北京信息科技大学 2018–2019 学年第一学期

《高等数学 A(1)》课程期末考试试卷 (A 卷)

课程所在学院：理学院　适用专业班级: 96 学时 (普通班)
考试形式: (闭卷)

一、 选择题 (本题满分 10 分，含 5 道小题, 每小题 2 分)

1. 当 $x \to 0$ 时，$\ln(1+2x^2)$ 是 x^2 的 (　　) 无穷小.　【 B 】

   A. 高阶　　B. 同阶　　C. 低阶　　D. 等价

2. 设函数 $f(x)=e^{\frac{1}{x-1}}$，则 $x=1$ 是它的 (　　)　【 D 】

   A. 连续点　　B. 可去间断点　　C. 跳跃间断点　　D. 第二类间断点

3. 设 $y=e^{\cos x}$, 则有 $\mathrm{d}y=$ (　　)　【 C 】

   A. $e^{\cos x}\,\mathrm{d}x$　　B. $\sin x\cdot e^{\cos x}\,\mathrm{d}x$　　C. $-\sin x\cdot e^{\cos x}\,\mathrm{d}x$　　D. $e^{-\sin x}\,\mathrm{d}x$

4. 设 $f(x)$ 可导, 且 $y=\int_0^x f(2t)\mathrm{d}t$, 则有 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$ (　　)　【 D 】

   A. $f'(2x)$　　B. $2f'(2x)$　　C. $2f(2x)$　　D. $f(2x)$

5. 微分方程 $y''-2y'+y=(2x+1)e^x$ 的特解可取作 (　　)　【 A 】

   A. $y=x^2(ax+b)e^x$　　B. $y=x(ax+b)e^x$

   C. $y=ax+b$　　D. $y=x(ax+b)$

二、 解答题 (本题满分 30 分，含 6 道小题, 每小题 5 分)

6. 设 $f'(a)$ 存在, 求极限: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+4h)-f(a-2h)}{h}$.

【解】利用导数的定义

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{f(a+4h)-f(a-2h)}{h}\\
=&\lim_{h\to 0}\frac{f(a+4h)-f(a)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(a-2h)-f(a)}{h} && (2\text{ 分})\\
=&4\lim_{h\to 0}\frac{f(a+4h)-f(a)}{4h}+2\lim_{h\to 0}\frac{f(a-2h)-f(a)}{-2h} && (2\text{ 分})\\
=&6f'(a) \qquad\qquad . && (1\text{ 分})
\end{aligned}$$

7. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\sin(x+y)+e^y=4x$ 所确定, 求 $\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}$.

【解】方程两端关于 x 求导，得

$$\cos(x+y)\cdot(1+y')+e^y\cdot y'=4. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2\text{ 分})$$

整理可得

$$[\cos(x+y)+e^y]y'=4-\cos(x+y). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2\text{ 分})$$

即

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=\frac{4-\cos(x+y)}{e^y+\cos(x+y)}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1\text{ 分})$$

8. 设 $\begin{cases}x=\ln(1+t^2)\\ y=\sin t\end{cases}$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}$, $\left.\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}\right|_{t=\pi}$.

【解】计算可得

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=\frac{\cos t}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{(1+t^2)\cos t}{2t}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2\text{ 分 }+2\text{ 分})$$

于是

$$\left.\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}\right|_{t=\pi}=-\frac{1+\pi^2}{2\pi}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1\text{ 分})$$

9. 求微分方程 $3x^2\,\mathrm{d}x - \cos y\,\mathrm{d}y = 0$ 的通解.

【解】分离变量，得

$$3x^2\mathrm{d}x = \cos y\mathrm{d}y. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

两端取积分，得

$$\int 3x^2\mathrm{d}x = \int \cos y\mathrm{d}y. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

于是，通解为

$$x^3 = \sin y + C, \text{即 } x^3 - \sin y = C. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\text{ 分})$$

10. 计算不定积分：$\displaystyle\int (x+1)e^x\,\mathrm{d}x$.

【解】分部积分，可得

$$\begin{aligned}\int (x+1)e^x\,\mathrm{d}x = &\int (x+1)\,\mathrm{d}e^x. && (2\text{ 分})\\ =&(x+1)e^x - \int e^x\,\mathrm{d}(x+1). && (2\text{ 分})\\ =&(x+1)e^x - e^x + C. && (1\text{ 分})\end{aligned}$$

11. 计算定积分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

【解】凑微分，可得

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = &\int_0^1 \arctan x\,\mathrm{d}\arctan x. && (2\text{ 分})\\ =&\left.\frac{(\arctan x)^2}{2}\right|_0^1. && (2\text{ 分})\\ =&\frac{\pi^2}{32}. && (1\text{ 分})\end{aligned}$$

【解】换元 $t = \arctan x$，可得

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = &\int_0^{\pi/4} \frac{t}{1+\tan^2 t}\,\mathrm{d}\tan t = \int_0^{\pi/4} t\,\mathrm{d}t. && (2\text{ 分})\\ =&\left.\frac{t^2}{2}\right|_0^{\pi/4}. && (2\text{ 分})\\ =&\frac{\pi^2}{32}. && (1\text{ 分})\end{aligned}$$

三、 解答题 (本题满分 60 分，含 10 道小题, 每小题 6 分)

12. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$.

