面向计算思维的

大学计算机基础

曹庆华　艾明晶　主编

万寒　孙青　欧阳元新　李莹　傅翠娇　刘禹 编

北京航空航天大学

2020 年 9 月

内 容 简 介

本书借鉴运用计算思维解决科学问题的思路，构建了一个贯穿计算思维的大学计算机课程体系。针对学生使用计算机语言解决实际问题无从下手的窘境，从问题抽象建模开始，通过从自然语言描述的问题，到形式语言描述的模型，到算法和程序实现的逐层映射，以计算思维为核心建立学生解决实际问题的导航图，通过系列案例建模、典型算法设计的讲解和分析，打开一扇利用计算机解决实际问题的科学艺术之门。全书包括：计算思维与计算机模型、问题抽象与建模、程序设计基础与数据结构、算法设计与优化、科学计算与数据处理等五章内容。

本书采用案例驱动的启发式教学方法：先通过一个实例提出问题；再给出设计思路，重点讲解设计技巧和难点。通过分析计算机解题的思路和方法，着重讲解如何运用知识将实际问题转化成机器语言的思考过程，如提炼问题、转换问题、构建模型、设计算法、用合适的程序语言描述以用计算机解决问题，以促进学生对计算思维抽象和自动化本质特征的理解，掌握计算思维面向典型问题的问题求解方法。通过系列案例教学，逐层递进，从案例的分析到具体实现，促进学生对计算思维概念的理解和程序设计能力的提升。

作者结合各个知识点和重要概念，精心设计了具有趣味性和实用性、能够激发学生思考的若干教学案例，使抽象的概念具体化，从而启发和开拓学生的思维。书中大部分案例，均采用 Python 语言编程实现，使学生更好地理解运用“计算思维”求解问题的思想，掌握其方法。书中淡化操作，强调的是分析解决问题的思路和方法。同时，本书具有内容先进、层次清晰、详略得当、突出应用、图文并茂等特色。

通过本书的学习，读者将系统了解计算机基础知识，逐步理解计算思维含义及其思维方法；掌握常用数据建模方法及程序设计的基本概念、设计思路和方法，能够使用 Python 语言实现典型数据结构、进行基本的程序设计；理解算法的概念，掌握常用的算法设计思路和方法，能够采用经典算法或者自行设计算法解决实际问题；能够运用 Python 语言及其常用计算工具库进行基本的科学计算和数据处理；能够运用计算思维的一般方法分析问题和解决实际问题，为各专业的后续计算机能力和素养的需求提供必要的计算思维和能力储备，为专业领域的创新活动奠定基础。

本书既可以作为高等院校非计算机专业学生的大学计算机基础教材，也可以作为计算机基础知识及应用的自学和培训教材。

目　录

第 2 章　问题抽象与建模

冯·诺依曼认为，计算机的本质就是逻辑的抽象。数据的计算机表示和程序的非物理特性决定了抽象是计算机学科的第一特性。利用计算机解决实际问题，首先需要通过直观认识从现象中抽取问题的本质因素，寻找与之相关的数学定理，构建数学模型；然后将数学模型转化为计算机所能求解的算法和数据结构；最后编写程序，由计算机自动执行。可见，抽象是应用计算机解决问题的第一步，是计算机学科的最基本原理，也是计算思维的第一要素。

本章主要使读者掌握计算机的问题求解过程；理解科学抽象的逻辑方法（归纳、演绎、类比、模拟）；了解数学建模的基本过程和基本方法。了解科学问题到计算机程序的映射过程；掌握问题抽象与建模的基本方法。学会将待求解的一般问题通过抽象与建立模型的过程转化为能通过计算求解的问题的方法。

