# 1장. 확률의 소개

#### 김선화

#### 2017-09-13

* [1 확률의 해석](#gjdgxs)
  + [1.1 빈도적 해석](#gjdgxs)
  + [1.2 고전적 해석](#gjdgxs)
  + [1.3 주관적 해석](#gjdgxs)
* [2 확률의 정의](#gjdgxs)
* [3 조건부 확률](#gjdgxs)
  + [3.1 조건부 확률을 이용한 곱 & 교집합](#30j0zll)
  + [3.2 전확률공식 & 베이즈 정리](#1fob9te)
* 4 독립사건

**1** 확률의 해석

일어날 수 있는 모든 결과 중 일부가 일어날 **가능성**을 0~1 숫자로 표현

**1.1** 빈도적 해석

* 한 과정이 **유사한** 조건하에 **수없이 반복**되었을 때
* **상대도수**
* 반복횟수가 충분히 크면 발생한 사건에 대한 확률을 설득력있게 설명할 수 있음
* 예) 동전을 던질 때 앞면이 나올 확률은?  
    
  유사한 조건하에 수없이 던질 때 앞면이 나오는 비율은 거의 1/2
* 단점
  + **몇 번을 실험해야 충분히**, 수없이라고 간주할 수 있을까? 실제적인 수가 없다
  + 유사한 조건하에서 매번 반복? 어떤 조건을 유사하게 할건지 자세하지 않다

**1.2** 고전적 해석

* 표본공간 S의 모든 원소들이 각각 발생할 가능성이 모두 똑같다고 가정 (표본공간 S에 있는 원소들은 유한)
* 예) 동전을 던질 때 앞면이 나올 확률은?  
  앞면 또는 뒷면 2가지 결과  
  표본공간 S에 앞면, 뒷면이라는 원소가 있고 확률의 합은 1이므로  
  앞면과 뒷면이 각각 일어날 확률은 1/2
* 단점
  + 표본공간 내 원소들이 각각 일어날 가능성은 서로 다를수도  
      
    예) 동전이 찌그러졌다면? 동전 표면에 튀어나온 면적에 따른 영향이 존재한다면?

**1.3** 주관적 해석

* 예전에 비슷하게 겪었던 상황을 참고하거나 그 외 다른 방식으로 주관적으로 확률을 결정지음
* 예) 동전을 던질 때 앞면이 나올 확률은?  
  사람1 - 앞면에 튀어나온 부분이 더 많으니 저항(?)과 마찰(?)에 의해 1/2보다 좀더 클/작을거야!  
  사람2 - 에이 그 영향력이 얼마나 되겠어 1/2일 듯?   
  사람3 - 예전에 실제로 10번 던져보니 6번 나오더라. 예전 경험 살려면 앞면이 나올 확률은 3/5일걸
* 단점
  + 사람마다 다른 확률을 부여해서 각기 다른 결과와 해석이 나올 수 있다. 심하면 모순 생길수도

**2** 확률의 정의

* 표본공간 S(sample space) : 일어날 수 있는 모든 결과가 있는 공간  
    
  예) 동전 던졌을 때 나타날 수 있는 결과?, 몸무게?
* 사건 A(event) : 표본공간 \(S\)의 일부, 즉, 부분집합 (관심 결과에 대한 것)
* 확률의 3가지 구성요소 : (\(\Omega , A, P\))
* [**공리(axiom)**](https://ko.wikipedia.org/wiki/%EA%B3%B5%EB%A6%AC)[1](#3znysh7)  
    
