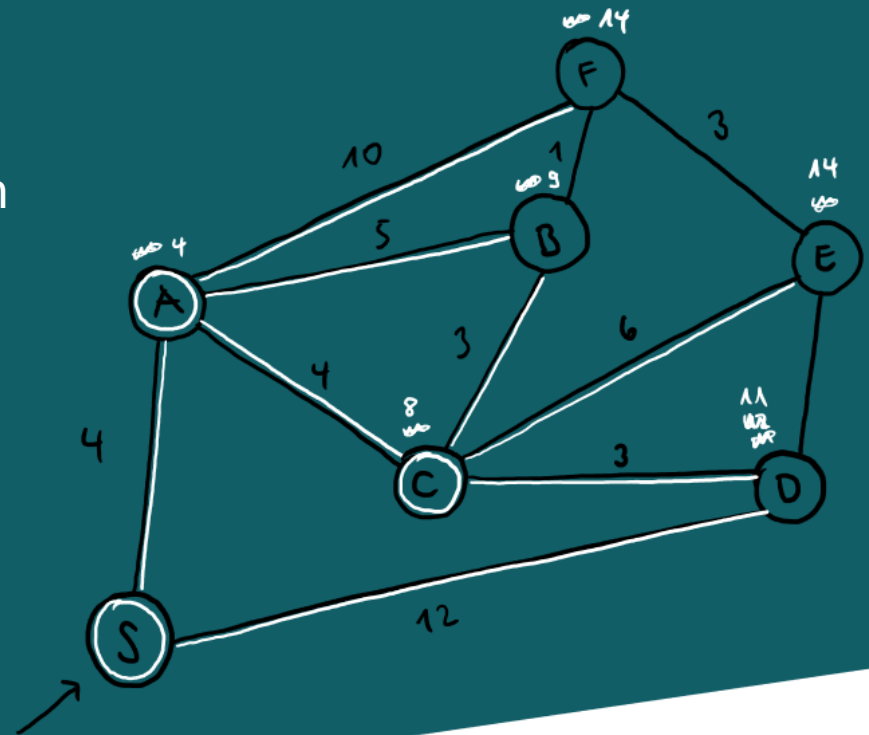


Funktionsprinzipien und Anwendungen von Algorithmen zur Pfadplanung

Tana Bögel, Moritz Hein, Jana Löwen



Funktionsprinzipien und Anwendungen von Algorithmen zur Pfadplanung

Tana Bögel, Moritz Hein, Jana Löwen

Informatik
Hauptcampus

H O C H
S C H U L E
T R I E R

- Aufgabe: kostengünstigsten bzw. kürzesten Weg finden
- Abhängig von Faktoren wie Hindernissen oder variablen Wegekosten
- Vielfältige Anwendungen

BELLMAN-FORD ALGORITHMUS

Informatik
Hauptcampus

H O C H
S C H U L E
T R I E R

Voraussetzungen

- Graph mit einer Menge von Knoten V und Kanten E [1]
- Keine negativen Zyklen
- Startknoten s und Zielknoten t [2]

[1] Struckmann, Wätjen (2016): Mathematik für Informatiker

[2] Ford Jr, Fulkerson (1964): Flows in Networks

Ablauf

- Initialisierungsphase
- $N-1$ Runden ($N = |V|$)
- Suche nach negativen Zyklen

Negativer Zyklus

Informatik
Hauptcampus

H O C H
S C H U L E
T R I E R

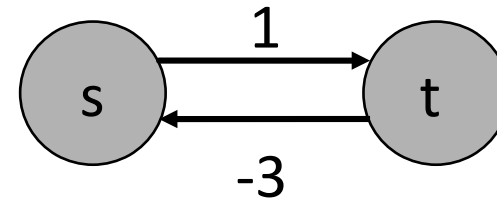
Negativer Zyklus

- Pfad der als Schleife durchlaufen werden kann und negative Gesamtkosten besitzt

Initialisierungsphase

- $d[s]=0 \rightarrow \text{parent}[s]=s$
- $d[t]=\infty \rightarrow \text{parent}[t]=-$