2.1　科学抽象过程与方法

本节系统地讲述何谓科学抽象，举例说明科学抽象的一般研究过程，分析并介绍在科学抽象的过程中所应用到的逻辑思维、非逻辑思维和量化思维等思维模式。

2.1.1　抽象与科学抽象

抽象是从众多事物中抽出与问题相关的最本质的特征和属性，而忽略或隐藏与认识问题、求解问题无关的非本质的属性。例如苹果、香蕉、桔子、葡萄、桃子等，可以通过比较得到它们共同特性是水果，这是概念上的抽象；三个桔子和三个苹果相加，可以通过提取得到它们的和是六个水果，这是数字上的抽象。因此，抽象的过程是一个裁剪的过程，把不同的、非本质性的特征全部裁剪掉了。

抽象是人类认识复杂事物和现象时经常使用的思维工具，其作用是抽出事物的本质特性、忽略细节内容。人们在解决问题时，常通过抽象来纯化主要因素、忽略偶然因素、剔除次要因素，从而达到去粗取精、去伪存真的目的，避免眉毛胡子一把抓的混乱情况，使得问题更简单化、更纯粹化。

抽象的目的是为了求解问题。真实世界的问题太过复杂，存在各种已知或未知因素，根本无法求解。这就需要我们在处理事情时，把握事物的本质，用抽象的手段，将现实世界中复杂的问题简洁优美地描述清楚。例如，数学中点、线、面；力学中的理想刚体、流体、质点；光学中的绝对黑体；化学中的理想溶液；生物学中的模式细胞等等，都是经过高度抽象的理想客体。作为抽象思维的结果，这些理想客体都是对客观事物的一种极简反映。

抽象思维是一种思维形式，是在头脑中抽出各种事物与现象的共同特征和属性，舍弃个别特征和属性的过程和方法。它属于理性认识阶段，是人们依靠感官对事物有直观形象的感知后，经过分析、综合、比较、归纳等方法，去除各种次要矛盾，抽取事物的本质属性，进而形成能揭示事物特征和联系的概念。

抽象思维不同于形象思维，形象思维是与生俱来的本能，抽象思维则是需要经由外界的刺激、学习和吸收才能建立的能力。培养抽象思维一般有两种途径，一种是在实践活动和日常生活中，逐渐积累经验、形成概念，依据实际经验进行判断和推理；一种是通过学习科学的概念、原理、定律、公式等，根据理论依据进行判断和推理。由此可见，抽象思维一般有经验型与理论型两种类型。

例如，将三级管抽象为符号，如图 2- 1 所示。

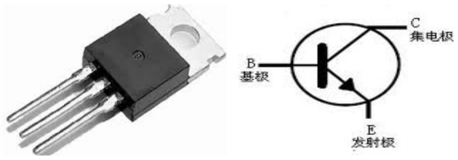

图 2- 1　三极管的符号抽象

毕加索画公牛，将现实中的公牛抽象为线状形象，如图 2- 2 所示。

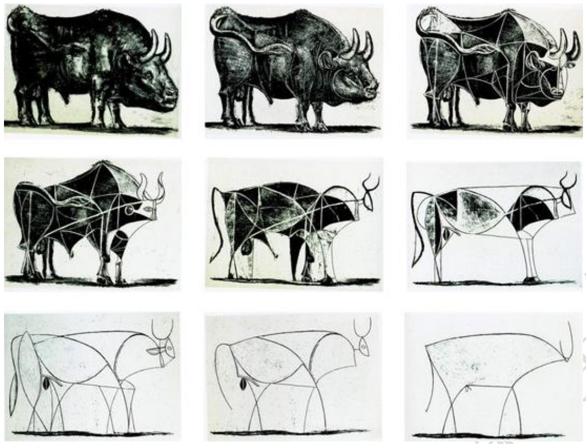

图 2- 2　毕加索笔下公牛的抽象

科学研究离不开抽象，它不仅需要运用科学观察和科学实验等手段去发现科学事实，更需要通过科学思维对科学事实进行加工，即通过科学抽象，探究自然界现象的复杂性和事物规律的隐蔽性，从而形成科学概念和科学规律。在科学研究中是否能够很好地运用科学抽象，是解决问题的前提和关键。科学抽象能够抛开事物非本质的联系，揭示事物内部的本质联系和过程；能够深入事物的里层，挖掘决定事物性质的隐蔽基础；能够排除次要过程和干扰因素，从纯粹的形态上考察事物的运动过程。