  표본공간 \(S\) 안의 각 사건 \(A\)에 실수 \(P(A)\)를 대응시키는 집합 함수(set function) \(P\)가 다음 공리를 모두 만족하면 \(P\)는 **확률** *(그림 참고)*
  + 임의의 사건 \(A\)에 대해 \(P(A)\geq 0\)
  + \(P(S)=1\)
  + 임의의 무한 배반사건[2](#2et92p0) \(A\_1, A\_2,\) …에 대해 합사건의 확률 = 각 사건의 확률 합. 즉, \[P(\bigcup\_{i=1}^{\infty}A\_i)=\sum\_{i=1}^{\infty}P(A\_i)\]
* 위 공리에서 나온 **정리**
  + \(P(\emptyset)=0\)
  + 임의의 유한 배반사건 \(A\_1, A\_2, ..., A\_n\)에 대해 \[P(\bigcup\_{i=1}^{n}A\_i)=\sum\_{i=1}^{n}P(A\_i)\]
* 확률의 **성질(정리)**
  + 임의의 사건 \(A\)에 대해 그 여집합이 일어날 확률은 \(P(A^c)=1-P(A)\)
  + \(A\subset B\)이면 \(P(A)\leq P(B)\) → 대소관계, 숫자를 통해 알 수 있듯 확률을 집합의 크기를 재는 측도이기도
  + 임의의 두 사건 \(A\), \(B\)에 대해 \(P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\)
    - \(P(A\cup B)\leq P(A)+P(B)\)
    - 임의의 사건이 하나 더 늘어나면? \[P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)\]
    - 임의의 사건 유한개에 적용하면? *(그림 참고)* \[P(\bigcup\_{i=1}^{n}A\_i)=\sum\_{i=1}^{n}P(A\_i)-\sum\_{i<j}^{}P(A\_i\cap A\_j)+\sum\_{i<j<k}^{}P(A\_i\cap A\_j\cap A\_k)-\sum\_{i<j<k<l}^{}P(A\_i\cap A\_j\cap A\_k\cap A\_l)+...+(-1)^{n+1}P(A\_1\cap A\_2\cap ...\cap A\_n)\]
      * 사건 n개의 확률을 모두 더하고
      * 가능한 두 사건의 교집합(\(\_nC\_2\))에 해당하는 확률을 뺀 다음에
      * 가능한 세 사건의 교집합(\(\_nC\_3\))에 해당하는 확률을 다시 더한 후
      * …
      * 홀수, 짝수인가에 따라 모든 n개 사건의 교집합에 해당하는 확률을 더하거나 빼는 방법으로 반복
    - 예  
      숫자 1~20 중 하나 고를 때 2의 배수이거나 3의 배수일 확률은?\(A\_k\) : \(k\)의 배수가 나올 사건  
        
      \[P(A\_2)=\frac{10}{20}, P(A\_3)=\frac{6}{20}, P(A\_2\cap A\_3)=P(A\_6)=\frac{3}{20}\] \[∴ P(A\_2\cup A\_3)=P(A\_2)+P(A\_3)-P(A\_2\cap A\_3)=\frac{13}{20}\]
  + Boole’s inequality : 임의의 사건 \(A\_1, A\_2,\) …에 대해 *(그림 참고)* \[P(\bigcup\_{i=1}^{\infty}A\_i)\leq \sum\_{i=1}^{\infty}P(A\_i)\]
    - 합사건(합집합)에 대한 상한(?) 확률을 알 수 있다. 즉, 각 사건이 일어날 확률의 합보다 클 수 없다
  + Bonferroni’s inequality : 임의의 사건 \(A\_1, A\_2, ..., A\_k\)에 대해 \[P(\bigcap\_{i=1}^{k}A\_i)\geq 1-\sum\_{i=1}^{k}P(A^c\_i)\]
    - 곱사건(교집합)에 대한 하한(?) 확률을 알 수 있다
    - 곱사건에 대한 정확한 확률을 계산하기 힘들 때 유용
    - 예) \(P(A\_1)=P(A\_2)=0.95일 때, P(A\_1\cap A\_2)\geq 0.90\) → 두 사건이 일어날 확률은 최소한 0.9는 될 것이다
    - 개별 사건의 확률이 충분히 크지 않으면 하한이 음수가 나오게 되어 본페로니 부등식은 의미없게 된다. 제대로 쓰려면 하한이 음수가 나오지 않도록 개별 사건의 확률이 충분히 커야한다

**3** 조건부 확률

어떤 사건이 일어났을 때(이 조건하에서) 다른 사건이 일어날 확률

* 예) 임의로 남자 1명을 선택했을 때, 그 사람이 안경 쓰지 않을 확률은?

