复变函数速成

咕咕嘎嘎

目录

本手册浓缩了复积分（留数法）中常用的工具、Jordan 大弧与小弧引理、以及若干典型例题的解法步骤.

第 1 章 全纯函数

1.1 Cauchy–Riemann 方程

定理 1.1 (解析（全纯）函数的定义)

设 $U \subset \mathbb{C}$ 为开集。函数 $f : U \to \mathbb{C}$ 在 $z_0 \in U$ 处称为全纯（解析），若复导数

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

存在；若对 U 中每一点均存在该极限，则称 f 在 U 全纯。♡

定义 1.1 (Cauchy–Riemann 方程)

设 $f = u + iv$（u, v 为实值函数），若 u, v 在点 $z_0 = (x_0, y_0)$ 的偏导存在且连续，则 f 在该点可复微的充分必要条件为

$$u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x$$

（在点处成立）。♣

证明 （要点）从复定义出发，写

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{\Delta x + i\Delta y} + i\frac{v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{\Delta x + i\Delta y}.$$

分别沿实轴方向与虚轴方向取极限，并比较实部与虚部，得到 CR 方程；带反向条件并用偏导连续性可将局部实可微性与 CR 推回复可微性。

例题 1.1 令 $f(z) = \bar{z}$. 写 $u(x, y) = x$, $v(x, y) = -y$。代入 CR 得 $u_x = 1, v_y = -1$，不满足 $u_x = v_y$，因此 f 处处不可复微（除非退化情形）。

1.2 Cauchy 积分定理与 Cauchy 积分公式

定义 1.2 (Cauchy 积分定理)

设 U 是单连通开集，f 在 U 全纯。若 $\Gamma \subset U$ 为分段光滑的闭曲线，则

$$\oint_\Gamma f(z)\, dz = 0.$$

♣

证明 （要点）可用 Green 定理把复积分转为实二重积分：写 $f = u + iv$，则

$$\oint_\Gamma f(z)\, dz = \iint_D \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\, dy + i \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\, dy,$$

CR 方程使被积为零，从而积分为 0。另一种更抽象的证明用同伦变形或原始函数存在性。

定义 1.3 (Cauchy 积分公式)

设 f 在闭盘 $\overline{D(a, R)}$ 上解析，则对任意 $|z - a| < R$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-a|=R} \frac{f(w)}{w - z}\, dw,$$

并且对任意整数 $n \geq 0$,

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|w-a|=R} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}}\, dw.$$

♣

证明 （要点）对固定 z 把 $\dfrac{f(w)}{w-z}$ 看作 w 的全纯函数（在去掉 $w=z$ 的区域），用留数定理在小圆上计算积分，或将 $f(w)$ 在 w 处展开为 Taylor 级数并逐项积分，得出公式。

例题 1.2 由 Cauchy 公式可推导 Cauchy 导数估计：若 $|f(w)| \le M$ 在 $|w-a|=R$ 上成立，则

$$|f^{(n)}(a)| \le \frac{n!M}{R^n}.$$

这在许多处证明唯一延拓、Liouville 定理时非常有用。

1.3 Taylor 与 Laurent 展开

定义 1.4 (Taylor 展开（局部）)

若 f 在 $D(a,R)$ 全纯，则存在唯一系数列 $\{c_n\}$ 使

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \qquad |z-a| < R,$$

且 $c_n = f^{(n)}(a)/n!$。♣

证明 （要点）由 Cauchy 导数公式可写

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-a|=\rho} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\, dw, \quad 0 < \rho < R,$$

由此得到幂级数展开与收敛半径。

定义 1.5 (Laurent 展开)

若 f 在环域 $A = \{z : r < |z-a| < R\}$ 全纯，则存在唯一 Laurent 级数

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

在该环域内一致收敛。Laurent 展开中的负幂部分描述了 f 在中心点的奇性。♣

例题 1.3 函数 $\dfrac{1}{z(z-1)}$ 在 $0<|z|<1$ 的 Laurent 展开可由部分分式分解：

$$\frac{1}{z(z-1)} = -\frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \qquad 0<|z|<1,$$

可见 $z=0$ 为简单极点。

1.4 留数与实积分

定义 1.6 (留数定理)

设 U 为单连通开集，f 在 U 上解析，除有限孤立奇点 $a_1,\dots,a_n$。若 $\Gamma \subset U$ 为逆时针简单闭曲线将这些奇点包住，则

$$\oint_{\Gamma} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Res}(f, a_j).$$