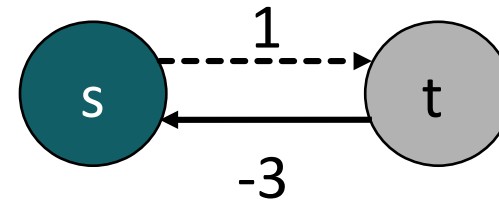
V	d	parent
s	0	s
t	∞	-



Runde 1

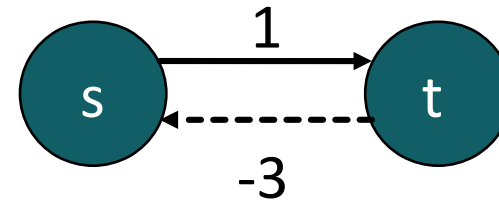
- $d[t]=1$
- $\text{parent}[t]=s$

V	d	parent
s	0	s
t	1	s



Suche nach negativen Zyklen

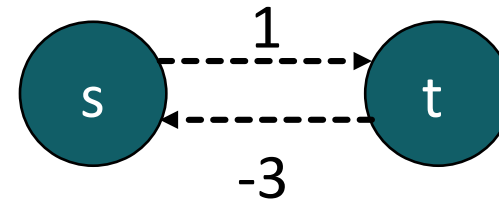
- $d[s] = 1 + (-3) = -2 < 0$
- $\text{parent}[s] = t$
- → Negativer Zyklus



V	d	parent
s	-2	t
t	1	s

Infiziere

- $d[s] = -\infty$
- $d[t] = -\infty$
- Es existiert kein kürzester Weg



V	d	parent
s	$-\infty$	t
t	$-\infty$	s

Beispiel

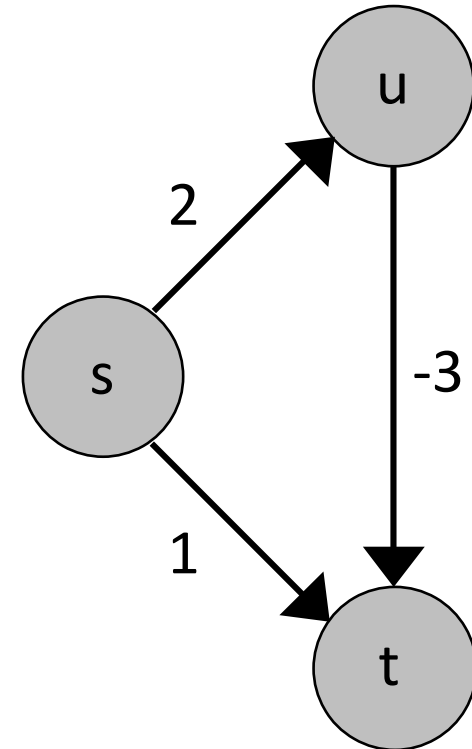
Informatik
Hauptcampus

H		O	C	H		
	S	C		H	U	L
						E
T	R		I	E	R	

Initialisierungsphase

- $d[s]=0 \rightarrow \text{parent}[s]=s$
- Alle anderen Distanzen auf ∞ setzen
- Alle anderen Vorgänger auf - setzen

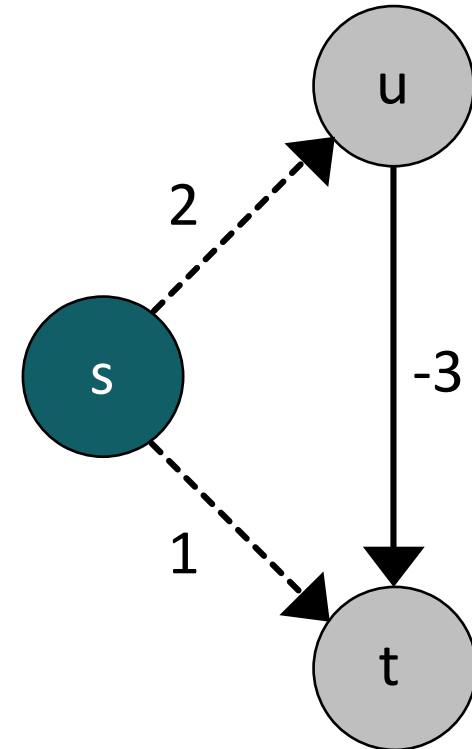
V	d	parent
s	0	s
u	∞	-
t	∞	-



Runde 1

- $d[u] = 0 + 2 = 2 < \infty \rightarrow \text{parent}[u] = s$
- $d[t] = 0 + 1 = 1 < \infty \rightarrow \text{parent}[t] = s$

