phi_1(x)\leq ...\leq\phi_j(x)\leq ...\leq f(x)$
- $\phi_j(x)\to f(x)$ であり，$f(x)$ が有界である集合上で一様収束する．

Proof.
まず，$[0,\infty]_j=\bigcup_k^{2^{2j}-1}[k2^{-j},(k+1)2^{-j})\cup[2^j,\infty]$
$E_j^k=f^{-1}([k2^{-j},(k+1)2^{-j})),\ F_j=f^{-1}([2^j,\infty])$ と値域の分割を行なう．
$\phi_j(x)=\sum_k^{2^{2j}-1}\frac{k}{2^j}\chi_{E_j^k}(x)+2^j\chi_{F_j}(x)$ と定めた階段関数が条件を満足することを示す．
$E_j^k=E_{j+1}^{2k}\bigsqcup E_{j+1}^{2k+1}$ より，$\phi_j(x)\leq\phi_{j+1}(x)$ が場合分けにより示せる．
また，$f(x)\neq\infty$ の場合，$0\leq f(x)-\phi_j(x)<\frac{1}{2^j}$ が ϕ_j の定義より成立するので，有界の範囲内で一様収束．
一方，$f(x)=\infty$ の場合も，自明に成立．

完備性のもとで，可測関数の性質・定理の条件を緩めることができる．

Thorem. 3.1.2 (完備性と可測性)
(X,M,μ) を完備測度空間，$f,g:X\to\overline{\mathbb{R}}$ なる関数に対して，以下成立．

- fが M 可測かつ $f(x)=g(x)$ $a.e.$ $x\in X\Rightarrow g$ も M 可測関数．
- f,g が M 可測かつ $g(x)\in\mathbb{R}$ $a.e.$ $x\Rightarrow f\pm g,fg$ は M 可測関数．

Proof.
(前半)： $N = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$ として，
$g^{-1}((a,\infty]) = [g^{-1}((a,\infty]) \cap N] \cup [g^{-1}((a,\infty]) \cap (X - N)] = [g^{-1}((a,\infty]) \cap N] \cup f^{-1}((a,\infty]) \in M$．ただし，最後に完備性を利用した．
(後半)： $g(x)$ の無限部分を 0 に修正した関数を $g_0(x)$ とすれば，$f \pm g_0, fg_0$ が M 可測であるので，前半の結果から従う．

Remark.
一般に，可測関数 f に対して，f が M 可測かつ $f(x) = g(x)$ *a.e.* となるように g を構成するという議論を行うことがあるが，その際に g の可測性を保証するために，完備性が要求されることになる．一方で，$f(x) = g(x)$ *a.e.* を満たす g が可測関数として *given* な場合は，完備性は要求されない．

最後に，cauchy 列に関する定理を示す．

Thorem. 3.1.3 (cauchy 列と可測性)
$f_j : X \to \overline{\mathbb{R}}$ が *a.e.* で $\{f_j(x)\}$ が *cauchy* 列となるとき，次の条件を満たす M 可測関数 f が存在する．
$^{\exists} f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *s.t.* $f(x) = \lim f_j(x)$ *a.e.*

Proof.
$E = \{x \in X \mid f_j(x) \text{ is cauchy} - \text{sequence}\}$ に対して，次式が題意を満たすことがすぐに確認できる．
$f : X \to \overline{\mathbb{R}},\ x \mapsto \lim \chi_E(x) f_j(x)$

（補足）: 一般に，合成関数の可測性のギロンは困難である．最も単純な場合のみ示す．

Prop. (合成関数の可測性)
$f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ をボレル可側関数，$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を連続写像とすれば，$f \circ \varphi$ もボレル可測関数となる．

Proof.
連続写像は，ボレル集合をボレル集合に引き戻すことから示すことができる．

3.2 非負関数に対するルベグ積分

$SL^+(X)$ を非負の階段関数全体を表すとする．

Def. 3.2.1 (非負階段関数のルベグ積分)
$\phi(x) = \sum_j^N a_j \chi_{E_j}(x) \in SL^+(X)$ の μ による，$A \in M$ 上の積分を次式で定める．
$\int_A \phi d\mu = \int_X \chi_A \phi d\mu = \sum_j^N a_j \mu(A \cap E_j)$

Prop.
$\phi, \psi \in SL^+(X)$ に対して，以下成立．

- $\int_X c\phi d\mu = c \int_X \phi d\mu \quad (c \leq 0)$
- $\int_X (\phi L \psi) d\mu = \int_X \phi d\mu + \int_X \psi d\mu$
- $\phi \leq \psi \Rightarrow \int_X \phi d\mu \leq \int_X \psi d\mu$
- $A \in M$ に対して，$v(A) = \int_A \phi d\mu$ は M 上の測度となる．

Proof.
自明．計算するのみ．

一般の M 可測関数 $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ 全体を $PL^+(X)$ として，積分を定義する．

Def. 3.2.2 (非負関数のルベグ積分)

$f \in SL^+(X)$ の μ による，$A \in M$ 上の積分を次式で定める．

$\int_A f d\mu = \sup\{\int_A \phi d\mu \mid 0 \leq \phi \leq f,\ \phi \in SL^+(X)\}$

Prop.

