分类号 ____________　　　　　　　　　　　　　　　　　　编号 ____________

U D C ____________　　　　　　　　　　　　　　　　　　密级 ____________

南方科技大学
SOUTHERN UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

本科生毕业设计（论文）

题　　目：**线性半负定系统的 Padé 逼近型 Runge-Kuta 方法的能量恒等式探究**

姓　　名：焦淼森

学　　号：11911323

系　　别：数学系

专　　业：数学与应用数学

指导教师：吴开亮 副教授

2023 年 5 月 18 日

诚信承诺书

1. 本人郑重承诺所呈交的毕业设计（论文），是在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果，所有数据、图片资料均真实可靠。

2. 除文中已经注明引用的内容外，本论文不包含任何其他人或集体已经发表或撰写过的作品或成果。对本论文的研究作出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确的方式标明。

3. 本人承诺在毕业论文（设计）选题和研究内容过程中没有抄袭他人研究成果和伪造相关数据等行为。

4. 在毕业论文（设计）中对侵犯任何方面知识产权的行为，由本人承担相应的法律责任。

作者签名:

________年____月____日

COMMITMENT OF HONESTY

1. I solemnly promise that the paper presented comes from my independent research work under my supervisor's supervision. All statistics and images are real and reliable.

2. Except for the annotated reference, the paper contents no other published work or achievement by person or group. All people making important contributions to the study of the paper have been indicated clearly in the paper.

3. I promise that I did not plagiarize other people's research achievement or forge related data in the process of designing topic and research content.

4. If there is violation of any intellectual property right, I will take legal responsibility myself.

Signature:

Date:

线性半负定系统的 Padé 逼近型 Runge-Kuta 方法的能量恒等式探究

焦淼森

（数学系　指导教师：吴开亮）

[摘要]： Runge-Kutta 方法（RK 方法）是数值求解微分方程（组）的一类重要算法，已被广泛应用于科学与工程领域。算法的稳定性对数值计算结果有决定性的影响。长期以来，对 RK 方法稳定性的理解和刻画是数值分析领域的重要基本问题之一，该方面研究受到了许多计算数学家的关注，形成了诸多经典的理论。本文介绍了一种利用能量方法分析线性半负定系统 RK 方法稳定性的新框架，并成功建立了一般的次对角 Padé 逼近型 RK 方法的能量恒等式。我们首先通过大量的数值实验观察，找到了该能量恒等式所涉及的矩阵 Cholesky 分解的显式形式。此矩阵及其 Cholesky 分解的元素极其复杂，这给证明能量恒等式带来了很大的困难与挑战。我们通过超几何级数技术和若干巧妙的组合恒等式克服了这些困难。在这个过程中，我们得出了一系列引理和构造性的等式，最终通过指标平移的技巧完成了证明。基于所建立的能量定律，我们证明了次对角 Padé 逼近型 RK 方法对任何线性半负定系统是无条件强稳定的，这个结果强于 1973 年 E.L.Ehle 证明的该方法 A-stable 的结论，同时也拓展了论文 [Sun, Wei & Wu, SIAM Journal on Numerical Analysis, 2022, 60(5): 2448-2481] 中关于对角 Padé 逼近的理论结果。

[关键词]： Padé 逼近，Runge-Kutta 方法，能量方法，超几何级数技术

[**ABSTRACT**]: The Runge-Kutta methods (RK methods) are an important family of algorithms for numerically solving differential equations or systems, and they have been widely applied in the fields of science and engineering. The stability of these algorithms has a decisive impact on the outputs of the numerical computations. The understanding and characterization of the stability for different members within the RK methods have long been fundamental issues in the field of numerical analysis, attracting significant attention from computational mathematicians and giving rise to numerous classic theories.This paper introduces a new framework for analyzing the stability for RK methods of linear semi-negative definite systems,and successfully establish the energy identity for RK methods corresponding to sub-diagonal Padé approximations. Initially, through extensive numerical experiments, we get the explicit form of the matrix Cholesky decomposition involved in the energy identity. The matrix and the elements of its Cholesky decomposition are highly complex, which poses significant difficulties and challenges in proving the energy identity. However, we overcome these obstacles by employing hypergeometric series techniques and cleverly combining several identities. In this process, we derive a series of lemmas and constructive equations, ultimately completing the proof through the technique of index shifting.Based on the established energy law, we prove that RK methods corresponding to sub-diagonal Padé approximation are strongly stable for any linear semi-negative definite system. This result strengthens the 1973 conclusion by E.L. Ehle on the A-stability of the same family of methods and also extends the theoretical findings on diagonal Padé approximation in the paper [Sun, Wei & Wu, SIAM Journal on Numerical Analysis, 2022, 60(5): 2448-2481].

[**Key words**]: Padé approximation, Runge-Kutta methods, energy methods, hypergeometric series techniques

目录

1. 绪论

Runge-Kutta 方法（RK 方法）是数值求解微分方程（组）的一类重要算法，已被广泛应用于科学与工程领域。算法的稳定性对数值计算结果有决定性的影响。长期以来，对 RK 方法稳定性的理解和刻画是数值分析领域的重要基本问题之一，该方面研究受到了许多计算数学家的关注，形成了诸多经典的理论。传统的稳定性分析基于特征值分析的方法，但这种方法在处理非正规算子的问题时往往只能给出稳定性的必要非充分条件，利用这些条件可能会得到错误的结论[1][2]。为了克服这些限制，能量方法应运而生，它通过寻找一些能量恒等式与能量不等式来协助分析稳定性。

对于隐式 Runge-Kutta 方法，K.Burrage 和 H.Wang 等人[3]利用能量方法分析了它的 BN 稳定性和代数稳定性。而对于显式 Runge-Kutta 方法，有一类研究方向是有关强制算子的[4]，这类算子通常产生于扩散问题。有结果表明，在恰当的时间步长下，欧拉向前方法可以使得数值解的模长随着时间递减，这个性质被称作是强稳定性[5]。这种稳定性可被推广到所有的强稳定保持的 RK 方法。但这些论点并不能应用到波方程的半离散格式引起的非强制问题。Sun 和 Shu[6]受到三阶与四阶隐式 RK 方法研究的启发，提出了一个利用能量方法分析强稳定性的新框架，Sun,Wei 和 Wu[7]在之后又对这个新框架进行了推广，提出了一套分析线性半负定系统稳定性的方法。

指的一提的是，在[7]中，作者基于相应矩阵的 Cholesky 分解给出了对角 Padé 逼近的离散能量恒等式，我们在本文的第二节中对该文章中的一些理论进行了介绍。在本文的第三节中，我们介绍了次对角 Padé 的概念并且给出了一些次对角 Padé 逼近型 RK 方法的例子。在本文的第四节，我们模仿该文章的方法，发现了次对角 Padé 逼近型 RK 方法相应矩阵的 Cholesky 分解并进行了证明，找到了对应次对角 Padé 逼近的离散能量恒等式，利用这个等式，我们得到了该 RK 方法对于线性半负定系统的无条件强稳定性。在 4.1 节中我们对得到的结果进行了总结，并在之后的小节中完成了证明。

2. 定理介绍

本文涉及到的线性半负定系统有如下的一般形式

$$\frac{d}{dt}u = Lu, \quad u = u(t) \in L^2([0,T];V), \tag{2.1}$$

其中 V 是一个有限或无限的实 Helbert 空间，这个空间中的内积为 $< \cdot, \cdot >$，相应的诱导范数记作 $|| \cdot ||$。L 为一个有界线性半负定算子，它满足对任意 v ，都有 $< Lv, v > \leq 0$ 成立。

一般而言，系统 (2.1) 的 RK 方法可以写为

$$u^{n+1} = \mathcal{R}(\tau L)u^n \tag{2.2}$$

其中 u^n 代表 t^n 时间层的数值解，$\tau = t^{n+1} - t^n$ 为时间步长，而 $\mathcal{R}(Z)$ 是与 e^Z 的有理逼近有关的稳定函数，它满足关系

$$\mathcal{R}(Z) = (\mathcal{Q}(Z))^{-1}\mathcal{P}(Z) \tag{2.3}$$

$\mathcal{P}(Z)$ 和 $\mathcal{Q}(Z)$ 分别是 Z 的 s_p 阶和 s_q 阶多项式，也就是说：

$$\mathcal{P}(Z) = \sum_{i=0}^{s} \theta_i Z^i, \qquad with\ \theta_i = 0\ for\ i > s_p \tag{2.4a}$$

$$\mathcal{Q}(Z) = \sum_{i=0}^{s} \vartheta_i Z^i, \qquad with\ \vartheta_i = 0\ for\ i > s_q \tag{2.4b}$$

为了方便，我们令 $s := max\{s_p, s_q\}$，$P := \mathcal{P}(\tau L)$ 以及 $Q := \mathcal{Q}(\tau L)$。

引理 2.1[7] RK 方法 (2.2) 的解满足下列等式：

$$||u^{n+1}||^2 - ||u^n||^2 = \sum_{i=0}^{s}\sum_{j=0}^{s} \alpha_{i,j}\tau^{i+j} < L^i\omega^n, L^j\omega^n > \tag{2.5}$$

其中有 $\omega^n := Q^{-1}u^n$ 以及 $\alpha_{i,j} := \theta_i\theta_j - \vartheta_i\vartheta_j$。

但是我们很难从式子 (2.5) 中得到 $||u^n||^2$ 是递增还是递减，因为 $< L^i\omega^n, L^j\omega^n >$ 的符号难以确定,为了解决这个问题,可以将 $< L^i\omega^n, L^j\omega^n >$ 用 $||L^k\omega^n||^2$ 和 $[L^k\omega^n, L^l\omega^n]$ 线性表示，这里的 $[\cdot, \cdot]$ 是半负定算子 L 诱导的半内积

$$[\omega, v] := -< L\omega, v > - < \omega, Lv > \tag{2.6}$$

利用公式 (2.6) 我们可以得到如下等式：

$$< L^i\omega^n, L^j\omega^n >= \begin{cases} ||L^i\omega^n||^2 & \text{if } j = i \\ -\frac{1}{2}[L^i\omega^n]^2 & \text{if } j = i+1 \\ - < L^{i+1}\omega^n, L^{j-1}\omega^n > -[L^i\omega^n, L^{j-1}\omega^n] & otherwise \end{cases} \tag{2.7}$$

利用等式 (2.7)，我们可以将 (2.5) 整理为如下形式

引理 2.2[7] RK 方法 (2.2) 的解满足下列等式：

$$||u^{n+1}||^2 - ||u^n||^2 = \sum_{k=0}^{s} \beta_k \tau^{2k} ||L^k\omega^n||^2 + \sum_{i=0}^{s-1}\sum_{j=0}^{s-1} \gamma_{i,j}\tau^{i+j+1}[L^i\omega^n, L^j\omega^n] \tag{2.8}$$

其中 β_k 和 $\gamma_{i,j}$ 由 $\alpha_{i,j} := \theta_i\theta_j - \vartheta_i\vartheta_j$ 计算得到：

$$\beta_k = \sum_{l=max\{0,2k-s\}}^{min\{2k,s\}} \alpha_{l,2k-l}(-1)^{k-l} \tag{2.9}$$

$$\gamma_{i,j} = \sum_{l=max\{0,i+j+1-s\}}^{min\{i,j\}} (-1)^{min\{i,j\}+1-l}\alpha_{l,i+j+1-l} \tag{2.10}$$

进而我们可以定义如下矩阵：

$$B := diag(\{\beta_k\}_{k=0}^{s}) \qquad \Upsilon := (\gamma_{i,j})_{i,j=0}^{s-1} \tag{2.11}$$

定理 2.3[7]如果存在矩阵 $\Delta = (diag\{\delta_k\}_{k=0}^{s-1})$（其中 $\delta_k \geq 0$）使得 $\widetilde{\Upsilon} = \Upsilon - \Delta$ 为半负定的，且对称矩阵 $\widetilde{\Upsilon}$ 满足 $Cholesky$ 分解 $\widetilde{\Upsilon} = -\widetilde{U}^T\widetilde{D}\widetilde{U}$,$\widetilde{U} = (\widetilde{\mu}_{k,i})_{k,i=0}^{s-1}$ 为对角线元素为 1 的上三角矩阵，$\widetilde{D} = diag(\{\widetilde{d}_k\}_{k=0}^{s-1})$ 为满足 $\widetilde{d}_k \geq 0$ 的对角矩阵。则 RK 方法

(2.2) 的解满足如下的能量定律。

$$||u^{n+1}||^2 - ||u^n||^2 = \sum_{k=0}^{s} \beta_k \tau^{2k} ||L^k \omega^n||^2 - \sum_{k=0}^{s-1} \widetilde{d}_k \tau^{2k+1} [[L^k u^{(k)}]]^2 + \sum_{k=0}^{s-1} \delta_k \tau^{2k+1} [[L^k \omega^n]]^2 \tag{2.12}$$

