

Logistic模型

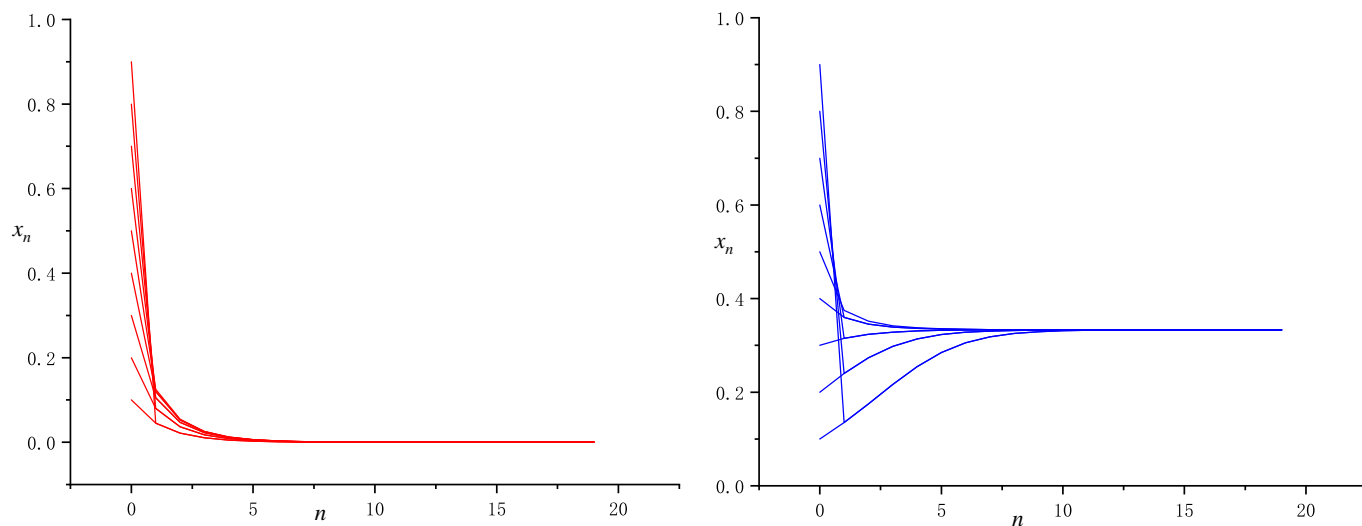
段元兴

2020 年 4 月 1 日

Content

1	Question1	3
2	Question2	3
3	Question3	4
4	Question4	4
5	Question5	5
6	Question6	5
7	Question7	6
8	Question8	7
9	Question9	7

1 Question1



2 Question2

在 x^* 附近, $\Delta x_n = x_n - x^*$ 带来的 $\Delta x_{n+1} = x_{n+1} - x^*$ 的变化为:

$$\Delta x_{n+1} = x_{n+1} - x^* = f'(x^*) (x_n - x^*) = f'(x^*) \Delta x_n \quad (1)$$

即

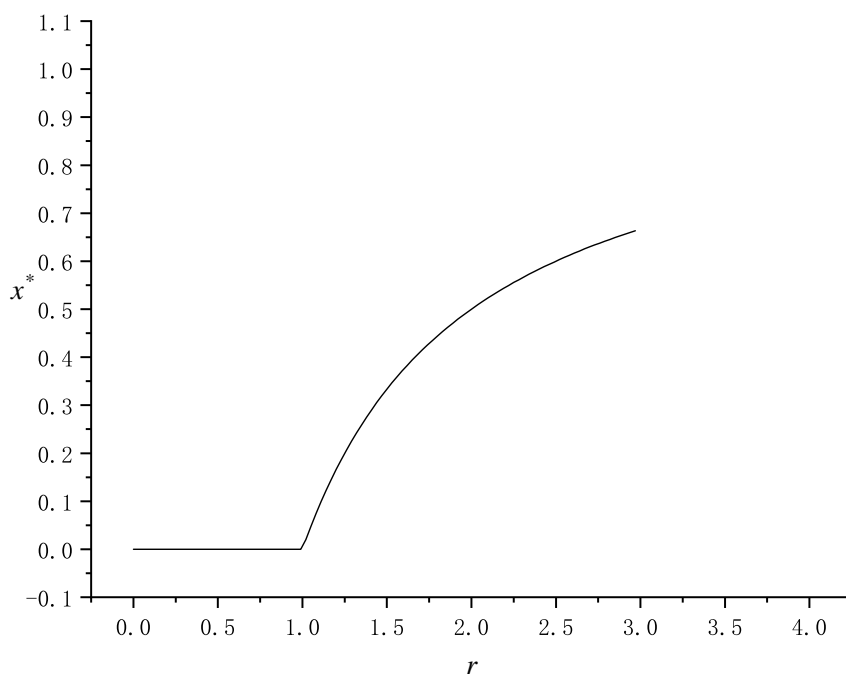
$$\left| \frac{\Delta x_{n+1}}{\Delta x_n} \right| = |f'(x^*)|. \quad (2)$$