$\psi \in SL^+(X),\ f, g \in PL^+(X)$ として，以下成立．

- $\int_X \psi d\mu = \sup\{\int_A \phi d\mu \mid 0 \leq \phi \leq \psi,\ \phi \in SL^+(X)\}$*6
- $f \leq g \Rightarrow \int_A f d\mu \leq \int_A g d\mu$
- $c > 0 \Rightarrow \int_A cf d\mu = c\int_A f d\mu$

Proof.

(1) $\phi = \psi$ ととって，(左辺) $\leq$ (右辺)．一方で，$\phi < \psi$ として，逆の不等式が示される．

(2) 自明．

(3) $c \neq 0$ として，$\int_A f d\mu - \epsilon < \int_A^{\exists} \phi d\mu$ ととれば，

$c\int_A f d\mu \leq \int_A cf d\mu$．左式で $c \to c^{-1}$，$f \to cf$ とすれば，逆の不等式が成立．

次の定理が，積分理論の構築の際の基礎となる．

Thorem. 3.2.1 (単調収束定理)

$f_j \in PL^+(X)$ が単調増加であるとき， $\lim \int_A f_j d\mu = \int_A \lim f_j d\mu$

Proof.

まず，f は M 可測であり，$f_j \leq f$ より，

$\overline{\lim} \int_A f_j d\mu \leq \int_A f d\mu$ が成立するので下極限に関する不等式を示す．

$\alpha \in (0, 1),\ \phi \in SL^+(X),\ 0 \leq \phi \leq f$ に対して，$E_j = \{x \in X \mid f_j(x) > \alpha\phi(x)\}$ とすると，E_j は $E_j \nearrow X,\ E_j = (f_j - \alpha\phi)^{-1}((0, \infty])$ を満足する可測集合である．

$\int_X f_j d\mu \geq \alpha \int_X \chi_{E_j} \phi d\mu = \alpha\nu_\phi(E_j)$．

が成立し，$\nu_\phi(\cdot)$ は測度であったので，下極限及び $\alpha \to 1,\ \sup_\phi$ をとれば示される．

即座に，系として以下の 2 定理を示すことができる．

Thorem. 3.2.2 (系 1)

$f_j \in PL^+(X)$ に対して， $\int_A \sum_j^\infty f_j d\mu = \sum_j^\infty \int_A f_j d\mu$

Thorem. 3.2.3 (系 2)

$f_j \in PL^+(X),\ E = \sqcup_j^\infty E_j,\ E_j \in M$ に対して， $\int_E f d\mu = \sum_j^\infty \int_{E_j} f d\mu$

Prop.

$E_j \in M,\ f \in PL^+(X)$ に対して，以下成立．

- $E_j \nearrow E \Rightarrow \lim \int_{E_j} f d\mu = \int_E f d\mu$
- $E_j \searrow E,\ \int_{E_1} f d\mu < \infty \Rightarrow \lim \int_{E_j} f d\mu = \int_E f d\mu$

単調性の仮定がない場合は等号が成立しない例を挙げる．

*6 左辺は階段関数に対する定義である．

e.g.) $(\mathbb{R}, \mathscr{L}_\mathbb{R}, \mu_1)$ において，$f_j(x) = j\chi_{[0,j^{-1}]}(x)$ を考えると，$0 = \int_\mathbb{R} \underline{\lim} f_j d\mu < \underline{\lim} \int_\mathbb{R} f_j d\mu = 1$.
このような場合は，次の定理に集約される．

Thorem. 3.2.4 (Fatou の補題)

$f_j \in PL^+(X)$，$A \in M$ に対して，$\int_A \underline{\lim} f_j d\mu \leq \underline{\lim} \int_A f_j d\mu$

Proof.

$g_k(x) = \inf_{j \geq k} f_j(x)$ として，$g_k \in PL^+(X)$，$g_k \leq g_{k+1}$ が成立する．ここで，$j \geq k$ に対して，次の評価式が成立するので，

$\int_A g_k d\mu \leq \int_A f_j d\mu \leq \inf_{j \geq k} \int_A f_j d\mu \quad \int_A \underline{\lim} f_j d\mu = \int_A \lim g_k d\mu = \lim \int_A g_k d\mu \quad \leq \underline{\lim} \int_A f_j d\mu$
となり題意が示された．

Thorem. 3.2.5 (系)

完備測度空間において，$f, f_j \in PL^+(X)$，$f_j(x) \to f(x)$ $a.e.$ に対して，$\int_A f d\mu \leq \underline{\lim} \int_A f_j d\mu$ が成立する．

Proof.

