

## Référentiel et hypothèses

- **Référentiel** : Référentiel terrestre  $\mathcal{R}$  supposé galiléen
- **Hypothèses** :
  - Poulies idéales (masse négligeable, sans frottement)
  - Fils inextensibles et de masse négligeable
  - Système en équilibre statique

## Définition des systèmes et bilan des forces

### Système $\{M\}$ : masse centrale

Bilan des forces :

- Poids :  $\vec{P}_M = M\vec{g} = -Mg\vec{e}_z$
- Tension du fil :  $\vec{T}_M = T_M\vec{e}_z$

### Système $\{m\}$ : chaque masse latérale

Bilan des forces :

- Poids :  $\vec{P}_m = m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$
- Tension du fil :  $\vec{T} = T\vec{e}_z$

## Application du Principe Fondamental de la Dynamique

### Pour la masse $M$ à l'équilibre :

D'après le PFD appliqué au système  $\{M\}$  dans  $\mathcal{R}$  galiléen :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0} \quad (\text{équilibre})$$

$$\vec{T}_M + \vec{P}_M = \vec{0}$$

Projection sur  $(Oz)$  :

$$T_M - Mg = 0$$

$$\boxed{T_M = Mg}$$

### Pour chaque masse $m$ à l'équilibre :

D'après le PFD appliqué au système  $\{m\}$  dans  $\mathcal{R}$  galiléen :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$$

$$\vec{T} + \vec{P}_m = \vec{0}$$

Projection sur  $(Oz)$  :

$$T - mg = 0$$

$$\boxed{T = mg}$$

## Équilibre au point de jonction des fils

Au niveau du nœud (point de jonction des trois fils), on a l'équilibre des forces :  
Condition d'équilibre du nœud (masse négligeable) :

$$\vec{T}_M + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = \vec{0}$$

Par symétrie :  $|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = T$

**Projection sur  $(Ox)$  :**

$$-T \cos \theta + T \cos \theta = 0 \quad \checkmark$$

**Projection sur  $(Oz)$  :**

$$-T_M + 2T \sin \theta = 0$$

$$T_M = 2T \sin \theta$$

## Détermination de l'angle $\theta$

En remplaçant les valeurs des tensions trouvées précédemment :

$$— T_M = Mg$$

$$— T = mg$$

On obtient :

$$Mg = 2mg \sin \theta$$

$$\sin \theta = \frac{M}{2m}$$

D'où :

$$\theta = \arcsin \left( \frac{M}{2m} \right)$$

## Condition d'existence

Pour que la fonction arcsin soit définie, il faut :

$$-1 \leq \frac{M}{2m} \leq 1$$

Comme  $M > 0$  et  $m > 0$ , on a automatiquement  $\frac{M}{2m} > 0$ .

La condition devient :

$$\frac{M}{2m} \leq 1$$

$$M \leq 2m$$

## Interprétation physique

- **Si  $M < 2m$  :** L'équilibre existe avec  $\theta = \arcsin \left( \frac{M}{2m} \right) \in ]0, \pi/2[$
- **Si  $M = 2m$  :** L'équilibre limite avec  $\theta = \pi/2$  (fils verticaux)
- **Si  $M > 2m$  :** Aucun équilibre possible. La masse  $M$  est trop lourde pour être maintenue par les deux masses  $m$ .