其中 $u^{(k)} := \sum_{j=k}^{s} \widetilde{\mu}_{k,j} (\tau L)^{j-k} \omega^n = \sum_{j=k}^{s} \widetilde{\mu}_{k,j} (\tau L)^{j-k} Q^{-1} u^n$

根据定理 2.3 我们可以得到当矩阵 B 与 Υ 均为半负定矩阵时，相应的 RK 方法满足无条件强稳定性。

定理 2.4[7] 如果 RK 方法 (2.2) 满足矩阵 B 与 Υ 均半为负定矩阵，则 RK 方法为无条件强稳定的，也就是说：

$$||u^{n+1}||^2 \leq ||u^n||^2 \quad \forall \tau \geq 0 \tag{2.13}$$

3. 次对角 Padé 逼近

3.1 概念介绍

Padé 逼近是一种有理函数的逼近方法。在很多情况下，这种逼近方式比截断的泰勒级数准确，当泰勒级数不收敛时，Padé 逼近也往往可以进行，所以多用在计算机数学中。

根据[8]，我们有如下定理成立：

定理 3.1 e^z 的 (k,j)-Padé 可以表示成如下形式：

$$R_{k,j}(z) = \frac{P_{k,j}(z)}{Q_{k,j}(z)} \tag{3.1}$$

其中：

$$P_{k,j}(z) = 1 + \frac{k}{j+k} z + \frac{k(k-1)}{(j+k)(j+k-1)} \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{k(k-1)\ldots 1}{(j+k)\ldots(j+1)} \frac{z^k}{k!} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} Q_{k,j}(z) &= 1 - \frac{j}{k+j} z + \frac{j(j-1)}{(k+j)(k+j-1)} \frac{z^2}{2!} - \cdots + (-1)^j \frac{j(j-1)\ldots 1}{(k+j)\ldots(k+1)} \frac{z^j}{j!} \\ &= P_{jk}(-z) \end{aligned} \tag{3.3}$$

当 $k=j=s$ 时，我们称其为对角 Padé 逼近，相应的，$k=j-1=s-1$ 以及 $k=j-2=s-2$ 的情况被称作是次对角 Padé 逼近，次次对角 Padé 逼近。我们这篇文章主要讨论的是次对角 Padé 逼近。

采用 (2.4) 的记号，我们有：对于 (s-a,s)-Padé 逼近，它的系数有如下表达式

$$\theta_i = \frac{(s-a)!}{(2s-a)!}\frac{(2s-i-a)!}{i!(s-i-a)!} \quad \vartheta_i = (-1)^i \frac{s!}{(2s-a)!}\frac{(2s-i-a)!}{i!(s-i)!} \quad 0 \le i \le s-a \tag{3.4}$$

$$\theta_i = 0, s-a+1 \le i \le s \tag{3.5}$$

$$\vartheta_{s-a+1} = (-1)^{s-a+1}\frac{s!}{(2s-a)!}\frac{(s-1)!}{(s-a+1)!(a-1)!} \quad \vartheta_i = 0 \quad s-a+1 < i \le s \tag{3.6}$$

3.2 一些样例

在本节我们将给出一些次对角 Padé 逼近型 RK 方法的例子，可以发现，他们都是无条件强稳定的。

例子 3.2 当 $s=1$ 时，该方法就变为了欧拉向后方法，相应的稳定函数为 $\mathcal{R}(Z) = (I-Z)^{-1}$。我们可以计算得到 $B = diag\{0,-1\}$，$\Upsilon = (-1) = -U^T DU$（其中 $D = (1), U = (1)$）。由于 $\omega^n = Q^{-1}u^n = \mathcal{R}(\tau L)u^n = u^{n+1}$，根据定理 2.3，我们有 $||u^{n+1}||^2 - ||u^n||^2 = -\tau^2||Lu^{n+1}||^2 - \tau[[u^{n+1}]]^2 \le 0$

例子 3.3 当 $s=2$ 时，相应的稳定函数为 $\mathcal{R}(Z) = (I-\frac{2}{3}Z+\frac{1}{6}Z^2)^{-1}(I+\frac{1}{3}Z)$。我们可以计算得到 $B = diag\{0,0,-\frac{1}{36}\}$，

$$\Upsilon = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

将其分解得到

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/12 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

进一步得到 $||u^{n+1}||^2 - ||u^n||^2 = -\frac{1}{36}\tau^4||L^2\omega^n||^2 - \tau[[u^{(0)}]]^2 - \frac{1}{12}\tau^3[[Lu^{(1)}]]^2 \leq 0$

例子 3.4 当 $s = 3$ 时，我们得到稳定函数可以写成 $\mathcal{R}(Z) = (I - \frac{3}{5}Z + \frac{3}{20}Z^2 - \frac{1}{60}Z^3)^{-1}(I + \frac{2}{5}Z + \frac{1}{20}Z^2)$，通过计算可以得到 $B = diag\{0, 0, 0, \frac{1}{3600}\}$，

$$\Upsilon = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{10} & -\frac{1}{60} \\ \frac{1}{10} & -\frac{7}{75} & \frac{1}{100} \\ -\frac{1}{60} & \frac{1}{100} & -\frac{1}{400} \end{pmatrix}$$

将该矩阵分解得到

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/12 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{720} \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{10} & \frac{1}{60} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

最终得到 $||u^{n+1}||^2 - ||u^n||^2 = -\frac{1}{3600}\tau^6||L^3\omega^n||^2 - \tau[[u^{(0)}]]^2 - \frac{1}{12}\tau^3[[Lu^{(1)}]]^2 - \frac{1}{720}\tau^5[[L^2u^{(2)}]]^2 \leq 0$ 。

例子 3.5 当 $s = 4$ 时，相应的稳定函数可以写成 $\mathcal{R}(Z) = (I - \frac{4}{7}Z + \frac{1}{7}Z^2 - \frac{2}{105}Z^3 + \frac{1}{840}Z^4)^{-1}(I + \frac{3}{7}Z + \frac{1}{14}Z^2 + \frac{1}{210}Z^3)$，通过计算我们得知：$B = diag\{0, 0, 0, 0, -\frac{1}{705600}\}$，

$$\Upsilon = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{14} & -\frac{1}{42} & \frac{1}{840} \\ \frac{1}{14} & -\frac{13}{147} & \frac{3}{392} & -\frac{1}{1470} \\ -\frac{1}{42} & \frac{3}{392} & -\frac{1}{420} & \frac{1}{5880} \\ \frac{1}{840} & -\frac{1}{1470} & \frac{1}{5880} & -\frac{1}{44100} \end{pmatrix}$$

将该矩阵分解得到

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{720} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{100800} \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{14} & \frac{1}{42} & -\frac{1}{840} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{14} & \frac{1}{140} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{14} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

最终得到 $||u^{n+1}||^2 - ||u^n||^2 = -\frac{1}{705600}\tau^8||L^4\omega^n||^2 - \tau[[u^{(0)}]]^2 - \frac{1}{12}\tau^3[[Lu^{(1)}]]^2 - \frac{1}{720}\tau^5[[L^2u^{(2)}]]^2 - \frac{1}{100800}\tau^7[[L^3u^{(3)}]]^2 \leq 0$

4.　一般次对角 Padé 逼近的离散能量定律

在本节我们将基于矩阵的 Cholesky 分解给出线性半负定系统的一般次对角 Padé 逼近型 RK 方法的离散能量定律，进而得到它是无条件稳定的。在证明过程中，我们模仿论文[7]，使用一些超几何级数相关的技术进而完成了证明。

根据 (3.4) 到 (3.6) 我们得出：次对角 Padé 逼近相应的系数为

$$\theta_i = \frac{(s-1)!}{(2s-1)!}\frac{(2s-i-1)!}{i!(s-i-1)!} \quad \vartheta_i = (-1)^i\frac{s!}{(2s-1)!}\frac{(2s-i-1)!}{i!(s-i)!} \quad 0 \leq i \leq s-1$$
$$\theta_s = 0 \quad \vartheta_s = (-1)^s\frac{(s-1)!}{(2s-1)!} \tag{4.1}$$

4.1　定理介绍

定理 4.1 对任意的 $s \in \mathbb{Z}^+$，由 (2.11) 定义的对称矩阵 Υ 恒为负定矩阵。更近一步，他有如下的 Cholesky 分解：

$$\Upsilon = -U^TDU \tag{4.2}$$

其中 $D = diag(\{d_k\}_{k=0}^{s-1})$，$d_k = \frac{(k!)^2}{(2k)!(2k+1)!}$，$U = (\mu_{i,j})_{i,j=0}^{s-1}$ 为满足如下关系的上三角矩阵

$$\mu_{i,j} = \begin{cases} \frac{s!}{(2s)!}\frac{(2i+1)!}{i!(i+j+1)!}\frac{(2s+i-j)!}{(s-1-j)!}\frac{(s-1-\frac{i+j}{2})!(\frac{i+j}{2})!}{(s-\frac{j-i}{2})!(\frac{j-i}{2})!} & \text{if}, i \leq j \quad and \quad i \equiv j (mod\ 2) \\ \frac{-2s!}{(2s)!}\frac{(2i+1)!}{i!(i+j)!}\frac{(2s+i-j-2)!}{(s-1-j)!}\frac{(s-1-\frac{i+j+1}{2})!(\frac{i+j-3}{2})!}{(s-1-\frac{j-i+1}{2})!(\frac{j-i-1}{2})!} & \text{if}, i \leq j \quad and \quad i \equiv j+1 (mod\ 2) \\ 0 & otherwise \end{cases} \tag{4.3}$$

定理 4.2 对任意的 $s \in \mathbb{Z}^+$，由 (2.11) 定义的对角矩阵 $B = diag(\{\beta_k\}_{k=0}^{s})$ 恒为负定矩阵。更进一步，它满足关系：

$$\beta_k = 0\ for\ k \leq s-1 \qquad \beta_s = -(\frac{(s-1)!}{(2s-1)!})^2 \tag{4.4}$$

根据定理 4.1,4.2 以及定理 2.3，可以得到下面的离散能量定律：

定理 4.3 对任意的 $s \in \mathbb{Z}^+$，线性半负定系统 (1.1) 的 (s-1,s)-Padé 逼近型 RK 方法满足下列离散能量恒等式。

$$||u^{n+1}||^2 - ||u^n||^2 = -(\frac{(s-1)!}{(2s-1)!})^2 \tau^{2s} ||L^s \omega^n||^2 - \sum_{k=0}^{s-1} d_k \tau^{2k+1} [[L^k u^{(k)}]]^2 \tag{4.5}$$

$$u^{(k)} := \sum_{j=k}^{s-1} \mu_{k,j} (\tau L)^{j-k} Q^{-1} u^n \tag{4.6}$$

其中 $d_k = \frac{(k!)^2}{(2k)!(2k+1)!}$，$\mu_{k,j}$ 由 (4.3) 决定。由这个等式易得这种 RK 方法是无条件强稳定的

4.2 定理 4.1 的证明

为了证明对任意 $s \in \mathbb{Z}^+$(4.2) 均成立，我们定义 $F(s) = \Upsilon + U^T D U$，只需证明 $F(s) = O$ 对任意 $s \in \mathbb{Z}^+$ 均成立即可。

将 $F(s)$ 矩阵第 p 行第 q 列的元素记做 $\mathcal{F}_{p,q}(s)$，我们先引入一些新的记号来对我们的式子进行化简，首先定义：

$$\eta_0^{(s)} := 1 \quad \eta_i^{(s)} := \frac{s(s-1)...(s-i+1)}{(2s-1)...(2s-i+1)(2s-i)} \quad \theta_i^{(s)} := \frac{(s-i)}{s}\eta_i^{(s)}, \quad i \in \mathbb{Z}^+ \tag{4.7}$$

易验证，当 $0 \le i \le s$ 时，有 $\eta_i^{(s)} = |\vartheta_i|, \theta_i^{(s)} = \theta_i$ 成立，而当 $s < i < 2s$ 的时候，$\eta_i^{(s)} = \theta_i^{(s)} = 0$，于是我们可以定义

$$\gamma_{p,q}^{(s)} = \sum_{l=0}^{min\{p,q\}} (-1)^{min\{p,q\}+1-l} \alpha_{l,p+q+1-l}^{(s)} \quad p,q \in \mathbb{N} \tag{4.8}$$