♣

证明 （要点）取每个奇点小圆 C_j（互不相交）并把 Γ 通过形变替换为这些小圆的合（方向相反），再对每个小圆用 Laurent 展开逐项积分，只留下 c_{-1} 项，从而得到结论。

1.5 奇点的分类（可去 / 极点 / 本性）

定理 1.2 (孤立奇点的分类（定义）)

设 a 为孤立奇点。按 Laurent 展开中的负次项个数分类：

- 若 Laurent 负次项全为 0，则为 可去奇点；
- 若 Laurent 仅有有限多项负次项（最大为 $(z-a)^{-m}$），则为 极点（阶为 m）；
- 若 Laurent 具有无限多负次项，则为 本性奇点。

定义 1.7 (Casorati–Weierstrass 与 Picard 小定理)

若 a 为本性奇点，则 f 在任何去心邻域内的像在 $\mathbb{C}$ 中稠密（Casorati–Weierstrass）。Picard 小定理更强：在本性奇点任意邻域内，f 取得所有复值，至多舍去一个例外值。

例题 1.4 $e^{1/z}$ 在 $z=0$ 处为本性奇点；在任意小环域中其值几乎取遍整个复平面（除 0 外也能任意接近 0）。

1.6 最大模原理与 Liouville 定理

定义 1.8 (最大模原理)

若 f 在连通域 U 全纯且存在 $z_0 \in U$ 使得 $|f(z_0)| \geq |f(z)|$ 对所有 $z \in U$ 成立，则 f 为常数。

定义 1.9 (Liouville 定理)

若 f 在全平面 $\mathbb{C}$ 上全纯且有界，则 f 为常数。

证明 （Liouville 简洁证法）设 $|f(z)| \leq M$ 对所有 z 成立。对任意 $R > 0$，Cauchy 导数估计给出

$$|f'(0)| \leq \frac{M}{R}.$$

令 $R \to \infty$ 得 $f'(0) = 0$。把中心移到任意点可得 $f' \equiv 0$，从而 f 常数。

例题 1.5 用 Liouville 可证明基本代数定理：若多项式 $p(z)$ 无根，则 $1/p(z)$ 在全平面解析且有界（因 $|p(z)| \to \infty$ 当 $|z| \to \infty$），由 Liouville 得常数矛盾，因此 p 有根。

1.7 解析延拓（Analytic continuation）

定理 1.3 (局部定义与全纯性的回顾)

设 $U \subset \mathbb{C}$ 为开集，$f: U \to \mathbb{C}$ 在 U 全纯。若 $a \in U$，则存在以 a 为中心的圆盘 $D(a,r) \subset U$ 以及幂级数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \qquad |z-a| < r,$$

在该圆盘上一致收敛。这给出“局部数据”去构造更大域上的函数的出发点。

定义 1.10 (恒等定理（Identity Theorem）)

若 f 与 g 在连通域 U 上全纯，且 $f(z) = g(z)$ 在 U 的一集合上成立，该集合有聚点，则 $f \equiv g$ 在 U 上恒等。

证明 （恒等定理要点）令 $h = f - g$，则 h 在 U 全纯，且在有聚点的集合上为 0。若 $h \neq 0$，则零点必须是孤立的，与有聚点矛盾，故 $h \equiv 0$。

例题 1.6 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$ 在单位圆内解析，若其在某有聚点的集合上与 0 相等，则恒为 0（由恒等定理）。

定义 1.11 (解析延拓（analytic continuation）——直观定义)

设 f 在开集 U 全纯，V 是包含 U 的更大开集。若存在在 V 全纯的函数 F 使得 $F|_U = f$，则称 F 是 f 在 V 上的解析延拓。解析延拓（若存在）在交集中有聚点时是唯一的（由恒等定理）。♣

定义 1.12 (延拓的基本原理（Principle of analytic continuation）)

若 f 在连通开集 U 全纯，且存在开集链

$$U = U_0 \subset U_1 \subset \cdots \subset U_N$$

使得对每个 k 存在全纯函数 f_k 在 U_k 上，且 $f_k|_{U_{k-1}} = f_{k-1}$，则把这些局部定义粘接得到 f_N 即为沿这条链的解析延拓。换句话说：从幂级数或积分表示“向外延伸”可以通过链式延拓完成。♣

