

Divided Difference 的一些性质

By 黄凯旋

Outline:

- 线性性、Leibniz法则
- 基函数、展开式
- 对称性
- 矩阵表示、Newton多项式
- 中值定理

Definition: 设 $\{x_k\} \subset \mathbb{R}$ 是一列互不相同的点, f 在 $\{x_k\}$ 有定义, 记 $D[x_1, x_2, \dots, x_k](f)$ 为 f 关于 x_1, x_2, \dots, x_k 的 **divided difference**. 其递归定义如下:

$$D[x_i](f) := f(x_i)$$

$$D[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}](f) :=$$

$$\frac{D[x_{i_2}, x_{i_3}, \dots, x_{i_k}](f) - D[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{k-1}}](f)}{x_{i_k} - x_{i_1}}$$

Lemma: (线性性)

$$D[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}](f + g) =$$

$$D[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}](f) + D[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}](g)$$

$$D[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}](\lambda f) = \lambda D[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}](f)$$

Hint: By definition and deduction.

Definition(基函数): 记 $\delta_i(x)$ 为一个仅在 x_i 处取值为1, 而在其余点取值为零的函数。

$$\delta_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Lemma: 对任意 $x = x_k$ 成立:

$$f(x) = \sum_i f(x_i) \delta_i(x)$$

$$D[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}](f) = \sum_{j=1}^k f(x_{i_j}) D[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}](\delta_{i_j}(x))$$

Theorem: 对任意 k , 对于任意不同的 i_1, i_2, \dots, i_k , 对任意 $1 \leq j \leq k$, 下述等式成立:

$$D[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}](\delta_{i_j}(x)) = \prod_{l=1, l \neq j}^k \frac{1}{x_{i_j} - x_{i_l}}$$

****Proof***

用归纳法， $k=1$ 时无需证明。假设命题对 $1, 2, \dots, k-1$ 成立，下证明其对 k 成立。

由定义有，

$$D[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}](\delta_{i_j}(x)) := \frac{D[x_{i_2}, x_{i_3}, \dots, x_{i_k}](\delta_{i_j}(x)) - D[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{k-1}}](\delta_{i_j}(x))}{x_{i_k} - x_{i_1}}$$

****Proof (cont'd)***

可见若 $j = k$ ，则分子中第二项为零，第一项可用归纳假设：

$$D[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}](\delta_{i_k}(x)) = \frac{\prod_{l=2}^{k-1} \frac{1}{x_{i_k} - x_{i_l}} - 0}{x_{i_k} - x_{i_1}} = \prod_{l=1}^{k-1} \frac{1}{x_{i_k} - x_{i_l}}$$

从而可知命题成立。

****Proof (cont'd)***

若 $j = 1$, 则分子中第一项为零:

$$D[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}](\delta_{i_1}(x)) = \frac{0 - \prod_{l=2}^{k-1} \frac{1}{x_{i_1} - x_{i_l}}}{x_{i_k} - x_{i_1}} = \prod_{l=2}^k \frac{1}{x_{i_1} - x_{i_l}}$$

命题也成立。

****Proof (cont'd)***

当 $1 < j < k$ 时, 有:

$$\begin{aligned} D[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}](\delta_{i_j}(x)) &= \frac{\frac{1}{\prod_{l=2, l \neq j}^k x_{i_j} - x_{i_l}} - \frac{1}{\prod_{l=1, l \neq j}^{k-1} x_{i_j} - x_{i_l}}}{x_{i_k} - x_{i_1}} \\ &= \frac{\frac{(x_{i_j} - x_{i_1}) - (x_{i_j} - x_{i_k})}{\prod_{l=1, l \neq j}^k x_{i_j} - x_{i_l}}}{x_{i_k} - x_{i_1}} \\ &= \prod_{l=1, l \neq j}^k \frac{1}{x_{i_j} - x_{i_l}} \end{aligned}$$

至此, 由数学归纳法可证明命题对所有情况都成立。

Corollary(对称性): 对于 $\forall \sigma \in S_k$, 有

$$D[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}](f) = D[x_{i_{\sigma(1)}}, x_{i_{\sigma(2)}}, \dots, x_{i_{\sigma(k)}}](f)$$

Hint:

$$D[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}](\delta_{i_j}(x)) = \prod_{l=1, l \neq j}^k \frac{1}{x_{i_j} - x_{i_l}}$$

Theorem: (Leibinz rule):

$$\begin{aligned} D[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}](fg) &= D[x_{i_1}](f)D[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}](g) \\ &+ D[x_{i_1}, x_{i_2}](f)D[x_{i_2}, x_{i_3}, \dots, x_{i_k}](g) + \\ &\quad \dots \\ &+ D[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}](f)D[x_{i_k}](g) \end{aligned}$$