$E = \{x \in x \mid f(x) = \lim f(x)\}$ として，$\int_A \underline{\lim}(\chi_E f_j) d\mu = \int_A \chi_E f d\mu \leq \underline{\lim} \int_A \chi_E f_j d\mu \leq \underline{\lim} \int_A f_j d\mu$.
また，$f(x) = \chi_E f(x)$ $a.e.$ であるため[*7]，次定理より $\int_A f d\mu = \int_A \chi_E f d\mu$ が成立することによる．

Thorem. 3.2.6

$f \in PL^+(X)$ に対して，$\int_A f d\mu = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ $a.e.$
特に，完備であるとき，$g \in PL^+(X)$，$f(x) = g(x)$ $a.e.$ に対して，$\int_A f d\mu = \int_A g d\mu$ が成立する．

Proof.

$\Leftarrow$) $f \in SL^+(X)$ で $\int_X f d\mu = 0$ が成立することからすぐに示せる．
$\Rightarrow$) $E_j = \{x \in X \mid f(x) > j^{-1}\}$ として，$\chi_{E_j}(x) \leq j f(x)$ を積分して，$\mu(E_j) \leq j \int_X f d\mu = 0$．従って，$\mu(\{x \in X \mid f(x) > 0\}) = \mu(\cup^\infty E_j) \leq \sum^\infty \mu(E_j) = 0$.
後半の主張は，$E = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ として，$f = \chi_E f + \chi_{E^c} f$，$g = \chi_E g + \chi_{E^c} g$ と分解すればよい．

3.3 一般の関数に対するルベグ積分

まず，次のように $f^\pm$ を定義すると，$f^\pm \in PL^+(X)$ となる.[*8]

- $f^+(x) = \max(f(x), 0)$
- $f^{-1}(x) = \max(-f(x), 0)$

すると，$f = f^+ - f^-$ と分解できるので，これをもとにルベグ積分の定義を行なう．

Def. 3.3.1 (μ 可測関数とルベグ積分)

M 可測関数 $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ が $\int_X |f| d\mu < \infty$ であるとき，μ 可測関数とよび，その積分を次式で定める．

$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$
また，複素関数 $f = g + ih$ の積分は次式で定める．

$\int_X f d\mu = \int_X g d\mu + i \int_X h d\mu$

[*7] ここで完備性が必要．

[*8] $f^+(x) = \sup g_j(x)$，$g_1(x) = f(x)$，$g_{j \geq 1}(x) = 0$

μ 可測関数全体を $L(X)$ で，$L^+(X) = PL^+(X) \cap L(X)$ と表すことにする.[*9]以降の成立，定理は主に $\overline{\mathbb{R}}$ について考えるが，複素関数の場合でも同様のギロンを行えば成立が確認できる．

Prop.

$f, g \in L(X)$ に対して，線型性が成立する．$\int_X (af+bg)d\mu = a\int_X fd\mu + b\int_X gd\mu \quad (a, b \in \mathbb{R})$

Proof.

$|af(x)+bg(x)| \leq |a||f(x)|+|b||g(x)|$ より，$af+bg \in L(X)$．まず，$a=b=1$ の場合を示す．これは，$h = f+g = (f^+ - f^-) + (g^+ - g^-)$ として，$\int h^+ + \int f^- + \int g^- = \int h^- + \int f^+ + \int g^+$ より成立する．
次に，$\int_X afd\mu = a\int_X fd\mu$ を示せばよいが，$h = af = af^+ - af^- \ (a>0)$ 等を利用して，上記と同様のギロンを行えばよい．

Prop.

$f \in L(X)$ に対して，$|\int_X fd\mu| \leq \int_X |f|d\mu$.

Proof.

$f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ の場合は，$|f| = f^+ + f^-$ より成立．
$f : X \to \mathbb{C}$ の場合，$f = g+ih$ として，極表示を行えば，$\int_X fd\mu = e^{\exists ia}|\int_X fd\mu|$．従って，

$$|\int_X fd\mu| = e^{-ia}\int_X fd\mu = e^{-\exists ia}(\int_X gd\mu + i\int_X hd\mu) = (\cos a)\int_X gd\mu + (\sin a)\int_X hd\mu$$
$$\leq \int_X (\cos^2 a + \sin^2 a)^{\frac{1}{2}}(g^2+h^2)^{\frac{1}{2}}d\mu = \int_X |f|d\mu.$$

ただし，最後の不等式は Cauchy − Schwarz による．

Prop.

