Divided Difference 的一些性质

By 黄凯旋

Outline:

- 线性性、Leibniz法则
- 基函数、展开式
- 对称性
- 矩阵表示、Newton多项式
- 中值定理

Definition: 设$\{x_k\} \subset \mathbb{R}$是一列互不相同的点，$f$在$\{x_k\}$有定义，记$D[x_1, x_2, \cdots, x_k](f)$为$f$关于$x_1, x_2, \cdots, x_k$的**divided difference**. 其递归定义如下：

$$D[x_i](f) = f(x_i)$$

$$D[x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_k}](f)$$

$$= \frac{D[x_{i_2}, x_{i_3}, \cdots, x_{i_k}](f) - D[x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_{k-1}}](f)}{x_{i_k} - x_{i_1}}$$

Lemma: (线性性)

$$D[x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_k}](f+g) =$$

$$D[x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_k}](f) + D[x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_k}](g)$$

$$D[x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_k}](\lambda f) = \lambda D[x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_k}](f)$$

Hint: 根据定义归纳即得。

Definition(基函数): 记$\delta_i(x)$为一个仅在x_i处取值为1，而在其余点取值为零的函数。

$$\delta_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Lemma: 对任意$x = x_k$成立：

$$f(x) = \sum_i f(x_i)\delta_i(x)$$

$$D[x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_k}](f) = \sum_{j=1}^{k} f(x_{i_j}) D[x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_k}](\delta_{i_j}(x))$$

Theorem: 对任意k和任意互不相同的$i_1, i_2, \cdots, i_k$, 对任意$1 \leq j \leq k$, 下述等式成立:

$$D[x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_k}](\delta_{i_j}(x)) = \prod_{l=1, l\neq j}^{k} \frac{1}{x_{i_j} - x_{i_l}}$$

*Proof

用归纳法，$k=1$时无需证明。假设命题对$1,2,\cdots,k-1$成立，下证明其对k成立。

由定义有，

$$D[x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_k}](\delta_{i_j}(x))$$
$$=\frac{D[x_{i_2},x_{i_3},\cdots,x_{i_k}](\delta_{i_j}(x))-D[x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_{k-1}}](\delta_{i_j}(x))}{x_{i_k}-x_{i_1}}$$

Proof (cont'd)

可见若$j = k$，则分子中第二项为零，第一项可用归纳假设:

$$D[x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_k}](\delta_{i_k}(x)) = \frac{\prod_{l=2}^{k-1} \frac{1}{x_{i_k} - x_{i_l}} - 0}{x_{i_k} - x_{i_1}} = \prod_{l=1}^{k-1} \frac{1}{x_{i_k} - x_{i_l}}$$

从而可知命题成立。

**Proof* (cont'd)

若$j=1$, 则分子中第一项为零：

$$D[x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_k}](\delta_{i_1}(x)) = \frac{0 - \prod_{l=2}^{k-1} \frac{1}{x_{i_1} - x_{i_l}}}{x_{i_k} - x_{i_1}} = \prod_{l=2}^{k} \frac{1}{x_{i_1} - x_{i_l}}$$

命题也成立。

*Proof (cont'd)

当$1<j<k$ 时，有：

$$D[x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_k}](\delta_{i_j}(x))=\frac{\frac{1}{\prod_{l=2,l\neq j}^{k}(x_{i_j}-x_{i_l})}-\frac{1}{\prod_{l=1,l\neq j}^{k-1}(x_{i_j}-x_{i_l})}}{x_{i_k}-x_{i_1}}$$

$$=\frac{\frac{(x_{i_j}-x_{i_1})-(x_{i_j}-x_{i_k})}{\prod_{l=1,l\neq j}^{k}(x_{i_j}-x_{i_l})}}{x_{i_k}-x_{i_1}}$$

$$=\prod_{l=1,l\neq j}^{k}\frac{1}{x_{i_j}-x_{i_l}}$$

至此，由数学归纳法可证明命题对所有情况都成立。

Corollary(对称性)： 对于$\forall \sigma \in S_k$, 有

$$D[x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_k}](f) = D[x_{i_{\sigma(1)}}, x_{i_{\sigma(2)}}, \cdots, x_{i_{\sigma(k)}}](f)$$

Hint:

$$D[x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_k}](\delta_{i_j}(x)) = \prod_{l=1, l\neq j}^{k} \frac{1}{x_{i_j} - x_{i_l}}$$