因此，科学抽象属于抽象，是科学认识过程的一个环节。科学抽象是在科学研究中通过对经验材料的比较和分析，经过分离、提纯和简化这三个过程，去除表面的、次要的因素，抽取和把握本质因素，进而形成科学概念或科学符号，以达到揭示研究对象的普遍规律和因果关系这一目的的认知过程和思考方法。一言蔽之，科学抽象就是透过现象看本质。

2.1.2　科学抽象的过程

下面通过“哥尼斯堡的七座桥”问题，详述科学抽象的三个过程：**分离-提纯-简化**。

【微实例 2.1】科学抽象的过程示例：“哥尼斯堡的七座桥”问题。

这是 18 世纪著名古典数学问题之一。在哥尼斯堡的一个公园里，有七座桥将普雷格尔河中两个岛及岛与河岸之间连接起来，如图 2- 3 所示。问是否可能从这四块陆地中的任意一块出发，恰好通过每座桥一次，再回到起点？

1、分离

分离，就是暂时不考虑所要研究的对象与其他各对象之间各式各样的总体联系。这是科学抽象的第一个环节。我们知道，任何一种科学研究，首先需要确定自己所特有的研究对象，而任何一种研究对象就其现实原型而言，总是处于与其他的事物千丝万缕的联系之中，是复杂整体中的一部分。但是任何一项具体的科学研究课题都无法对现象之间各种各样的关系都加以考察，所以必须进行分离，而分离本身也是一种抽象。

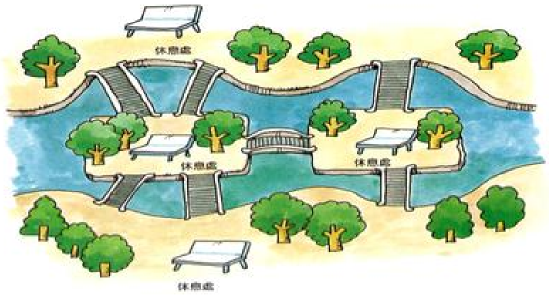

图 2- 3　哥尼斯堡的七座桥

在解答“哥尼斯堡的七座桥”问题时，首先要明确研究对象以及各对象之间的相互关系。通过对地图中各种对象的分离，我们发现求解七桥问题主要涉及岛、岸、桥这三个研究对象，而与树、休息椅等对象无关。同时，我们发现，是否存在满足要求的通路与岛的面积、岸的形状、桥的长短无关，而只受它们之间位置的影响。因此，我们将实际地图抽象为用点和线绘制的点线图，即将岛和河岸抽象为了点，将桥抽象为了线，如图 2- 4 所示。

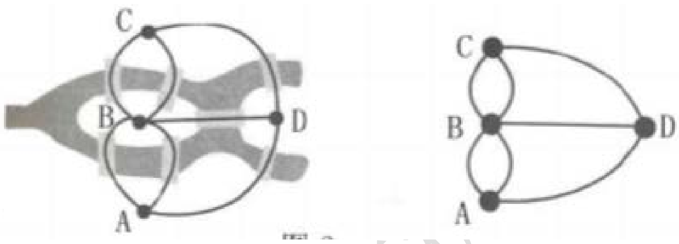

图 2- 4　七桥问题抽象图

2、提纯

提纯，就是在思想中排除那些模糊基本过程、掩盖普遍规律的干扰因素，从而使我们能在纯粹的状态下对研究对象进行考察。大家知道，实际存在的具体现象总是复杂的，有多方面的因素错综交织在一起，综合地起着作用。如果不进行合理的纯化，就难以揭示事物的基本性质和运动规律。