这之中有 $\alpha_{i,j}^{(s)} = \theta_i^{(s)}\theta_j^{(s)} - (-1)^{i+j}\eta_i^{(s)}\eta_j^{(s)}$ 注意到 $p+q+1-l \le p+q+1 \le 2s-1 < 2s$，所以只要 $p+q+1-l > s$，我们都有 $\alpha_{l,p+q+1-l}^{(s)} = 0$，也就是说我们有下式成立：

$$\gamma_{p,q}^{(s)} = \gamma_{p,q} \qquad 0 \le p,q \le s-1 \tag{4.9}$$

对任意 $i,j\in\mathbb{Z}^+$ 我们定义：

$$\nu_{i,j}^{(s)}=\sqrt{d_{i-1}}\mu_{i-1,j-1}\begin{cases}\frac{s!}{(2s)!}\frac{2\sqrt{2i-1}}{(i+j)!}\frac{(2s+i-j)!(s-\frac{i+j}{2})!(\frac{i+j}{2})!}{(s-j)!(s-\frac{j-i}{2})!(\frac{j-i}{2})!} & \text{if, } i\leq j \quad and \quad i\equiv j(mod\ 2)\\ \frac{-2s!}{(2s)!}\frac{2\sqrt{2i-1}}{(i+j-1)!}\frac{(2s+i-j-2)!(s-\frac{i+j+1}{2})!(\frac{i+j-1}{2})!}{(s-j)!(s-\frac{j-i+3}{2})!(\frac{j-i-1}{2})!} & \text{if, } i\leq j \quad and \quad i\equiv j+1(mod\ 2)\\ 0 & otherwise\end{cases} \tag{4.10}$$

因此对于 $1\leq p,q\leq s$，我们可以将 $\mathcal{F}_{p,q}(s)$ 重写为

$$\mathcal{F}_{p,q}(s)=\gamma_{p-1,q-1}^{(s)}+\sum_{i=1}^{min\{p,q\}}\nu_{i,p}^{(s)}\nu_{i,q}^{(s)}=\gamma_{p-1,q-1}^{(s)}+\sum_{i=1}^{\infty}\nu_{i,p}^{(s)}\nu_{i,q}^{(s)} \tag{4.11}$$

类似于[5] 中的证明过程，我们可以观察到如下两个事实

事实 4.4 对于任意 $p,q\in\mathbb{Z}^+$,$\mathcal{F}_{p,q}(s)$ 都是 s 的有理函数。

证明：固定 i 时，由 (4.7) 定义的 $\theta_i^{(s)},\eta_i^{(s)}$ 都是 s 的有理函数，因而得到对于固定的 $p,q\in\mathbb{N}$ ，函数 $\gamma_{p,q}^{(s)}$ 都是 s 的有理函数，而对于任意的 $i,j\in\mathbb{Z}$ ，$\nu_{i,j}^{(s)}$ 也可以写为有理函数的形式。也就是说，$F_{p,q}(s)$ 的每一项都是 s 的有理函数，进而他本身也是 s 的有理函数。

事实 4.5 由于一个不恒为 0 的有理函数只能有有限个零点，因此只要我们证明所有的 $\mathcal{F}_{p,q}(s)$ 在不可数集 $\widehat{\mathbb{R}}$ 上恒为零，就可以得到对于任意 $s\in\mathbb{Z}^+$ 都有 $F(s)=O$ 。

在接下来的论文中，我们会引入很多 s 的有理函数，他们的分母可能会在 $\{0,\pm\frac{1}{2},\pm 1,\pm\frac{3}{2},\dots\}$ 出现零点，为了将避免出现奇点，我们将这些点去掉，定义不可数集合 $\widehat{\mathbb{R}}$ ，我们将会定义如下定理：

定理 4.6 对于任意 $p,q\in\mathbb{Z}^+$ 和任意 $s\in\widehat{\mathbb{R}}$，有理函数 $\mathcal{F}_{p,q}^{(s)}$ 都为零，也就是说

$$\gamma_{p-1,q-1}^{(s)}+\sum_{i=1}^{min\{p,q\}}\nu_{i,p}^{(s)}\nu_{i,q}^{(s)}=0 \quad \forall p,q\in\mathbb{Z}^+,\quad \forall s\in\widehat{\mathbb{R}} \tag{4.12}$$

我们需要一系列引理来证明这个定理，我们将在 4.3 节介绍，证明这些引理，并且在 4.4 节完成定理 4.6 的证明。而根据我们上述的分析，只要证明了定理 4.6，就能得到定理 4.1。

4.3 引理的介绍以及证明

我们先引入升阶乘函数的概念：

$$(x)_0 := 1, \quad (x)_n := \prod_{k=0}^{n-1}(x+k), \quad n \in \mathbb{Z}^+ \tag{4.13}$$

关于升阶乘函数，我们发现对于任意的 $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ 以及任意的 $n \in \mathbb{N}$ ，都有 $(x)_n \neq 0$ ，这个事实将保证我们之后构造的有理函数中分母不会出现导致奇性的零因子。

引理 4.7 给出了一些我们会用到的有关升阶乘函数的等式，这些引理的证明可以在[7] 的附录中找到：

引理 4.7 我们有下列等式成立：

$$(x+n)! = x!(x+1)_n \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} \tag{4.14}$$

$$(x)_n = 2^n(\frac{x}{2})_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}(\frac{x+1}{2})_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \quad x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} \tag{4.15}$$

$$\frac{(x+i)!}{(x-j)!} = (-1)^j(-x)_j(x+1)_i \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{j-1, j-2\dots\}, \forall i, j \in \mathbb{N} \tag{4.16}$$

对于任意固定的 $i, j \in \mathbb{Z}^+$ ，我们可以得到 $\nu_{i,j}^{(s)}$ 与 $\eta_j^{(s)}$ 的如下关系：

引理 4.8 对于任意 $i, j \in \mathbb{Z}^+, x \in \widehat{\mathbb{R}}$ ，我们都有如下等式成立：

$$\nu_{2i-1,2j}^{(s)} = \frac{2\sqrt{4i-3}}{s}\frac{(s-j+\frac{1}{2})_{i-1}(-j)_i}{(j-s+1)_{i-1}(j+\frac{1}{2})_{i-1}}\eta_{2j}^{(s)} \tag{4.17}$$

$$\nu_{2i,2j-1}^{(s)} = \frac{-2\sqrt{4i-1}}{s}\frac{(s-j+\frac{1}{2})_i(1-j)_i}{(j-s)_i(j+\frac{1}{2})_{i-1}}\eta_{2j-1}^{(s)} \tag{4.18}$$

$$\nu_{2i,2j}^{(s)} = \frac{-2\sqrt{4i-1}}{s}\frac{(s+\frac{1}{2}-j)_i(-j)_i}{(j-s+1)_{i-1}(\frac{1}{2}+j)_i}\eta_{2j}^{(s)} \tag{4.19}$$

$$\nu_{2i-1,2j-1}^{(s)} = \frac{2\sqrt{4i-3}}{s}\frac{(s+\frac{1}{2}-j)_i(1-j)_{i-1}}{(j-s)_{i-1}(j+\frac{1}{2})_{i-1}}\eta_{2j-1}^{(s)} \tag{4.20}$$

我们将引理 4.8 的证明放在附录当中。

4.3.1 第一部分引理

对于 $p, q \in \mathbb{Z}^+$ 以及 $n \in \mathbb{N}$ ，我们都可以找到如下的关于 s 的有理函数：

$$\varphi_n^{(1)}(s;p,q) := \frac{(s+\frac{3}{2}-p)_n(1-p)_n(s+\frac{1}{2}-q)_n(-q)_n}{(p-s+1)_n(p+\frac{3}{2})_n(q-s+1)_n(q+\frac{3}{2})_n} \tag{4.21}$$

$$\phi_n^{(1)}(s;p,q) := \varphi_n^{(1)}(s;p,q)\frac{\mathcal{C}_{n,p,q}^{(1,s)(1)}+\mathcal{C}_{n,p,q}^{(2,s)(1)}}{(s-p)(1+2p)(s-q)(1+2q)} \tag{4.22}$$

其中有：

$$\mathcal{C}_{n,p,q}^{(1,s)(1)} = (4n+3)(1+s-2p)(q-n)(1+2s+2n-2q)$$

$$\mathcal{C}_{n,p,q}^{(2,s)(1)} = (4n+1)(s-2q)(1+2p+2n)(s-p-n)$$

由于对任意的 $n \geq p$ ，我们都有 $(1-p)_n = 0$, 也就是说：

$$\varphi_n^{(1)}(s;p,q) = 0 \quad \phi_n^{(1)}(s;p,q) \quad \forall n \geq p \tag{4.23}$$

引理 4.9 对于任意的 $s \in \widehat{\mathbb{R}}$ ，都有以下的关系式成立：

$$\nu_{2i-1,2p-1}^{(s)}\nu_{2i-1,2q+1}^{(s)}+\nu_{2i,2p}^{(s)}\nu_{2i,2q}^{(s)} = \frac{(s-q)(2s+1-2p)}{s^2}\phi_{i-1}^{(1)}(s;p,q)\eta_{2p-1}^{(s)}\eta_{2q}^{(s)} \quad \forall i,p,q \in \mathbb{Z}^+ \tag{4.24}$$

证明：

$$\begin{aligned}
\nu_{2i-1,2p-1}^{(s)}\nu_{2i-1,2q+1}^{(s)} &\xlongequal{(4.20)} \frac{2\sqrt{4i-3}}{s}\frac{(s+\frac{1}{2}-p)_i(1-p)_{i-1}}{(p-s)_{i-1}(\frac{1}{2}+p)_{i-1}}\eta_{2p-1}^{(s)}\frac{2\sqrt{4i-3}}{s}\frac{(s+\frac{1}{2}-q-1)_i(1-q-1)_{i-1}}{(q+1-s)_{i-1}(\frac{1}{2}+q+1)_{i-1}}\eta_{2q+1}^{(s)} \\
&= \frac{4(4i-3)}{s^2}\frac{(s-2q)}{(2q+1)(2s-2q-1)}\frac{(s+\frac{1}{2}-p)(s-\frac{1}{2}-q)(p-s+i-1)(p+i-\frac{1}{2})}{(p-s)(p+\frac{1}{2})}\varphi_{i-1}^{(1)}(s;p,q)\eta_{2p-1}^{(s)}\eta_{2q}^{(2s)} \\
&= \frac{(s-q)(2s+1-2p)}{s^2}\frac{(4i-3)(s-2q)(2p+2i-1)(s-(i-1)-p)}{(s-p)(1+2p)(s-q)(1+2q)}\varphi_{i-1}^{(1)}(s;p,q)\eta_{2p-1}^{(s)}\eta_{2q}^{(s)} \\
&\xlongequal{n=i-1} \frac{(s-q)(2s+1-2p)}{s^2}\frac{(4n+1)(s-2q)(2p+2n+1)(s-n-p)}{(s-p)(1+2p)(s-q)(1+2q)}\varphi_n^{(1)}(s;p,q)\eta_{2p-1}^{(s)}\eta_{2q}^{(s)} \\
&= \frac{(s-q)(2s+1-2p)}{s^2}\frac{\mathcal{C}_{n,p,q}^{(2,s)(1)}}{(s-p)(1+2p)(s-q)(1+2q)}\varphi_n^{(1)}(s;p,q)\eta_{2p-1}^{(s)}\eta_{2q}^{(s)}
\end{aligned}$$

同样地，我们可以计算得到：

$$
\begin{aligned}
\nu_{2i,2p}^{(s)}\nu_{2i,2q}^{(s)} &\overset{(4.19)}{=\!=\!=} \frac{-2\sqrt{4i-1}}{s}\frac{(s+\frac{1}{2}-p)_i(-p)_i}{(p-s+1)_{i-1}(\frac{1}{2}+p)_i}\eta_{2p}^{(s)}\frac{-2\sqrt{4i-1}}{s}\frac{(s+\frac{1}{2}-q)_i(-q)_i}{(q-s+1)_{i-1}(\frac{1}{2}+q)_i}\eta_{2q}^{(s)} \\
&= \frac{4(4i-1)}{s^2}\frac{(s-2p+1)}{(2p)(2s-2p)}\frac{(s+\frac{1}{2}-p)(-p)(s+i-q-\frac{1}{2})(i-q-1)}{(p+\frac{1}{2})(q+\frac{1}{2})}\varphi_{i-1}^{(1)}(s;p,q)\eta_{2p-1}^{(s)}\eta_{2q}^{(s)} \\
&= \frac{(s-q)(2s+1-2p)}{s^2}\frac{(4i-1)(s+1-2p)(q-i+1)(2s+2i-2q-1)}{(s-p)(2p+1)(s-q)(2q+1)}\varphi_{i-1}^{(1)}(s;p,q)\eta_{2p-1}^{(s)}\eta_{2q}^{(s)} \\
&\overset{n=i-1}{=\!=\!=} \frac{(s-q)(2s+1-2p)}{s^2}\frac{(4n+3)(s+1-2p)(q-n)(2s+2n-2q+1)}{(s-p)(2p+1)(s-q)(2q+1)}\varphi_{n}^{(1)}(s;p,q)\eta_{2p-1}^{(s)}\eta_{2q}^{(s)} \\
&= \frac{(s-q)(2s+1-2p)}{s^2}\frac{\mathcal{C}_{n,p,q}^{(1,s)(1)}}{(s-p)(1+2p)(s-q)(1+2q)}\varphi_{n}^{(1)}(s;p,q)\eta_{2p-1}^{(s)}\eta_{2q}^{(s)}
\end{aligned}
$$