Theorem: (Leibniz rule):

$$D[x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_k}](fg) = D[x_{i_1}](f)D[x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_k}](g)$$

$$+D[x_{i_1}, x_{i_2}](f)D[x_{i_2}, x_{i_3}, \cdots, x_{i_k}](g) +$$

$$\cdots$$

$$+D[x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_k}](f)D[x_{i_k}](g)$$

*Proof

证明思路：利用线性性，只需证明对$f = \delta_{i_l}$ 和$g = \delta_{i_r}$结论成立。然后按$l > r$,$l = r$,$l < r$分类讨论。前面两种情况的证明是平凡的。第三种情况（? ）

矩阵表示

Definition: 取定n个不同的点$x_1, x_2, \cdots, x_n$, 定义

$$T_f = \begin{pmatrix} D[x_1](f) & D[x_1, x_2](f) & \cdots & D[x_1, \cdots, x_n](f) \\ 0 & D[x_2](f) & \cdots & D[x_2, \cdots, x_n](f) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & D[x_n](f) \end{pmatrix}$$

则有:

- 线性性： $T_{af+bg} = aT_f + bT_g$
- Leibniz法则: $T_{fg} = T_f T_g$
- 两两交换: $T_f T_g = T_g T_f$

T诱导了线性空间的同构和环同构。

$$f = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\delta_i \Rightarrow T_f = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) T_{\delta_i}$$

T_{δ_i}的前$(i-1)$列都是零，第i列记为v_i：

$$v_i = \begin{pmatrix} \frac{1}{(x_i - x_1)(x_i - x_2)\cdots(x_i - x_{i-1})} \\ \frac{1}{(x_i - x_2)\cdots(x_i - x_{i-1})} \\ \vdots \\ \frac{1}{x_i - x_{i-1}} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

剩下$(n-i)$列都是第i列的一个常数倍。

$$f(x)\delta_i(x)=c\delta_i(x), c=f(x_i)$$

$$T_f T_{\delta_i}=cT_{\delta_i}$$

故T_{δ_i}的每一列都是T_f的特征向量。将每一个T_{δ_i}的第i列v_i拿出来，组成$\mathbb{R}^n$的一组基$v_1, v_2, \cdots, v_n$：

$$[v_1, \cdots, v_n]=$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{x_2-x_1} & \cdots & \frac{1}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1})} \\ 0 & 1 & \cdots & \frac{1}{(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1})} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

T_f在基$v_1, v_2, \cdots, v_n$下可以被对角化:

$$T_f[v_1, v_2, \cdots, v_n]$$

$$= [v_1, v_2, \cdots, v_n] diag\{f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n)\}$$

Note : 这一族矩阵可以联合对角化

放到一起看一看：

$$T_f v_i = f(x_i) v_i$$

$$\begin{pmatrix} D[x_1](f) & D[x_1,x_2](f) & \cdots & D[x_1,\cdots,x_n](f) \\ 0 & D[x_2](f) & \cdots & D[x_2,\cdots,x_n](f) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & D[x_n](f) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{(x_i-x_1)(x_i-x_2)\cdots(x_i-x_{i-1})} \\ \frac{1}{(x_i-x_2)\cdots(x_i-x_{i-1})} \\ \vdots \\ \frac{1}{x_i-x_{i-1}} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

看第一行：

$$D[x_1](f) + (x_i - x_1)D[x_1,x_2](f) + \cdots$$

$$+(x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{i-1})D[x_1,\cdots,x_i](f) = f(x_i)$$

Mean Value Theorem: 设$f(x)$ $k-1$次可微，则存在$\xi \in (a,b)$, $a=\min(x_{i_1},\cdots,x_{i_k})$,$b=\max(x_{i_1},\cdots,x_{i_k})$,使得

$$D[x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_k}](f)=\frac{f^{(k-1)}(\xi)}{(k-1)!}$$

*Proof

考虑$g(x)$为$f(x)$在这k个点处的Newton插值多项式，$g(x)$的$k-1$阶导数的为$(k-1)!D[x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_k}](f)$.

考虑$f-g$，可知其(k-1)次可微，在$[a,b]$内有k个零点，反复利用Rolle 中值定理可知$\exists \xi \in (a,b)$满足：

$$f^{(k-1)}(\xi) - g^{(k-1)}(\xi) = 0$$

从而：

$$D[x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_k}](f) = \frac{f^{(k-1)}(\xi)}{(k-1)!}$$

Reference:

wikipedia

Acknowledgement:

感谢蔡天乐同学校对