$f \in L(X)$ に対して，$E_j = \{x \in X \mid |f(x)| > j^{-1}\}$, $E_\infty = \{x \in X \mid |f(x)| = \infty\}$ とすると，
$\mu(E_j) < \infty$, $\mu(E_\infty) = 0$.

Proof.

$\mu(E_j)$ は，$\chi_{E_j}(x) \leq j|f(x)|$ より従う．
$\mu(E_\infty)$ は，$|f(x)| \geq \chi_{E_\infty}|f(x)| \geq j|f(x)|$ より従う．

Prop.

$f \in L(X), E \in M$ として，$^\forall E \ s.t. \ \int_E fd\mu = 0 \Leftrightarrow f = 0 \ a.e.$

Proof.

$\Rightarrow$) $E_\pm = \{x \in X \mid \pm f(x) > 0\}$ とする．$\chi_{E_+}f \in PL^+(X)$ より，$\chi_{E_+}f = 0 \quad a.e.$
$\{x \in X \mid \chi_{E_+}f(x) > 0\} \ = E_+$ の測度をとればよい．
$\Leftarrow$) $0 = \int_X |f|d\mu \geq \int_X |f\chi_E|d\mu \geq |\int_X f\chi_E d\mu| = |\int_E fd\mu|$

さて，lim の可換性に関する定理を示す．次の収束定理がルベグ積分論におけるハイライトである．

Thorem. 3.3.1 (ルベグ収束定理)

完備測度空間において，$f_j \in L(X)$ が次の条件を満足するとする.[*10][*11]

(1) $f_j(x) \to f(x) \quad a.e.$

(2) $^\exists\varphi \in L^+(X)$, $^\forall j \ s.t. \ |f_j(x)| \leq \varphi(x) \quad a.e.$

[*9] $A \subset X$ に対して，$L(A)$ を考えることもあるが，通常 $A \in M$ とする．これは，関数を X に 0 拡張した際に，可測性を維持するためである．σ-加法族としては，$M \cap A$ を考えれば多分大丈夫.

[*10] 完備でないときは，$f_j(x) \to^\exists f(x) \in L(X)$, (2) で $\forall x$ を要請する．

[*11] 3.1.2

このとき，$\lim \int_X f_j d\mu = \int_X \lim f_j d\mu$ が成立する．

Remark.
φ の属する集合が $L(X)$ でないことに注意.

Proof.
定理 3.1.3 より，可測関数 $^\exists f$ を定義することができる．*Fatou* の補題の系，及び (2) より，$f \in L(X)$.
また，$\varphi(x) \pm f_j(x) \geq 0 \quad a.e.$ より，$\int_X (\varphi + f_j) d\mu = \int_X \underline{\lim} (\varphi + f_j) d\mu \leq \underline{\lim} \int_X (\varphi + f_j) d\mu = \int_X \varphi d\mu + \underline{\lim} \int_X f_j d\mu$. これより，$\int_X f d\mu \leq \underline{\lim} \int_X f_j d\mu$. 同様に考えて，$-\int_X f d\mu \leq \underline{\lim} \int_X (-f_j) d\mu = -\overline{\lim} \int_X f_j d\mu$.
最後に，定理 3.1.2 より，f と $a.e.$ で等しければ同一の積分値を持つので，$^\forall f$ とすることができる．

Thorem. 3.3.2 (系)
$f \in L(X),\ E = \bigsqcup_j^\infty E_j,\ E_j \in M$ として，$\int_E f d\mu = \sum_j^\infty \int_{E_j} f d\mu$

Proof.
$|\sum^N \chi_{E_j} f d\mu| \leq |f| \in L^+(X)$ による．

Thorem. 3.3.3 (系)
$f_j \in L(X)$ が $\sum_j^\infty |f_j| d\mu < \infty$ を満たすとき，次式が成立する．
$^\exists f \in L(X)\ s.t.\ f(x) = \sum_j^\infty f_j(x)\ a.e,\ \ \int_X f d\mu = \sum_j^\infty \int_X f_j(x)$

Proof.
$g(x) = \sum_j^\infty |f_j(x)|$ とすれば，単調収束定理より，$g \in L^+(X),\ 0 \leq g(x) < \infty \quad a.e.$ が成立するので $f(x) = \sum_j^\infty f_j(x)$ とすればよい．