将上面两式相加便可以完成引理 4.9 的证明。

引理 4.10 对于 $p,q\in\mathbb{Z}^+,n\in\mathbb{N}$，我们定义如下 s 的有理函数

$$\Phi_n^{(1)}(s;p,q) := \frac{\mathcal{C}_{n,p,q}^{(3,s)(1)}}{(s-p)(1+2p)(s-q)(1+2q)}\varphi_n^{(1)}(s;p,q) \tag{4.25}$$

这里有：$\mathcal{C}_{n,p,q}^{(3,s)(1)} := (n+p-s)(1+2p+2n)(n+q-s)(1+2q+2n)$，对于任意的 $s\in\widehat{\mathbb{R}}$，该函数有如下三条性质：

$$\Phi_0^{(1)}(s;p,q) = 1 \tag{4.26}$$

$$\Phi_n^{(1)}(s;p,q) = 0 \quad \forall n\geq p \tag{4.27}$$

$$\Phi_{n+1}^{(1)}(s;p,q) - \Phi_n^{(1)}(s;p,q) = -\phi_n^{(1)}(s;p,q) \quad \forall n\in\mathbb{N} \tag{4.28}$$

证明：对于第一条性质，根据定义 $(x)_0=1$，我们得到 $\varphi_0^{(1)}(s;p,q)=1$，而 $\mathcal{C}_{0,p,q}^{(3,s)(1)}=(s-p)(1+2p)(s-q)(1+2q)$ 可以最终推出 $\Phi_0^{(1)}(s;p,q)=1$。

对于第二条性质，我们只需注意到当 $n\geq p$ 时，$\varphi_n^{(1)}(s;p,q)=0$ 即可得知 (4.27) 成立。

对于第三条性质，首先根据 $(x)_{n+1}=(x)_n(x+n)$ 得到下面的关系：

$$\frac{\varphi_{n+1}^{(1)}(s;p,q)}{\varphi_n^{(1)}(s;p,q)} = \frac{(s+\frac{3}{2}-p+n)(1-p+n)(s+\frac{1}{2}-q+n)(n-q)}{(p-s+1+n)(p+\frac{3}{2}+n)(q-s+1+n)(q+\frac{3}{2}+n)} =: \mathcal{C}_{n,p,q}^{(4,s)(1)} \tag{4.29}$$

将该式代入定义即可得到：

$$\Phi_{n+1}^{(1)} = \frac{\mathcal{C}_{n+1,p,q}^{(3,s)(1)}\mathcal{C}_{n,p,q}^{(4,s)(1)}}{(s-p)(1+2p)(s-q)(1+2q)}\varphi_n^{(1)}(s;p,q) \tag{4.30}$$

要验证第三条性质成立我们只需验证式子 $\mathcal{C}_{n+1,p,q}^{(3,s)(1)}\mathcal{C}_{n,p,q}^{(4,s)(1)} - \mathcal{C}_{n,p,q}^{(3,s)(1)} = -\mathcal{C}_{n,p,q}^{(2,s)(1)} - \mathcal{C}_{n,p,q}^{(1,s)(1)}$ 即可，我们将这个式子的验证放在附录中。

引理 4.11 对于任意的 $s \in \widehat{\mathbb{R}}$，(4.22) 中定义的有理函数 $\phi_n^{(1)}(s;p,q)$ 满足下列关系：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\phi_n^{(1)}(s;p,q) = \sum_{n=0}^{p-1}\phi_n^{(1)}(s;p,q) = 1 \quad \forall p,q \in \mathbb{Z}^+ \tag{4.31}$$

证明：注意到 $n \geq p$ 时，有 $\phi_n^{(1)}(s;p,q) = 0$，于是上述等式最左侧的无穷求和可以退化为中间的有限求和，而根据引理 4.10，我们可以得到 $\sum_{n=0}^{\infty}\phi_n^{(1)}(s;p,q) = \sum_{n=0}^{p-1}(\Phi_n^{(1)}(s;p,q) - \Phi_{n+1}^{(1)}(s;p,q)) = \Phi_0^{(1)}(s;p,q) - \Phi_p^{(1)}(s;p,q) = 1$ 。

4.3.2 第二部分引理

对于 $p,q \in \mathbb{Z}^+$ 以及 $n \in \mathbb{N}$，我们定义如下的关于 s 的有理函数：

$$\varphi_n^{(2)}(s;p,q) := \frac{(s-p+\frac{1}{2})_n(1-p)_n(s-q+\frac{1}{2})_n(1-q)_n}{(p-s+1)_n(p+\frac{1}{2})_n(q-s+2)_n(q+\frac{3}{2})_n} \tag{4.32}$$

$$\phi_n^{(2)}(s;p,q) := \varphi_n^{(2)}(s;p,q)\frac{\mathcal{C}_{n,p,q}^{(1,s)(2)} + \mathcal{C}_{n,p,q}^{(2,s)(2)}}{(2q+1)(2p-1)(p-s)(q-s+1)} \tag{4.33}$$

在这之中：

$$\mathcal{C}_{n,p,q}^{(1,s)(2)} = (4n+3)(s-2q)(2p-1-2n-2s)(n+1-p)$$

$$\mathcal{C}_{n,p,q}^{(2,s)(2)} = (4n+1)(s-2p+1)(s-q-n-1)(2q+2n+1)$$

同样根据对任意的 $n \geq p$，都有 $(1-p)_n = 0$ 成立推出：

$$\varphi_n^{(2)}(s;p,q)=0 \quad \phi_n^{(2)}(s;p,q) \quad \forall n \geq p \tag{4.34}$$

引理 4.12 对于任意的 $s \in \widehat{\mathbb{R}}$ ，都有以下的关系式成立：

$$\nu_{2i,2p-1}^{(s)}\nu_{2i,2q+1}^{(s)}+\nu_{2i-1,2p}^{(s)}\nu_{2i-1,2q}^{(s)}=\frac{(2p-1)q}{s^2}\phi_{i-1}^{(2)}(s;p,q)\eta_{2p-1}^{(s)}\eta_{2q}^{(s)} \tag{4.35}$$

证明：

$$\begin{aligned}
\nu_{2i,2p-1}^{(s)}\nu_{2i,2q+1}^{(s)} &\xlongequal{(4.18)} \frac{-2\sqrt{4i-1}}{s}\frac{(s-p+\frac{1}{2})_i(1-p)_i}{(p-s)_i(p+\frac{1}{2})_{i-1}}\eta_{2p-1}^{(s)}\frac{-2\sqrt{4i-1}}{s}\frac{(s-q-1+\frac{1}{2})_i(1-q-1)_i}{(q+1-s)_i(q+1+\frac{1}{2})_{i-1}}\eta_{2q+1}^{(s)}\\
&=\frac{4(4i-1)}{s^2}\frac{(s-2q)}{(2q+1)(2s-2q-1)}\frac{(s+i-\frac{1}{2}-p)(i-p)(s-q-\frac{1}{2})(-q)}{(p-s)(q-s+1)}\varphi_{i-1}^{(2)}(s;p,q)\eta_{2p-1}^{(s)}\eta_{2q}^{(s)}\\
&=\frac{(2p-1)q}{s^2}\frac{(4i-1)(s-2q)(2p+1-2i-2s)(i-p)}{(2q+1)(2p-1)(p-s)(q-s+1)}\varphi_{i-1}^{(2)}(s;p,q)\eta_{2p-1}^{(s)}\eta_{2q}^{(s)}\\
&\xlongequal{n=i-1}\frac{(2p-1)q}{s^2}\frac{(4n+3)(s-2q)(2p-1-2n-2s)(n+1-p)}{(2q+1)(2p-1)(p-s)(q-s+1)}\varphi_n^{(2)}(s;p,q)\beta_{2p-1}^{(s)}\beta_{2q}^{(s)}\\
&=\frac{(2p-1)q}{s^2}\frac{\mathcal{C}_{n,p,q}^{(1,s)(2)}}{(2q+1)(2p-1)(p-s)(q-s+1)}\varphi_n^{(2)}(s;p,q)\beta_{2p-1}^{(s)}\beta_{2q}^{(s)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nu_{2i-1,2p}^{(s)}\nu_{2i-1,2q}^{(s)} &\xlongequal{(4.17)} \frac{2\sqrt{4i-3}}{s}\frac{(s-p+\frac{1}{2})_{i-1}(-p)_i}{(p-s+1)_{i-1}(p+\frac{1}{2})_{i-1}}\eta_{2p}^{(s)}\frac{2\sqrt{4i-3}}{s}\frac{(s-q+\frac{1}{2})_{i-1}(-q)_i}{(q-s+1)_{i-1}(q+\frac{1}{2})_{i-1}}\eta_{2q}^{(s)}\\
&=\frac{4(4i-3)}{s^2}\frac{(s-2p+1)}{(2p)(2s-2p)}\frac{(-p)(-q)(q-s+i)(q+i-\frac{1}{2})}{(q-s+1)(q+\frac{1}{2})}\varphi_{i-1}^{(2)}(s;p,q)\eta_{2p-1}^{(s)}\eta_{2q}^{(s)}\\
&=\frac{(2p-1)q}{s^2}\frac{(4i-3)(s-2p+1)(s-q-i)(2q+2i-1)}{(2q+1)(2p-1)(p-s)(q-s+1)}\varphi_{i-1}^{(2)}(s;p,q)\eta_{2p-1}^{(s)}\eta_{2q}^{(s)}\\
&\xlongequal{n=i-1}\frac{(2p-1)q}{s^2}\frac{(4n+1)(s-2p+1)(s-q-n-1)(2q+2n+1)}{(2q+1)(2p-1)(p-s)(q-s+1)}\phi_{i-1}^{(2)}(s;p,q)\eta_{2p-1}^{(s)}\eta_{2q}^{(s)}\\
&=\frac{(2p-1)q}{s^2}\frac{\mathcal{C}_{n,p,q}^{(2,s)(2)}}{(2q+1)(2p-1)(p-s)(q-s+1)}\varphi_n^{(2)}(s;p,q)\beta_{2p-1}^{(s)}\beta_{2q}^{(s)}
\end{aligned}$$

将上面两式相加即可得到我们想要的引理 4.2

引理 4.13 对于 $p,q \in \mathbb{Z}^+, n \in \mathbb{N}$ ，我们定义如下 s 的有理函数

$$\Phi_n^{(2)}(s;p,q) := \frac{\mathcal{C}_{n,p,q}^{(3,s)(2)}}{(2q+1)(2p-1)(p-s)(q-s+1)}\varphi_n^{(2)}(s;p,q) \tag{4.36}$$

在这之中，$\mathcal{C}_{n,p,q}^{(3,s)(2)} := (p-s+n)(2p+2n-1)(q-s+n+1)(2q+2n+1)$, 对于任意的 $s \in \widehat{\mathbb{R}}$ ，该函数有如下三条性质：

$$\Phi_0^{(2)}(s;p,q)=1 \tag{4.37}$$

$$\Phi_n^{(2)}(s;p,q)=0 \quad \forall n\geq p \tag{4.38}$$

$$\Phi_{n+1}^{(2)}(s;p,q)-\Phi_n^{(2)}(s;p,q)=-\phi_n^{(2)}(s;p,q) \quad \forall n\in\mathbb{N} \tag{4.39}$$

证明：与前面的引理 4.10 类似，性质一与性质二非常容易验证，所以我们在这里只给出性质三的验证过程：

首先通过计算得到下列关系

$$\frac{\varphi_{n+1}^{(2)}(s;p,q)}{\varphi_n^{(2)}(s;p,q)}=\frac{(2s-2p+1+2n)(1-p+n)(2s-2q+1+2n)(1-q+n)}{(p-s+n+1)(2p+1+2n)(q-s+2+n)(2q+3+2n)}=:\mathcal{C}_{n,p,q}^{(4,s)(2)} \tag{4.40}$$

代入函数 (4.36) 的定义即可知道如下关系：

$$\Phi_{n+1}^{(2)}=\frac{\mathcal{C}_{n+1,p,q}^{(3,s)(2)}\mathcal{C}_{n,p,q}^{(4,s)(2)}}{(p-s)(2p-1)(q-s+1)(1+2q)}\varphi_n^{(2)}(s;p,q) \tag{4.41}$$

与之前类似，经过简单地消去相同项，我们可以得知要验证第三条性质成立，只需验证式子 $\mathcal{C}_{n+1,p,q}^{(3,s)(2)}\mathcal{C}_{n,p,q}^{(4,s)(2)}-\mathcal{C}_{n,p,q}^{(3,s)(2)}=-\mathcal{C}_{n,p,q}^{(2,s)(2)}-\mathcal{C}_{n,p,q}^{(1,s)(2)}$ 即可，这个式子的验证被放在附录中。