【解】连续两次使用洛必达法则，可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}. \quad \ldots\ldots(2\text{ 分 }+2\text{ 分 }+2\text{ 分})$$

【解】使用洛必达法则并使用等价无穷小替换，可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2/2}{3x^2}=\frac{1}{6}. \quad \ldots\ldots(2\text{ 分 }+2\text{ 分 }+2\text{ 分})$$

13. 求函数 $f(x)=x^2-\ln x^2(x<0)$ 的单调区间.

【解】计算导数

$$f'(x)=2x-\frac{2x}{x^2}=\frac{2(x^2-1)}{x},x<0. \quad \ldots\ldots(2\text{ 分})$$

当 $x\in(-1,0)$ 时, $f'(x)>0$, $f(x)$ 在 $[-1,0)$ 上单调增加. ……(2 分)
当 $x\in(-\infty,-1)$ 时, $f'(x)<0$, $f(x)$ 在 $(-\infty,-1]$ 上单调减少. ……(2 分)

14. 求曲线 $f(x)=(x^2+1)e^{-x}$ 的拐点.

【解】先计算导数

$$f'(x)=(-x^2+2x-1)e^{-x},\qquad f''(x)=(x^2-4x+3)e^{-x}. \qquad (2\text{ 分})$$

令 $f''(x)=0$, 得可疑拐点为: $(1,\frac{2}{e})$, $(3,\frac{10}{e^3})$……(2 分)

在 $x=1$ 两侧，$f''(x)$ 左正右负；在 $x=3$ 两侧，$f''(x)$ 左负右正.

故拐点为 $(1,\frac{2}{e})$, $(3,\frac{10}{e^3})$.……(2 分)

15. 计算不定积分 $\displaystyle\int\frac{1}{1+\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$.

【解】设 $t=\sqrt{x+1}$, 则 $x=t^2-1$

$$\int\frac{1}{1+\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x=\int\frac{2t}{1+t}\,\mathrm{d}t \qquad (2\text{ 分})$$

$$=2\int\left(1-\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t \qquad (2\text{ 分})$$

$$=2t-2\ln|1+t|+C=2\sqrt{1+x}-2\ln(1+\sqrt{x+1})+C. \qquad (2\text{ 分})$$

16. 求由曲线 $y=3x^2$, 曲线 $y=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ 与直线 $x=1$ 以及直线 $x=4$ 所围平面图形的面积 S.

【解】所求面积为

$$\begin{aligned} S=&\int_1^4\left(3x^2-\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}x && \text{(3 分)}\\ =&\big(x^3-x\sqrt{x}\big)\Big|_1^4 && \text{(2 分)}\\ =&64-8=56. && \text{(1 分)}\end{aligned}$$

17. 求由曲线 $y=\sin x, x\in[0,\pi]$ 与 x 轴所围平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体体积 V.

【解】所求体积为

$$\begin{aligned} V=&\pi\int_0^\pi\sin^2 x\,\mathrm{d}x=\pi\int_0^\pi\frac{1-\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x && \text{(2 分 +1 分)}\\ =&\frac{\pi}{2}\big(x-\frac{\sin 2x}{2}\big)\Big|_0^\pi && \text{(2 分)}\\ =&\frac{\pi^2}{2}. && \text{(1 分)}\end{aligned}$$

18. 计算反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x$.

【解】由

$$\int\frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{(x+1)^2+1}\,\mathrm{d}(x+1)=\arctan(x+1).\quad \text{(2 分 +2 分)}$$

可得

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x=\arctan(x+1)\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}.\qquad \text{(2 分)}$$

【解】

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x=&\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x+1)^2+1}\,\mathrm{d}(x+1)\\ =&\arctan(x+1)\Big|_0^{+\infty}\\ =&\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}. && \text{(2 分 +2 分 +2 分)}\end{aligned}$$

19. 求微分方程 $y'' + y' - 6y = 0$ 的通解.

【解】微分方程的特征方程为: $r^2 + r - 6 = 0$. (2 分)

特征根为: $r = -3, r = 2$. (2 分)

通解为: $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x}$. (2 分)

20. 设 $x \neq 0$, 证明: $e^x > 1 + x$.

【证】引入辅助函数 $f(x) = e^x - 1 - x, \quad x \in \mathbb{R}$. 注意到

$$f'(x) = e^x - 1 = \begin{cases} < 0, & x < 0, \\ > 0, & x > 0. \end{cases}$$ (2 分)

可知，$f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调减少，$f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调增加.
因此, $x = 0$ 为最小值点. (2 分)
于是

$$f(x) > f(0) = 0, \quad x \neq 0.$$

即 $e^x > 1 + x, \quad x \neq 0$. (2 分)

21. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(1) = 0$. 证明:

$$\exists \xi \in (0, 1), \text{使得} \quad f(\xi) + f'(\xi) \tan \xi = 0.$$

【证】引入辅助函数

$$F(x) = f(x) \sin x, \qquad x \in [0, 1].$$ (2 分)

则 $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，在 $(0, 1)$ 内可导，且

$$F(0) = 0, \quad F(1) = f(1) \sin 1 = 0.$$ (1 分)

由 Rolle 中值定理，可得

$$\exists \xi \in (0, 1), \text{使得} \quad f(\xi) \cos \xi + f'(\xi) \sin \xi = 0.$$ (2 分)

由于 $\xi \in (0, 1)$ 时, $\cos \xi \neq 0$, 两端同除 $\cos \xi$, 有

$$\exists \xi \in (0, 1), \text{使得} \quad f(\xi) + f'(\xi) \tan \xi = 0.$$ (1 分)