X の部分集合上で定義された関数のルベグ積分は，相対的な σ-加法族をもとに議論すればよい．（おそらく）
本節の最後に，パラメータ付けられた関数について考える．

Thorem. 3.3.4 ($f(x,\xi)$ の連続性)
$(X, M, \mu),\ A \in M,\ \xi \in O \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}^n},\ f(x,\xi) \in L(A)$ に対して定義される関数 $F(\xi) = \int_A f(x,\xi) d\mu_x$ は，次の条件を満たすとき，O 上で有界かつ連続となる．
(1) $a.e.\ x \in A$ で $f(x,\xi)$ は O 上連続.
(2) $^\exists \varphi \in L^+(A)\ s.t.\ |f(x, ^\forall \xi)| \leq \varphi(x)\ a.e.\ A$

Proof.
有界性は自明．また，$\xi_i \to \xi_0$ として，$\lim F(\xi_i) = \lim \int_A f(x,\xi_i) d\mu_x = \int_A \lim f(x,\xi_i) d\mu_x$.

Thorem. 3.3.5 ($\frac{\partial}{\partial \xi_k} f(x,\xi)$ の可換性)
$(X, M, \mu),\ A \in M,\ \xi \in O \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}^n},\ f(x,\xi) \in L(A)$
に対して定義される関数 $F(\xi) = \int_A f(x,\xi) d\mu_x$ は，次の条件を満たすとき，微分の交換が可能であり，$\frac{\partial}{\partial \xi_k} F(\xi) = \int_A \frac{\partial}{\partial \xi_k} f(x,\xi) d\mu_x$ となる．
(1) $a.e.\ x \in A$ で，$\frac{\partial f}{\partial \xi_k}(x, ^\forall \xi)$ が存在.
(2) $^\exists \varphi \in L^+(A)\ s.t.\ |\frac{\partial f}{\partial \xi_k}(x, ^\forall \xi)| \leq \varphi(x)\ a.e.\ A$

Proof.
$h_j \to 0,\ 0 < \theta < 1$ として，平均値の定理より，
$\frac{f(x,\xi + h_j e_k) - f(x,\xi)}{h_j} = \frac{\partial f}{\partial \epsilon_k}(x, \xi + \theta_j e_k)$ が成立し，仮定より，$|\frac{f(x,\xi + h_j e_k) - f(x,\xi)}{h_j}| \leq \varphi(x) \quad a.e.\ A$.

従って，
$\lim \frac{F(x,\xi+h_je_k)-F(x,\xi)}{h_j} = \lim \int_A \frac{1}{h_j}(f(x,\xi+h_je_k)-f(x,\xi))d\mu = \int_A \lim \frac{1}{h_j}(f(x,\xi+h_je_k)-f(x,\xi))d\mu.$

3.4 $\mathbb{R}^n$ におけるルベグ積分の特徴

$\mathbb{R}^n$ におけるルベグ積分の特徴は定数倍と平行移動不変性に現れる．

Prop. **($\mathbb{R}^n$ の定数倍・平行移動不変性)**
$f,g \in PL^+(\mathbb{R}^n,\mathscr{L}_{\mathbb{R}^n},\mu_n)$ or $L(\mathbb{R}^n,\mathscr{L}_{\mathbb{R}^n},\mu_n)$ に対して，以下成立．

- $\int_{\mathbb{R}^n} f(x+y_0)d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)d\mu$
- $\int_{\mathbb{R}^n} f(a_0x)d\mu = |a_0|^n \int_{\mathbb{R}^n} f(x)d\mu$

Proof.
$L(\mathbb{R}^n)$ について示す．まず，$f(x+y_0), f(a_0x) \in L(\mathbb{R}^n)$ であることが，定義に戻って計算すれば示すことができる．そこで，$SL(\mathbb{R}^n) \to PL^+(\mathbb{R}^n) \to L(\mathbb{R}^n)$ の順番に示す．
①$f(x) = \Sigma^N A_j\chi_{E_j} \in SL(\mathbb{R}^n)$ とすれば，少し考えれば，$f(x+y_0) = \Sigma^N A_j\chi_{E_j-y_0}, f(a_0x) = \Sigma^N A_j\chi_{a^{-1}E_j}$ が成立することが分かる．
②$f \in PL^+(\mathbb{R}^n)$ の場合は，$\phi_j(x) \nearrow f(x)$ と階段関数で近似して，単調収束定理及び①を利用すればよい．
③$f \in L(\mathbb{R}^n)$ の場合，定義に従って計算すればよい．②が利用できる．

3.5 リーマン積分とルベグ積分の関係

有界閉区間 [a,b] 上のリーマン積分とルベグ積分の関係を考えるために，いくつかの準備を行なう．

Def. 3.5.1 (振動量 $w(x)$)
$x \in I \subset [a,b]$ に対して，点 x での振動量を次式で定める．$w(x) = \lim_{\mu(I)\to 0}(\sup f(\xi) - \inf f(\xi))$

$w(x)$ は正かつ I に対して単調減少であるため，極限が存在する．

Prop.