证明 （说明）此条是对“局部幂级数可拼接”的表述，由恒等定理保证在相交的重叠部分粘接一致，因此可得到一致的延拓。

定义 1.13 (沿路径的解析延拓与 Monodromy)

设 f 在以基点 z_0 为中心的一个邻域 U_0 上解析。给定一条从 z_0 到 z_1 的路径 $\gamma \subset \Omega$（Ω 是连通开集），若可以沿着 γ 逐步在小圆盘上继续幂级数，从而在终点 z_1 得到一个值，这个过程称为“沿路径 γ 的解析延拓”。若沿不同同伦类的路径延拓得到不同的值，就产生单值性的障碍；Monodromy（单值性/复回绕性）研究沿闭路延拓回到起点时函数值的变化。♣

定义 1.14 (Monodromy 定理（简洁表述）)

设 U 为连通开集，f 在包含基点 z_0 的某小邻域解析。若对任意闭路 γ（以基点为端点）沿 γ 的解析延拓得到的函数回到起点时与原始函数一致（即单值），则沿路径的延拓对路径同伦类不依赖；反之若依赖则出现非平凡 monodromy。♣

例题 1.7 经典现象：对函数 $f(z) = \log z$（取主支在 $\arg z \in (0, 2\pi)$），沿绕原点一圈的路径延拓会使 $\log z$ 增加 $2\pi i$，产生非平凡 monodromy；为了得到单值需要在复平面上切开一条分支切口，或考虑 log 的 Riemann 面。

解析延拓的常用方法（分类与说明）

下面把“如何做延拓”分成若干常见策略，并给出每种方法的核心要点与例子。

定义 1.15 (方法 A：幂级数拼接（直接用 Taylor / Laurent）)

当你有 f 在 $D(a, r)$ 的幂级数表示，并且该幂级数在边界上没有天然障碍时，可以在某边界点 b 取 $D(b, \rho)$ 的新的幂级数（由原幂级数的和定义），从而把定义域“向外推”。♣

例题 1.8 幂级数延拓示例 函数 $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$ 在 $|z| < 1$ 内解析，但其收敛圈可能有自然边界；与之相对，几何级数 $\sum z^n$ 在 $|z| < 1$ 的和 $1/(1-z)$ 可延拓到 $\mathbb{C} \setminus \{1\}$。

定义 1.16 (方法 B：通过积分表示延拓（Cauchy 积分、Mellin/Bromwich 变换等）)

若 f 有某种积分表示（例如 Mellin 变换、Laplace 逆变换、Cauchy 积分式、Euler 型积分等），并且该积分在较大区域里依然有意义或可解析延拓，则该表示直接给出了延拓。例如 Gamma 函数：

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t}\, dt \quad (\Re s > 0)$$

通过分部积分得到函数方程 $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$，利用递推可把定义延拓到除非正整数外的整个复平面。♣

例题 1.9Gamma 函数的延拓 使用递推关系并用极点解析可以把 $\Gamma(s)$ 延拓为亚纯函数（meromorphic），其在非正整数处有极点。此处的关键不是直接把积分交换顺序，而是利用函数方程与插值来延拓。

定义 1.17 (方法 C：利用函数方程或代数关系（functional equations）)

许多重要函数（比如 Riemann zeta）满足函数方程或可与更好行为的函数组合。例如

$$\eta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$$

（Dirichlet eta）在 $\Re s > 0$ 绝对收敛且与 ζ 通过 $\zeta(s) = (1 - 2^{1-s})^{-1}\eta(s)$ 相连，从而给出 ζ 的延拓（除了 $s = 1$ 的极点）。 ♣

例题 1.10Riemann zeta 的经典延拓思路 用 Mellin 变换结合 Jacobi theta 函数的变换性质可推导出 zeta 的函数方程，从而把 $\zeta(s)$ 延拓到整个复平面（仅在 $s = 1$ 有极点）。

定义 1.18 (方法 D：用微分方程（解析延拓 via ODE）)

若 f 是某线性常微分方程（系数为解析函数）的解，则在连通域上可解析延拓该解，障碍仅来自系数的奇点（Fuchsian 理论、等）。因此微分方程是构造全纯延拓的强大工具（例如超几何函数的延拓）。 ♣

例题 1.11 常见：Gauss 超几何函数 Gauss 超几何函数 ${}_2F_1(a, b; c; z)$ 由幂级数在 $|z| < 1$ 定义，但通过解析延拓可推广到 $\mathbb{C} \setminus [1, \infty)$（沿不同路径可得到不同分支）。

