

# Лекция 13.

1

## Эллиптические уравнения

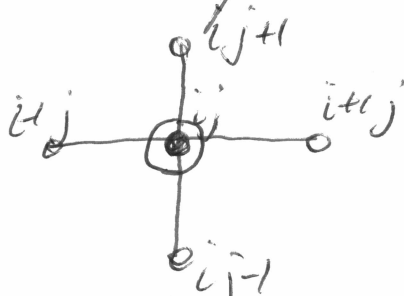
Уравнение Лапласа и Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \quad \text{Пуассон}$$

при  $f(x, y) = 0$  - уравнение Лапласа

граничные условия  $u(x, y)|_L = \varphi(x, y)$

Это задача Дирихле.



Для равномерной сетки по  $x$  и  $y$ .

$$\frac{u_{i+1, j} - 2u_{ij} + u_{i-1, j}}{h^2} + \frac{u_{i, j+1} - 2u_{ij} + u_{i, j-1}}{h^2} = 0$$

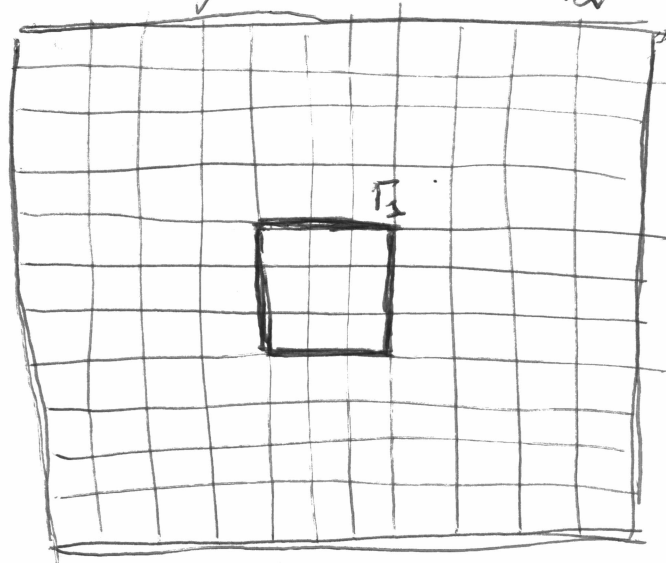
$$u_{ij} = \frac{1}{4} (u_{i+1, j} + u_{i-1, j} + u_{i, j+1} + u_{i, j-1})$$

$$u_{0j} = \varphi(x_0, y_j) \quad u_{Nj} = \varphi(x_N, y_j)$$

$$u_{i0} = \varphi(x_i, y_0) \quad u_{iN} = \varphi(x_i, y_N)$$

Модификация - метод Зейделя, когда в правой части уже известные значения.

Случай внутренней и внешней границы (2)

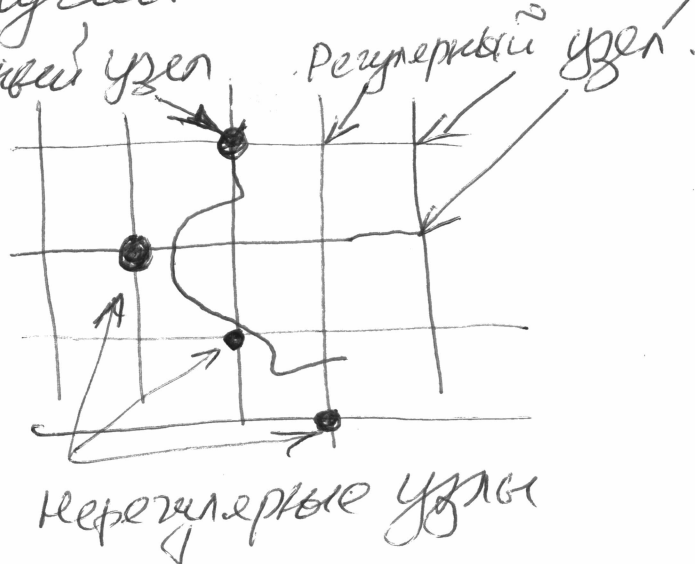


$$u(x, y) \Big|_{\Gamma_1} = \varphi(x, y)$$

$$u(x, y) \Big|_{\Gamma_2} = \psi(x, y)$$

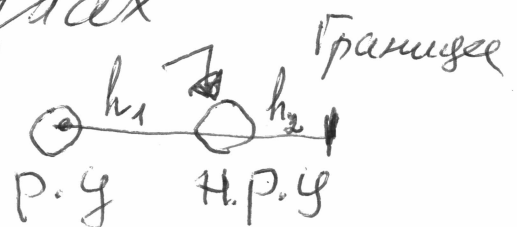
Точки распределяются по 2 классу  
границы и внутренние, далее  
как в предыдущем варианте.

Случай сложной границы



2 варианта нахождения значений  
в нерегулярных узлах

1. Интерполяция



2. Модификация разностного представления  
для нерегулярных узлов.