2023秋第三次习题课（高数上）

THEOREM 9—Composite of Continuous Functions If f is continuous at c and g is continuous at $f(c)$, then the composite $g \circ f$ is continuous at c.

导数极限定理

设函数$f(x)$在点x_0的某邻域$U(x_0)$内连续，在$U^0(x_0)$内可导，且极限$\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$存在，则$f$在点$x_0$可导，且

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0} f'(x)$$

判断下列命题的正确与否, 并说明理由.

(1) 已知函数$f=g+h$, 若f 在$x=x_0$ 可导, 则函数g,h 在$x=x_0$ 也可导.

(2) 已知函数$f=g+h$, 若g 在$x=x_0$ 可导, 且函数h 在$x=x_0$ 不可导, 则f 在$x=x_0$ 不可导.

(3) 已知函数$f=g\cdot h$, 若f 在$x=x_0$ 可导, 则函数g,h 在$x=x_0$ 也可导.

(4) 已知函数$f=g\cdot h$, 若g 在$x=x_0$ 可导, 且函数h 在$x=x_0$ 不可导, 则f 在$x=x_0$ 不可导.

补充题

ex1:D

1. ★ 下列函数在$x=0$处不可导的是?

(A) $f(x)=|x|\sin|x|$. (B) $f(x)=|x|\sin\sqrt{|x|}$.

(C) $f(x)=\cos|x|$. (D) $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$.

选项A： $\lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h} \sin |h|$，该极限为去心邻域的有界函数乘极限为零的函数，故该极限为0，题干函数在0处可导。

选项B: 与A同理。

选项C: $\cos |x| = \cos x$，故而该函数可导

选项D: 右导数$-\frac{1}{2}$，左导数$\frac{1}{2}$， 不可导，根据导数定义或导数极限定理，可以得到左右导数。

ex2:B

设

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

则使$f^{(n)}(0)$ 存在的最大正整数n 是

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

导函数计算： 在0处用定义求导，在其他地方用公式求导

$$f'(x) = \begin{cases} x^2(4x \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})) & x \neq 0 \\ 0 \quad x = 0 \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} (12x^2 - 1) \sin(\frac{1}{x}) - 6x \cos(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 \quad x = 0 \end{cases}$$

ex7

7. ★ 设$f(x) = x(b^2 - x^2)$, $x \in [0, 1)$, 且满足$f(x) = af(x+1)$, $x \in [-1, 0)$. 试确定a 和b

零点处右导数：b^2

左导数$a(b^2 - 3)$

根据0点连续我们可以得到$a(b^2 - 1) = 0$

故而得到$b = \pm 1, a = -\frac{1}{2}$ 或$a = 0, b = 0$

在0的导数为0或1

ex12

若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 且 $f(0)=0$, 求:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}.$$

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}\\=&\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-0}{x-0}-\lim_{x\to 0}\frac{2(f(x^3)-0)}{x^3-0}\\=&-f'(0)\end{aligned}$$

ex14

14. 令 $x=\tan y$, 证明:

$$(1+x^2)y''+2xy'=0.$$

等式两边同时对x求导

$$\begin{aligned}1&=\frac{1}{\cos^2 y}y'\\\cos^2 y&=y'\end{aligned}$$

再求导(然后同除$\cos^2 y$)

$$\begin{aligned}-2\cos y\cdot\sin y\cdot y'&=y''\\-2xy'&=\frac{y''}{\cos^2 y}\\-2xy'&=(1+x^2)y''\\0&=(1+x^2)y''+2xy'\end{aligned}$$

ex22

在第二个等式两边对x求导

$$2y'=y^3+3xy^2y'$$

解得$y'=1$

第一个式子对x求导

$$y' = 3x^2 + a$$

根据函数值和导数相等解得$a = -2, b = 0$

课本作业

answer.

T Graph the curves in Exercises 39–48.

a. Where do the graphs appear to have vertical tangents?

b. Confirm your findings in part (a) with limit calculations. But before you do, read the introduction to Exercises 37 and 38.