延拓中的障碍与自然边界

定义 1.19 (自然边界（natural boundary）)

若函数的定义域主连通延拓到某界面仍无法通过任何方法继续（即任意穿过该界点的延拓都会遇到本性奇点的堆积），则称该界面为自然边界。通俗地说：没有任何更大的域可以包含原函数的解析延拓。 ♣

例题 1.12 函数 $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$ 的收敛区 $|z| < 1$ 的边界单位圆是自然边界（这是经典构造），因单位圆上有密集奇性使得无法跨越。

Riemann 面与全局单值化

为了解决多值延拓（比如 $\sqrt{z}, \log z$）的问题，引入 Riemann 面的观点：把每个分支当作一层，把这些层沿分支点粘接起来，得到一个连通的曲面（Riemann 面），此后函数在该面上成为单值的全纯函数。Riemann 面给出了将多值函数“升格”为单值全纯函数的最自然几何框架。

例题 1.13 $\sqrt{z}$ 的 Riemann 面由两层复平面沿 0（和 ∞）粘接而成；$\log z$ 的 Riemann 面是无限层的螺旋面。

单值性、Monodromy 群与解析延拓的代数描述

沿闭路的延拓作用在函数的分支集合上，构成一个置换群，即 Monodromy 群。若该群平凡，则全局单值，若非平凡则需要 Riemann 面来“展开”单值化。Monodromy 群的研究将解析延拓与代数拓扑联系起来。

定义 1.20 (Monodromy 群（概要）)

给定基点 z_0 与函数的一个局部分支，沿 $\pi_1(\Omega, z_0)$（基本群）中路的延拓作用给出对局部分支的置换，从而得到 Monodromy 表示 $\pi_1(\Omega, z_0) \to S_m$（若分支数有限）。 ♣

解析延拓的唯一性与恒等定理的角色

解析延拓的一个核心性质是唯一性：若两个全纯函数在连通域的一个有聚点的集合上相等，则它们在该连通域上一致。这保证了“沿两条同伦路径延拓若在交集一致则合并”为可行操作。

定义 1.21 (解析延拓的唯一性（恒等定理的应用）)

若 f 在 U 全纯，g 在 V 全纯，且 $U\cap V$ 含有聚点并且 $f=g$ 在 $U\cap V$，则存在并且唯一的全纯函数 h 在 $U\cup V$ 上延拓 f 与 g。♣

若干重要实例（步骤式）

例题 1.14 例：用幂级数拼接把 $1/(1-z)$ 从 $|z|<1$ 延拓到 $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ 在 $|z|<1$ 中有 $\sum z^n=1/(1-z)$。但 $1/(1-z)$ 作为有理函数在整个复平面解析延拓，除了 $z=1$ 的极点外无其他奇点；这说明幂级数的和已是一个可以在更大域解释的函数（代数延拓非常直接）。

例题 1.15 例：Gamma 函数通过函数方程延拓 起始定义 $\Gamma(s)=\int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}\,dt$ 仅对 $\Re s>0$ 收敛。利用 $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$ 递推以及对负整数点的极点结构可把 Γ 延拓为在全平面上亚纯（meromorphic）的函数（非正整数处为极点）。这是“利用函数方程与解析延拓”的经典范例。

例题 1.16 例：Riemann zeta 函数的延拓（概要） 从 Dirichlet eta 函数 $\eta(s)=\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}n^{-s}$（对 $\Re s>0$ 绝对/条件收敛）和关系

$$\zeta(s)=\frac{1}{1-2^{1-s}}\eta(s)$$

得到 $\zeta(s)$ 在 $\Re s>0$ 的延拓（除 $s=1$），再结合 theta 函数或 Mellin 变换得到全平面的解析延拓与函数方程（详见专著）。

练习与思考题（推荐）

1. 用分部积分从 Euler 型积分推导出 $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$，并据此把 Γ 延拓到 $\Re s\leq 0$ 的域（说明极点位置）。
2. 对函数 $\sum_{n=0}^\infty z^{2^n}$，讨论其收敛域与是否存在自然边界。
3. 证明：若 f 在连通域 Ω 的每条闭路沿解析延拓均返回原值（monodromy 平凡），则 f 沿任意路径的延拓都与路径同伦类无关。
4. 展示如何用钥匙孔轮廓把 $\int_0^\infty \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx$（$0<\Re\alpha<1$）与 Beta/Gamma 函数联系起来，从而证明公式。

第 2 章 复积分的计算：留数定理

2.1 工具

定义 2.1 (留数)

解析函数 $f(z)$ 的 Laurent 展开中的 -1 次项的系数就是留数. 即

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

中，留数是 a_{-1}.