当明确了“哥尼斯堡的七座桥”问题的研究对象后，我们需要对问题继续进行提纯，找出主要矛盾，明确解题目标。这里，我们将是否在岛、岸、桥之间存在满足要求的通路问题纯化为图论中的“一笔画”问题，即是否能一笔绘制出图 2- 4 右侧的点线图。提纯的过程需要有足够的知识储备和良好的知识迁移能力，能够将实际问题映射为相同或相似的数学、物理或计算机等学科的问题。

3、简化

简化，是对纯态研究的结果必须进行的一种处理，或者说是对研究结果的一种表述方式。它是抽象过程的最后一个环节。在科学研究过程中，对复杂问题作纯态的考察，这本身就是一种简化。另外，对于考察结果的表述也有一个简化的过程。不论是对于考察结果的定性表述还是定量表述，都只能简化地反映客观现实，也就是说，它必然要抛开那些非本质的因素，这样才能把握事物的基本性质和它的规律。所以，简化是科学抽象中的一个必要环节，简化的目的是为了能够求出问题的解。

在“哥尼斯堡的七座桥”问题中，我们将一笔画问题简化为数学中的**连通图**问题，即利用数学方法归纳出一个点线图是否可以被一笔画的充要条件为：点线图是连通图，且构成该连通图的结点全是结点度为偶数的结点，或仅有两个节点度为奇数的结点。结点的**度**即为该结点所连接边的数量。

分析如下：

假设以 B 为起点和终点，则必有一离开线和对应的进入线，若定义进入 B 的线的条数为**入度**，离开 B 的线的条数为**出度**，与 B 有关的线的条数为 B 的度。要使得从 B 出发有解，则 B 的出度和入度是相等的，即 B 的度应该为偶数。而实际上 B 的度数是 5，为奇数，可知从 B 出发是无解的。

若从 A 或 D 出发，由于 A、D 的度数分别是 3、3，都是奇数，故以 A 或 D 为起点都是无解的。由

对称性可知，以 C 为起点得到的结果与 A 为起点是一样的。

因此，从一个点出发不重复地走遍 7 座桥，最后又回到原出发点是不可能的。

由此可见，在科学抽象的过程中，实际问题通常被抽象为相似或相关的数学问题。这不仅起到了使问题的表达更加简明、准确的作用，更重要的是可以较为容易地找到求解问题的方法，进而求出满足要求的解。

2.1.3　科学抽象的逻辑思维

逻辑是一切科学共有的思想结构和思维工具，科学知识作为间接推理的知识，其获取及运用必须使用逻辑方法。而逻辑思维，就是运用逻辑方法解决问题的思维过程。具体来说，**逻辑思维**是人在感性认识的基础上，以概念为操作的基本单元，以判断、推理为操作的基本形式，以辨证方法为指导，间接地、概括地反映客观事物规律的理性思维过程。它已摆脱了对感性材料的依赖，以理论为依据，运用科学的概念、原理、定律、公式等进行判断和推理。逻辑思维是科学思维中最普遍、最基本的一种类型。归纳、演绎和类比是常用的逻辑思维方法。

1、归纳

归纳是从个别事实中概括出一般原理的思维方法，即我们通常说的“根据具体事实概括出一般理论”的信息推理过程。归纳的基础是研究个性和共性间的对立统一关系。通过归纳，我们可以从特殊的、具体的前提推理出一般的、普遍的结论。科学归纳推理就是根据某类事物部分对象中的内在本质联系，推出该类事物的一般性结论的推理方法。在科学推理中，判明因果联系归纳推理是一种重要的推理形式。判明因果联系归纳法是根据因果联系的特点，在前后相随的一些现象中，通过某些现象的相关变化，归纳出现象间的因果联系。科学的发展历史表明，自认科学的经验定律和经验公式大都是应用归纳总结出来的。

