2023秋第四次习题课（高数上）

补充作业

第一题

19. Odd differentiable functions Is there anything special about the derivative of an odd differentiable function of x? Give reasons for your answer.

20. Even differentiable functions Is there anything special about the derivative of an even differentiable function of x? Give reasons for your answer.

case 1: 当函数f为奇函数时，若其在x_0 处可导且导数为$f'(x_0)$，则根据

$$
\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{f(-x_0+h)-f(-x_0)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}\\
&=f'(x_0)
\end{aligned}
$$

得到其在$-x_0$ 处可导且导数值为$f'(x_0)$

case 2: 当函数f为偶函数时，若其在x_0 处可导且导数为$f'(x_0)$，则根据

$$
\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{f(-x_0+h)-f(-x_0)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}\\
&=-\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}\\
&=-f'(x_0)
\end{aligned}
$$

得到其在$-x_0$ 处可导且导数值为$-f'(x_0)$

$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ 为偶函数，所以$f^{(7)}(0)=0$

Page 9 ex 1 :D

1. 若$f(x)$ 在$(0,\infty)$ 上可导, 下面哪个命题正确?

   (A) 若$f(x)$ 有唯一零点, 则$f'(x)$ 没有零点.

   (B) 若$f'(x)$ 至少有一个零点, 则$f(x)$ 至少有两个零点.

   (C) 若$f(x)$ 没有零点, 则$f'(x)$ 至多有一个零点.

   (D) 若$f'(x)$ 没有零点, 则$f(x)$ 至多有一个零点.

这里只证明D选项的正确性，反证法：若函数 $f(x)$ 的零点个数大于等于2，选取其中的两个零点$x_0>0,x_1>0$，则$f(x_0)=f(x_1)=0$ 由于$f(x)$ 在$(0,\infty)$ 可导，根据罗尔定理，存在$\xi\in(x_0,x_1)$ st.$f'(\xi)=0$ 矛盾

Page 9 ex 2 : B

令 $f(x)=x^3-6x^2+9x+c$ 则$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f(x)$ 在$(-\infty,1)$ 递增，$(1,3)$ 递减 $(3,\infty)$ 递增，$f(0)=c>0$

$f(1)>f(0)>0$ $f(3)=c>0$ 故而$f(x)$ 在$(0,\infty)$ 上只有一个根

2. 若$c>0$，则方程$x^3-6x^2+9x+c=0$ 的实根的个数为

   (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Page 9 ex 9

9. 判断下列命题正确与否. 若正确, 给出证明. 若错误, 给出反例.

   (1) ★ 若$f'(c)>0$, 则$f(x)$ 在包含c 的某个邻域严格单调递增.

   (2) 若$f'(c)>0$, 则存在某个$\delta>0$, 使得任意的$x\in(c,c+\delta)$, 满足$f(x)>f(c)$.

   (3) 若$(1,f(1))$ 是拐点, 则$f''(1)=0$.

   (4) ★ 若$f'(x_0)$ 存在, 且$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{x-x_0}=1$, 则$(x_0,f(x_0))$ 是$y=f(x)$ 的一个拐点.

   (5) 若函数$f(x)$ 在$[a,b]$ 上可导, 且$f'(a)f'(b)<0$. 则存某个$c\in(a,b)$ 使得$f'(c)=0$.

   (6) 若函数$f(x)$ 在$[a,b]$ 上可导, 且$f'(a)f'(b)>0$. 存在某个$c\in(a,b)$ 使得$f(c)=0$.

2:正确：$f'(c)>0$，根据极限的定义$f'(c)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}>0$，根据极限的保号性$\exists\delta>0 st.$ 当$h\in(-\delta,0)\bigcup(0,\delta)$ 时，$\frac{f(c+h)-f(c)}{h}>0$，也即当$x\in(c,c+\delta)$ 时，$\frac{f(x)-f(c)}{x-c}>0$,$f(x)>f(c)$ 。

3：错误，该点的二阶导数可能不存在，例如$y=f(x)=x^{\frac{1}{3}}$，0是他的拐点，但在此处无二阶导数

4：正确：与2相同，首先在该点处的导数存在，根据$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{x-x_0}=1>0$，以及极限的保号性，$\exists\delta>0 st.$ 当$x\in(x_0-\delta,x_0)\bigcup(x_0,x_0+\delta)$ 时，$\frac{f''(x)}{x-x_0}>0$，也即当$x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时，$f''(x)<0$，当$x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时$f''(x)>0$

该点是$y=f(x)$ 的拐点

5: 正确：**证明：** 不妨设$f'_+(a)>0,f'_-(b)<0$，根据保号性，由于$f'_+(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$，所以存在$\delta_1>0st.$ 当$x\in(a,a+\delta_1)$ 时，$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$，而$x-a>0$，故而有$f(x)>f(a)$，同样地，存在$\delta_2>0st.$ 当$x\in(b-\delta_2,b)$ 时，$f(x)>f(b)$，这说明$f(a),f(b)$ 都不是f 在$[a,b]$ 上的最大值，由于f 在$[a,b]$ 上可微，故而连续，因而一定存在$\xi\in(a,b)$ st. f 在ξ处取得最大值，根据费马定理$f'(\xi)=0$

根据此题的结论我们可以证明达布中值定理

达布（Darbux）中值定理: 如果f 在$[a,b]$ 上可导，且$f'_+(a)\neq f'_-(b)$，k为介于$f'_+(a),f'_-(b)$ 之间的任一实数，则至少存在一点$\xi\in(a,b)st.f'(\xi)=k$。

证明： 不妨设$f'_+(a)<f'_-(b)$令$F(x)=f(x)-kx$，则$F'_+(a)<0,F'_-(b)>0$，根据5题所证结论，存在$\xi st.F'(\xi)=0\Rightarrow f'(\xi)=k$。

根据达布中值定理我们可以证明如果f 在$[a,b]$ 上可导，则导函数$f'(x)$ 无第一类间断点。

6：错误：考虑函数$f(x)=x^2+2$ 区间$[-1,1]$

补充第三大题

3. Find the global extreme values and the local extreme values of following functions.

(1) $y=\sin^3 x+\cos^3 x$, $x\in[0,2\pi]$.