♣

定义 2.2 (留数定理)

设 f 在简单闭曲线 Γ 内解析，除有限个孤立极点 a_k。若 Γ 逆时针，则

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz=2\pi i\sum_k \operatorname{Res}(f;a_k).$$

♣

定理 2.1 (留数的常用计算公式)

1. 若 a 是 f 的简单极点，则

$$\operatorname{Res}(f,a)=\lim_{z\to a}(z-a)f(z).$$

2. 若 $f(z)=\dfrac{\phi(z)}{(z-a)^m}$ 且 ϕ 在 a 解析，则

$$\operatorname{Res}(f,a)=\frac{1}{(m-1)!}\phi^{(m-1)}(a).$$

3. 若 $f=\dfrac{g}{h}$ 且 $h(a)=0$，$h'(a)\neq 0$，则

$$\operatorname{Res}(f,a)=\frac{g(a)}{h'(a)}.$$

♡

证明 证明法一（用 **Laurent** 展开）：对于每个奇点 a_j，因为是孤立的，所以存在小圆盘 $D_j=\{z:|z-a_j|<r_j\}$ 使得这些小盘互不相交且都被 Γ 的内部包含，并且 f 在 $D_j\setminus\{a_j\}$ 可作 Laurent 展开：

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^{(j)}(z-a_j)^k,\qquad 0<|z-a_j|<r_j.$$

在每个小圆周 $C_j=\{z:|z-a_j|=r_j\}$ 上对该级数逐项积分（在收敛圆环内允许逐项积分）得到

$$\oint_{C_j} f(z)\,dz=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^{(j)}\oint_{C_j}(z-a_j)^k\,dz.$$

但对整数 k 有

$$\oint_{C_j}(z-a_j)^k\,dz=\begin{cases}2\pi i, & k=-1,\\ 0, & k\neq -1.\end{cases}$$

因此

$$\oint_{C_j} f(z)\,dz=2\pi i\,c_{-1}^{(j)}=2\pi i\operatorname{Res}(f,a_j).$$

把 Γ 的积分变形（取 Γ 的内部减去这些小盘边界）可由解析延拓与 Cauchy 定理得到等价：沿 Γ 的积分等于这些

小圆周积分的和（方向相反，但注意取向约定），整理符号后便得到

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Res}(f, a_j).$$

证明法二（利用 **Cauchy** 原理与区域变形）：从拓扑角度，我们可以把 Γ 连续缩形到一组绕每个奇点的正向小圆（注意在缩形过程中避开奇点），由 Cauchy 的定理可知，如果把区域上去掉小盘后 f 在剩下区域内解析，那么沿边界的积分保持不变。于是积分可以写成这些小圆积分之和（方向约定为正向），每个小圆的积分按上面用 Laurent 展开或用局部表示计算，只留下 $(z-a)^{-1}$ 项的贡献，即 $2\pi i$ 倍的留数。汇总即得定理结论。

2.2 复积分计算的一般步骤（Recipe）

1. 将实积分写为沿实轴的复积分（或把被积函数看作复函数）；若含三角函数可写为复指数。
2. 选择合适闭合轮廓（上/下半圆、钥孔、单位圆等），并判断哪些奇点位于区域内部。
3. 计算这些奇点的留数。
4. 检查轮廓上其它弧段的贡献（通常用 Jordan 大弧引理估算），并说明其在 $R \to \infty$ 时是否消失。
5. 应用留数定理，按需取实部/虚部或主值 (PV) 得到原实积分。

2.3 Jordan 大小弧引理

2.3.1 Jordan 大弧引理（常用版本）

定义 2.3 (Jordan 大弧引理)

设 $k > 0$。对每 $R > 0$ 令 C_R 为以原点为中心、半径 R 的上半圆 $z = Re^{i\theta}, \theta \in [0, \pi]$。若 f 在该半盘上解析且在弧上满足

$$M_R := \max_{\theta\in[0,\pi]} |f(Re^{i\theta})|,$$

则对于被积子 $e^{ikz}f(z)$ 有估计

$$\left|\int_{C_R} e^{ikz} f(z)\,dz\right| \le RM_R \int_0^\pi e^{-kR\sin\theta}\,d\theta \le \frac{\pi}{k} M_R.$$