39. $y = x^{2/5}$

40. $y = x^{4/5}$

41. $y = x^{1/5}$

42. $y = x^{3/5}$

43. $y = 4x^{2/5} - 2x$

44. $y = x^{5/3} - 5x^{2/3}$

45. $y = x^{2/3} - (x - 1)^{1/3}$

46. $y = x^{1/3} + (x - 1)^{1/3}$

47. $y = \begin{cases} -\sqrt{|x|}, & x \le 0 \\ \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$

48. $y = \sqrt{|4 - x|}$

58. a. Let $f(x)$ be a function satisfying $|f(x)| \le x^2$ for $-1 \le x \le 1$. Show that f is differentiable at $x = 0$ and find $f'(0)$.

b. Show that

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

is differentiable at $x = 0$ and find $f'(0)$.

40. $p = \dfrac{q^2 + 3}{(q - 1)^3 + (q + 1)^3}$

50. $\displaystyle\lim_{\theta \to \pi/4} \frac{\tan \theta - 1}{\theta - \frac{\pi}{4}}$

58. $y = \sqrt{3t + \sqrt{2 + \sqrt{1 - t}}}$

13. $y \sin\left(\frac{1}{y}\right) = 1 - xy$

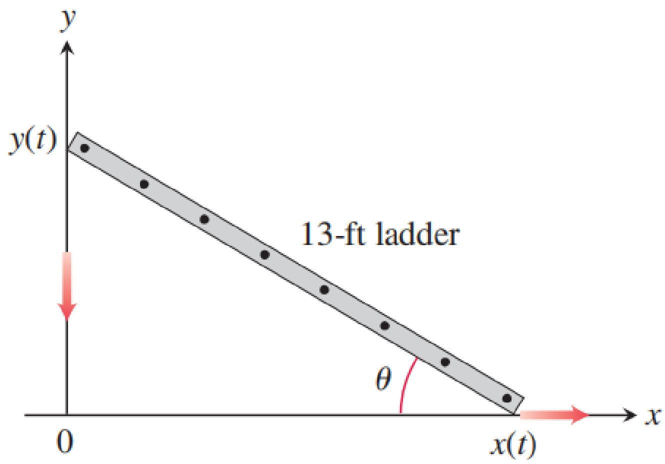
instant when $x = 4$, $y = 3$, and $z = 2$.

23. A sliding ladder A 13-ft ladder is leaning against a house when its base starts to slide away (see accompanying figure). By the time the base is 12 ft from the house, the base is moving at the rate of 5 ft/sec.

a. How fast is the top of the ladder sliding down the wall then?

b. At what rate is the area of the triangle formed by the ladder, wall, and ground changing then?

c. At what rate is the angle θ between the ladder and the ground changing then?



补充习题一

题一

假设 $f'(x_0)$ 存在求出下列极限

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{h}$$

题二

设$f(x)=x(x+1)\cdots(x+n)\quad(n\geq 0)$ 则$f'(0)=$

题三

$f(x)$在 $x=a$ 的某个邻域内有定义，下列条件为 $f(x)$ 在$x=a$ 处可导的充分条件的是

$\lim\limits_{h\to+\infty} h(f(a+\frac{1}{h})-f(a))$ 存在

$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$ 存在

$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a-h)}{2h}$ 存在

$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ 存在

题四

给定有限个点$\alpha_1,\alpha_2\ldots\alpha_n$ ，请给出一个函数，使得该函数仅在这些点上可导。

补充习题二

题一

判断题

1：$\lim_{x\to\infty} x^2\sin x=+\infty$

2:函数在一点的右导数就是他的导函数在该点的右极限。

3：若函数$f(x)$ 在$[a,b)$ 内连续，它在b点存在左极限，且$f(a)\cdot\lim_{x\to b^-} f(x)<0$,则存在$c\in[a,b]$ st. $f(c)=0$.

补充题第三章

3（3） 6 11 20 21 23