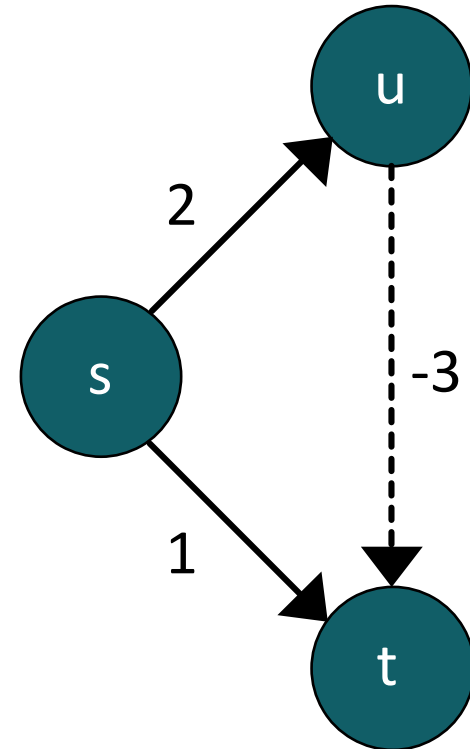
V	d	parent
s	0	s
u	2	s
t	1	s



Runde 2

- $d[t] = 2 + (-3) = -1 < 1 \rightarrow \text{parent}[t] = u$

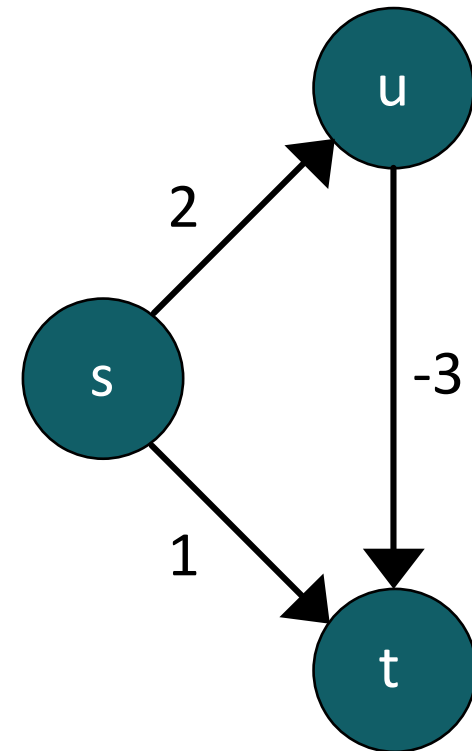
V	d	parent
s	0	s
u	2	s
t	-1	u



Suche nach negativen Zyklen

- Keine negativen Zyklen gefunden
- Kürzester Weg: $s \rightarrow u \rightarrow t$, $d[t] = -1$

V	d	parent
s	0	s
u	2	s
t	-1	u



Anwendungen

Informatik
Hauptcampus

H O C H
S C H U L E
T R I E R

Distance-Vector Routing

- Runden sind „hops“
- Startknoten ist „root“
- Nachfolger statt Vorgänger
- Router sind die Knoten und Verbindungen zwischen diesen sind die Kanten

Vorteile

- Gute Nachrichten verbreiten sich schnell

Nachteile

- Schlechte Nachrichten verbreiten sich langsam
- Count-To-Infinity Problem
- Router kennen nur Teile der Routing-Tabelle

Logistik- und Distributionsprobleme

- Für neue Knoten muss nicht gesamtes Netz neu berechnet werden
- Negative Kantengewichte sind erlaubt

DIJKSTRA-ALGORITHMUS

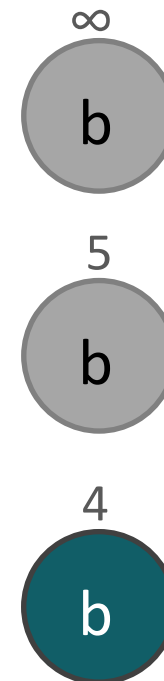
Informatik
Hauptcampus

H O C H
S C H U L E
T R I E R

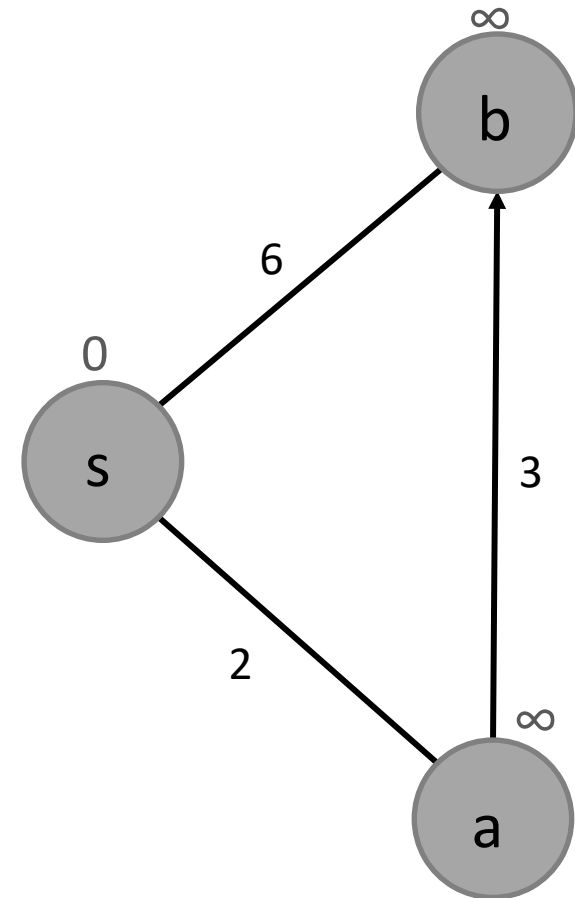
- Lösung des Single-Source Shortest Path Problems
 - findet kürzeste Wege vom Startknoten zu allen anderen Knoten im Graphen
- Voraussetzungen:
 - Graph mit einer Menge von Knoten V und Kanten E
 - Nichtnegative Kostenfunktion c
 - Startknoten s
- Liefert einen Baum mit den kürzesten Wegen