于是若 $M_R \to 0$（例如 $f(z) = o(1)$ 或 $M_R = O(R^{-\alpha})$），则弧积分趋于 0。♣

证明 参数化圆弧 C_R 为 $z = Re^{i\theta}$ $(\theta \in [0, \pi])$，则 $dz = iRe^{i\theta}d\theta$。因此

$$\left|\int_{C_R} e^{ikz} f(z)\,dz\right| \le \int_0^\pi \left|e^{ikRe^{i\theta}} f(Re^{i\theta})\, iRe^{i\theta}\right| d\theta \le RM_R \int_0^\pi \left|e^{ikRe^{i\theta}}\right| d\theta.$$

注意对 $k > 0$ 有

$$\left|e^{ikRe^{i\theta}}\right| = e^{-kR\sin\theta}.$$

于是

$$\left|\int_{C_R} e^{ikz} f(z)\,dz\right| \le RM_R \int_0^\pi e^{-kR\sin\theta}\,d\theta.$$

利用对称性并在 $[0, \pi/2]$ 上用不等式 $\sin\theta \ge \frac{2\theta}{\pi}$（可直接验证），得

$$\int_0^\pi e^{-kR\sin\theta}\,d\theta = 2\int_0^{\pi/2} e^{-kR\sin\theta}\,d\theta \le 2\int_0^{\pi/2} e^{-kR\cdot\frac{2\theta}{\pi}}\,d\theta = \frac{\pi}{kR}\left(1 - e^{-kR}\right) \le \frac{\pi}{kR}.$$

代回上式得到

$$\left|\int_{C_R} e^{ikz} f(z)\,dz\right| \le RM_R \cdot \frac{\pi}{kR} = \frac{\pi}{k} M_R.$$

当 $M_R \to 0$ 时右端趋于 0，从而弧积分趋于 0。对 $k < 0$ 改用下半圆并类似估计。

2.3.2 Jordan 小弧引理（绕过实轴上极点）

定义 2.4 (小弧引理，简单极点情况)

设 $a \in \mathbb{R}$，且 f 在 a 附近（去掉 a）解析，且在 a 处存在简单极点：

$$f(z) = \frac{r}{z-a} + h(z), \qquad h \text{ 在} a \text{ 解析}.$$

令 C_ε 为以 a 为中心、半径 ε 的小半圆（上半圆，参数 $\theta \in [0, \pi]$ 从右到左）。则当 $\varepsilon \to 0^+$ 时

$$\int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz \to i\pi\, r = i\pi\ \mathrm{Res}(f, a).$$

若绕行下半圆则极限为 $-i\pi\ \mathrm{Res}(f, a)$。

♣

证明 将上小半弧参数化为 $z = a + \varepsilon e^{i\theta}, \theta \in [0, \pi]$。则

$$\int_{C_\varepsilon} \frac{r}{z-a}\,dz = \int_0^\pi \frac{r}{\varepsilon e^{i\theta}}\, i\varepsilon e^{i\theta}\, d\theta = ir \int_0^\pi d\theta = i\pi r.$$

而余项 $\left|\int_{C_\varepsilon} h(z)\,dz\right| \le \pi\varepsilon \max_{C_\varepsilon} |h|$，由 h 在 a 解析可知上界随 $\varepsilon \to 0$ 趋于 0。因此小弧积分的极限为 $i\pi r$。

2.4 典型例题

例题 2.1 计算

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}.$$

要点：令 $f(z) = 1/(z^2+1)$。上半平面包含极点 i。留数 $\mathrm{Res}(f, i) = 1/(2i)$。大弧因 $f = O(1/R^2)$ 而贡献 0。由留数定理，

$$I_1 = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi.$$

例题 2.2 计算

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}\,dx.$$

要点：写作实部 $I_2 = \Re \int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{e^{ix}}{x^2+1}\,dx$。取 $F(z) = e^{iz}/(z^2+1)$ 并闭合于上半平面。留数在 i：$\mathrm{Res}(F, i) = e^{ii}/(2i) = e^{-1}/(2i)$。因此整体积分为 πe^{-1}，取实部得 $I_2 = \pi e^{-1}$。