【微实例 2.2】归纳的示例：斐波那契数列。

公元 1202 年，意大利数学家斐波那契在其传世之作《算法之术》中描述了著名的“兔子繁殖问题”：如果一开始有一对兔子，一个月后就能长成大兔，再过一个月便能生下一对小兔，并且此后每月生育一对兔子，小兔在出生后两个月又开始生育且繁殖情况与最初的那对兔子一样，那么一年后有多少对兔子？

分析：

在求解过程中，先列举前几个月的兔子对数，如表 2- 1 所示。经过仔细观察，可以推理出每月的小兔子是由上一月的大兔子繁殖的，因此小兔子对数等于上月大兔子对数；由于小兔子在经过一个月的成长，也变成了大兔子，故而每月大兔子对数等于上月大兔子对数与小兔子对数之和。由此可知，经历一年后（第 13 个月时），兔子对数为 233。

表 2- 1　某几个月的兔子繁殖对数

月份数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
小兔子对数	1	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
大兔子对数	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89
兔子对数	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

若继续追问，第 n 个月时，兔子对数是多少？根据上述归纳推理，我们可以得出斐波那契数列的一般公式，如式(2- 1)所示：

$$\begin{cases} F(0)=0 \\ F(1)=1 \\ F(n)=F(n-1)+F(n-2) \quad (n\ge 2) \end{cases} \tag{2- 1}$$

2、演绎

演绎是从一般性原理出发，推出关于个别或特殊事物的思维方法。其主要形式是三段论，即由大前提、小前提和结论三部分组成。大前提是已知的一般原理，小前提是已知的个别事实与大前提中的全体事实的关系，结论则是根据大、小前提通过逻辑推理获得的关于个别事实的认识。演绎推理在科学定理、定律和命题等的证明中具有重要作用。只要演绎的前提是正确的，推理的过程是严格遵守逻辑规则的，则得到的结论就是必然性的。

【微实例 2.3】演绎的示例：对奇数的描述。

一切奇数都不能被 2 整除，1003 是奇数，所以 1003 不能被 2 整除。

本题是一个典型的演绎推理问题，可用三段论表示为：

大前提：一切奇数都不能被 2 整除；

小前提：1003 是奇数；

结论：1003 不能被 2 整除。

3、类比

类比是根据两个（或两类）对象在某些属性或关系的相似或相同，去猜想它们在其他属性或关系是否也可能相似或相同的一种方法。具体而言，类比是以比较为基础的，它通过对两个（两类）对象进行比较，找出它们的相同点或相似点，在此基础上把一个或一类对象的已知属性，推演到另一个（另一类）对象中去，从而对后者得出一个新的认识。它既包括从特殊到特殊、又包括从一般到一般的推理方法。

【微实例 2.4】类比的示例：库仑定律。

库仑定律是通过将电荷间的相互作用与万有引力作类比得到的。

1686 年，牛顿（Isaac Newton）在开普勒三大定律的基础上，通过数学推导提出了著名的万有引力定律，其数学表达式如式(2- 2)所示：

$$F=\frac{GmM}{r^2} \tag{2- 2}$$

其中 F 是两个质点之间的万有引力，m 和 M 分别是两个质点的质量，r 是两个质点之间的距离，G 是引力常数。根据万有引力公式，牛顿得出结论：万有引力定律是一个力反平方定律，它所关注的引力 F 会按照距离源的远近 r 的平方反比而下降。