- Knoten erhalten nach jedem Schritt Markierungen

- Noch unbekannte Knoten:
- Temporär markierte Knoten:
- Permanent markierte Knoten:



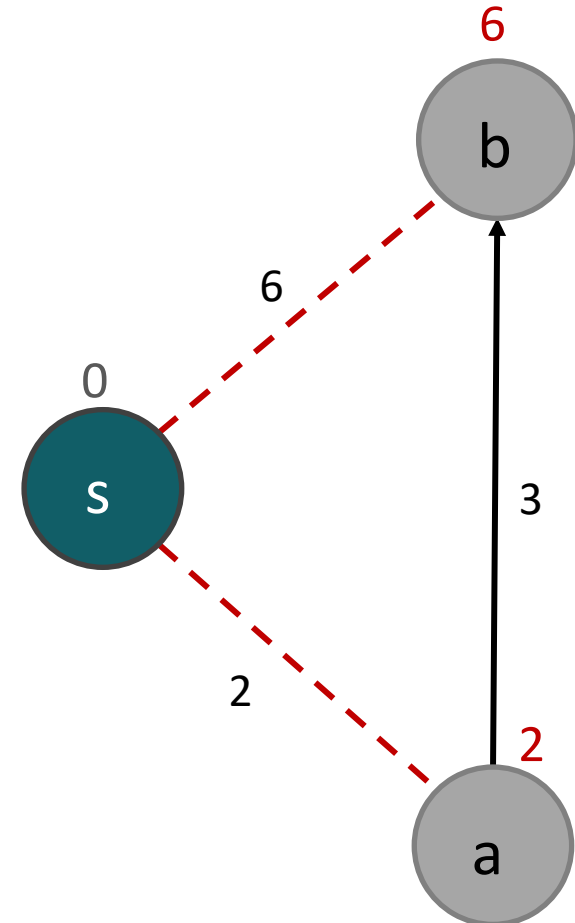
- Initialisierung:
- Der Startknoten s temporär markieren mit
 $d[s] = 0, \text{parent}[s] = s$
- Alle anderen Distanzen sind unendlich und die Vorgänger noch unbekannt



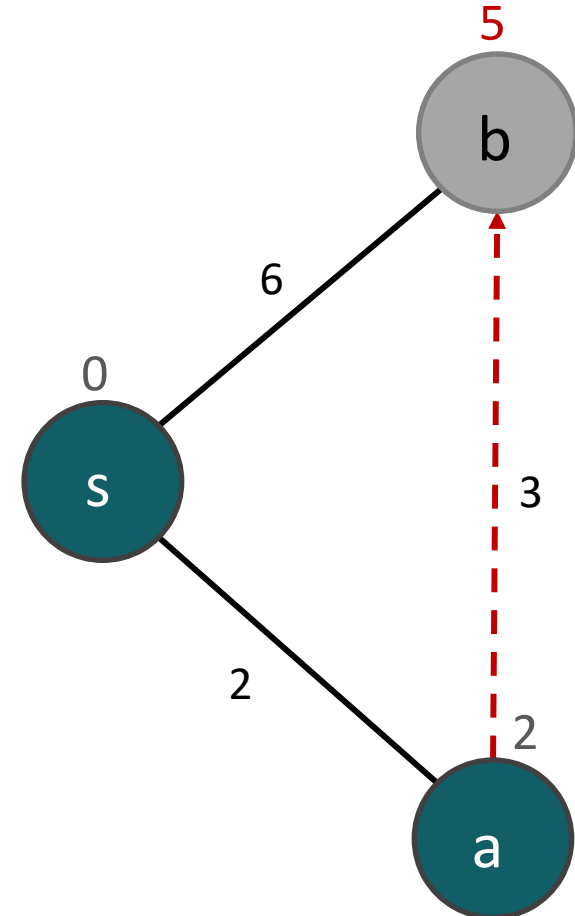
- Knoten s besuchen und permanent markieren
- Entfernungen vom Startknoten zu dessen Nachbarknoten gemäß der Kostenfunktion anpassen:

$$\begin{aligned}d[a] &= 2, \text{parent}[a] = s \\d[b] &= 6, \text{parent}[b] = s\end{aligned}$$