引理 4.14 对于任意的 $s\in\widehat{\mathbb{R}}$，(4.33) 中定义的有理函数 $\phi_n^{(2)}(s;p,q)$ 满足下列关系：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\phi_n^{(2)}(s;p,q)=\sum_{n=0}^{p-1}\phi_n^{(2)}(s;p,q)=1 \quad \forall p,q\in\mathbb{Z}^+ \tag{4.42}$$

证明：注意到 $n\geq p$ 时，有 $\phi_n^{(2)}(s;p,q)=0$，于是上述等式最左侧的无穷求和可以退化为中间的有限求和，根据引理 4.13，我们可以得到 $\sum_{n=0}^{\infty}\phi_n^{(2)}(s;p,q)=\sum_{n=0}^{p-1}(\Phi_n^{(2)}(s;p,q)-\Phi_{n+1}^{(2)}(s;p,q))=\Phi_0^{(2)}(s;p,q)-\Phi_p^{(2)}(s;p,q)=1$。

在证明完引理 4.14 后，我们先给出用于证明最终结论的第一个关键性命题。

命题 4.15 对于任意 $s\in\widehat{\mathbb{R}}$，任意 $p,q\in\mathbb{Z}^+$ 且 $p\equiv q+1(mod\ 2)$，我们都有如下

等式成立。

$$\begin{aligned}\sum_{1}^{\infty}\nu_{i,p}^{(s)}\nu_{i,q+1}^{(s)}+\sum_{1}^{\infty}\nu_{i,p+1}^{(s)}\nu_{i,q}^{(s)}&=(\frac{(s-p)(s-q)}{s^2}+1)\eta_p^{(s)}\eta_q^{(s)}\\&=\theta_p^{(s)}\theta_q^{(s)}+\eta_p^{(s)}\eta_q^{(s)}\end{aligned}\tag{4.43}$$

注意到其中的求和实际上为有限求和，也就是说我们可以随意交换求和次序。

证明：

根据 p 与 q 的对称性，我们不妨假设 p 为奇数而 q 为偶数，且 $p=2p'-1$ ，$q=2q'$ 。

则我们有

$$\begin{aligned}&\sum_{1}^{\infty}\nu_{i,2p'-1}^{(s)}\nu_{i,2q'+1}^{(s)}+\sum_{1}^{\infty}\nu_{i,2p'}^{(s)}\nu_{i,2q'}^{(s)}\\&=\sum_{i=1}^{\infty}(\nu_{2i,2p'-1}^{(s)}\nu_{2i,2q'+1}^{(s)}+\nu_{2i-1,2p'}^{(s)}\nu_{2i-1,2q'}^{(s)})+\sum_{i=1}^{\infty}(\nu_{2i-1,2p'-1}^{(s)}\nu_{2i-1,2q'+1}^{(s)}+\nu_{2i,2p'}^{(s)}\nu_{2i,2q'}^{(s)})\\&=(\frac{(2p'-1)q'}{s^2}(\sum_{i=1}^{\infty}\phi_{i-1}^{(2)}(s;p',q'))+\frac{(s-q')(2s+1-2p')}{s^2}(\sum_{i=1}^{\infty}\phi_{i-1}^{(1)}(s;p',q')))\eta_{2p'-1}^{(s)}\eta_{2q'}^{(s)}\\&=\frac{(s-2p'+1)(s-2q')}{s^2}\eta_{2p'-1}^{(s)}\eta_{2q'}^{(s)}\end{aligned}$$

其中最后一行等式使用了引理 4.11 以及 4.14。

4.3.3 第三部分引理

对于 $p,q\in\mathbb{Z}^+$ 以及 $n\in\mathbb{N}$ ，我们定义如下的关于 s 的有理函数：

$$\varphi_n^{(3)}(s;p,q)=\frac{(s+\frac{1}{2}-p)_n(-p)_n(s+\frac{1}{2}-q)_n(1-q)_n}{(p-s+1)_n(p+\frac{3}{2})_n(q-s+2)_n(q+\frac{3}{2})_n}\tag{4.44}$$

$$\phi_n^{(3)}(s;p,q):=\varphi_n^{(3)}(s;p,q)\frac{\mathcal{C}_{n,p,q}^{(1,s)(3)}+\mathcal{C}_{n,p,q}^{(2,s)(3)}}{(2p+1)(p-s)(q-s+1)(2q+1)}\tag{4.45}$$

这之中的系数满足关系：

$$\mathcal{C}_{n,p,q}^{(1,s)(3)}=(4n+3)(s-2q)(p-n)(2s-2p+2n+1)$$

$$\mathcal{C}_{n,p,q}^{(2,s)(3)} = (4n+1)(s-2p)(s-q-n-1)(2q+2n+1)$$

同样根据对任意的 $n \geq q$ ，都有 $(1-q)_n = 0$ 成立推出：

$$\varphi_n^{(3)}(s;p,q) = 0 \quad \phi_n^{(3)}(s;p,q) \quad \forall n \geq q \tag{4.46}$$

引理 4.16 对于任意的 $s \in \widehat{\mathbb{R}}$ ，都有以下的关系式成立：

$$\nu_{2i,2q+1}^{(s)}\nu_{2i,2p}^{(s)} + \nu_{2i-1,2p+1}^{(s)}\nu_{2i-1,2q}^{(s)} = \frac{2q(p-s)}{s^2}\phi_{i-1}^{(3)}(s;p,q)\eta_{2p}^{(s)}\eta_{2q}^{(s)} \tag{4.47}$$

证明：

$$\begin{aligned}
\nu_{2i-1,2p+1}^{(s)}\nu_{2i-1,2q}^{(s)} &\xlongequal[(4.20)]{(4.17)} \frac{2\sqrt{4i-3}}{s}\frac{(s+\frac{1}{2}-p-1)_i(-p)_{i-1}}{(p+1-s)_{i-1}(\frac{1}{2}+1+p)_{i-1}}\eta_{2p+1}^{(s)}\frac{2\sqrt{4i-3}}{s}\frac{(s-q+\frac{1}{2})_{i-1}(-q)_i}{(q-s+1)_{i-1}(q+\frac{1}{2})_{i-1}}\eta_{2q}^{(s)}\\
&= \frac{4(4i-3)}{s^2}\frac{s-2p}{(2p+1)(2s-1-2p)}\frac{(s-p-\frac{1}{2})(-q)(q-s+i)(q+i-\frac{1}{2})}{(q-s+1)(q+\frac{1}{2})}\varphi_{i-1}^{(3)}(s;p,q)\eta_{2p}^{(s)}\eta_{2q}^{(s)}\\
&= \frac{2q(p-s)}{s^2}\frac{(4i-3)(s-2p)(s-q-i)(2q+2i-1)}{(2p+1)(p-s)(q-s+1)(2q+1)}\varphi_{i-1}^{(3)}(s;p,q)\eta_{2p}^{(s)}\eta_{2q}^{(s)}\\
&\xlongequal{n=i-1} \frac{2q(p-s)}{s^2}\frac{(4n+1)(s-2p)(s-q-n-1)(2q+2n+1)}{(2p+1)(p-s)(q-s+1)(2q+1)}\varphi_n^{(3)}(s;p,q)\eta_{2p}^{(s)}\eta_{2q}^{(s)}\\
&= \frac{2q(p-s)}{s^2}\frac{\mathcal{C}_{n,p,q}^{(2,s)(3)}}{(2p+1)(p-s)(q-s+1)(2q+1)}\varphi_n^{(3)}(s;p,q)\eta_{2p}^{(s)}\eta_{2q}^{(s)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nu_{2i,2q+1}^{(s)}\nu_{2i,2p}^{(s)} &\xlongequal[(4.18)]{4.19} \frac{-2\sqrt{4i-1}}{s}\frac{(s-q-1+\frac{1}{2})_i(-q)_i}{(q+1-s)_i(q+1+\frac{1}{2})_{i-1}}\beta_{2q+1}^{(s)}\frac{-2\sqrt{4i-1}}{s}\frac{(s+\frac{1}{2}-p)_i(-p)_i}{(p-s+1)_{i-1}(\frac{1}{2}+p)_i}\beta_{2p}^{(s)}\\
&= \frac{4(4i-1)}{s^2}\frac{s-2q}{(2q+1)(2s-1-2q)}\frac{(s-q-\frac{1}{2})(-q)(s-p+i-\frac{1}{2})(i-p-1)}{(q-s+1)(p+\frac{1}{2})}\varphi_{i-1}^{(3)}(s;p,q)\eta_{2p}^{(s)}\eta_{2q}^{(s)}\\
&= \frac{2q(p-s)}{s^2}\frac{(4i-1)(s-2q)(p+1-i)(2s-2p+2i-1)}{(2p+1)(p-s)(q-s+1)(2q+1)}\varphi_{i-1}^{(3)}(s;p,q)\eta_{2p}^{(s)}\eta_{2q}^{(s)}\\
&\xlongequal{n=i-1} \frac{2q(p-s)}{s^2}\frac{(4n+3)(s-2q)(p-n)(2s-2p+2n+1)}{(2p+1)(p-s)(q-s+1)(2q+1)}\varphi_n^{(3)}(s;p,q)\eta_{2p}^{(s)}\eta_{2q}^{(s)}\\
&= \frac{2q(p-s)}{s^2}\frac{\mathcal{C}_{n,p,q}^{(1,s)(3)}}{(2p+1)(p-s)(q-s+1)(2q+1)}\varphi_n^{(3)}(s;p,q)\eta_{2p}^{(s)}\eta_{2q}^{(s)}
\end{aligned}$$

将上面两式相加即可得到引理 4.16 的证明。

引理 4.17 对于 $p,q \in \mathbb{Z}^+, n \in \mathbb{N}$ ，我们定义如下 s 的有理函数

$$\Phi_n^{(3)}(s;p,q):=\frac{\mathcal{C}_{n,p,q}^{(3,s)(3)}}{(2q+1)(2p+1)(p-s)(q-s+1)}\varphi_n^{(3)}(s;p,q) \tag{4.48}$$

这里面的系数 $\mathcal{C}_{n,p,q}^{(3,s)(3)}:=(p-s+n)(2p+2n+1)(q-s+n+1)(2q+2n+1)$, 对于任意的 $s\in\widehat{\mathbb{R}}$ ，该函数有如下三条性质：

$$\Phi_0^{(3)}(s;p,q)=1 \tag{4.49}$$

$$\Phi_n^{(3)}(s;p,q)=0 \quad \forall n\geq q \tag{4.50}$$

$$\Phi_{n+1}^{(3)}(s;p,q)-\Phi_n^{(3)}(s;p,q)=-\phi_n^{(3)}(s;p,q) \quad \forall n\in\mathbb{N} \tag{4.51}$$

证明：同样略去第一条与第二条性质的验证，只验证第三条性质：

通过直接计算得到下列关系：

$$\frac{\varphi_{n+1}^{(3)}(s;p,q)}{\varphi_n^{(3)}(s;p,q)}=\frac{(2s-2p+1+2n)(-p+n)(2s-2q+1+2n)(1-q+n)}{(p-s+n+1)(2p+3+2n)(q-s+2+n)(2q+3+2n)}=:\mathcal{C}_{n,p,q}^{(4,s)(3)} \tag{4.52}$$

代入函数 (4.48) 的定义得到如下关系：

$$\Phi_{n+1}^{(3)}=\frac{\mathcal{C}_{n+1,p,q}^{(3,s)(3)}\mathcal{C}_{n,p,q}^{(4,s)(3)}}{(p-s)(2p+1)(q-s+1)(1+2q)}\varphi_n^{(3)}(s;p,q) \tag{4.53}$$

与前面的引理类似，我们要验证第三条性质成立，只需验证式子 $\mathcal{C}_{n+1,p,q}^{(3,s)(3)}\mathcal{C}_{n,p,q}^{(4,s)(3)}-\mathcal{C}_{n,p,q}^{(3,s)(3)}=-\mathcal{C}_{n,p,q}^{(2,s)(3)}-\mathcal{C}_{n,p,q}^{(1,s)(3)}$ 即可，这个式子的验证也被放在附录中。

引理 4.18 对于任意的 $s\in\widehat{\mathbb{R}}$ ，(4.45) 中定义的有理函数 $\phi_n^{(3)}(s;p,q)$ 满足下列关系：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\phi_n^{(3)}(s;p,q)=\sum_{n=0}^{q-1}\phi_n^{(3)}(s;p,q)=1 \quad \forall p,q\in\mathbb{Z}^+ \tag{4.54}$$