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 안경O | 안경X | 계 |
| 남자 | 10 | 50 | 60 |
| 여자 | 10 | 30 | 40 |
| 계 | 20 | 80 | 100 |

* 다른 사건이 일어났다는 정보를 활용하기 때문에 정보 없을 때의 확률과 달라진다
* 정의

\[P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}, P(B)\neq 0\]

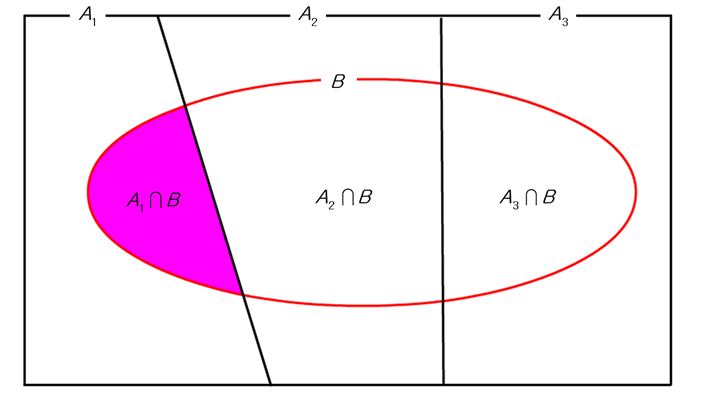
- 실험 결과는 B에 포함된 결과 중 하나이기 때문에 분자에 두 사건의 교집합에 대한 확률이 들어갔다  
- 기존의 표본공간 S에서 새로운 표본공간 B로!

* 위 예로 다시 돌아와서 임의로 남자 1명을 선택했을 때, 그 사람이 안경 쓰지 않을 확률은?
* **공리**  
    
  조건부 확률도 확률의 하나이므로 위에 있던 확률의 공리 3가지를 따른다. \(P(B)>0\)이면
  + \(P(A|B)\geq 0\)
  + \(P(S|B)=1\)
  + 서로 배반인 \(A\_1, A\_2\)에 대해 \[P(A\_1\cup A\_2|B)=\frac{P[(A\_1\cup A\_2)\cap B]}{P(B)}=\frac{P(A\_1\cap B)+P(A\_2\cap B)}{P(B)}=P(A\_1|B)+P(A\_2|B)\] 즉, 어떤 특정 조건하에서 두 사건의 합집합에 대한 확률은 그 특정 조건하에서 각 사건의 확률을 더한 것과 같다
    - 사건이 3개 이상이면? \[P(\bigcup\_{i=1}^{\infty}A\_i|B)=\sum\_{i}^{}P(A\_i|B)\] 이것도 위처럼 비슷하게 이해하고 이용하면 된다
* 위 공리에서 나온 조건부 확률의 성질  
    
  위 안경에 대한 예시 표를 보며 아래 내용을 이해해보자
  + \(P(A^c|B)=1-P(A|B)\)  
      
    → B라는 조건하에서 사건 A의 여집합(A가 일어나지 않을) 확률은 1에서 B라는 조건하에서 사건 A의 확률이다
  + \(P(\emptyset |B)=0\)  
      
    → B라는 조건하에서 공집합(아무것도 일어나지 않을) 확률은 0이다
  + \(A\_1\subset A\_2\)이면 \(P(A\_1|B)\leq P(A\_2|B)\)  
      
    → 사건 \(A\_2\)가 사건 \(A\_1\)보다 크면 B라는 조건하에서의 각 사건에 대한 확률도 \(A\_2\) 쪽이 더 크다
  + \(P(A\_1\cup A\_2|B)=P(A\_1|B)+P(A\_2|B)-P(A\_1\cap A\_2|B)\)  
      
    → B라는 조건하에서 사건 \(A\_1\)이나 \(A\_2\) 둘 중 하나가 일어날 확률은 B라는 조건하에서 두 사건의 각 확률을 더한 후 곱사건의 확률을 빼준 것과 같다

