课后练习1

1 问题一

我们要求的是：

$$
\begin{aligned}
&\min_{x,y,z} x^2+y^2+z^2 \\
\text{s.t.}\quad & x+y+z=9 \\
& x+2y+3z=20
\end{aligned}
$$

因此我们可以构造拉格朗日多项式：

$$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=x^2+y^2+z^2+\lambda_1(x+y+z-9)+\lambda_2(x+2y+3z-20)$$

对于使$f(x,y,z)$最小的x^*,y^*,z^*，我们有：

$$
\begin{aligned}
\nabla_x L(x^*,y^*,z^*,\lambda_1,\lambda_2)=0 \\
\nabla_y L(x^*,y^*,z^*,\lambda_1,\lambda_2)=0 \\
\nabla_z L(x^*,y^*,z^*,\lambda_1,\lambda_2)=0 \\
\nabla_{\lambda_1} L(x^*,y^*,z^*,\lambda_1,\lambda_2)=0 \\
\nabla_{\lambda_2} L(x^*,y^*,z^*,\lambda_1,\lambda_2)=0
\end{aligned}
$$

解得：

$$
\begin{aligned}
& x^*=3 \\
& y^*=4 \\
& z^*=5 \\
& \lambda_1=\lambda_2=-2
\end{aligned}
$$

因此$\min\limits_{x,y,z} f(x,y,z)=50$

2 问题二

2.1

对于平面上的样本，它们都满足：

$$y_i(w^T x_i + b) \geq 1$$

取等号当且仅当x_i是支持向量. 现在已知$(6,5),(5,9),(2,4)$为支持向量，假设超平面为$w_1x_1 + w_2x_2 + b = 0$，则有：

$$\begin{aligned}
y_{(6,5)}(6w_1 + 5w_2 + b) = 1 \\
y_{(5,9)}(5w_1 + 9w_2 + b) = 1 \\
y_{(2,4)}(2w_1 + 4w_2 + b) = 1
\end{aligned}$$

解得：

$$\begin{aligned}
& w = (\frac{8}{17}, \frac{2}{17})^T \\
& b = -\frac{41}{17}
\end{aligned}$$

2.2

对于$x_1 = (1,15)$和$x_2 = (4,2)$，有$wx_1 + b < 0$和$wx_2 + b < 0$. 因此两个新样本点都是负样本.

2.3

3 问题三

3.1

由于已知$\alpha_i > 0, \ \forall i$，故这6个样本点均为支持向量，首先计算$w$：

$$\begin{aligned}
w &= \sum_{i=1}^{6} \alpha_i y_i x_i \\
&= (0, -2.1)^T
\end{aligned}$$

因此可以计算得到：

$$\begin{aligned}
b &= \frac{1}{y_1} - w^T x_1 \\
&= 3.01
\end{aligned}$$

3.2

3.3

4 问题四

4.1

4.2

4.3