Лекция 12

Уравнение теплопроводности

Параболические уравнения

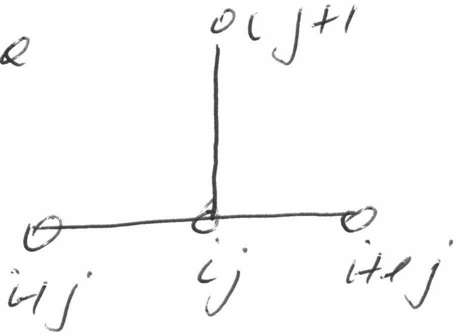
Пусть дано

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0<x<1 \quad t>0 \quad a>0.$$

$u(x,0)=\varphi(x)$ $\quad u(0,t)=\psi_1(t)$ $\quad u(1,t)=\psi_2(t)$

начальные и граничные условия д.б. согласованы.

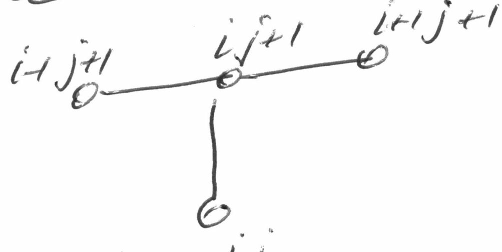
Для шаблона



$$\frac{u_i^{j+1}-u_i^j}{\tau} = a\frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2}$$

Это явная схема

Для шаблона



$$\frac{u_i^{j+1}-u_i^j}{\tau} = a\frac{u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}}{\;}$$

неявная схема

Рассмотрим явную схему

$$u_i^{j+1} = \lambda u_{i+1}^j + (1-2\lambda) u_i^j + \lambda u_{i-1}^j$$

$$* \ \lambda = a\tau / h^2$$

$O(h^2+\tau)$ устойчива $\lambda \le 1/2$

При $\lambda = 1/2$

$$u_i^{j+1} = (u_{i+1}^j + u_{i-1}^j)/2 \ !$$

Рассмотрим двумерное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad a=1$$

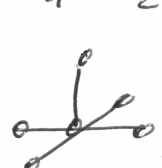
$$u(x,y,0) = \varphi(x,y)$$

ЯВНАЯ СХЕМА

$$\frac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^k}{\tau} = \frac{u_{i+1j}^k - 2u_{ij}^k + u_{i-1j}^k}{h_1^2} + \frac{u_{ij+1}^k - 2u_{ij}^k + u_{ij-1}^k}{h_2^2}$$

$\lambda_1 = \tau / h_1^2$, $\lambda_2 = \tau / h_2^2$; $\lambda_1 + \lambda_2 \le 1/2$

$O(h_1^2\ h_2^2\ \tau)$



Схемы расщепления

Схема переменных направлений (продольно-поперечная схема)

Шаг по времени τ делится на 2 полушага. На первом шаге $\partial^2 u/\partial x^2$ аппрокс. на слое $k+1/2$, а $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ на k явно., на втором полушаге — наоборот.

$$\frac{u_{ij}^{k+1/2} - u_{ij}^{k}}{\tau/2} = \frac{u_{i+1j}^{k+1/2} - 2u_{ij}^{k+1/2} + u_{i-1j}^{k+1/2}}{h_1^2} + \frac{u_{ij+1}^{k} - 2u_{ij}^{k} + u_{ij-1}^{k}}{h_2^2}$$

$$\frac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^{k+1/2}}{\tau/2} = \frac{u_{i+1j}^{k+1/2} - 2u_{ij}^{k+1/2} + u_{i-1j}^{k+1/2}}{h_1^2} + \frac{u_{ij+1}^{k+1} - 2u_{ij}^{k+1} - u_{ij-1}^{k+1}}{h_2^2}$$

1-е уравнени относительно $k+1/2$ слоя

2-е уравнен относител $k+1$ слоя

$$O(h_1^2 + h_2^2 + \underline{\tau^2})$$

Схемы расщепления по координатам

$$\frac{\tilde{u}_{ij} - u^{k}_{ij}}{\tau} = \frac{\tilde{u}_{i+1j} - 2\tilde{u}_{ij} + \tilde{u}_{i-1j}}{h_1^2}$$

$$\frac{u^{k+1}_{ij} - \tilde{u}_{ij}}{\tau} = \frac{u^{k+1}_{ij+1} - 2u^{k+1}_{ij} + u^{k+1}_{ij-1}}{h_2^2}$$

Каждое решается методом прогонки.

Первое уравнение – относительно $\tilde{u}$

Второе – u^{k+1}