**3.1** 조건부 확률을 이용한 곱 & 교집합

* 두 사건 A, B가 모두 일어나려면(고려해야 한다면)?
  + 먼저 사건 B가 일어난 후 사건 A가 일어나거나
  + 사건 A가 일어난 후 사건 B가 일어나거나
* 즉, 교집합에 대한 확률을 구하는 데에 조건부 확률을 이용할 수 있다
* \(P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B)\) \[∵ P(A)P(B|A)=P(A)\frac{P(A\cap B)}{P(A)}\] \[∵ P(B)P(A|B)=P(B)\frac{P(B\cap A)}{P(B)}\]
* 예) 붉은 공 3개, 푸른 공 5개가 들어있는 주머니에서 공 2개를 비복원추출할 때 2개 모두 푸른색일 확률은?  
    
  \(A\_i\) : \(i\)번째 꺼낸 공이 푸른색인 사건 \[P(A\_1)=\frac{5}{8}, P(A\_2|A\_1)=\frac{4}{7}\]  
    
  2개 모두 푸른색일 사건 \(A\_1\cap A\_2\)에 대한 확률은 \[P(A\_1\cap A\_2)=P(A\_1)P(A\_2|A\_1)=\frac{5}{8}\times \frac{4}{7}\]
* 여러 사건이 있을 때 확장하면?  
    
  임의의 사건 \(A\_1, A\_2, ..., A\_k\)이 \(P(A\_1)>0, P(A\_1\cap A\_2)>0, ..., P(A\_1\cap A\_2\cap ...\cap A\_{n-1})>0\)을 만족한다고 하자. 그러면  
    
  \(P(A\_1\cap A\_2\cap ...\cap A\_{n-1}\cap A\_n)\) \[ =P(A\_1)\frac{P[A\_1\cap A\_2]}{P(A\_1)}\frac{P[A\_1\cap A\_2\cap A\_3]}{P(A\_1\cap A\_2)}...\frac{P[A\_1\cap A\_2\cap ...A\_n]}{P(A\_1\cap A\_2\cap ...\cap A\_{n-1})}\] \[ =P(A\_1)P(A\_2|A\_1)P(A\_3|A\_1\cap A\_2)...P(A\_n|A\_1\cap A\_2\cap ...\cap A\_{n-1})\]
  + 예) 붉은 공 3개, 푸른 공 5개가 들어있는 주머니에서 공 3개를 비복원추출할 때 공 3개 모두 푸른색일 확률은? \[P(A\_1)=\frac{5}{8}, P(A\_2|A\_1)=\frac{4}{7}, P(A\_3|A\_1\cap A\_2)=\frac{3}{6}\] 3개 모두 푸른색일 사건 \(A\_1\cap A\_2\cap A\_3\)에 대한 확률은 \[P(A\_1\cap A\_2 \cap A\_3)=P(A\_1)P(A\_2|A\_1)P(A\_3|A\_1\cap A\_2)=\frac{5}{8}\times \frac{4}{7}\times \frac{3}{6}\]

**3.2** 전확률공식 & 베이즈 정리

표본공간 \(S\)가 사건 \(n\)개 \(A\_1, A\_2, ..., A\_n\)의 **분할(partition)**[3](#tyjcwt)로 이루어진다고 하자. 만약 사건 \(B\)가 표본공간 \(S\)에 있는 임의의 사건이라고 하면 사건 \(B\)는 \(A\_1\cap B, A\_2\cap B, ..., A\_n\cap B\)의 분할로 이루어질 것이다. 