- $w(x) = 0 \Leftrightarrow f$ は x で連続な有界関数．
- fが有界であるとき，$\lambda > 0$ に対して，
  $E(\lambda) = \{x \in [a,b] \mid w(x) \geq \lambda > 0\}$ は閉集合となる．

Proof.
(前半) :
$\Rightarrow)$ $x \in (a,b)$ に対して，次式が成立する． $^\forall\epsilon,\ ^\exists\delta,\ ^\exists I\ s.t.\ \mu(I) < \delta,\ \sup_I f(\xi) - \inf_I f(\xi) < \epsilon.$
そこで，$J = [x-\frac{\delta}{4}, x+\frac{\delta}{4}] \subset [a,b]$ ととれば，連続性が示せる．ただし，δ は必要に応じて小さくとる．また，端点では片側連続であることが同様に示せる．
$\Leftarrow)$ $w(x) > 0$ として，背理法で示す．$^\exists\epsilon,\ ^\forall I_n \subset [a,b]\ s.t.\ \mu(I_n) < \frac{1}{n},\ \sup f(\xi) - \inf f(\xi) \geq \epsilon > 0$
と I_n をとり，さらに，上限・下限の定理より，$^\exists\xi_n^i \in I_n\ s.t.\ \sup f(\xi) - \frac{\epsilon}{4} \leq f(\xi_n^1),\ \inf f(\xi) + \frac{\epsilon}{4} \geq f(\xi_n^2)$ がとれるので，$f(\xi_n^1) - f(\xi_n^2)$ を評価して矛盾が示せる．
(後半) :
$x_0 \in \overline{E(\lambda)}, E(\lambda) \ni x_n \to x_0$ とする．

$x_0 \in U \subset [a,b]$ なる閉区間 U に対して，十分に大きな n をとれば，$x_n \in U$．従って，$x_n \in E(\lambda)$ より，$\sup_U f(\xi) - \inf_U f(\xi) \geq w(x_n) \geq \lambda$．左辺で $\mu(U) \to 0$ とすればよい．

lemma.

$[a,b]$ 上の有界関数 f がリーマン積分可能であるとき，$\mu_1(E(\lambda)) = 0$.

Proof.

分割 $\triangle$ の区間 j の sup, inf をそれぞれ M_j, m_j とする．$^\exists\triangle\ s.t.\ S_\triangle - s_\triangle = \sum_j^N (M_j - m_j)(x_j - x_{j-1}) < \lambda\epsilon$ に対して，$A = \{j \mid (M_j - m_j) > \frac{\lambda}{2}\}$，$B = \{j \mid (M_j - m_j) \leq \frac{\lambda}{2}\}$ とすれば，$\sum_A \frac{\lambda}{2}(x_j - x_{j-1}) < \lambda\epsilon$．一方で，$x \in \bigcup_B (x_{j-1} - x_j)$ の場合，$w(x) = \lim_\mu \{\sup_{[x_{j-1},x_j]} f(\xi) - \inf_{[x_{j-1},x_j]} f(\xi)\} \leq (M_j - m_j) \leq \frac{\lambda}{2}$ が成立するので，$x \notin E(\lambda)$．以上より，$E(\lambda) \subset (\bigcup_A [x_{j-1}, x_j])$ が成立するので測度を取ればよい．

さて，リーマン積分可能である必要十分条件を与える．

Thorem. 3.5.1 (リーマン積分可能条件)

$[a,b]$ 上の有界関数 f が $[a,b]$ でリーマン積分可能 $\Leftrightarrow$ f は $a.e.$ で連続かつ有界．

Proof.

$\Rightarrow$) E を不連続点全体の集合とすれば，$E = \{x \in [a,b] \mid w(x) > 0\} = \bigcup_j^\infty E(\frac{1}{j})$ より，$\mu(E) \leq \sum^\infty \mu(E(j^{-1})) = 0$.

$\Leftarrow$) 同様に E を不連続点全体とすれば，$E(\lambda) \subset E$.

$\mu(E(\lambda)) = 0$ より $E(\lambda) \subset \cup_j^\infty I_j$，$\sum_j^\infty \mu(I_j) \leq \frac{\sigma}{2}$ と覆える．さらに，$\mu(J_j) \leq 2\mu(I_j)$，$I_j \subset J_j$ なる開区間をとれば，コンパクト性より，$E(\lambda) \subset \cup_j^n J_j$.

$D = [a,b] - \cup^\infty J_j$ と閉集合を定めれば，$w(x) < \lambda$.

