

Interrogation n°0. Barème sur 23.5 pts. Le sujet comporte deux pages

1) [2 pts] On considère le réel $x = \frac{\ln 3}{\ln 2}$. Montrer que x est irrationnel. On rappelle que $e^{\alpha \ln 2} = 2^\alpha$.

2) Soient p_1, p_2, \dots, p_r des nombres premiers distincts. On peut donc supposer $2 \leq p_1 < p_2 < \dots < p_r$.

a) [1.5 pt] Soient des entiers $m_1, \dots, m_r \in \mathbb{N}$. On pose $n = \prod_{i=1}^r p_i^{m_i}$.

Montrer $\forall i \in [1, r], m_i \leq \lfloor \log n \rfloor$, où $\log n = \frac{\ln n}{\ln 2}$ est le logarithme de n en base 2.

b) [1.5 pt] Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

On note D_N le nombre d'entiers n compris entre 1 et N qui s'écrivent sous la forme $n = \prod_{i=1}^r p_i^{m_i}$.

Autrement dit, il s'agit des entiers $n \leq N$ dont tous les diviseurs premiers appartiennent à $\{p_1, p_2, \dots, p_r\}$.

En utilisant a), montrer que $D_N \leq (1 + \log N)^r$.

c) [1.5 pt] En déduire que l'ensemble des nombres premiers est infini.

3) Soient des entiers n et p tels que $0 \leq p \leq n$. On considère $E = \{1, 2, \dots, n+1\}$.

a) [1 pt] On considère $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$.

Donner le nombre $N(p, n, k)$ de parties A de E telles que $\text{card } A = p+1$ et $\max(A) = k+1$.

b) [1 pt] En déduire la valeur de $S(p, n) = \sum_{k=p}^n \binom{k}{p}$, qui s'écrit aussi $S(p, n) = \sum_{k=0}^n \binom{k}{p}$.

4) a) [1.5 pt] Étant donnés $(n+1)$ réels y_0, y_1, \dots, y_n dans $]a, b[$, montrer qu'il existe $i \neq j$ tels que

$$0 \leq y_j - y_i < \frac{b-a}{n}$$

b) [2 pts] Montrer que $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}$.

c) [1.5 pt] (Oral Mines) Soient 13 réels x_0, x_1, \dots, x_{12} . Montrer qu'on peut toujours $\forall i \neq j$ tels que

$$0 \leq \frac{x_i - x_j}{1 + x_i x_j} < 2 - \sqrt{3}$$

Indication : Poser $x_i = \tan(\theta_i)$, où $\theta_i \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

5) Soit E un ensemble fini de cardinal n .

a) [1 pt] Soient A et B deux parties de E . Montrer que $\text{card}(A \cap B) \geq (\text{card } A) + (\text{card } B) - n$.

b) [2.5 pts] Soient A_1, \dots, A_p des parties de E telles que $\text{card } A_1 + \text{card } A_2 + \dots + \text{card } A_p > n(p-1)$.

Montrer que $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_p$ n'est pas vide.