证明：注意到 $n\geq q$ 时，有 $\phi_n^{(3)}(s;p,q)=0$, 于是上述等式最左侧的无穷求和可以退化为中间的有限求和,根据引理 4.17,我们可以得到 $\sum_{n=0}^{\infty}\phi_n^{(3)}(s;p,q)=\sum_{n=0}^{q-1}(\Phi_n^{(3)}(s;p,q)-\Phi_{n+1}^{(3)}(s;p,q))=\Phi_0^{(3)}(s;p,q)-\Phi_q^{(3)}(s;p,q)=1$ 。

得到引理 4.18 后，我们引入命题 4.19：

命题 4.19 对于任意 $s \in \widehat{\mathbb{R}}$ ，任意 $p, q \in \mathbb{Z}^+$ 且 p 与 q 均为偶数，我们都有如下等式成立。

$$\sum_{1}^{\infty} \nu_{i,p}^{(s)} \nu_{i,q+1}^{(s)} + \sum_{1}^{\infty} \nu_{i,p+1}^{(s)} \nu_{i,q}^{(s)} = (\frac{(s-p)(s-q)}{s^2} - 1)\eta_p^{(s)}\beta_q^{(s)} = \theta_p^{(s)}\theta_q^{(s)} - \beta_p^{(s)}\eta_q^{(s)} \quad (4.55)$$

这里面的求和为有限求和，故可以随意交换求和顺序。

证明：

不妨假设 $p = 2p'$,$q = 2q'$ ，则根据引理 4.18，我们首先可以得到：

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{\infty} (\nu_{2i,2q'+1}^{(s)} \nu_{2i,2p'}^{(s)} + \nu_{2i-1,2p'+1}^{(s)} \nu_{2i-1,2q'}^{(s)}) \\
&= \frac{2q'(p'-s)}{s^2} (\sum_{i=1}^{\infty} \phi_{i-1}^{(3)}(s; p', q')) \eta_{2p'}^{(s)} \eta_{2q'}^{(s)} \\
&= \frac{2q'(p'-s)}{s^2} \eta_{2p'}^{(s)} \eta_{2q'}^{(s)}
\end{aligned}$$

由 p 与 q 的对称性我们可以直接推得：

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\nu_{2i,2p'+1}^{(s)} \nu_{2i,2q'}^{(s)} + \nu_{2i-1,2q'+1}^{(s)} \nu_{2i-1,2p'}^{(s)}) = \frac{2p'(q'-s)}{s^2} \eta_{2q'}^{(s)} \eta_{2p'}^{(s)}$$

结合这两个式子我们可以得到：

$$\begin{aligned}
&\sum_{1}^{\infty} \nu_{i,p}^{(s)} \nu_{i,q+1}^{(s)} + \sum_{1}^{\infty} \nu_{i,p+1}^{(s)} \nu_{i,q}^{(s)} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} (\nu_{2i,2q'+1}^{(s)} \nu_{2i,2p'}^{(s)} + \nu_{2i-1,2p'+1}^{(s)} \nu_{2i-1,2q'}^{(s)}) + \sum_{i=1}^{\infty} (\nu_{2i,2p'+1}^{(s)} \nu_{2i,2q'}^{(s)} + \nu_{2i-1,2q'+1}^{(s)} \nu_{2i-1,2p'}^{(s)}) \\
&= \frac{2q'(p'-s)}{s^2} \eta_{2p'}^{(s)} \eta_{2q'}^{(s)} + \frac{2p'(q'-s)}{s^2} \eta_{2q'}^{(s)} \eta_{2p'}^{(s)} \\
&= (\frac{(s-2p')(s-2q')}{s^2} - 1) \eta_{2p'}^{(s)} \eta_{2q'}^{(s)}
\end{aligned}$$

4.3.4 第四部分引理

对于 $p, q \in \mathbb{Z}^+$ 以及 $n \in \mathbb{N}$，我们定义如下的关于 s 的有理函数：

$$\varphi_n^{(4)}(s;p,q) := \frac{(s-p+\frac{1}{2})_n(1-p)_n(s+\frac{3}{2}-q)_n(1-q)_n}{(p-s+1)_n(p+\frac{1}{2})_n(q-s+1)_n(q+\frac{3}{2})_n} \tag{4.56}$$

$$\phi_n^{(4)}(s;p,q) := \varphi_n^{(4)}(s;p,q)\frac{\mathcal{C}_{n,p,q}^{(1,s)(4)} + \mathcal{C}_{n,p,q}^{(2,s)(4)}}{(2p-1)(p-s)(q-s)(2q+1)} \tag{4.57}$$

这之中有：

$$\mathcal{C}_{n,p,q}^{(1,s)(4)} = (4n+3)(s-2q+1)(2s+2n-2p+1)(p-n-1)$$

$$\mathcal{C}_{n,p,q}^{(2,s)(4)} = (4n+1)(s-2p+1)(s-q-n)(2q+2n+1)$$

同样根据对任意的 $n \geq q$，都有 $(1-q)_n = 0$ 成立得到：

$$\varphi_n^{(4)}(s;p,q) = 0 \quad \phi_n^{(4)}(s;p,q) \quad \forall n \geq q \tag{4.58}$$

引理 4.20 对于任意的 $s \in \widehat{\mathbb{R}}$，都有以下的关系式成立：

$$\nu_{2i-1,2p}^{(s)}\nu_{2i-1,2q-1}^{(s)} + \nu_{2i,2p-1}^{(s)}\nu_{2i,2q}^{(s)} = \frac{(1-2p)(2s-2q+1)}{2s^2}\phi_{i-1}^{(4)}(s;p,q)\eta_{2p-1}^{(s)}\eta_{2q-1}^{(s)} \tag{4.59}$$

证明：

$$\begin{aligned}
\nu_{2i-1,2p}^{(s)}\nu_{2i-1,2q-1}^{(s)} &\xlongequal[(4.17)]{((4.20))} \frac{2\sqrt{4i-3}}{s}\frac{(s-p+\frac{1}{2})_{i-1}(-p)_i}{(p-s+1)_{i-1}(p+\frac{1}{2})_{i-1}}\eta_{2p}^{(s)}\frac{2\sqrt{4i-3}}{s}\frac{(s+\frac{1}{2}-q)_i(1-q)_{i-1}}{(q-s)_{i-1}(\frac{1}{2}+q)_{i-1}}\eta_{2q-1}^{(s)} \\
&= \frac{4(4i-3)}{s^2}\frac{(s-2p+1)}{(2p)(2s-2p)}\frac{(-p)(s+\frac{1}{2}-q)(q-s+i-1)(q+i-\frac{1}{2})}{(q-s)(q+\frac{1}{2})}\varphi_{i-1}^{(4)}(s;p,q)\eta_{2p-1}^{(s)}\eta_{2q-1}^{(s)} \\
&= \frac{(1-2p)(2s-2q+1)}{2s^2}\frac{(4i-1)(s-2p+1)(s-q-(i-1))(2q+2i-1)}{(2p-1)(p-s)(q-s)(2q+1)}\varphi_{i-1}^{(4)}(s;p,q)\eta_{2p-1}^{(s)}\eta_{2q-1}^{(s)} \\
&\xlongequal{n=i-1} \frac{(1-2p)(2s-2q+1)}{2s^2}\frac{(4n+1)(s-2p+1)(s-q-n)(2q+2n+1)}{(2p-1)(p-s)(q-s)(2q+1)}\varphi_n^{(4)}(s;p,q)\eta_{2p-1}^{(s)}\eta_{2q-1}^{(s)} \\
&= \frac{(1-2p)(2s-2q+1)}{2s^2}\frac{\mathcal{C}_{n,p,q}^{(2,s)(4)}}{(2p-1)(p-s)(q-s)(2q+1)}\varphi_n^{(4)}(s;p,q)\eta_{2p-1}^{(s)}\eta_{2q-1}^{(s)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\nu^{(s)}_{2i,2p-1}\nu^{(s)}_{2i,2q} &\xlongequal[(4.18)]{(4.19)} \frac{-2\sqrt{4i-1}}{s}\frac{(s-p+\frac{1}{2})_i(1-p)_i}{(p-s)_i(p+\frac{1}{2})_{i-1}}\eta^{(s)}_{2p-1}\frac{-2\sqrt{4i-1}}{s}\frac{(s+\frac{1}{2}-q)_i(-q)_i}{(q-s+1)_{i-1}(\frac{1}{2}+q)_i}\eta^{(s)}_{2q} \\
&= \frac{4(4i-1)}{s^2}\frac{(s-2q+1)}{(2q)(2s-2q)}\frac{(s+i-p-\frac{1}{2})(i-p)(s+\frac{1}{2}-q)(-q)}{(p-s)(q+\frac{1}{2})}\varphi^{(4)}_{i-1}(s;p,q)\eta^{(s)}_{2p-1}\eta^{(s)}_{2q-1} \\
&= \frac{(1-2p)(2s-2q+1)}{2s^2}\frac{(4i-1)(s-2q+1)(2s+2i-2p-1)(p-i)}{(2p-1)(p-s)(q-s)(2q+1)}\varphi^{(4)}_{i-1}(s;p,q)\eta^{(s)}_{2p-1}\eta^{(s)}_{2q-1} \\
&\xlongequal{n=i-1} \frac{(1-2p)(2s-2q+1)}{2s^2}\frac{(4n+3)(s-2q+1)(2s+2n-2p+1)(p-n-1)}{(2p-1)(p-s)(q-s)(2q+1)}\varphi^{(4)}_{i-1}(s;p,q)\eta^{(s)}_{2p-1}\eta^{(s)}_{2q-1} \\
&= \frac{(1-2p)(2s-2q+1)}{2s^2}\frac{\mathcal{C}^{(1,s)(4)}_{n,p,q}}{(2p-1)(p-s)(q-s)(2q+1)}\varphi^{(4)}_{n}(s;p,q)\eta^{(s)}_{2p-1}\eta^{(s)}_{2q-1}
\end{aligned}
$$

将上面两式相加可得式子 (4.59) 。

引理 4.21 对于 $p,q\in\mathbb{Z}^+, n\in\mathbb{N}$ ，我们定义如下 s 的有理函数

$$
\Phi^{(3)}_n(s;p,q) := \frac{\mathcal{C}^{(3,s)(3)}_{n,p,q}}{(2q+1)(2p-1)(p-s)(q-s)}\varphi^{(3)}_n(s;p,q) \tag{4.60}
$$

这里面有 $\mathcal{C}^{(3,s)(4)}_{n,p,q} := (p-s+n)(2p+2n-1)(q-s+n)(2q+2n+1)$, 对于任意的 $s\in\widehat{\mathbb{R}}$ ，该函数有如下三条性质：

$$
\Phi^{(3)}_0(s;p,q) = 1 \tag{4.61}
$$

$$
\Phi^{(3)}_n(s;p,q) = 0 \quad \forall n \geq q \tag{4.62}
$$

$$
\Phi^{(3)}_{n+1}(s;p,q) - \Phi^{(3)}_n(s;p,q) = -\phi^{(3)}_n(s;p,q) \quad \forall n\in\mathbb{N} \tag{4.63}
$$

证明：这里也省去第一条与第二条性质的验证，只验证第三条性质：

经计算得到：

$$
\frac{\varphi^{(4)}_{n+1}(s;p,q)}{\varphi^{(4)}_n(s;p,q)} = \frac{(2s-2p+1+2n)(1-p+n)(2s-2q+3+2n)(1-q+n)}{(p-s+n+1)(2p+1+2n)(q-s+1+n)(2q+3+2n)} =: \mathcal{C}^{(4,s)(4)}_{n,p,q} \tag{4.64}
$$

代入函数 (4.60) 得到：

$$
\Phi^{(4)}_{n+1} = \frac{\mathcal{C}^{(3,s)(4)}_{n+1,p,q}\mathcal{C}^{(4,s)(4)}_{n,p,q}}{(p-s)(2p-1)(q-s)(1+2q)}\varphi^{(4)}_n(s;p,q) \tag{4.65}
$$

同样地,我们要验证第三条性质成立,只需验证式子 $\mathcal{C}^{(3,s)(4)}_{n+1,p,q}\mathcal{C}^{(4,s)(4)}_{n,p,q} - \mathcal{C}^{(3,s)(4)}_{n,p,q} = -\mathcal{C}^{(2,s)(4)}_{n,p,q} -$

$\mathcal{C}_{n,p,q}^{(1,s)(4)}$ 即可，此式的验证也被放在附录中。

引理 4.22 对于任意的 $s \in \widehat{\mathbb{R}}$，(4.57) 中定义的有理函数 $\phi_n^{(4)}(s;p,q)$ 满足下列关系：

$$\sum_{n=0}^{\infty} \phi_n^{(4)}(s;p,q) = \sum_{n=0}^{q-1} \phi_n^{(4)}(s;p,q) = 1 \quad \forall p,q \in \mathbb{Z}^+ \tag{4.66}$$