同様に，コンパクト性より $D \subset \cup^m I_{x_j}$ と覆うことができ，$\delta = \min_j \mu(I_{x_j})$ が定まる．以上より，一般の $[\alpha,\beta] \subset D$, $\mu([\alpha,\beta])$ なる閉区間は，$[\alpha,\beta] \subset I_{x_j} \cup I_{x_k}$ と覆えるので，$\sup_{[\alpha,\beta]} f(\xi) - \inf_{[\alpha,\beta]} f(\xi) < 3\lambda$.

そこで，$|\Delta| < \delta$ なる分割の J_j による細分を Δ' とする．ただし，端点を付加している．$[x_j, x_{j+1}] \subset^\exists J_k$ or D が成立するかどうかで分割して考えれば，$S_{\Delta'} - s_{\Delta'} < 2M\sigma + 3\lambda(b-a)$ と評価される．[*12] λ, σ は任意なので示された．

Thorem. 3.5.2 (リーマン積分とルベグ積分)

$[a,b]$ 上の有界関数 f が $[a,b]$ でリーマン積分可能であるとき，$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f(x)d\mu_1$

Proof.

まず，$\int_a^b f dx - \frac{1}{n} \leq s_{\Delta_n} = \int_{[a,b]} \varphi_n d\mu_1 \leq \int_a^b f dx$

$\varphi_n(x) = \sum_{\Delta_n} m_j \chi_{(x_{j-1}^n x_j^n]}$，$m_j = \inf_{(x_{j-1}^n x_j^n]} f(\xi)$ と分割を行なう．次に，x_0 を f の連続点として，$^\forall\epsilon$, $^\exists\delta\ s.t.\ |x_0 - \xi| < \delta \Rightarrow |f(x_0) - f(\xi)| < \frac{\epsilon}{2}$ より，$I_\delta = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ として，$\sup_{I_\delta} f(\xi) - \inf_{I_\delta} f(\xi) \leq \epsilon$. 十分に n を大きくとっておけば，Δ_n の区間を I_δ 内で包めるので，$0 \leq f(x_0) - m_j \leq \sup_{I_\delta} f(\xi) - \inf_{I_\delta} f(\xi) \leq \epsilon$.

これは，$\varphi_n(x_0) \to f(x_0)$ を表す．前定理より，f は $a.e.$ で連続なので $\varphi_n(x) \to f(x)$ $a.e.$ また，$\mathbb{R}$ の完備性より，f は可測．f の有界性と合わせて，ルベーグ収束定理より成立．

Thorem. 3.5.3 (系 1：広義積分とルベグ積分)

$f, \varphi : (a,\infty) \to \mathbb{R}$ が $[\alpha,\beta] \subset (a,\infty)$ 上で有界かつリーマン積分可能であるとする．$\varphi(x)$ が (a,∞) で広義積分可能かつ $|f(x)| \leq \varphi(x)$ を満たすとき，$\int_a^\infty f(x)dx = \int_{(a,\infty)} f(x)d\mu_1$ が成立する．

[*12] 細分しているので，直和に分解される．

Proof.
$\alpha < \alpha_n < \beta_n < \infty$, $\alpha_n \to \alpha$, $\beta_n \to \infty$, $g_n(x) = \chi_{[\alpha_n, \beta_n]}\varphi(x)$ とすれば，広義積分可能であることより，$L^+((a,\infty)) \ni g_n \nearrow \varphi$. 従って，単調収束定理及び前定理より，$\varphi \in L^+((a,\infty))$. 同様に，$f_n(x) = \chi_{[\alpha_n,\beta_n]}f(x)$ とすれば，$f_n \to f$, $|f_n| \leq \varphi$ が成立するので，ルベーグ収束定理及び前定理より，題意成立.
$\int_{(a,\infty)} f d\mu_1 = \lim \int_{(a,\infty)} f_n d\mu_1 = \lim \int_{\alpha_n}^{\beta_n} f dx$

Thorem. 3.5.4 (系 2：広義積分とルベグ積分)
$f : (a,\infty) \to \mathbb{R}$ が $[\alpha, \beta] \subset (a,\infty)$ 上で有界かつリーマン積分可能であるとする．$f(x) \geq 0$ かつ (a,∞) で広義積分可能であれば，$\int_a^\infty f(x)dx = \int_{(a,\infty)} f(x)d\mu_1$ が成立する．

Remark.
$f(x)$ が正負を取る場合は，広義積分は可能であるが，ルベグ可積分でない場合が存在することを示唆している．

Proof.
$\varphi = f$ として，自明に成立.

