Interrogation n°0. Corrigé

1) Supposons par l'absurde que x est rationnel, c'est-à-dire de la forme $x = \dfrac{p}{q}$, avec p et $q \in \mathbb{N}^*$, car $x > 0$.

On a alors $q \ln 3 = p \ln 2$, d'où $3^q = 2^p$.

Comme q est non nul, 2^p est un entier pair, d'où une contradiction, car 3^q est un entier impair.

2) a) On a $n = \prod_{i=1}^r p_i^{m_i} \geq 2^{m_1+m_2+...+m_r}$, donc $m_1 + m_2 + ... + m_r \leq \log n$.

Donc a fortiori, $m_i \leq \lfloor \log n \rfloor$, puisque que les m_i sont positifs et entiers.

b) Par a), on a nécessairement $0 \leq m_i \leq \lfloor \log n \rfloor$. Donc $D_N \leq (1 + \lfloor \log N \rfloor)^r \leq (1 + \log N)^r$.

c) Supposons par l'absurde que l'ensemble des nombres premiers est fini, qu'on note $\{p_1, p_2, ..., p_r\}$.

Par croissances comparées de N et de $(\log N)^r$, on a $N > (1 + \log N)^r$ pour N assez grand.

Donc $D_N < N$ pour N assez grand.

Or, on sait que tout entier est produit de nombres premiers, donc $D_N = N$ pour tout N. D'où une contradiction.

3) a) On associe à une telle partie A la partie $B = A \setminus \{k+1\}$. Ainsi, B est une partie de cardinal p de $[\![1, k]\!]$.

On obtient ainsi une bijection de l'ensemble des parties A sur l'ensemble des parties de cardinal p de $[\![1, k]\!]$.

Donc il y a $\binom{k}{p}$ parties A.

b) Donc $S(p,n) = \sum_{k=0}^n \binom{k}{p} = \sum_{k=p}^n \binom{k}{p}$ est le nombre de parties de E de cardinal $p+1$, qui sont comptées en les regroupant selon la valeur de leur élément maximum. Donc $\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

Remarque : Il s'agit de la formule dite de la crosse de Hockey. $S(p,n)$ représente une somme de coefficients binômiaux situés dans une même colonne du triangle de Pascal :

Par télescopage : $S(p,n) = \sum_{k=p}^n \left(\binom{n+1}{k+1} - \binom{n}{k+1}\right) = \binom{n+1}{p+1} - \binom{n}{n+1} = \binom{n+1}{p+1}$.

4) a) Chaque réel y_i appartenant à un (unique) intervalle $J_k = \left[\dfrac{k-1}{n}(b-a), \dfrac{k}{n}(b-a)\right[$, où $1 \leq k \leq n$.

Par le principe des tiroirs, l'un des n intervalles J_k contient au moins deux éléments y_i et y_j, avec $i \neq j$, et quitte à les permuter, on a : $0 \leq y_j - y_i < \dfrac{b-a}{n}$.

b) On a $\tan\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ et $t = \tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ vérifie $\dfrac{2t}{1-t^2} = \tan\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$, car $\tan(2\theta) = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$.

Donc $t^2 + 2\sqrt{3}t - 1 = 0$. Comme $t > 0$, on obtient $t = -\sqrt{3} + \sqrt{4} = 2 - \sqrt{3}$.

c) On note $x_0, ..., x_{12}$ les réels. On considère $\theta_k = \arctan(x_k) \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

On a alors $\dfrac{x_j - x_i}{1 + x_j x_i} = \dfrac{\tan(\theta_j) - \tan(\theta_j)}{1 - \tan(\theta_j)\tan(\theta_j)} = \tan(\theta_j - \theta_i)$.

Or, par a), il existe i et j distincts tels $0 \leq \theta_j - \theta_i < \dfrac{\pi}{12}$, donc $0 \leq \tan(\theta_j - \theta_i) < \tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}$.

5) a) On a $\mathrm{card}(A \cap B) = (\mathrm{card}\, A) + (\mathrm{card}\, B) - \mathrm{card}(A \cup B)$, et on conclut avec $\mathrm{card}(A \cup B) \leq n$.

b) *Première preuve* :

Avec a), on montre d'abord par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$ que $\mathrm{card}(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_p) \geq \sum_{i=1}^p \mathrm{card}(A_i) - n(p-1)$.

En effet, la propriété est immédiate pour $p = 1$. Supposons la propriété est vraie au rang p.

On pose $B = A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_p$. Ainsi, $A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_p \cap A_{p+1} = B \cap A_{p+1}$.

D'une part, on applique a) à B et A_{p+1} et d'autre part on applique l'hyp de rec à $B = A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_p$.

On en déduit que $\mathrm{card}(B \cap A_{p+1}) \geq \left(\sum_{i=1}^p \mathrm{card}(A_i) - n(p-1)\right) + \mathrm{card}(A_{p+1}) - n = \sum_{i=1}^{p+1} \mathrm{card}(A_i) - np$.

On peut alors conclure : Si $\sum_{i=1}^p \mathrm{card}(A_i) > n(p-1)$, alors $\mathrm{card}(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_p) \geq 1$, d'où le résultat.