第一次习题课（高数上）

TA：焦淼森

email：12332859@mail.sustech.edu.cn

Office:M5011

补充题

ex2(1)

公式：$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^3),a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to2}\frac{x^2-x-2}{\sqrt[3]{x^2+23}-3}\\
&=\lim_{x\to2}\frac{(x^2-4)(x+1)}{(\sqrt[3]{x^2+23}-3)(x+2)}\\
&=\lim_{x\to2}\frac{(\sqrt[3]{x^2+23}-3)((x^2+23)^{\frac{2}{3}}+3\sqrt[3]{x^2+23}+9)(x+1)}{(\sqrt[3]{x^2+23}-3)(x+2)}\\
&=\lim_{x\to2}\frac{((x^2+23)^{\frac{2}{3}}+3\sqrt[3]{x^2+23}+9)(x+1)}{(x+2)}\\
&=\frac{81}{4}
\end{aligned}$$

等价无穷小

定义：如果函数f(x)当$x\to x_0$（或$x\to\infty$）的极限为0，那么称f(x)为$x\to x_0$（或$x\to\infty$）的无穷小。

定义：记α,β都是在同一个自变量变化中的无穷小，$\lim\frac{\beta}{\alpha}$也是在这个变化过程中的极限则：

当$\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$时，称$\beta$是比$\alpha$高阶的无穷小，记做$\beta=o(\alpha)$

当$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\infty$时，称$\beta$是比$\alpha$低阶的无穷小

当$\lim\frac{\beta}{\alpha}=c\neq 0$时，称$\beta$是$\alpha$的同阶的无穷小

当$\lim\frac{\beta}{\alpha}=1$时，称$\beta$是$\alpha$的等价无穷小，记做$\alpha\sim\beta$

$$
\begin{gathered}
\sin x\sim x \quad 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2 \quad \tan x\sim x\\
e^x-1\sim x \quad \ln(1+x)\sim x \quad (1+x)^\alpha-1\sim\alpha x\\
\arctan x\sim x \quad \arcsin x\sim x \quad x-\sin x\sim\frac{x^3}{6}
\end{gathered}
$$

ex2(2)

$$
\begin{gathered}
\lim_{x\to 0}\frac{\sin(1-\cos x)}{(\tan x)^2}\\
=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\\
=\frac{1}{2}
\end{gathered}
$$

ex2(5)

$$
\begin{gathered}
\lim_{x\to 1}(\frac{3}{1-x^3}-\frac{4}{1-x^4})\\
=\lim_{x\to 1}(\frac{3}{(1-x)(1+x+x^2)}-\frac{4}{(1-x)(1+x)(1+x^2)})\\
=\lim_{x\to 1}(\frac{3(1+x)(1+x^2)-4(1+x+x^2)}{(1-x)(1+x+x^2)(1+x)(1+x^2)})\\
=\lim_{x\to 1}\frac{3(1+x+x^2+x^3)-4(1+x+x^2)}{(1-x)(1+x+x^2)(1+x)(1+x^2)}\\
=\lim_{x\to 1}\frac{3x^3-1-x-x^2}{(1-x)(1+x+x^2)(1+x)(1+x^2)}\\
=\lim_{x\to 1}-\frac{3x^2+2x+1}{(1+x+x^2)(1+x)(1+x^2)}\\
=-\frac{1}{2}
\end{gathered}
$$

ex2(8)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1-\frac{x}{2}}{x^2}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{1+x-1-x-\frac{x^2}{4}}{x^2(\sqrt{1+x}+1+\frac{x}{2})}$$
$$=-\frac{1}{8}$$

补充题第二题

（1）

绝对值不等式：$||a|-|b||\le|a\pm b|\le|a|+|b|$.

$\lim\limits_{x\to c}|f(x)|=|L|$

证明：想证明$\lim\limits_{x\to c}|f(x)|=|L|$ 等价于证明$\lim\limits_{x\to c}(f(x)|-|L|)=0$ 而这又等价于证明$\lim\limits_{x\to c}|f(x)|-|L||=0$

而根据绝对值不等式$0\le||f(x)|-|L||\le|f(x)-L|$.

由于$\lim\limits_{x\to c}f(x)=L$,我们有$\lim\limits_{x\to c}|f(x)-L|=0$

根据夹逼定理，命题得证。

(3)

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}g(x)\cdot\frac{f(x)}{g(x)}=0$$

ex6

利用$x=t+\pi$ 做变量替换，分类讨论

m与n奇偶性相同时结果为$\frac{m}{n}$

奇偶性不同则为$-\frac{m}{n}$

ex8

根据极限存在首先得到$a \neq 0$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}(\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}-\frac{a}{x}-b)\\
&=\lim_{x\to 0}(\frac{\sqrt{x^2+x+1}-a-bx}{x})\\
&=\lim_{x\to 0}(\frac{x^2+x+1-a^2-2abx-b^2x^2}{x(\sqrt{x^2+x+1}+a+bx)})
\end{aligned}
$$

根据第二行得到a=1

根据第三行$b=\frac{1}{2}$

ex10

由于极限存在我们一定有$a=\sqrt{\pi/2}$

令$x=t+\frac{\pi}{2}$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\pi/2}}{\cos x}\\
&=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{t+\frac{\pi}{2}}-\sqrt{\pi/2}}{-\sin t}\\
&=\lim_{t\to 0}-\frac{\sqrt{t+\frac{\pi}{2}}-\sqrt{\pi/2}}{t}\\
&=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}
\end{aligned}
$$

课本习题

2.3节第49题

若$\lim_{x\to c}g(x)=0$ 且存在c的邻域A 使得$|f(x)|\leq M$ 在$A\setminus\{c\}$ 上成立，则$\lim_{x\to c}f(x)g(x)=0$

补充

复合函数的极限：若$\lim\limits_{x\to c} g(x)=A$，且$\lim\limits_{y\to A} f(y)=B$ 则$\lim\limits_{x\to c} f(g(x))=B$ (判断)

上面的表述错误，有如下定理：

$x\to\infty$ x

定理 6（复合函数的极限运算法则） 设函数 $y=f[g(x)]$ 是由函数 $u=g(x)$ 与函数 $y=f(u)$ 复合而成，$f[g(x)]$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0$，$\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$，且存在 $\delta_0>0$，当 $x\in \mathring{U}(x_0,\delta_0)$ 时，有 $g(x)\neq u_0$，则

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)]=\lim_{u\to u_0} f(u)=A.$$

Heine定理：$\lim\limits_{x\to c} f(x)=b$ 存在的充要条件是：对$f(x)$ 定义域内任意以x_0为极限的数列$\{a_n\}$（$a_n\neq x_0$），$\lim\limits_{x\to\infty} f(x_0)=A$ 存在。

一个重要极限：$\lim\limits_{x\to\pm\infty}(1+\frac{1}{x})^x=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$