- Knoten a und b temporär markieren



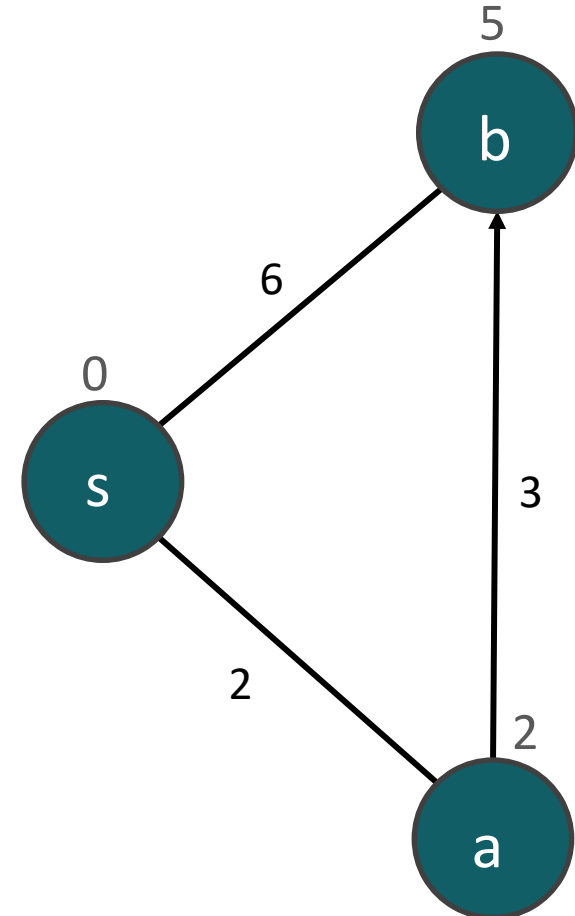
- Temporär markierten Knoten mit geringster Entfernung zu s besuchen und permanent markieren
- Entfernungen vom Startknoten über den besuchten Knoten zu dessen Nachbarknoten berechnen [1]:
$$d[b] = d[a] + c(a,b)$$
- Relaxierung bei Knoten b [2]:
$$d[b] = 5, \text{parent}[b] = a$$



[1] Brigitte Werners (2013): Grundlagen des Operation Research, Springer Gabler

[2] Martin Dietzfelbinger (2014): Algorithmen und Datenstrukturen, Springer Vieweg

- Temporär markierten Knoten mit geringster Entfernung zu s besuchen permanent markieren
- Da alle Knoten nun permanent markiert sind, ist der Algorithmus beendet



- Alle N Knoten erhalten genau einmal eine permanente Markierung
- Jeder Knoten hat maximal $N-1$ Nachbarn, für die die Distanz berechnet werden muss
- Damit ergibt sich: $O(N \cdot N-1) = O(N^2)$
- Die exakte Laufzeit ist von der Wahl der Priorityqueue abhängig → Verbesserung möglich

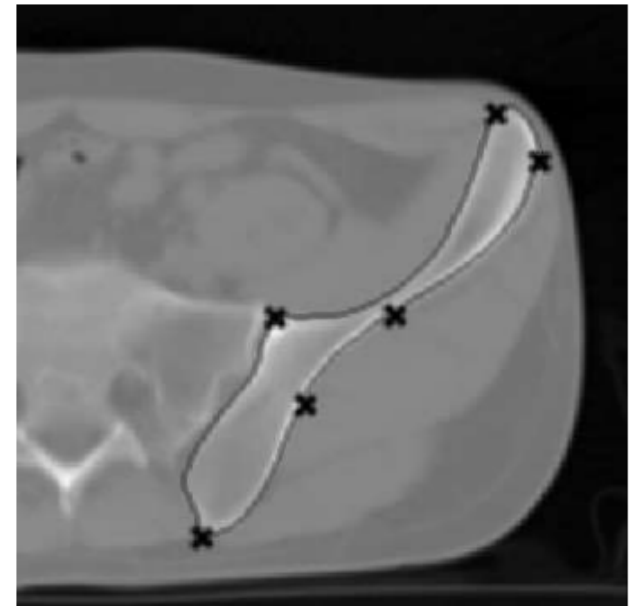
Anwendungen

Informatik
Hauptcampus

H O C H
S C H U L E
T R I E R

- Straßennetz wird durch den Graphen repräsentiert
- Lösung des Single-Pair Shortest Path Problems
→ findet kürzesten Weg von s zu t
- Angabe der Fahrtzeit anhand von Durchschnittsgeschwindigkeiten → Berechnung von
 - Entfernung auf schnellstem Weg sowie
 - Fahrtzeit auf kürzestem Weg
- Effizientere Varianten: frühzeitiges Stoppen, bidirektionale Suche