그러므로 \[B=(A\_1\cap B)\cup (A\_2\cap B)\cup ...\cup (A\_n\cap B)\] \[\Rightarrow P(B)=P(A\_1\cap B)+P(A\_2\cap B)+...+P(A\_n\cap B)\]

\[P(B)=\sum\_{k=1}^{n}P(A\_k\cap B)\]

즉, 사건 B의 확률은 B와 각 사건들의 교집합에 대한 확률들의 합과 같다

사건 *B의 확률을 바로 못 구할 때*(예로 들면 사건 B에 대한 정보가 다른 사건들(\(A\_1, A\_2, ...\))과 각각 결합하여 나뉘어져 있는 경우) 이걸 활용할 수 있다

근데 *교집합에 대한 확률도 바로 구하기 힘들다면?* 식에 조건부확률 공식을 적용해보자

* **전확률공식(total probability formula)**  
    
  사건 \(A\_1, A\_2, ..., A\_n\)이 표본공간 \(S\)의 분할이고 \(P(A\_k)>0, (k=1, 2, ..., n),\) 즉, 각 사건 모두 확률이 0보다 클 때, 임의의 사건 \(B\)의 확률은 \[P(B)=\sum\_{k=1}^{n}P(A\_k)P(B|A\_k)\]
  + 예) [12, 16p](https://www.slideshare.net/yoonani/05-30176396)

어떤 사건 B의 원인(\(A\_1, A\_2, ..., A\_n\))이 여러 가지일 때, 원인 \(A\_i\)에 대한 확률은?

* **베이즈 정리(Bayes Theorem)**
  + \(P(A\cap B)\)와 \(P(A)\) 또는 \(P(B)\)가 직접 안 주어진 상황에서 조건부 확률을 구해야하면 유용
  + 위 전확률공식 정리와 이전 조건부 확률을 정의와 공식에다 임의의 사건 \(B\)의 확률 \(P(B)>0\) 조건을 만족하면, *(분할 그림 참고)* \[P(A\_i|B)=\frac{P(A\_i)P(B|A\_i)}{\sum\_{k=1}^{n}P(A\_k)P(B|A\_k)}, i=1, 2, ..., n\]
  + 예) [17p](https://www.slideshare.net/yoonani/05-30176396)
  + 예) 공장에서 기계 3대 \(M\_1, M\_2, M\_3\)로 각각 전 제품의 20%, 30%, 50%를 생산, 각 기계에서 생산되는 제품의 불량률은 각각 1%, 2%, 3%. 공장에서 생산된 제품 중 무작위로 뽑은 한 제품이 불량품. 이 불량품이 기계 \(M\_2\)에서 생산됐을 확률은?  
      
    → 표본공간 \(S\)는 무엇인가? 공장에서 생산되는 전 제품  
      
    → 사건 \(A\_i\)를 무엇이라고 설정할 것인가? 제품이 기계 \(M\_i(i=1, 2, 3)\)로 생산된 사건  
      
    → 사건 \(B\)는 불량품일 사건으로 정하자  
      
    → 각 사건이 일어날 확률은 얼마인가? \[P(A\_1)=0.2, P(A\_2)=0.3, P(A\_5)=0.5\] \[P(B|A\_1)=0.01, P(B|A\_2)=0.02, P(B|A\_5)=0.03\] \[P(A\_2|B)=\frac{P(A\_2)P(B|A\_2)}{\sum\_{k=1}^{3}P(A\_k)P(B|A\_k)}=\frac{0.3\times 0.02}{0.2\times 0.01+0.3\times 0.02+0.5\times 0.03}\]

**4** 독립사건

[14p](https://www.slideshare.net/yoonani/05-30176396)

책 46, 47p 정리

나중에 해당내용 수정

1. 공리 : 다른 명제들을 증명하기 위한 전제로 이용되는 가장 기본적인 가정[↩](#3dy6vkm)
2. 배반사건 : 교집합이 공집합인 두 사건. 즉, 동시에 일어날 수 없는 사건[↩](#1t3h5sf)
3. 분할 : 사건 \(A\_1, A\_2, ..., A\_n\)이 모두 **서로 배반**(아무거나 몇 개 골랐을 때 모두 배반이어야 함)이고, 이 **사건들의 합집합이 표본공간**. 즉, \[\bigcup\_{i=1}^{n}B\_i=S\][↩](#4d34og8)