CBTSP - Projekt

Michael Höfler, Claudius Röhl

Definition 1. *Sei K eine Menge, $E \subseteq K \times K$ eine Relation über K und $C : E \to \mathbb{R}$. Wir nennen das Tupel $G := (K, E, C)$ einen **Graphen**, die Elemente aus K **Knoten**, die aus E **Kanten** und C die **Kostenfunktion** von G.*

*Wenn $\forall (a, b) \in E : (b, a) \in E$ gilt (E also symmetrisch ist), nennen wir G einen **ungerichteten Graphen**. In diesem Fall können die Kanten auch als Teilmenge $\tilde{E}$ der Potenzmenge von K geschrieben werden, indem wir*

$$\tilde{E} := \{\{a, b\} \in \mathfrak{P}(K) \mid a, b \in K : (a, b) \in E\}$$

setzen und (K, E) mit $(K, \tilde{E})$ identifizieren.

Definition 2. *Sei $G = (K, E, C)$ ein Graph und $K' \subseteq K$, $E' \subseteq (K' \times K') \cap E$ sowie $C|_{G'} = C'$. Dann heiße $G' := (K', E', C')$ ein **Teilgraph** von G und wir schreiben $G' \subseteq G$.*

Definition 3. *Sei $G = (K, E, C)$ ein ungerichteter Graph. Eine Folge*

$$H = (h_1, h_2 ..., h_{|G|}), h_i \in K$$

*heiße **hamiltonscher Zyklus**, falls*

$$\{h_i \mid i \in \mathbb{N}_{1,|G|}\} = G$$

und für alle $1 \leq i < j \leq |G|$ gilt

$$h_i \neq k_j \wedge \{h_i, h_j\} \in E.$$

Wir nennen

$$C_{CBTSP}(H) := \left| \sum_{i=1}^{|G|-1} C(\{h_i, h_{i+1}\}) \right| \in \mathbb{R}$$

die CBTSP-Kosten des Zyklus H. Wir setzen

$$E_H := \{h \in E \mid \exists n \in \mathbb{N} : h = (h_n, h_{n+1})\}.$$

Satz 4. *Seien $G = (K, E, C)$ ein endlicher ungerichteter Graph und $G' \subsetneq G$ ein echter Teilgraph dergestalt, dass*

$$C(x) = \begin{cases} C'(e) & \text{falls } e \in E', \\ 2M + 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit

$$M := \sum_{e' \in E'} |C'(e)|.$$

Seien H und H' hamiltonsche Zyklen von G bzw. G', wobei H kein hamiltonscher Zyklus von G' sei. Dann gilt:

$$C_{CBTSP}(H') < C_{CBTSP}(H).$$

Beweis. Sei alles wie oben. Da $H = (h_1, ..., h_{|G|})$ kein hamiltonscher Zyklus von G' ist, gibt es ein $s \in \mathbb{N}$ so, dass $\hat{h} := (h_s, h_{s+1}) \notin E'$. Daher gilt:

$$C(\hat{h}) = 2M + 1.$$

Weiters haben wir

$$\begin{aligned}
C_{CBTSP}(H') &= \left| \sum_{h' \in E'_{H'}} C(h') \right| && (1)\\
&\leq \sum_{h' \in E'_{H'}} |C(h')| && (2)\\
&\leq \sum_{h' \in E'} |C(h)| && (3)\\
&= M && (4)\\
&< M + 1 && (5)\\
&\leq \left| \underbrace{\left(\sum_{h \in E_H \setminus \{\hat{h}\}} C(h) \right) + M}_{\geq 0} + M + 1 \right| && (6)\\
&= \left| \sum_{h \in E_H} C(h) \right| && (7)\\
&= C_{CBTSP}(H). && (8)
\end{aligned}$$

□