随后，富兰克林和普利斯特里相继通过实验发现电荷间存在引力和斥力，并通过类比推理的方法预测电荷间的电力与物体间的万有引力相似，也遵守反平方定律。1785 年，库仑进一步用扭秤对点电荷之间的引力和斥力作了定量的测定，得到库仑定律，其数学表达式如式(2- 3)所示：

$$F=\frac{k_e qQ}{r^2} \tag{2- 3}$$

其中 F 是两个点电荷之间的静电力，q 和 Q 分别是两个点电荷的电量，r 是两个点电荷之间的距离，k_e是库伦常数。

2.1.4　科学抽象的非逻辑思维

根据思维对信息的不同加工方式，思维可被分为形象思维、逻辑思维和非逻辑思维三种类型。其中，形象思维的方式主要是对具体形象信息的想象处理；逻辑思维的方式主要是运用命题信息进行抽象推导；非逻辑思维的方式则主要体现为对信息材料的快速洞察领悟。在非逻辑思维中，思维主体不受固定逻辑规则的约束而直接洞察思维对象的特性并迅速做出综合判断。这类思维活动主要包括想象、直觉和灵感等方法。

1、想象

想象是主体对通过联想得来的感性材料或有效信息进行加工、改造和重组的非逻辑思维过程，即人

脑对记忆中原有形象经加工改造、重新组合后，创造出新形象的思维方式。就思维的目的来说，科学想象在于去设想、构思事物内部相互联系、相互作用的图景，探求事物运动的内部机理，推测事物现象的原因与规律性。

例如，伟大的物理学家、狭义相对论的创立者爱因斯坦（Albert Einstein）通过想象预言出引力波的存在。在 1916 年爱因斯坦提出相对论的同时，也预言了引力的作用以波动的形式传播的。但引力波的真实性一直未被证实，它仅是爱因斯坦在研究引力和“时空几何”关系时的一种想象。直到 2016 年 2 月 11 日，美国加州理工学院、麻省理工学院以及“激光干涉引力波天文台（LIGO）”的研究人员才在华盛顿举行记者会，宣布他们利用 LIGO 探测器于 2015 年 9 月 14 日探测到来自于两个黑洞合并的引力波信号。

2、直觉

直觉是不受某种固定的逻辑规则约束而直接领悟事物本质的一种思维形式。它是人们在从事某项活动中主观意识对客观事物的直接观察和感受。它是对面前出现的新事物、新现象，在证据不充分的条件下，凭着丰富的知识和经验，快速做出直接判断的行为过程。一方面，直觉虽是非逻辑的思维过程，但与逻辑思维密切相关，它是逻辑思维的浓缩和省略，它对事物从感觉、知觉到表象，再到概念、判断和推理的过程是快速完成，一掠而过脑际的；另一方面，直觉又离不开形象思维，它必然伴随着一定的形象刺激，才能出现。

例如，德国著名的地球物理学家、“大陆漂移说” 的提出者魏格纳（Alfred Lothar Wegener）凭直觉提出了“大陆漂移说”。魏格纳在一次偶尔观看世界地图时，发现大西洋两岸大陆的海岸线十分相似，于是，他凭直觉大胆假设，非洲和南美洲原本是连接在一起的，后来由于某种原因分开，中间便形成了大西洋，从而提出了著名的“大陆漂移说”。

3、灵感

灵感（或顿悟）是一种人们无法控制的、创造力高度发挥的、突发性较强的思维方法，是在科学创造过程中以完全没有意料到的方式突然获得异常强大创造能力的思维方法。它一般是主体在创造性活动中因思想高度集中、情绪高涨而突然出现的一种短暂的最佳状态或活动。灵感既建立在分析与综合、归纳与演绎等逻辑方法的基础之上，又建立在想象和直觉等非逻辑方法的基础之上。它是逻辑方法和非逻辑方法相互交织、相互作用的迅速升华。灵感主要有突发性、机遇性、瞬时性、创造性等特点。突发性质指灵感的心理机制是大脑的高度激发状态，这是无法控制的；机遇性是指灵感的出现是随机的、偶然的，常常是人们始料未及、难以预测的；瞬时性是指灵感是突然闪现、转瞬即逝的；创造性是指灵感在思维方式上常常是打破一般人的常规思路，在思维结果上也是形成的前所未有的新概念、新观点、新思路、新技术和新工艺。