所以收敛于一个根的必要条件为 $|f'(x^*)| \leq 1$. 而收敛时满足:

$$f(x^*) = x^* \quad (3)$$

解得

$$x^* = \begin{cases} 0, & 0 < r \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{r}, & r > 1 \end{cases} \quad (4)$$

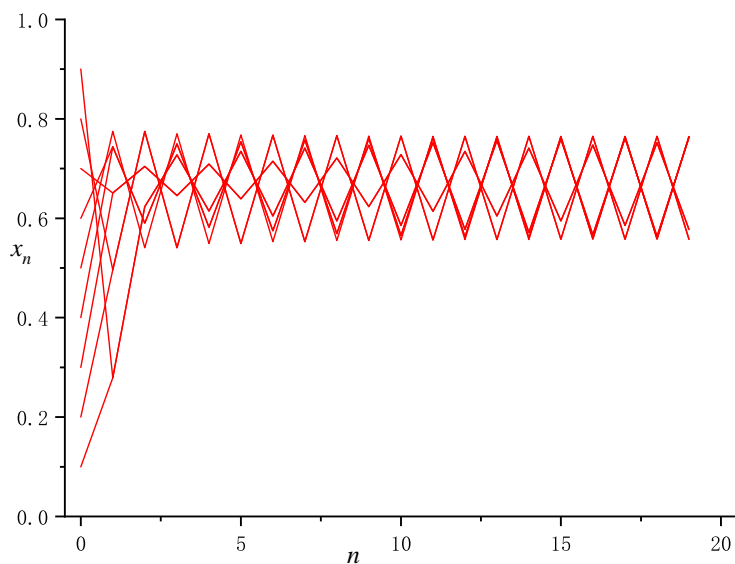


而收敛阶为1, 收敛速度为

$$f'(x^*) = \begin{cases} r, & 0 < r \leq 1 \\ 2 - r, & 1 < r \leq 3 \end{cases} \quad (5)$$

3 Question3

上一问中 $r_1 = 3$, 取 $r = 3.1$ 计算得到:



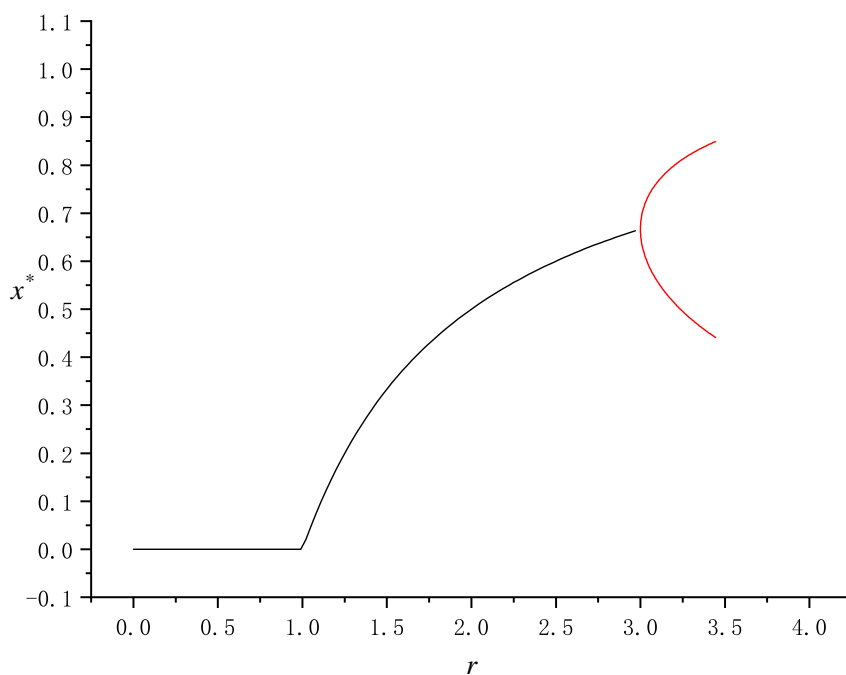
可以发现最终所有的点都振荡于0.5580141与0.7645665之间.