例题 2.3 周期积分

$$I_3 = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b\cos\theta}, \qquad |a| > |b|.$$

要点：用 $z = e^{i\theta}$ 代换（$\cos\theta = (z + z^{-1})/2$, $d\theta = dz/(iz)$），把积分化为单位圆上的有理函数积分，找圆内极点并求留数。结果为

$$I_3 = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

例题 2.4 钥孔轮廓：

$$I_4(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx, \qquad 0 < \alpha < 1.$$

要点：考虑 $f(z) = z^{\alpha-1}/(1+z)$（主值分支），用钥孔轮廓绕过正实轴，内部包含 $z = -1$。计算并整理相位差，得到

$$I_4(\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}.$$

例题 2.5 主值积分（傅里叶主值）

$$\mathrm{PV}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x}\,dx.$$

要点：设 $f(z)=e^{iz}/z$。用上半平面闭合并避开原点（上小半弧），大弧贡献为 0。上小弧贡献为 $i\pi\,\mathrm{Res}(f,0)=i\pi$。整体积分 $2\pi i$（内部只有 0），因此

$$\mathrm{PV}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x}\,dx=i\pi,$$

并得 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\pi$。

例题 2.6 计算

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{x^4+1}\,dx.$$

解：被积函数为有理函数 $f(z)=\dfrac{z^2}{z^4+1}$。多项式 $z^4+1=0$ 的根为

$$e^{i\pi/4},\ e^{3i\pi/4},\ e^{5i\pi/4},\ e^{7i\pi/4}.$$

上半平面包含两个根 $z_1=e^{i\pi/4}$ 与 $z_2=e^{3i\pi/4}$，且这些都是简单根。若 $g(z)=z^4+1$，则 $g'(z)=4z^3$，对于简单极点 a 有

$$\mathrm{Res}\left(\frac{z^2}{z^4+1},a\right)=\frac{a^2}{g'(a)}=\frac{a^2}{4a^3}=\frac{1}{4a}.$$

因此

$$\mathrm{Res}(f,z_1)=\frac{1}{4z_1},\qquad \mathrm{Res}(f,z_2)=\frac{1}{4z_2}.$$

计算两者和：

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{e^{i\pi/4}}+\frac{1}{e^{3i\pi/4}}\right)=\frac{1}{4}\left(e^{-i\pi/4}+e^{-3i\pi/4}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}+\frac{-1-i}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{i}{2\sqrt{2}}.$$

由留数定理及 Jordan 大弧引理（弧贡献为 0），

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{x^4+1}\,dx=2\pi i\cdot\left(-\frac{i}{2\sqrt{2}}\right)=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

例题 2.7 计算

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4+1}.$$

解要点：与上例类似，考虑 $f(z)=1/(z^4+1)$。上半平面极点仍为 $e^{i\pi/4},e^{3i\pi/4}$。对简单极点 a，

$$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^4+1},a\right)=\frac{1}{g'(a)}=\frac{1}{4a^3}.$$

计算并求和可得总留数之和为 $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}(-i)$（与上例计算类似），于是总体积分为 $\pi/\sqrt{2}$。（也可利用偶性：$\int_0^{\infty}dx/(1+x^4)=\pi/(2\sqrt{2})$）

例题 2.8Fresnel 记

$$C=\int_0^{\infty}\cos(x^2)\,dx,\qquad S=\int_0^{\infty}\sin(x^2)\,dx.$$

则

$$C=S=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{\pi}{8}}.$$

证明 考虑复积分

$$I=\int_0^{\infty}e^{ix^2}\,dx.$$

做旋转变换：令 $u=e^{i\pi/4}x$（在复平面将实正半轴逆时针旋转 $\pi/4$），注意 $du=e^{i\pi/4}dx$ 且 $e^{ix^2}=e^{-u^2}$. 在允许

交换路径与被积函数（此处可用高斯积分解析延拓）的前提下

$$I = e^{-i\pi/4}\int_0^{\infty e^{i\pi/4}} e^{-u^2}\,du = e^{-i\pi/4}\int_0^{\infty} e^{-u^2}\,du = e^{-i\pi/4}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

因此

$$\int_0^{\infty} e^{ix^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-i\pi/4} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1-i}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}(1-i).$$

取实部与虚部得

$$C = \Re I = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}, \qquad S = \Im I = -\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\cdot(-1) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