- Zur Auswertung medizinischer Bilder für Diagnosen und Therapien
- Abgrenzung von relevanten Strukturen, beispielsweise Tumoren
- Verwendung des Live-Wire-Verfahrens:
 - Hervorhebung der Objektkontur ausgehend vom Startpunkt über gewählte Saatpunkte bis zum Mauszeiger [1]



Segmentierung des Darmbeins [2]

[1] Sebastian Dörn (2017): Programmieren für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Springer Vieweg

[2] Heinz Handels (2009): Medizinische Bildverarbeitung, Vieweg + Teubner

- Live-Wire-Verfahren:
 - Transformation des Bildes in einen Graphen:
Bildpunkt \triangleq Knoten, Kontur \triangleq Pfad
 - Bei der Kostenfunktion entspricht kostengünstigster Weg entspricht möglichst der Objektkontur
 - Kostengünstigsten Weg mit Hilfe des Dijkstra-Algorithmus berechnen und optisch hervorheben

- Ermöglicht die Kommunikation und Datenübertragung zweier Rechner aus verschiedenen lokalen Netzwerken (LANs) [1]
- Router speichern Nachbarn und Distanzen in Link-State-Paketen → Verteilung an Router im Netzwerk per Flooding [2]
- Berechnung des kürzesten Weges zu allen andere Routern mit Hilfe des Dijkstra-Algorithmus
- Verkürzung der Laufzeit durch Aufteilung in Teilnetzwerke [1]

[1] Gerald Teschl (2013): Mathematik für Informatiker, Springer Vieweg

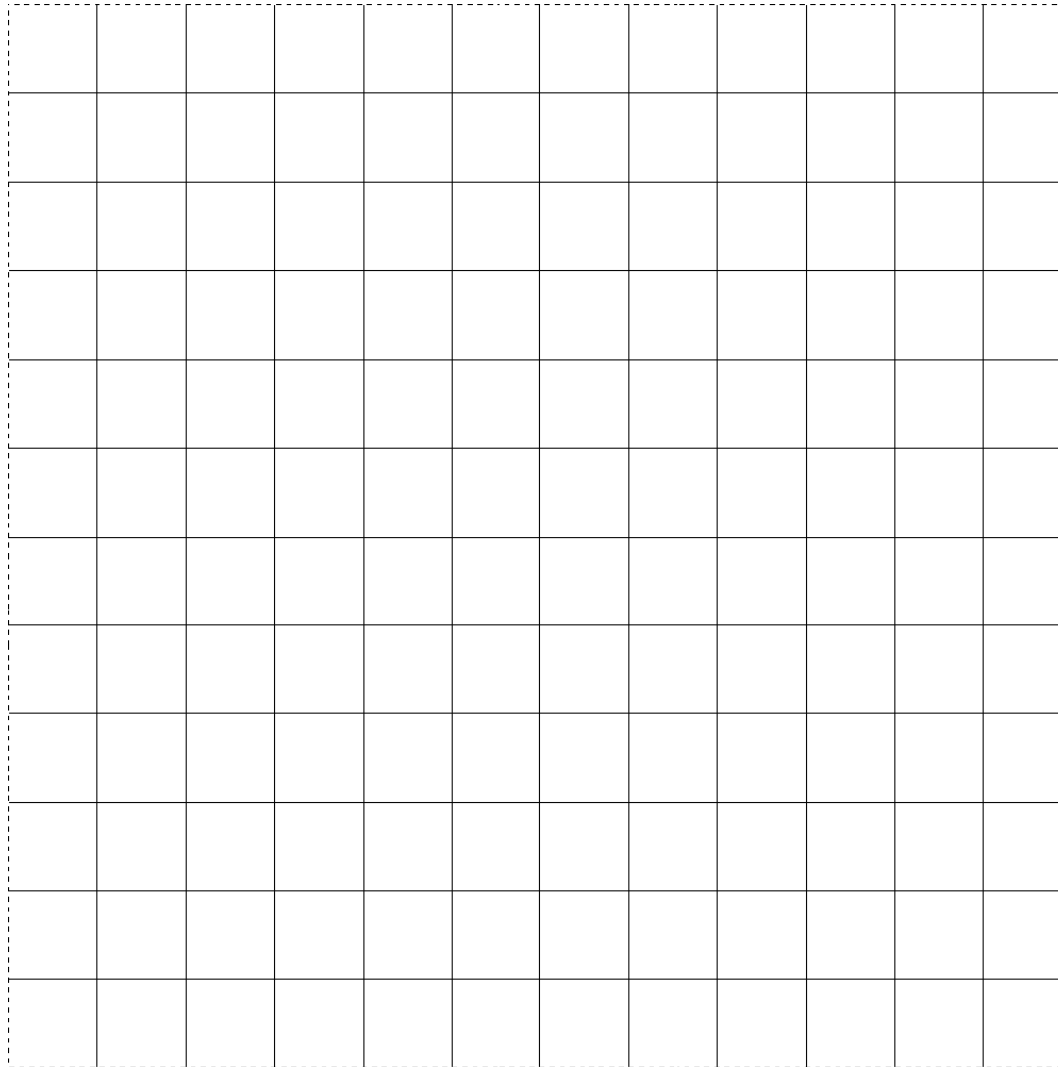
[2] Baun (2019): Computer Networks, Springer Vieweg