4 Question4

同理

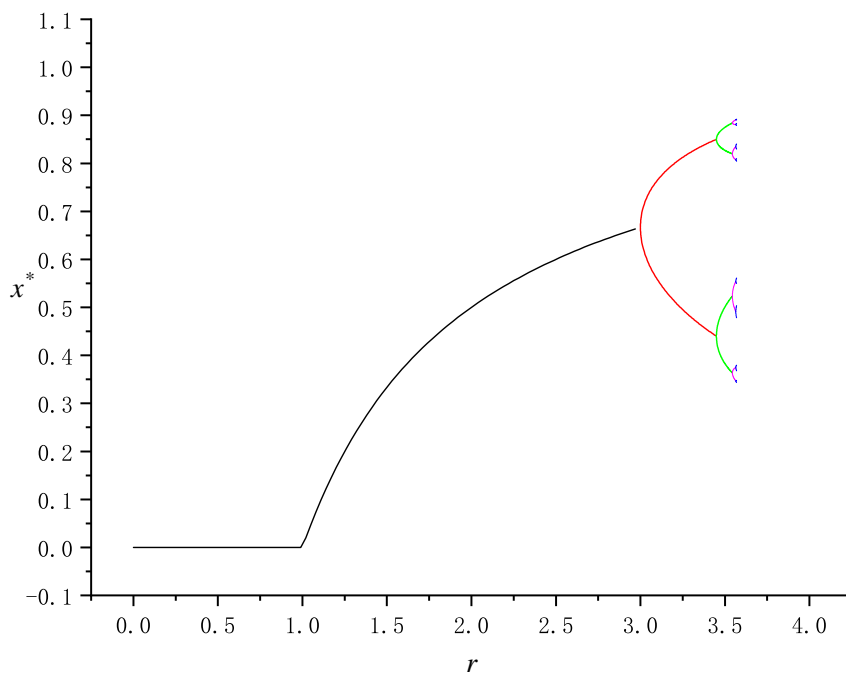
$$\Delta x_{n+2} = x_{n+2} - x^* = f'(x_1^*)\Delta x_{n+1} = f'(x_1^*)f'(x_2^*)\Delta x_n \quad (6)$$

所以收敛的必要条件为 $|f'(x_1^*)f'(x_2^*)| \leq 1$. 而通过计算得到以下 x_1^* 和 x_2^* 关于 r ($3 < r < 3.447$) 的变化图像:

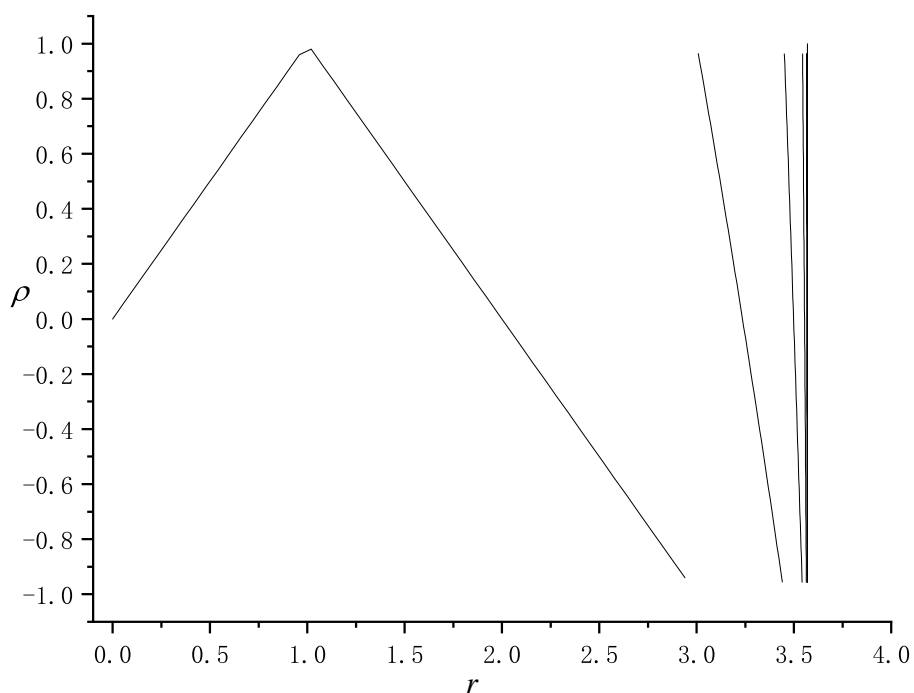


5 Question5

以下是周期1-16的 $x^* - r$ 图像:



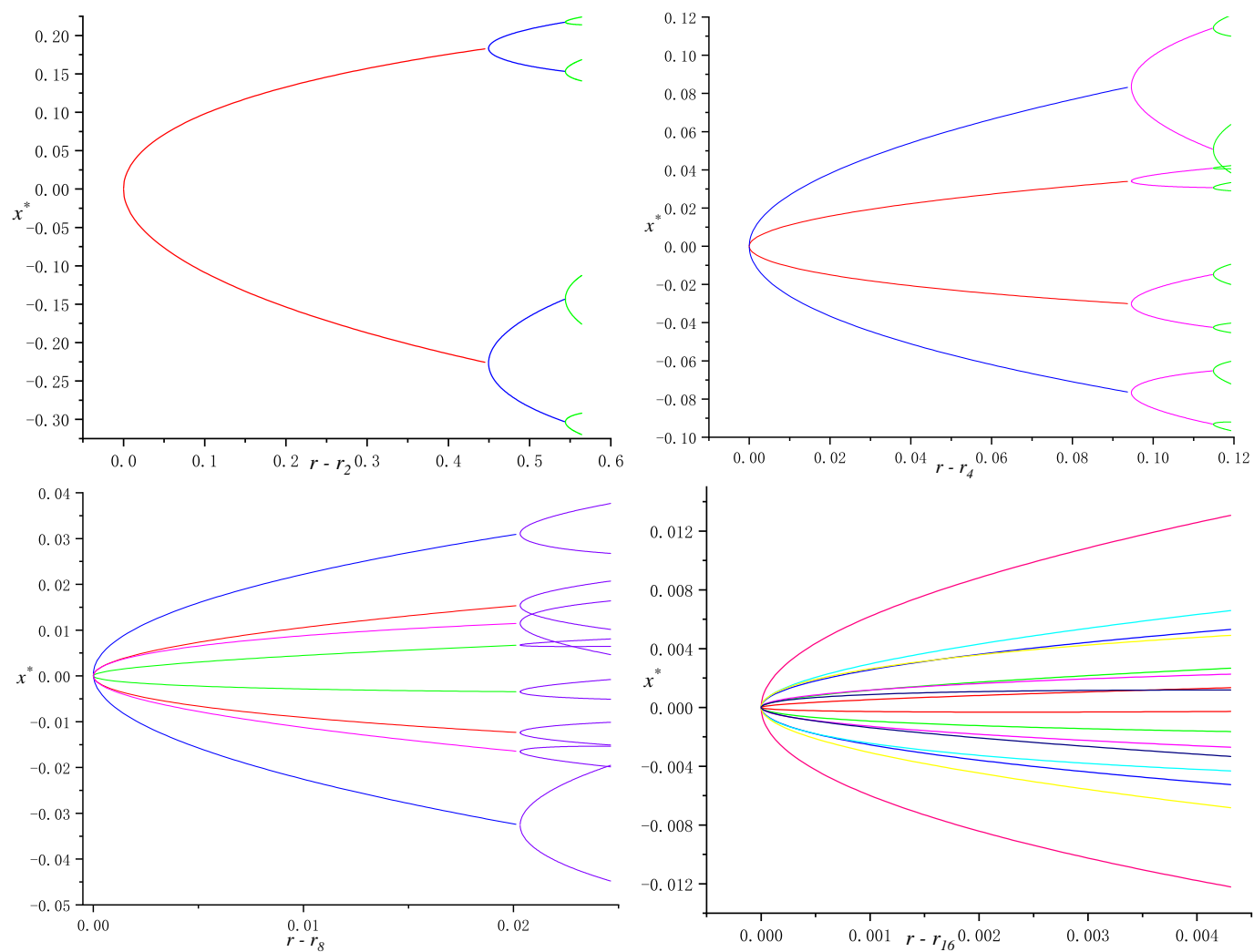
对于平均收敛速度, 我采用一个周期后 $\Delta x = x - x^*$ 的比值 $\rho = \frac{\Delta x_{n+1}}{\Delta x_n}$ 来观察, 在每个周期区间内均匀取点得到以下图像:



可以发现在一个周期区间, ρ 是从1开始下降到-1, 而随着周期区间的逐渐减小, 下降速度越来越快; 这也意味着在区间中间的区域收敛是最快的($|\rho| \rightarrow 0$), 在区间两端收敛最慢.

6 Question6

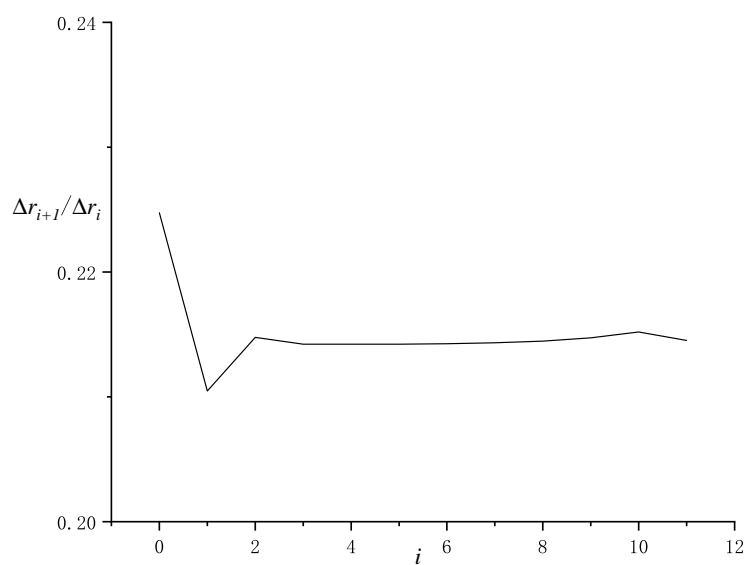
以下从左至右从上至下依次为2-8, 4-16, 8-16和16周期的图像:



可以看见类似分形的结构, 但是各个分支之间并不相似.

7 Question7

将相邻 Δr 之比作图得到:



可以发现趋于一个常数 $F = 0.2142$, 由 F 计算等比数列求和得到 $r_\infty = 3.569946$.