(2) $y=|x^2-4x+1|$, $x\in[0,5]$ (Hint: Using Sec.3.6, Example 6, page, 161).

（1） $y'=3\sin^2 x\cos x-3\cos^2 x\sin x=3\sin x\cos x(\sin x-\cos x)$

$y''=-3(\sin^3 x+\cos^3 x-2\sin x\cos^2 x-2\sin^2 x\cos x)$

局部极值：在$(0,2\pi)$ 内 y' 在点$\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2},\pi,\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2}$ 处为0,

$\frac{\pi}{4}$ 处$y'' > 0$ 为局部极小值$\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\frac{\pi}{2}$ 处$y'' < 0$ 为局部极大值 1

π 处$y'' > 0$ 为局部极小值-1

$\frac{5\pi}{4}$ 处$y'' < 0$ 为局部极大值$-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\frac{3\pi}{2}$ 处$y'' > 0$ 为局部极小值-1

端点0 处，在0右侧的一个小邻域$(0, \delta_1)$内有$y' < 0$ 故而在此处为局部极大值1

端点2π 处，在2π左侧的一个小邻域$(2\pi - \delta_2, 2\pi)$内有$y' > 0$ 故而在此处为局部极大值

由于此函数处处可导，故而全局极值在导数值为0或者端点处取得（根据上述分析可得，故而在这里省略）

（2）求导得$y' = \frac{2(x-2)(x^2-4x+1)}{|x^2-4x+1|}$ （当$x^2 - 4x + 1 \neq 0$ 时）

先讨论局部极值，在$(0, 5)$ 内：

当$x = 2$ 时$y' = 0$ 在2左侧小邻域$y' > 0$ 右侧小邻域$y' < 0$ 故而在$x = 2$ 处取得局部极大值3

在$x = 2 - \sqrt{3}$ 处，y 不可导，且在该点处左侧小邻域$y' < 0$ 右侧小邻域$y' > 0$ 故而在$x = 2 - \sqrt{3}$ 处取得局部极小值0

在$x = 2 + \sqrt{3}$ 处，y 不可导，且在该点处左侧小邻域$y' < 0$ 右侧小邻域$y' > 0$ 故而在$x = 2 + \sqrt{3}$ 处取得局部极小值0

在端点0处,0右侧的小邻域内，$y' < 0$ 故而在该端点处取得局部极大值1

在端点5处,5左侧的小邻域内，$y' > 0$ 故而在该端点处取得局部极大值6

全局极值：总结可得极小值0，极大值6（过程同样省略，比较简单）

Page 9 ex 7

7. ★ 证明方程$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$ 在$(0, 1)$ 上至少有一个实根. 其中系数$a_n, a_{n-1}, ..., a_0$ 满足$\frac{a_n}{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} + ... + a_0 = 0$.

令$f(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{a_i}{i+1}x^{i+1}$，则$f(0)=0,f(1)=0$ 根据罗尔定理，我们可以得到存在 $c\in(a,b)st.\,f'(c)=0$，也即题干中的方程在$(0,1)$ 上至少有一个实根。

Page 9 ex 8

8. 确定方程$x^2=x\sin x+\cos x$的实根数目.

令$f(x)=x^2-x\sin x-\cos x$

该函数为偶函数，只需考虑$f(x)=0$在$(0,\infty)$ 上的根的数目

$f(0)=-1<0$

$f'(x)=2x-x\cos x-\sin x+\sin x=x(2-\cos x)$

故而该函数在$(0,\infty)$ 递增，而$f(\pi)>0$，$f(x)=0$在$(0,\pi)$ 中至少有一个根

根据单调性，$f=0$ 在$[0,\infty)$ 上有一个根

所以题干方程一共有两个实根。

补充题

11. ★ 若$f(0)=0$. 判断下列命题正确与否. 若正确, 给出证明. 若错误, 给出反例.

(1) 若$\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h^2}f(1-\cos h)$ 存在, 则f 在$x=0$ 处可导.

(2) 若$\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}[f(2h)-f(h)]$ 存在, 则f 在$x=0$ 处可导.

21. 若$y=f(x)$, 且与$y=\sin x$ 在原点有相同的切线. 求:

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{xf\left(\frac{2}{x}\right)}.$$

12. ★ 若函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续, 在 $(0,2)$ 上可导, 且 $f(2) = 3f(0)$. 证明：至少存在某

个 $c \in (0,2)$ 使得 $(1+c)f'(c) = f(c)$.

考试题

(5) 若 $f(x) = \tan x$，则 $f^{(4)}(0) =$ ________.

(5) 若 $y = f(x)$ 在 $x = 0$ 处有一个跳跃间断点，那么下面 4 个极限中哪一个必然存在?

(A) $\lim\limits_{x\to 0} f(x^2)$. (B) $\lim\limits_{x\to 0}(f(x))^2$.

(C) $\lim\limits_{x\to 0} f(x^3)$. (D) $\lim\limits_{x\to 0}(f(x) - f(-x))$.

（15分）填空题

九、（6分）求函数 $f(x) = |\sin x + \cos x + \tan x + \cot x + \sec x + \csc x|$ 的全局极小值（即最小值）

七、（12分）求极限(**不准使用洛必达法则**):

(1) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})}{(1-x^2)^2}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{\sin(x^3)}$.