e.g.) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ を考えると，$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$ であるが，$\int_{[0,\infty]} |\frac{\sin x}{x}|d\mu_1 = \infty$ となる．前半は長い計算によって，後半は $\int_{[(n+1)\pi, n\pi]} |\frac{\sin x}{x}|d\mu_1 \geq \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{[0,2\pi]} |\sin x|d\mu_1 = \frac{2}{\pi}(\frac{1}{n+1})$ によって示される．

3.6 ルベグ積分の変数変換

次の性質はやや重要である．

Prop.
$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ のルベグ可測関数とするとき，$f(x-y)$ は $(x,y) \in \mathbb{R}^{2n}$ に対して定義されたルベグ可測関数である．

Proof.
まず，$F(x,y) = f(x)$ とすれば，$f^{-1}((a,\infty]) \times \mathbb{R}^n \subset \mathscr{L}_{\mathbb{R}^n} \otimes \mathscr{L}_{\mathbb{R}^n} \subset \mathscr{L}_{\mathbb{R}^{2n}}$ より，$F(x,y)$ は $\mathbb{R}^{2n}$ ルベグ可測関数. $\varphi : (\xi, \eta) \mapsto (x,y) = (\xi - \eta, \xi + \eta)$ なる変換を考えれば，$\varphi \in GL(2n, \mathbb{R})$, $(F \circ \varphi)(\xi, \eta) = F(\xi - \eta, \xi + \eta) = f(\xi - \eta)$ となり題意成立.

Thorem. 3.6.1 (変数変換)
$\Omega \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}$, $G : \Omega \to \mathbb{R}^n$ を C^1 級微分同相写像とする．f が $G(\Omega)$ 上でルベグ可測関数であるとき，$f \circ G$ も Ω 上のルベグ可測関数となり，$f \in PL^+(G(\Omega)), L(G(\Omega))$ であれば，次式で計算することができる．
$\int_{G(\Omega)} f dx = \int_\Omega (f \circ G)|\mathcal{J}G|_x dx$
ただし，$\mathcal{J}$ はヤコビ行列を与える．

Remark.
応用上無関係な条件を加えた場合，リーマン積分の変数変換をもとに，比較的容易に示すことができる．

4 Appendix

4.1 $\mathbb{R}^n$ の位相と左半開区間の関係

$\mathscr{Q}_k = \{\Pi_j^n (l_j 2^{-k}, (l_j+1)2^{-k}] \mid l_j \in \mathbb{Z}\}$ を長さ 2^{-k} の超立方体と呼ぶことにする．

Prop.
$\mathscr{Q} = \bigcup_k^\infty \mathscr{Q}_k$ と定めると，$\mathscr{Q}$ は可算集合．また，$P_1, P_2 \in \mathscr{Q}$ とすると $P_1 = P_2$，$P_1 \subset P_2$，$P_2 \subset P_1$ のいづれかが成立．

Proof.
自明．$\mathscr{Q}$ の元は，包合を除いて交わらないことが重要である．

lemma.
$\mathcal{O}_n$ の元は，$\mathscr{Q}$ の非交な可算和として表現できる．

Proof.
$U \in \mathcal{O}$，$R_1 = \{Q_j^1 \mid Q_j^1 \subset U\}$，$U_1 = U - \bigcup_{R_1} Q_j^1$ と集合を内側から近似する．帰納的に，以下の集合 V が定まるので $U = V$ を示せば良い．$U = U_l \bigcup \left(\bigcup_m^l (\bigcup_{R_m} Q_j^m) \right), V = \bigcup_m^\infty \left(\bigcup_{R_m} Q_j^m \right)$.
$V \subset U$ は自明．$U \subset V$ を示すためには，十分に大きな k を取り，$x \in^\exists Q_{j_k}^k \subset U$．$Q_j^l \in R_l$ $(1 \leq l \leq k-1)$ との関係を考えれば示せる．

同様の議論を，閉超立方体を定義して行なうことで，閉集合を可算の非交和で表現可能であることを示せる．

4.2 リーマン積分

Def. 4.2.1 (リーマン積分)
$S_{\triangle,\xi} = \sum^n f(\xi_j)(x_j - x_{j-1})$ の $|\triangle| \to 0$ が $\triangle, \xi$ によらず定数に収束するとき，その値を f のリーマン積分と定める．

Thorem. 4.2.1
以下同値．
(1) $f(x)$ が $[a,b]$ でリーマン積分可能．
(2) $\overline{I} = \underline{I}$
(3) $^\forall \epsilon$，$\exists \triangle$ $s.t.$ $S_\triangle - s_\triangle < \epsilon$
ただし，$S_\triangle$ は上からの評価，$s_\triangle$ は下からの評価であり，$\overline{I} = \sup s_\triangle, \overline{I} = \inf S_\triangle$.

Proof.
有名なので省略．