8 Question8

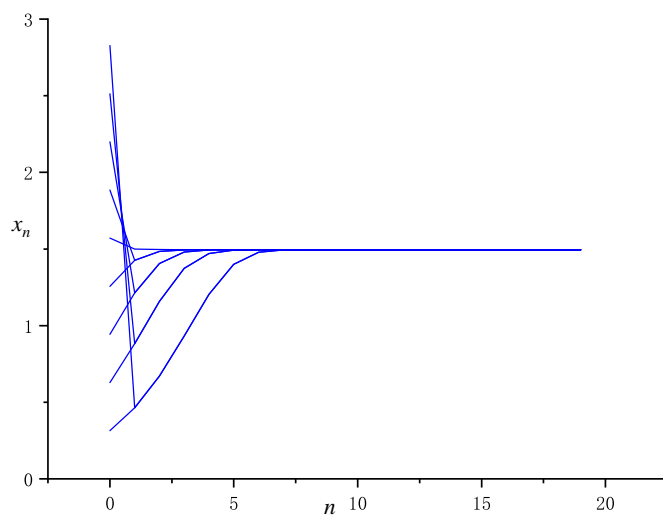
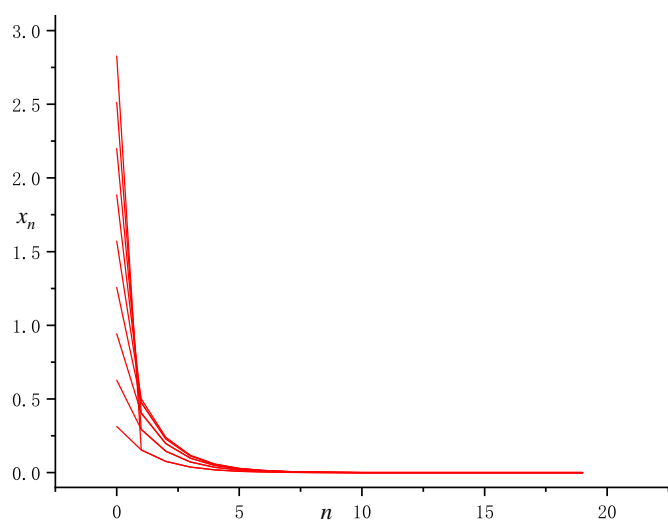
$$x_{n+1} = f(x_n) = 4 \sin^2 y \cos^2 y = \sin^2 2y \quad (7)$$

故存在解 $x_n = \sin^2 2^n \theta$, 其中 $x_0 = \sin^2 \theta$. 而由于 $\sin^2 2^n \theta (\theta \neq m\pi, m = 1, 2, 3, \dots)$ 这个序列在 $(0, 1)$ 上是稠密的, 即不存在稳定的振荡周期.

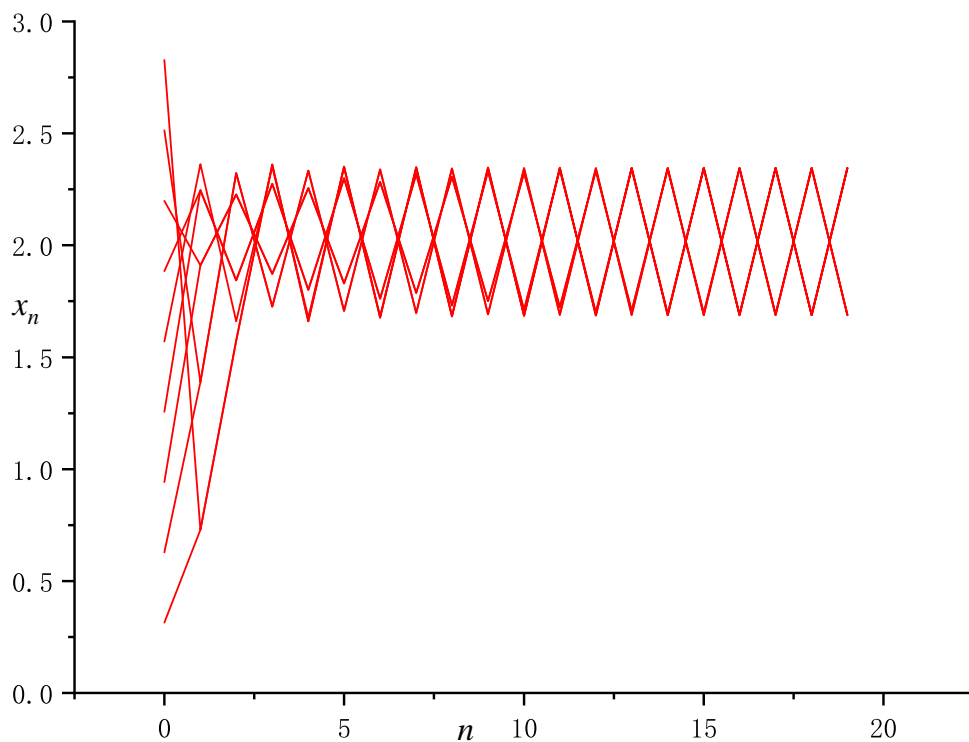
9 Question9

选取 $f(x) = \sin x$ 得到以下结果:

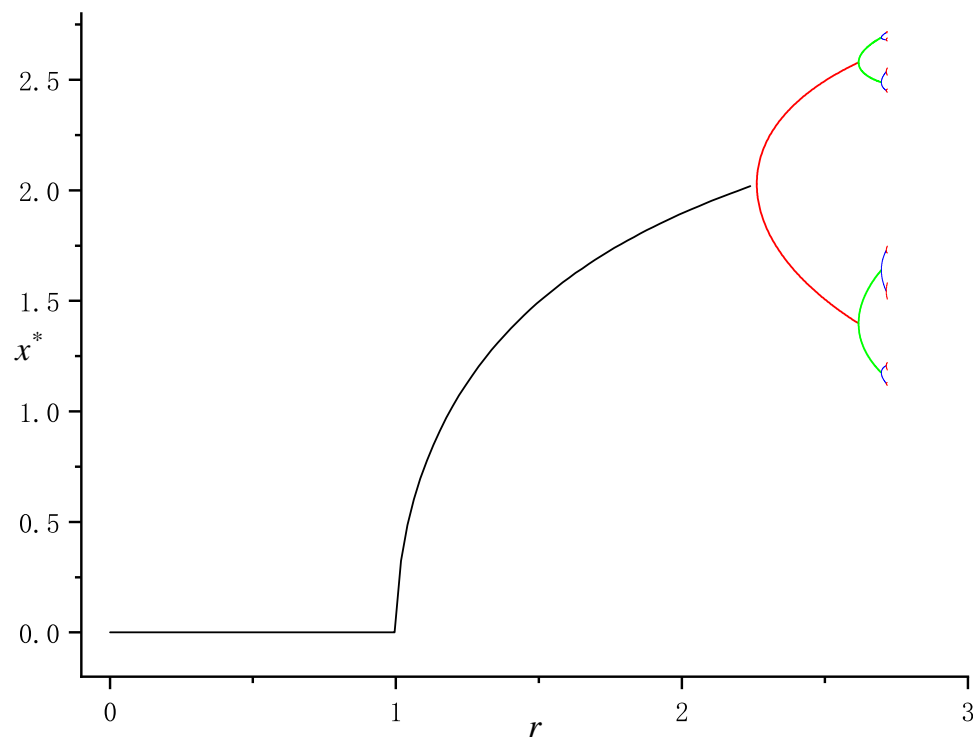
选取 $r = 0.5$ 和 $r = 1.5$ 时不同初值的迭代结果:



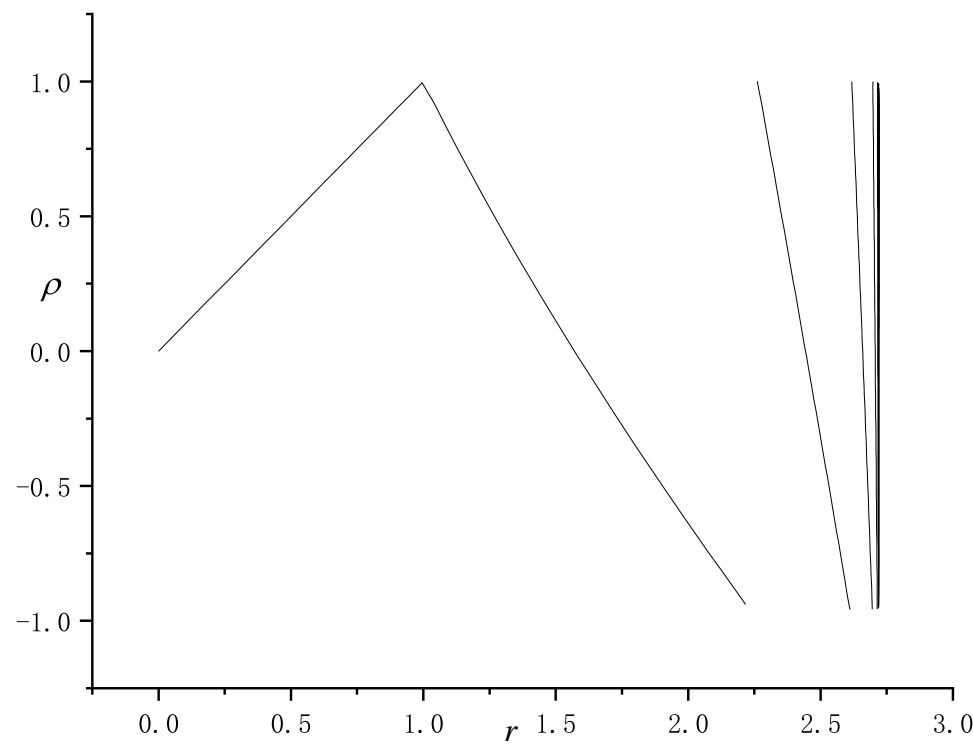
选取 $r = 2.3616$ (第一个分支点的 $r + 0.1$) 时:



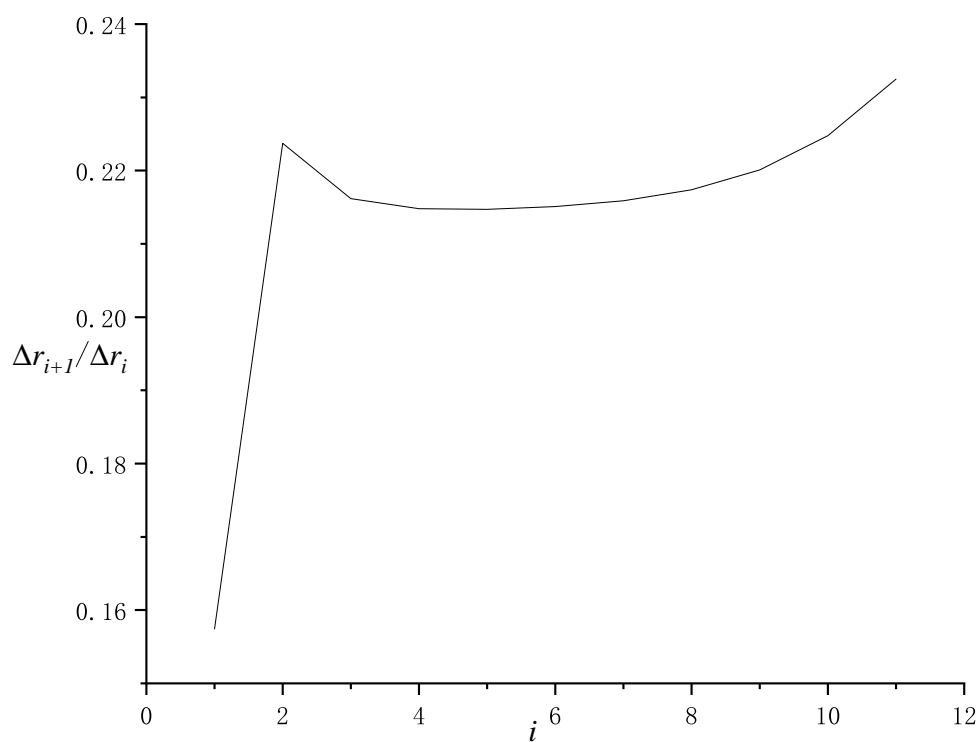
$x^* - r$ 的关系图:



平均收敛速度:



相邻 Δr 之比:



可以发现这个比值并不是像之前一样趋于一个常数值, 中间的最小值为0.21473, 近似等于之前的 F . 可以这样解释: 实际计算中我发现在分叉点附近后半周期与前半周期的差值非常小, 在 10^{-10} 以下, 而在 10^{-10} 之后这个差值会迅速增大, 所以我就按照 10^{-10} 为分界线把前后2个周期区间分开, 现在看来这种分开方式在周期数很大的时候可能是不准确的.