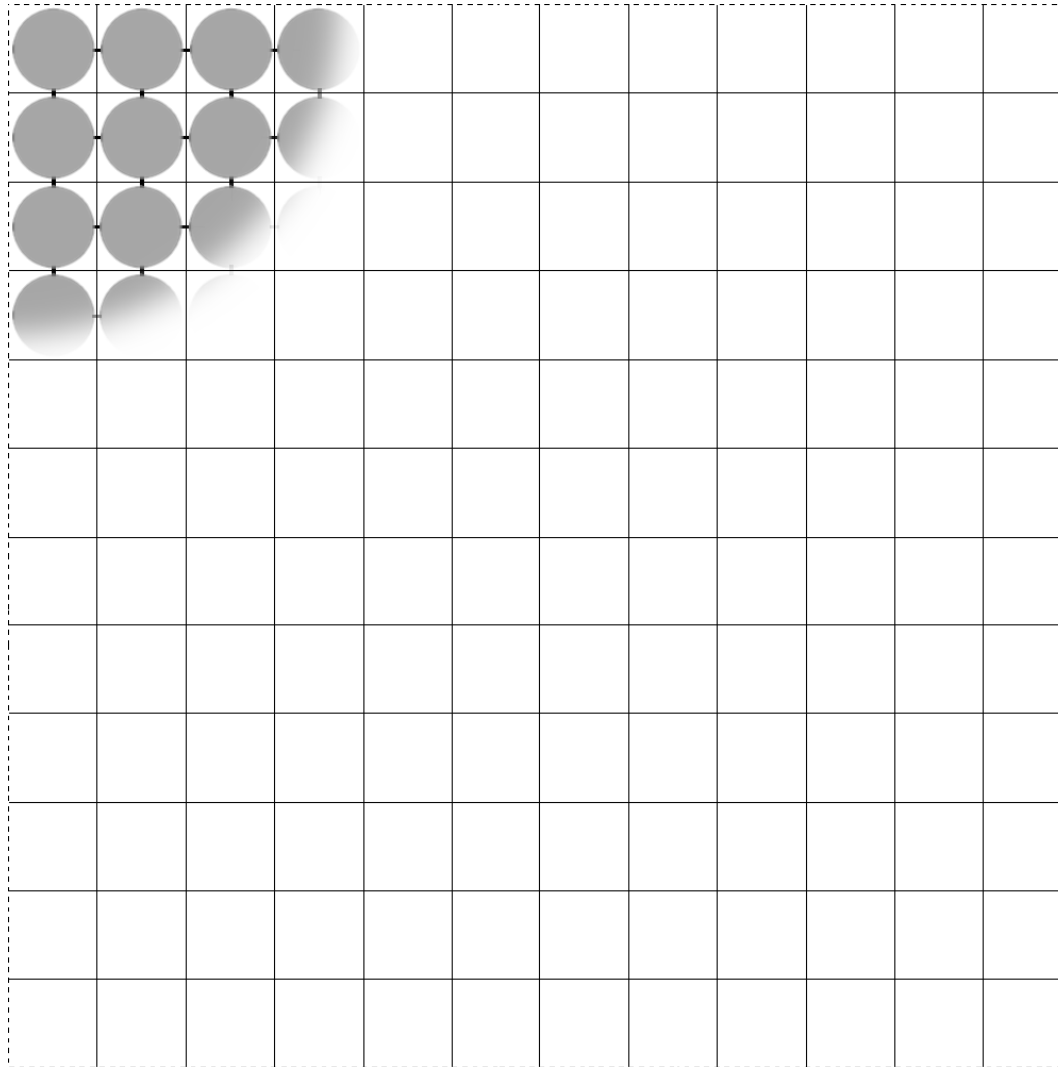
A-STERN ALGORITHMUS

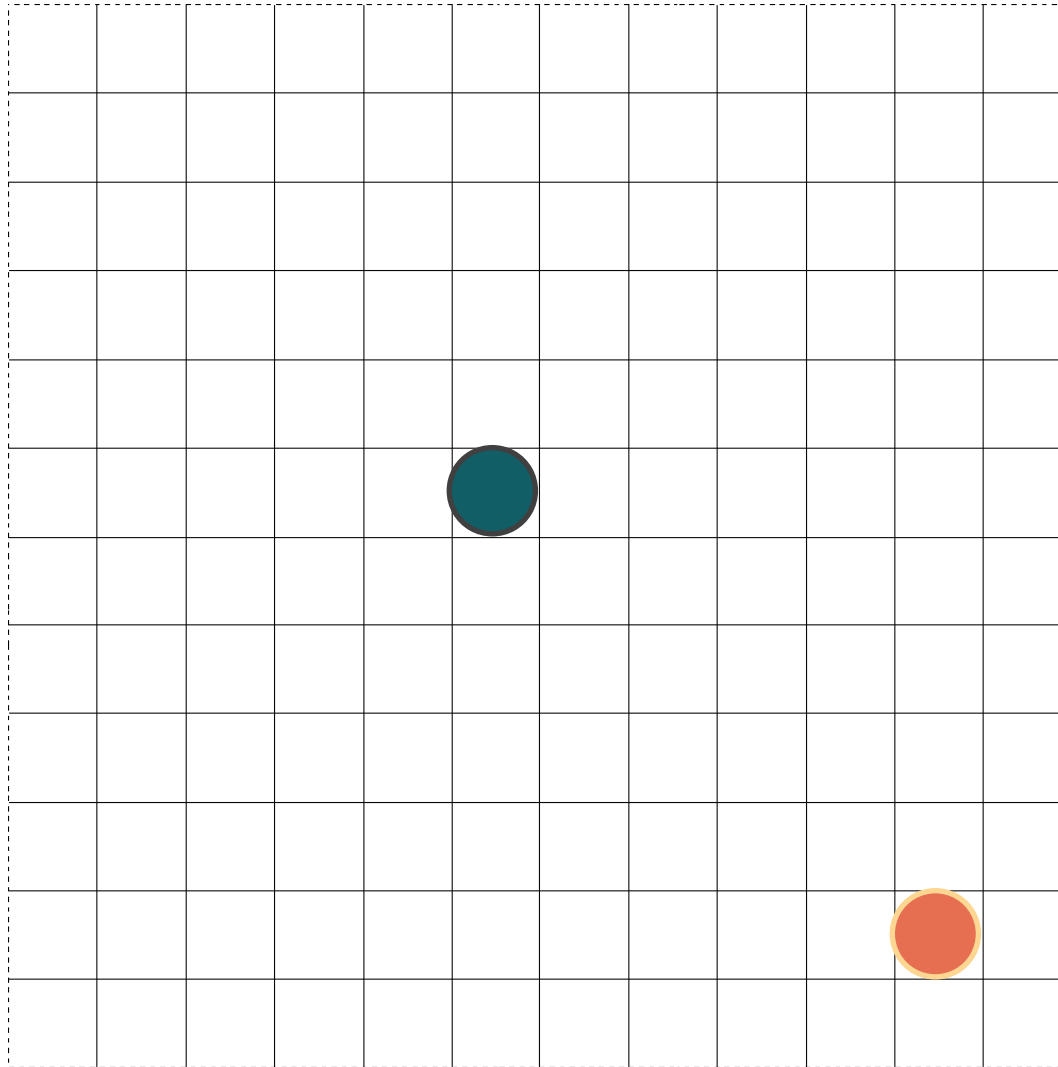
Informatik
Hauptcampus

H O C H
S C H U L E
T R I E R

- Berechnet kürzesten Pfad eines kantengewichteten Graphen
- Basiert auf Dijkstra-Algorithmus
- Unterstützt keine negativ gewichteten Kanten
- Nutzt eine heuristische Funktion um effizienter zu suchen







- PLACEHOLDER - Dijkstra erkundete Nachbarn zum Ziel, Pfeil direkt zum Ziel mit kleinerer erkundeten Fläche auf der nächsten Folie

Heuristische Funktion

Informatik
Hauptcampus

H O C H
S C H U L E
T R I E R

„Mit begrenztem Wissen und wenig Zeit dennoch zu wahrscheinlichen Aussagen oder praktikablen Lösungen zu kommen.“

- „Simple heuristics that make us smart“, G. Gigerenzer und P. M. Todd (1999)

Veränderte Kostenfunktion

$$f(n) = g(n) + h(n)$$

Kosten vom
Startknoten



Geschätzte
Kosten bis
zum Zielknoten



Zusammenfassung & Ausblick

Informatik
Hauptcampus

H O C H
S C H U L E
T R I E R

- Bellman-Ford Algorithmus: Umgang mit negativen Kantengewichten
 - Dijkstra-Algorithmus: universell einsetzbar
 - A*-Algorithmus: Anpassung an Problemdomäne
- Hohe Relevanz auch in Zukunft

Gibt es noch Fragen?

Informatik
Hauptcampus

H O C H
S C H U L E
T R I E R

Vielen Dank für eure
Aufmerksamkeit!

Informatik
Hauptcampus

H O C H
S C H U L E
T R I E R