（即 $C = S = \sqrt{\pi/(8)}$。）

例题 2.9 证明

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)}, \qquad n > -1/2.$$

证明 由偶性

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = 2\int_0^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}}.$$

作代换 $x = \tan\theta$（$\theta \in [0, \pi/2)$），有 $dx = \sec^2\theta\,d\theta$ 与 $1 + x^2 = \sec^2\theta$。于是

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \int_0^{\pi/2}\frac{\sec^2\theta\,d\theta}{\sec^{2n+2}\theta} = \int_0^{\pi/2}\cos^{2n}\theta\,d\theta = \tfrac{1}{2}B\Big(\tfrac{1}{2}, n+\tfrac{1}{2}\Big),$$

其中 B 为 Beta 函数。于是原积分为

$$2\cdot\tfrac{1}{2}B\Big(\tfrac{1}{2}, n+\tfrac{1}{2}\Big) = B\Big(\tfrac{1}{2}, n+\tfrac{1}{2}\Big) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)}.$$

使用 $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ 得所需结果。

例题 2.10 当 $a > 1$ 时，求

$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{(a+\cos x)^2}.$$

证明 先令

$$J(a) = \int_0^{2\pi}\frac{dx}{a+\cos x}, \qquad a > 1.$$

我们已知（或可由变换 $z = e^{ix}$ 求得）

$$J(a) = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

注意

$$\frac{d}{da}\frac{1}{a+\cos x} = -\frac{1}{(a+\cos x)^2},$$

所以令

$$K(a) = \int_0^{2\pi}\frac{dx}{(a+\cos x)^2} = -J'(a).$$

直接求导：

$$J'(a) = \frac{d}{da}\Big(2\pi(a^2-1)^{-1/2}\Big) = 2\pi\cdot\Big(-\tfrac{1}{2}\Big)(a^2-1)^{-3/2}\cdot 2a = -\frac{2\pi a}{(a^2-1)^{3/2}}.$$

因此

$$K(a) = -J'(a) = \frac{2\pi a}{(a^2-1)^{3/2}}.$$

例题 2.11 计算

$$\int_0^1 \log(\sin\pi x)\,dx.$$

证明 作变换 $t = \pi x$：

$$\int_0^1 \log(\sin \pi x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \log(\sin t)\, dt.$$

已知（可用对称性与 Fourier 展开或复方法得到）

$$\int_0^\pi \log(\sin t)\, dt = -\pi \log 2.$$

因此原积分为 $-\log 2$.

例题 2.12 对 $a > 0$，证明

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2 + a^2}\, dx = \frac{\pi}{2a} \log a.$$

证明 作换元 $x = at$ 得

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2 + a^2}\, dx = \int_0^\infty \frac{\log(at)}{a^2(t^2+1)} a\, dt = \frac{1}{a} \int_0^\infty \frac{\log a + \log t}{t^2 + 1}\, dt.$$

拆开：

$$\frac{1}{a} \log a \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} + \frac{1}{a} \int_0^\infty \frac{\log t}{1+t^2}\, dt.$$

第一个积分等于 $\frac{\pi}{2}$。第二个积分记为 I_0。对 I_0 做 $t \mapsto 1/t$：

$$I_0 = \int_0^\infty \frac{\log t}{1+t^2}\, dt = \int_\infty^0 \frac{\log(1/u)}{1+1/u^2} \cdot \frac{-du}{u^2} = \int_0^\infty \frac{-\log u}{1+u^2}\, du = -I_0.$$

因此 $I_0 = 0$。最终结果为

$$\frac{1}{a} \log a \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2a} \log a.$$

2.5 常用技巧与陷阱

- 选择闭合半平面时必须与 e^{ikz} 中 k 的符号匹配：若 $k > 0$ 用上半平面，若 $k < 0$ 用下半平面。
- 若极点位于实轴，需用主值并加上小弧贡献（Jordan 小弧引理）。
- 对有理函数 P/Q，若 $\deg Q - \deg P \geq 2$，则在大弧上被积函数通常衰减得足够快（弧贡献 0）。
- 注意路径方向（顺时针/逆时针）会影响符号（$2\pi i$ 的正负）。

2.6 快速参考公式

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{a}, \qquad a > 0,$$
$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos(bx)}{x^2 + a^2}\, dx = \frac{\pi}{a} e^{-a|b|},$$
$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\, dx = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}, \quad 0 < \alpha < 1.$$