证明：注意到 $n \geq q$ 时，有 $\phi_n^{(4)}(s;p,q) = 0$，于是上述等式最左侧的无穷求和可以退化为中间的有限求和，根据引理 4.21，我们可以得到 $\sum_{n=0}^{\infty} \phi_n^{(4)}(s;p,q) = \sum_{n=0}^{q-1}(\Phi_n^{(4)}(s;p,q) - \Phi_{n+1}^{(4)}(s;p,q)) = \Phi_0^{(4)}(s;p,q) - \Phi_q^{(4)}(s;p,q) = 1$ 。

接下来我们证明一个与命题 4.19 相似的命题：

命题 4.23 对于任意 $s \in \widehat{\mathbb{R}}$，任意 $p,q \in \mathbb{Z}^+$ 且 p 与 q 均为奇数，我们都有如下等式成立。

$$\sum_{1}^{\infty} \nu_{i,p}^{(s)} \nu_{i,q+1}^{(s)} + \sum_{1}^{\infty} \nu_{i,p+1}^{(s)} \nu_{i,q}^{(s)} = (\frac{(s-p)(s-q)}{s^2} - 1)\eta_p^{(s)} \beta_q^{(s)} = \theta_p^{(s)} \theta_q^{(s)} - \beta_p^{(s)} \eta_q^{(s)} \tag{4.55}$$

这里面的求和为有限求和，因而可以随意交换求和顺序。

证明：不妨假设 $p = 2p' - 1$,$q = 2q' - 1$ ，则根据引理 4.22，我们首先可以得到：

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{\infty}(\nu_{2i,2q'}^{(s)} \nu_{2i,2p'-1}^{(s)} + \nu_{2i-1,2p'}^{(s)} \nu_{2i-1,2q'-1}^{(s)}) \\
&= \frac{(1-2p')(2s-2q'+1)}{2s^2}(\sum_{i=1}^{\infty} \phi_{i-1}^{(4)}(s;p',q'))\eta_{2p'-1}^{(s)} \eta_{2q'-1}^{(s)} \\
&= \frac{(1-2p')(2s-2q'+1)}{2s^2}\eta_{2p'-1}^{(s)} \eta_{2q'-1}^{(s)}
\end{aligned}$$

由 p 与 q 的对称性我们可以直接推得：

$$\sum_{i=1}^{\infty}(\nu_{2i,2q'+1}^{(s)} \nu_{2i,2p'}^{(s)} + \nu_{2i-1,2p'+1}^{(s)} \nu_{2i-1,2q'}^{(s)}) = \frac{(1-2q')(2s-2p'+1)}{2s^2}\eta_{2p'-1}^{(s)} \eta_{2q'-1}^{(s)}$$

将这两个式子相加得到：

$$
\begin{aligned}
&\sum_{1}^{\infty}\nu_{i,p}^{(s)}\nu_{i,q+1}^{(s)}+\sum_{1}^{\infty}\nu_{i,p+1}^{(s)}\nu_{i,q}^{(s)}\\
&=\sum_{i=1}^{\infty}(\nu_{2i,2q'}^{(s)}\nu_{2i,2p'-1}^{(s)}+\nu_{2i-1,2p'}^{(s)}\nu_{2i-1,2q'-1}^{(s)})+\sum_{i=1}^{\infty}(\nu_{2i,2q'+1}^{(s)}\nu_{2i,2p'}^{(s)}+\nu_{2i-1,2p'+1}^{(s)}\nu_{2i-1,2q'}^{(s)})\\
&=\frac{(1-2p')(2s-2q'+1)}{2s^2}\eta_{2p'-1}^{(s)}\eta_{2q'-1}^{(s)}+\frac{(1-2q')(2s-2p'+1)}{2s^2}\eta_{2p'-1}^{(s)}\eta_{2q'-1}^{(s)}\\
&=(\frac{(s-2p'+1)(s-2q'+1)}{s^2}-1)\eta_{2p'-1}^{(s)}\beta_{2q'-1}^{(s)}
\end{aligned}
$$

结合命题 4.19 与命题 4.23 我们易得到下列命题：

命题 4.24 对于任意 $s\in\widehat{\mathbb{R}}$ ，任意 $p,q\in\mathbb{Z}^{+}$ 且 $q\equiv q(mod\;2)$，我们都有如下等式成立。

$$
\sum_{1}^{\infty}\nu_{i,p}^{(s)}\nu_{i,q+1}^{(s)}+\sum_{1}^{\infty}\nu_{i,p+1}^{(s)}\nu_{i,q}^{(s)}=(\frac{(s-p)(s-q)}{s^2}-1)\eta_{p}^{(s)}\beta_{q}^{(s)}=\theta_{p}^{(s)}\theta_{q}^{(s)}-\beta_{p}^{(s)}\eta_{q}^{(s)} \tag{4.67}
$$

4.4 定理 4.6 的证明

证明：易知 $\mathcal{F}_{p,q}(s)$ 关于 p,q 对称，于是我们可以假设 $p\le q$ ，接下来我们分两步证明定理 4.6 。

第一步，当 $p=1$ 时，$\gamma_{0,q-1}=\sum_{l=0}^{0}(-1)^{1-l}\alpha_{l,q-1+1-l}^{(s)}=(-1)\alpha_{0,q}^{(s)}=(-1)(\theta_0^{(s)}\theta_q^{(s)}-(-1)^q\eta_0^{(s)}\eta_q^{(s)})=(-1)(\frac{(s-q)}{s}-(-1)^q)\eta_0^{(s)}\eta_q^{(s)}$ 。

而 $\sum_{i=1}^{min\{p,q\}}\nu_{i,p}^{(s)}\nu_{i,q}^{(s)}=\nu_{1,1}^{(s)}\nu_{1,q}^{(s)}$

q 为奇数时：$\nu_{1,1}^{(s)}\nu_{1,q}^{(s)}=\frac{(2s-1)}{s}\eta_1^{(s)}\frac{(2s-q)}{s}\eta_q^{(s)}=\frac{(2s-1)}{s}\frac{s}{2s-1}\eta_0^{(s)}\frac{(2s-q)}{s}\eta_q^{(s)}=(\frac{(s-q)}{s}-(-1)^q)\eta_0^{(s)}\eta_q^{(s)}$

q 为偶数时：$\nu_{1,1}^{(s)}\nu_{1,q}^{(s)}=\eta_0^{(s)}\frac{-q}{s}\eta_q^{(s)}=(\frac{(s-q)}{s}-(-1)^q)\eta_0^{(s)}\eta_q^{(s)}$

综合可知，当 $p=1$ 时，$\gamma_{p-1,q-1}^{(s)}+\sum_{i=1}^{min\{p,q\}}\nu_{i,p}^{(s)}\nu_{i,q}^{(s)}=0$ 成立。

第二步，当 $p>1$ 时：我们首先可以通过变形得到：

$$\sum_{i-1}^{\infty}\nu_{i,p}^{(s)}\nu_{i,q}^{(s)}=\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k\sum_{i=1}^{\infty}\nu_{i,p-k}^{(s)}\nu_{i,q+k}^{(s)}-\sum_{k=1}^{p-1}(-1)^k\sum_{k=1}^{\infty}\nu_{i,p-k}^{(s)}\nu_{i,q+k}^{(s)}$$
$$=\sum_{k1}^{p}(-1)^{k-1}\sum_{i=1}^{\infty}\nu_{i,p-k+1}^{(s)}\nu_{i,q+k-1}^{(s)}+\sum_{k=1}^{p-1}(-1)^{k-1}\sum_{k=1}^{\infty}\nu_{i,p-k}^{(s)}\nu_{i,q+k}^{(s)}$$
$$=\sum_{k=1}^{p-1}(-1)^{k-1}(\sum_{i=1}^{\infty}\nu_{i,p-k+1}^{(s)}\nu_{i,q+k-1}^{(s)}+\sum_{k=1}^{\infty}\nu_{i,p-k}^{(s)}\nu_{i,q+k}^{(s)})+(-1)^{p-1}\sum_{i=1}^{\infty}\nu_{i,1}^{(s)}\nu_{i,p+q-1}^{(s)}$$

通过直接计算可得到 $\gamma_{p-1,q-1}^{(s)}=\sum\limits_{l=0}^{p-1}(-1)^{p-l}\alpha_{l,p+q-1-l}^{(s)}=\sum\limits_{l=0}^{p-1}(-1)^{p-l}(\theta_l^{(s)}\theta_{p+q-1-l}^{(s)}-(-1)^{p+q-1}\eta_l^{(s)}\eta_{p+q-1-l}^{(s)})$ 根据 p 和 q 的奇偶性，我们可以分为两种情况讨论：

情况一：$p\equiv q(mod\;2)$ ，结合上述计算以及命题 4.15，我们首先有：

$$\sum_{i=1}^{\infty}\nu_{i,p-k+1}^{(s)}\nu_{i,q+k-1}^{(s)}+\sum_{k=1}^{\infty}\nu_{i,p-k}^{(s)}\nu_{i,q+k}^{(s)}=\theta_{p-k}^{(s)}\theta_{q+k-1}^{(s)}+\eta_{p-k}^{(s)}\eta_{q+k-1}^{(s)}$$

进一步有

$$\sum_{i=1}^{\infty}\nu_{i,p}^{(s)}\nu_{i,q}^{(s)}$$
$$=\sum_{k=1}^{p-1}(-1)^{k-1}(\sum_{i=1}^{\infty}\nu_{i,p-k+1}^{(s)}\nu_{i,q+k-1}^{(s)}+\sum_{k=1}^{\infty}\nu_{i,p-k}^{(s)}\nu_{i,q+k}^{(s)})+(-1)^{p-1}\sum_{i=1}^{\infty}\nu_{i,1}^{(s)}\nu_{i,p+q-1}^{(s)}$$
$$=\sum_{k=1}^{p-1}(-1)^{k-1}(\theta_{p-k}^{(s)}\theta_{q+k-1}^{(s)}+\eta_{p-k}^{(s)}\eta_{q+k-1}^{(s)})+(-1)^{p-1}(\theta_0^{(s)}\theta_{q+p-1}^{(s)}+\eta_0^{(s)}\eta_{q+p-1}^{(s)})$$
$$=\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k-1}(\theta_{p-k}^{(s)}\theta_{q+k-1}^{(s)}+\eta_{p-k}^{(s)}\eta_{q+k-1}^{(s)})$$
$$=\sum_{j=0}^{p-1}(-1)^{p-j-1}(\theta_j^{(s)}\theta_{p+q-j-1}^{(s)}+\eta_j^{(s)}\eta_{p+q-j-1}^{(s)})=-\gamma_{p-1,q-1}^{(s)}$$

情况二：$p\equiv q+1(mod\;2)$ ，结合上述计算以及命题 4.24，我们首先有：

$$\sum_{i=1}^{\infty}\nu_{i,p-k+1}^{(s)}\nu_{i,q+k-1}^{(s)}+\sum_{k=1}^{\infty}\nu_{i,p-k}^{(s)}\nu_{i,q+k}^{(s)}=\theta_{p-k}^{(s)}\theta_{q+k-1}^{(s)}-\eta_{p-k}^{(s)}\eta_{q+k-1}^{(s)}$$

进一步有：

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{\infty}\nu_{i,p}^{(s)}\nu_{i,q}^{(s)}\\
&=\sum_{k=1}^{p-1}(-1)^{k-1}(\sum_{i=1}^{\infty}\nu_{i,p-k+1}^{(s)}\nu_{i,q+k-1}^{(s)}+\sum_{k=1}^{\infty}\nu_{i,p-k}^{(s)}\nu_{i,q+k}^{(s)})+(-1)^{p-1}\sum_{i=1}^{\infty}\nu_{i,1}^{(s)}\nu_{i,p+q-1}^{(s)}\\
&=\sum_{k=1}^{p-1}(-1)^{k-1}(\theta_{p-k}^{(s)}\theta_{q+k-1}^{(s)}-\eta_{p-k}^{(s)}\eta_{q+k-1}^{(s)})+(-1)^{p-1}(\theta_{0}^{(s)}\theta_{q+p-1}^{(s)}-\eta_{0}^{(s)}\eta_{q+p-1}^{(s)})\\
&=\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k-1}(\theta_{p-k}^{(s)}\theta_{q+k-1}^{(s)}-\eta_{p-k}^{(s)}\eta_{q+k-1}^{(s)})\\
&=\sum_{j=0}^{p-1}(-1)^{p-j-1}(\theta_{j}^{(s)}\theta_{p+q-j-1}^{(s)}-\eta_{j}^{(s)}\eta_{p+q-j-1}^{(s)})=-\gamma_{p-1,q-1}^{(s)}
\end{aligned}$$

