①

Лекция 8

Элементы теории разностных схем

Общий вид д.у. второго порядка 2-х переменных

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+d\frac{\partial u}{\partial x}+e\frac{\partial u}{\partial y}+fu=g \quad (*)$$

$a, b, c \ldots f$ могут зависеть от x, y, u

разделяют 3 вида уравнения (*)

а) с постоянными коэффициентами

б) линейное ур-ние, когда g линейно зависит от u, а коэф-ты только от x, y.

в) квазилинейное, если коэф-ты зависят от u.

При $a=b=c=f=0$ и $d\neq 0$ $e\neq 0$

получаем уравнение 1-го порядка

$$\frac{\partial u}{\partial x}+p\frac{\partial u}{\partial y}=q$$

это уравнение переноса

(когда $x=t$ еще называют эволюционным ур-нием

② если хотя бы один из коэф. $a, b, c \neq 0$, то это уравнение 2-го порядка. Лекция 8

В зависимости от знака $D = b^2 - ac$

1) гиперболическое $D > 0$
2) параболическое $D = 0$
3) эллиптическое $D < 0$

Наиболее распространены

1) волновое ур-е (гиперболическое)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

2) ур-е теплопроводности или диффузии (параболическое)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (a > 0)$$

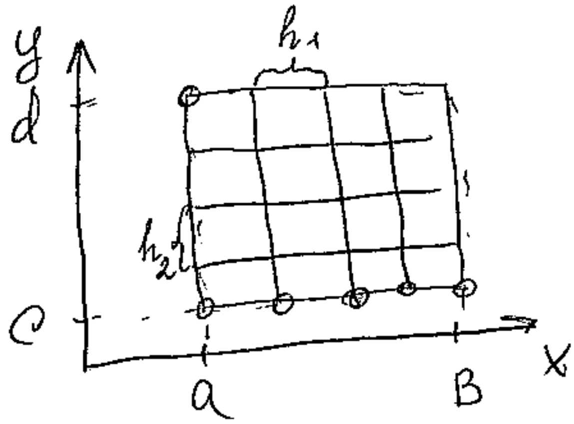
3) уравнение Лапласа (эллиптиче…

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

или уравн. Пуассона, когда правая часть не равна 0

(3) Лекция 3

Решение урав-ний с частными производными основано на введении сетки.
В простейшем случае



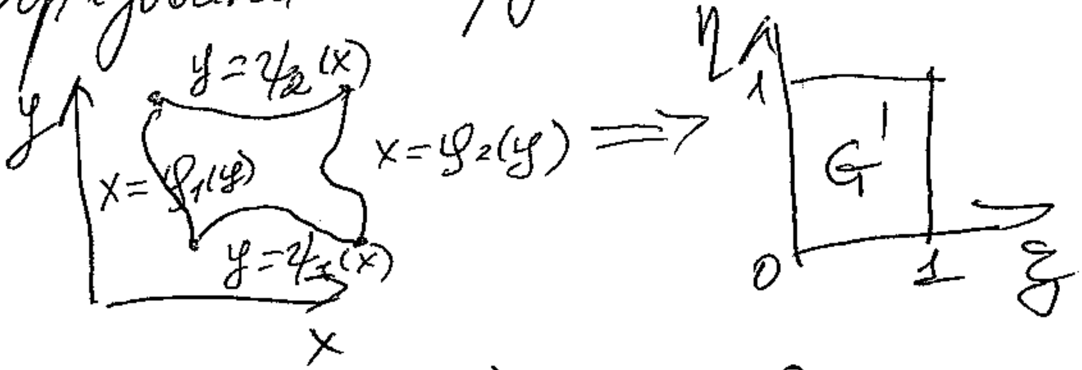
$x_i = a + i h_1$

$y_j = c + j h_2$

аналогично для уравнений большей размерности.

Узлы, лежащие на границе Г области G называются граничными. Все остальные – внутренние.

Для сложных границ границу заменяют ломаной. Иногда можно сделать преобразование координат



$$\xi = \frac{x - \varphi_1(y)}{\varphi_2(y) - \varphi_1(y)} \qquad 0 \le \xi \le 1$$

$$0 \le \eta \le 1$$

$$\eta = \frac{y - \psi_1(x)}{\psi_2(x) - \psi_1(x)}$$

(4) Необходимо преобразовать уравнение и граничные условия к новым координатам ξ, η Лекция 8

<u>Сходимость</u>

Пусть уравнение запишем в операторном виде

$$LU(x,t) = F(x,t) \quad (x,t) \in \overline{G}$$

$\overline{G}$ это область G и граница Γ

Дифференциальную задачу заменим разностной

$$L_h u_h = f_h \quad (x,t) \in \overline{g}_h$$

погрешность в узлах (i,j)

$$\delta u_i^j = u_i^j - U_i^j$$

$$\delta u = \max_{i,j} |\delta u_i^j|$$

Схема называется сходящейся если

$$\lim_{h \to 0} \delta u = 0$$

Если $\delta u \le M \cdot h^k$, то схема имеет k-тый порядок точности.

(5) <u>Аппроксимация.</u> Лекция 8

Запишем разностное уравнение для погрешности решения на сетке $\delta u_h = u_h - U_h$

подставляя u_h получим

$$L_h \delta u_h = R_h; \quad R_h = f_h - L_h U_h$$

R_h называется невязкой (погрешность аппроксимации)

Введем $R = \max\limits_{(x,t)\in g_h} |R_h|$

если $R = O(h^k)$ то это аппроксимация k-того порядка

Если $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ \tau\to 0}} R = 0$ это безусловная аппроксимация

Условная аппрокс. полагает доп. условие, например

$R = O(h + \tau + \tau/h^2)$ то $R \to 0$ при $h \to 0$ $\tau \to 0$ $\tau/h^2 \to 0$, т.е. $\tau < h^2$