2023第二次习题课（高数上）

结论： 若$\lim\limits_{x\to c} g(x)=0$ 且存在c的邻域A 使得$|f(x)|\le M$ 在$A\setminus\{c\}$ 上成立，则 $\lim\limits_{x\to c} f(x)g(x)=0$

上述结论采用夹逼定理，注意证明一个函数在某一点极限为0等价于证明它的绝对值对应的函数极限为0

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2\sin(\frac{1}{x}))}{x}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2\sin(\frac{1}{x}))}{x^2\sin(\frac{1}{x})}\frac{x^2\sin(\frac{1}{x})}{x}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2\sin(\frac{1}{x}))}{x^2\sin(\frac{1}{x})}\lim_{x\to 0}x\sin(\frac{1}{x})\quad(\star)$$
$$=0$$

上述计算过程错误，因为在0的任意邻域中$x^2\sin(\frac{1}{x})$ 都有零点，也即找不到一个0的去心邻域使得$(\star)$ 中的$\frac{\sin(x^2\sin(\frac{1}{x}))}{x^2\sin(\frac{1}{x})}$ 在去心邻域中完全有定义，所以它的极限不存在。

$$|\frac{\sin(x^2\sin(\frac{1}{x}))}{x}|\le|x\sin(\frac{1}{x})|$$

函数极限的一些性质

极限的唯一性： 如果$\lim\limits_{x\to c} f(x)=L$ 那么这个极限唯一

局部有界性： 如果$\lim\limits_{x\to c} f(x)=L$ 那么存在常数M>0和$\delta>0$ 使得当$|x-c|<\delta$时有 $|f(x)|\le M$

局部保号性： 如果$\lim\limits_{x\to c} f(x)=L>0(<0)$ 那么存在$\delta>0$ 使得当$|x-c|<\delta$ 时，有 $f(x)>0(<0)$

问题： 如果$f>0$,且在c点极限存在，是否有$\lim\limits_{x\to c} f(x)=L>0$ 成立？

求极限的方法：

(1)函数的连续性
(2)极限的四则运算法则
(3)重要极限
(4)左右极限相等，极限存在(主要用来考察分段函数的极限)
(5)夹逼准则 (The Sandwich Theorem)

补充题

ex2(17)

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{2x+1}}\\
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}}}}{\sqrt{2+\frac{1}{x}}}\\
&=\frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}
$$

ex14(4)

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x})x^{\frac{3}{2}}\\
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x+2\sqrt{x^2-1}-4x)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}+2\sqrt{x}}x^{\frac{3}{2}}\\
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{2(x^2-1-x^2)}{(\sqrt{x^2-1}+x)(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}+2\sqrt{x})}x^{\frac{3}{2}}\\
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+1)(\sqrt{\frac{1}{x}+1}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}+2\sqrt{1})}\\
&=-\frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

1.(3)

换元$t=\frac{1}{x}$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha}\sin(\frac{1}{x}) \\
&= \lim_{t\to0^+} t^{-\alpha}\sin(t) \\
&= \lim_{t\to0^+} t^{1-\alpha}\frac{\sin(t)}{t} \\
&= \lim_{t\to0^+} t^{1-\alpha}\lim_{t\to0^+}\frac{\sin(t)}{t} \\
&= \lim_{t\to0^+} t^{1-\alpha}
\end{aligned}
$$

注意： 函数时x趋于什么点的极限

换元之后t趋于0^+

1.(4)

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}} \\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+1+\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+\frac{\sin x}{x^2}}} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

注意： x小于0时其代入根号要注意符号问题

ex4(3)

首先有垂直渐近线$x=2, x=3$

通过计算

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}\frac{(|x|+1)^3}{x(x-2)(x-3)} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{(1+\frac{1}{x})^3}{(1-\frac{2}{x})(1-\frac{3}{x})} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

得到一个a=1，再计算

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}\frac{(|x|+1)^3}{(x-2)(x-3)}-x\\
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)^3-x(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-3)}\\
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{8x^2-3x+1}{(x-2)(x-3)}\\
&=8
\end{aligned}
$$

得到斜渐近线 $y=x+8$

同理，令x趋于负无穷得到另一个渐近线$y=-x-2$

ex4(4)

首先有垂直渐近线$x=-\frac{10^6}{3}$

通过计算

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+3x+1}}{3x+10^6}\\
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}}{3+\frac{10^6}{x}}\\
&=\frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

得到一个$a=\frac{1}{3}$

再计算

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{x^2+3x+1}}{3x+10^6}-\frac{x}{3}\\
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x\sqrt{x^2+3x+1}-x(3x+10^6)}{9x+3*10^6}\\
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(9(x^2+3x+1)-9x^2-6*10^6x-10^{12})}{(9x+3*10^6)(3\sqrt{x^2+3x+1}+(3x+10^6))}\\
&=\frac{1}{2}-\frac{10^6}{9}
\end{aligned}
$$

得到渐近线$y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}-\frac{10^6}{9}$

类似地得到渐近线$y=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}+\frac{10^6}{9}$

4(1)

间断点：$x=k,k\in\mathbb{Z}$.

4（2）

x=0处极限为$\frac{1}{\pi}$

$x=-1$ 处极限为$\frac{1}{\pi}$

5

定义$g(x)=f(x)-f(x+a)$ 首先得到其定义域为 $x\in[0,a]$ ，且其在定义域上连续，根据题干我们有$g(0)+g(a)=0$ ，于是$g(0)\cdot g(a)=-g(0)^2\leq 0$，则存在$c\in[0,a]$ 使得$g(c)=0$ 成立，即$f(c)=f(x+a)$ 。

课本习题

Dirichlet Function

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\text{为有理数}\\ 0 & x\text{为无理数}\end{cases}$$

Riemann Function ($x\in[0,1]$)

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{q} & x=\frac{p}{q}(p\text{与}q\text{互素})\\ 0 & x\text{为无理数}\end{cases}$$

补充题

3. 判断题. 若正确, 请给出证明过程. 若错误, 请给出反例.

(1) ★ 若$\lim\limits_{x\to c} f(x) = A$, 且$\lim\limits_{y\to A} g(y) = B$, 则$\lim\limits_{x\to c} g(f(x)) = B$.

(2) 若$\lim\limits_{x\to c} |f(x)| = |l|$, 则$\lim\limits_{x\to c} f(x) = l$.

(3) 若$\lim\limits_{x\to c}[f(x) + g(x)]$ 存在, 则$\lim\limits_{x\to c} f(x)$ 和$\lim\limits_{x\to c} g(x)$ 都存在.

(4) 若$f(x) > 0$, 且$\lim\limits_{x\to c} f(x) = l$, 则$l > 0$.

(5) 若f^2 连续, 则f 也连续.

(6) 若f^3 连续, 则f 也连续.

请计算下列极限

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{2020}-1}{x^{2019}-1} \qquad \lim_{x\to 1}(1-x)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})}{(1-x^2)^2} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin(x^3)}$$