***Proof**

证明思路：利用线性性，只需证明对 $f = \delta_{i_l}$ 和 $g = \delta_{i_r}$ 即可。然后按 $l > r, l = r, l < r$ 分类讨论。前面两种情况的证明是平凡的。第三种情况（？）

矩阵表示

Definition: 取定 n 个不同的点 x_1, x_2, \dots, x_n , 定义

$$T_f = \begin{pmatrix} D[x_1](f) & D[x_1, x_2](f) & \cdots & D[x_1, \dots, x_n](f) \\ 0 & D[x_2](f) & \cdots & D[x_2, \dots, x_n](f) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & D[x_n](f) \end{pmatrix}$$

则有:

- 线性性: $T_{af+bg} = aT_f + bT_g$
- Leibniz法则: $T_{fg} = T_f T_g$
- 两两交换: $T_f T_g = T_g T_f$

T 诱导了线性空间的同构和环同构。

$$f = \sum_{i=1}^n f(x_i) \delta_i \Rightarrow T_f = \sum_{i=1}^n f(x_i) T_{\delta_i}$$

T_{δ_i} 的前 $(i - 1)$ 列都是零，第 i 列记为 v_i ：

$$v_i = \begin{pmatrix} \frac{1}{(x_i - x_1)(x_i - x_2) \cdots (x_i - x_{i-1})} \\ \frac{1}{(x_i - x_2) \cdots (x_i - x_{i-1})} \\ \vdots \\ \frac{1}{x_i - x_{i-1}} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

剩下 $(n - i)$ 列都是第 i 列的一个常数倍。

$$f(x)\delta_i(x) = c\delta_i(x), c = f(x_i)$$

$$T_f T_{\delta_i} = c T_{\delta_i}$$

故 T_{δ_i} 的每一列都是 T_f 的特征向量。将每一个 T_{δ_i} 的第 i 列 v_i 拿出来，组成 \mathbb{R}^n 的一组基 v_1, v_2, \dots, v_n ：

$$[v_1, \dots, v_n] =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{x_2 - x_1} & \cdots & \frac{1}{(x_n - x_1)(x_n - x_2) \cdots (x_n - x_{n-1})} \\ 0 & 1 & \cdots & \frac{1}{(x_n - x_2) \cdots (x_n - x_{n-1})} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

T_f 在基 v_1, v_2, \dots, v_n 下可以被对角化:

$$\begin{aligned} & T_f[v_1, v_2, \dots, v_n] \\ &= [v_1, v_2, \dots, v_n] \text{diag}\{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\} \end{aligned}$$

Note : 这一族矩阵可以联合对角化

放到一起看一看：

$$T_f v_i = f(x_i) v_i$$

$$\begin{pmatrix} D[x_1](f) & D[x_1, x_2](f) & \cdots & D[x_1, \cdots, x_n](f) \\ 0 & D[x_2](f) & \cdots & D[x_2, \cdots, x_n](f) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & D[x_n](f) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{(x_i - x_1)(x_i - x_2) \cdots (x_i - x_{i-1})} \\ \frac{1}{(x_i - x_2) \cdots (x_i - x_{i-1})} \\ \vdots \\ \frac{1}{x_i - x_{i-1}} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

看第一行：

$$\begin{aligned} & D[x_1](f) + (x_i - x_1)D[x_1, x_2](f) + \cdots \\ & + (x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})D[x_1, \cdots, x_i](f) = f(x_i) \end{aligned}$$

Mean Value Theorem: 设 $f(x)$ $k-1$ 次可微, 则 $\exists \xi \in (a, b)$,
 $a = \min(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}), b = \max(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$, 使得

$$D[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}](f) = \frac{f^{(k-1)}(\xi)}{(k-1)!}$$

***Proof**

考虑 $g(x)$ 为 $f(x)$ 在这 k 个点处的Newton插值多项式, $g(x)$ 的 $k-1$ 阶导数的为 $(k-1)!D[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}](f)$.

考虑 $f - g$, 可知其 $(k-1)$ 次可微, 在 $[a, b]$ 内有 k 个零点, 反复利用Rolle 中值定理可知 $\exists \xi \in (a, b)$ 满足:

$$f^{(k-1)}(\xi) - g^{(k-1)}(\xi) = 0$$

从而:

$$D[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}](f) = \frac{f^{(k-1)}(\xi)}{(k-1)!}$$