至此我们完成了定理 4.6 的证明，也就完成了定理 4.1 的证明。

4.5 定理 4.2 的证明

根据命题 4.15，命题 4.24 以及 4.2 节的分析过程我们易得到如下关于矩阵 Υ 的事实：

定理 4.25 给定 $s\in\mathbb{Z}^+$ ，$1\le p,q\le s-1$ 且 $p,q\in\mathbb{Z}^+$ 时，有如下等式成立：

$$\gamma_{p-1,q}+\gamma_{p,q-1}=-\alpha_{p,q} \tag{4.68}$$

结合定理 4.25，我们给出定理 4.2 的证明如下：

当 $k=0$ 时，$\beta_0=\alpha_{0,0}=0$ 。

当 $k=s$ 时，$\beta_s=\alpha_{s,s}=-\vartheta_s\vartheta_s=-(\frac{(s-1)!}{(2s-1)!})^2$ 。

当 $s>1$ 时，存在 k 使得 $0<k<s$ ，对于这部分 k ，我们有 $\beta_k=\sum\limits_{l=max\{0,2k-s\}}^{min\{2k,s\}}\alpha_{l,2k-l}(-1)^{k-l}$ $=\gamma_{k-1,k}+\gamma_{k,k-1}+\alpha_{k,k}\overset{(4.68)}{=\!=\!=}0$ 。

5. 总结与展望

在本篇文章，我们首先介绍了一种新的分析线性半负定系统 RK 方法稳定性的框架，然后利用其对次对角 Padé 型 RK 方法的稳定性进行探究，得出了该方法对线性半负定系统无条件强稳定的新结论。在证明过程中，我们最主要也是最困难的工作是找到相应矩阵的 Cholesky 分解。我们首先通过大量的数值实验观察，找到了该能量

恒等式所涉及的矩阵 Cholesky 分解的显式形式。此矩阵及其 Cholesky 分解的元素极其复杂，这给证明能量恒等式带来了很大的困难与挑战。我们通过超几何级数技术和若干巧妙的组合恒等式克服了这些困难。在这个过程中，我们得出了 4.3.1 到 4.3.4 中一系列引理和构造性的等式，最终通过指标平移的技巧完成了证明。虽然 4.3.1 节至 4.3.4 中的过程有很大的相似性，但这正是因为我们对求和进行了适当的拆分，并且在每一小结都找到了相应的特殊函数，这些特殊函数的性质相像，但并不能通过简单地代数变换来得到这些性质的相通性。基于所建立的能量定律，我们证明了次对角 Padé 逼近型 RK 方法对任何线性半负定系统是无条件强稳定的，这个结果强于 1973 年 E.L.Ehle 证明的该方法 A-stable 的结论[8]，同时也拓展了论文[7]中关于对角 Padé 逼近的理论结果。

参考文献

[1] ISERLES A. A First Course in the Numerical Analysis of Differential Equations[M]. 2nd ed. Cambridge University Press, 2008.

[2] SUN Z, SHU C W. Stability of the fourth order Runge-Kutta method for time-dependent partial differential equations[J]. Annals of Mathematical Sciences and Applications, 2017, 2(2): 255-284.

[3] BURRAGE K, BUTCHER J C. Stability Criteria for Implicit Runge-Kutta Methods[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1979, 16(1): 46-57.

[4] LEVY D, TADMOR E. From Semidiscrete to Fully Discrete: Stability of Runge–Kutta Schemes by The Energy Method[J]. SIAM Review, 1998, 40(1): 40-73.

[5] EHLE B L, PICEL Z. Two-Parameter, Arbitrary Order, Exponential Approximations for Stiff Equations[J]. Mathematics of Computation, 1975, 29(130): 501-511.

[6] SUN Z, SHU C W. Strong Stability of Explicit Runge–Kutta Time Discretizations[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2019, 57(3): 1158-1182.

[7] SUN Z, WEI Y, WU K. On Energy Laws and Stability of Runge–Kutta Methods for Linear Seminegative Problems[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2022, 60(5): 2448-2481.

[8] EHLE B L. A-Stable Methods and Padé Approximations to the Exponential[J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 1973, 4(4): 671-680.

附录

引理 4.8 的证明：

当 $i>j$ 时，根据定义 (4.10) 我们易知引理 4.8 式子等号左侧为 0，而根据 $(-j)_i=0,(1-j)_{i-1}=0,(1-j)_i=0$，我们易知等号右侧也为 0，于是我们只要对 $i\leq j$ 的情况进行证明即可:

$$\nu_{2i-1,2j}^{(s)}=\frac{-4s!\sqrt{4i-3}}{(2s)!(2s-2j)!}\Pi_1\Pi_2$$

其中有：

$$\begin{aligned}
\Pi_1&=\frac{(2s+2i-2j-3)!(s-i-j)!}{(s-j+i-2)!}\\
&=\frac{(s-i-j)!(2s-2j-1)!(2s-2j)_{2i-2}}{(s-j+i-2)!}\\
&=\frac{(s-i-j)!(2s-2j-1)!2^{2i-2}(s-j)_{i-1}(s-j+\frac{1}{2})_{i-1}}{(s-j+i-2)!}\\
&=\frac{(2s-2j-1)!2^{2i-2}(s-j)_{i-1}(s-j+\frac{1}{2})_{i-1}}{(-1)^i(j-s)_i(s-j+1)_{i-2}}\\
&=\frac{-(2s-2j-1)!2^{2i-2}(s-j+\frac{1}{2})_{i-1}}{(-1)^i(j-s+1)_{i-1}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pi_2&=\frac{(i+j-1)!}{(2i+2j-2)!(j-i)!}\\
&=\frac{(i+j-1)!}{(j-i)!(2j)!(2j+1)_{2i-2}}\\
&=\frac{(i+j-1)!}{(j-i)!(2j)!2^{2i-2}(j+\frac{1}{2})_{i-1}(j+1)_{i-1}}\\
&=\frac{(-1)^i(-j)_i(j+1)_{i-1}}{(2j)!2^{2i-2}(j+\frac{1}{2})_{i-1}(j+1)_{i-1}}\\
&=\frac{(-1)^i(-j)_i}{(2j)!2^{2i-2}(j+\frac{1}{2})_{i-1}}
\end{aligned}$$

将他们相乘得到 $\nu_{2i-1,2j}^{(s)}=\frac{2\sqrt{4i-3}}{s}\frac{(-j)_i(s-j+\frac{1}{2})_{i-1}}{(j-s+1)_{i-1}(j+\frac{1}{2})_{i-1}}\eta_{2j}^{(s)}$ 。

$$\nu_{2i,2j-1}^{(s)}=\frac{-4s!\sqrt{4i-1}}{(2s)!(s-2j+1)!}\Pi_3\Pi_4$$

其中有：

$$
\begin{aligned}
\Pi_3 &= \frac{(2s+2i-2j-1)!(s-i-j)!}{(s-j+i-1)!} \\
&= \frac{(s-i-j)!(2s-2j)!(2s-2j+1)_{2i-1}}{(s-j+i-1)!} \\
&= \frac{(s-i-j)!(2s-2j)!2^{2i-1}(s-j+\frac{1}{2})_i(s-j+1)_{i-1}}{(s-j+i-1)!} \\
&= \frac{(2s-2j)!2^{2i-1}(s-j+\frac{1}{2})_i(s-j+1)_{i-1}}{(-1)^i(j-s)_i(s-j+1)_{i-1}} \\
&= \frac{(2s-2j)!2^{2i-1}(s-j+\frac{1}{2})_i}{(-1)^i(j-s)_i}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Pi_4 &= \frac{(i+j-1)!}{(2i+2j-2)!(j-i-1)!} \\
&= \frac{(i+j-1)!}{(j-i-1)!2^{2i-1}(2j-1)!(2j)_{2i-1}} \\
&= \frac{(i+j-1)!}{(j-i-1)!2^{2i-1}(2j-1)!(j)_i(j+\frac{1}{2})_{i-1}} \\
&= \frac{(-1)^i(1-j)_i(j)_i}{2^{2i-1}(2j-1)!(j)_i(j+\frac{1}{2})_{i-1}} \\
&= \frac{(-1)^i(1-j)_i}{2^{2i-1}(2j-1)!(j+\frac{1}{2})_{i-1}}
\end{aligned}
$$

将他们相乘得到 $\nu^{(s)}_{2i,2j-1} = \frac{-2\sqrt{4i-1}}{s}\frac{(1-j)_i(s-j+\frac{1}{2})_i}{(j-s)_i(j+\frac{1}{2})_{i-1}}\eta^{(2)}_{2j-1}$ 。

利用[5]中的 $lemma5.12$ 我们可以得到：

$\nu^{(s)}_{2i,2j} = 2\sqrt{4i-1}\frac{(s+\frac{1}{2}-j)_i(-j)_i}{(j-s)_i(\frac{1}{2}+j)_i}\frac{2s-2j}{2s}\eta^{(s)}_{2j} = \frac{-2\sqrt{4i-1}}{s}\frac{(s+\frac{1}{2}-j)_i(-j)_i}{(j-s+1)_{i-1}(\frac{1}{2}+j)_i}\eta^{(s)}_{2j}$

$\nu^{(s)}_{2i-1,2j-1} = 2\sqrt{4i-3}\frac{(s+\frac{3}{2}-j)_{i-1}(1-j)_{i-1}}{(j-s)_{i-1}(j+\frac{1}{2})_{i-1}}\frac{2s-2j+1}{2s}\eta^{(s)}_{2j-1} = \frac{2\sqrt{4i-3}}{s}\frac{(s+\frac{1}{2}-j)_i(1-j)_{i-1}}{(j-s)_{i-1}(j+\frac{1}{2})_{i-1}}\eta^{(s)}_{2j-1}$

4.3 节相关引理的证明：

在 4.3 节我们遗留了部分等式没有证明，由于这部分公式过于复杂，我们利用 matlab 对其进行验证，相应的代码如下所示：

4.10

```
>>syms p
>>syms q
>>syms n
>>syms s

```

```
>>yy=(4*n+3)*(1+s-2*p)*(2*q-1-2*n-2*s)*(n-q)+(4*n+1)*(s-2*q)*(s-p-n)*(2*p+2*n+1)

>>xx=(2*s-2*q+1+2*n)*(1-p+n)*(2*s-2*p+3+2*n)*(-q+n)-(p-s+n)*(2*p+2*n+1)*(q-s+n)*(2*q+2*n+1)

>>simplify(xx+yy)

 output:0
```

4.13

```
>>syms p
>>syms q
>>syms n
>>syms s

>>yy=(4*n+3)*(s-2*q)*(2*p-1-2*n-2*s)*(n+1-p)+(4*n+1)*(s-2*p+1)*(s-q-n-1)*(2*q+2*n+1)

>>xx=(2*s-2*p+1+2*n)*(1-p+n)*(2*s-2*q+1+2*n)*(1-q+n)-(p-s+n)*(2*p+2*n-1)*(q-s+n+1)*(2*q+2*n+1)

>>simplify(xx+yy)

 output:0
```

4.17

```
>>syms p
>>syms q
>>syms n
>>syms s

>>yy=(4*n+3)*(s-2*q)*(p-n)*(2*s-2*p+2*n+1)+(4*n+1)*(s-2*p)*(s-q-n-1)*(2*q+2*n+1)
```

```
>>xx=(2*s-2*p+1+2*n)*(-p+n)*(2*s-2*q+1+2*n)*(1-q+n)-(p-s+n)*(2*p+2*n+1)*(q-s+n+1)*(2*q+2*n+1)

>>simplify(xx+yy)

 output:0
```

4.21

```
>>syms p
>>syms q
>>syms n
>>syms s

>>yy=(4*n+1)*(s-2*p+1)*(s-q-n)*(2*q+2*n+1)+(4*n+3)*(s-2*q+1)*(2*s+2*n-2*p+1)*(p-n-1)

>>xx=(2*s-2*p+1+2*n)*(1-p+n)*(2*s-2*q+3+2*n)*(1-q+n)-(p-s+n)*(2*p+2*n-1)*(q-s+n)*(2*q+2*n+1)

>>simplify(xx+yy)

 output:0
```

致谢

在本科学习的最后阶段，我要感谢所有支持和帮助我的人。在我的学习的过程中，我收获了很多宝贵的经验和知识，这离不开大家的支持和鼓励。

首先是要感谢我的家人们，他们一直默默支持着我，给予我无尽的关心和支持，让我在学习和生活中充满了温暖和动力。

然后我要感谢我的学术导师朱一飞老师和研究生导师吴开亮老师。朱老师不仅在学习上给了我很多支持，还为我的发展提了许多建议。吴老师认真负责的态度以及对科研的热爱在过去的几个月里也给予了我很大的鼓舞。也是在吴老师的严格要求与悉心指导下，我完成了人生中的第一篇论文。

最后我要感谢那些和我一起学习，一起讨论，一起复习的同学们，是你们陪伴了我度过这四年的时光，也是你们帮我度过了许多学习和生活上的难关。我还要感谢魏元哲同学，是他在论文中的思路给我以启发，让我完成了定理的证明进而写出了这篇论文。