例如，英国生物学家、进化论的奠基人达尔文（Charles Robert Darwin）突发灵感，揭示了生物物种起源和进化过程。达尔文在创立生物进化论的过程中，一直对生物进化的方向和控制过程的实现毫无头绪。一天，当他在阅读马尔萨斯的《人口原理》作为消遣时，他读到了书中所阐述的由于人口数量按几何级数增长，而人口生活资料的数量按算数级数增长，从而导致人口繁衍过剩这一理论。突然迸发的灵感使得他想到：繁殖过剩也是生物界的普通现象，因此生物是通过生存竞争进行自然选择的，适者生存，不适者被淘汰。

2.1.5 科学抽象的量化思维

科学抽象的量化方法主要有数学方法、系统科学方法和复杂性研究方法。

1、数学方法

数学方法是常用的一种科学抽象的量化思维方法。它是以数学为工具进行科学研究的方法，即用数学语言表达事物的状态、关系和过程，经推导、演算和分析，以形成解释、判断和预言的方法；或运用数学的概念、理论、公式对所研究的对象进行定量的分析、推断、描述，从而在量上揭示对象的规律性的一种科学抽象方法。数学方法将数学的各因素带入到科学技术的研究中，因此，它具有高度的抽象性、严密的逻辑性和广泛的应用性等特点。其中，高度的抽象性是指数学方法以简洁精确的形式化语言描述

问题，它在具体的研究中会暂时舍去各种具体属性，仅在纯粹的状态下考察它们的空间形式和数量关系；严密的逻辑性是指数学方法用严格的逻辑推理来确定各种空间形式和数量关系的性质，从而使得数学结论具有逻辑的必然性和量的确定性；广泛的应用性是指任何一个知识领域，任何一项活动，只要涉及数量关系和空间形式，就会应用到数学方法。数学方法的抽象性和精确性，决定了数学方法应用的广泛性。

常用的数学方法有数值分析、数学建模和数学实验，即通过对资料的数值分析来取得必要的数据、通过建立数学模型来揭示对象的本质和规律、通过数学实验来验证研究的成果。

数学模型是在对实际问题进行数学抽象的基础上，用数学语言对对象系统的元素关系、结构或过程进行数量和结构的描述，建立的一套数学关系式或算法系统。

数学实验又称科学计算或计算机实验，它是将所研究问题的数学模型转化成能够输入计算机进行运算的形式，用计算机进行不同参数情况下的计算，然后通过分析、比较，得出研究结论的现代科学方法。

2、系统科学方法

系统科学方法是在系统科学发展的基础上发展起来的，它是按照事物本身的系统性把对象放在系统的模式中加以考察的科学研究方法的总称。即从系统的观点出发，始终从整体与部分（要素）之间，整体与外部环境的相互联系、相互作用、相互制约的关系中综合地、精确地考察对象，以达到最佳地处理问题的方法。

系统科学方法具有整体性、有序性、动态性、模型优化等特点。

其中，整体性是指人们把复杂的对象作为有机的整体来研究。从整体的特性、功能、目标出发，考察组成该系统的各个要素之间、要素与系统之间、系统与环境之间的各种相互联系。掌握系统的运动变化规律，并以此为指导，去研制、设计系统的各个组成部分的参数和性能，以求得最佳的组合。

有序性是指人们通过认识系统的结构性、层次性来揭示系统的整体特性和功能，从系统内部各要素之间的稳定联系和稳定结构找出系统变化和发展的规律性。

动态性是指所考察的系统都是开放的、处于一定环境中的，它与外界环境有着千丝万缕的联系。任何系统如果要得到自身的发展，保持自己的稳定性，必定要与环境不断进行物质、能量和信息的交换。

模型优化是指对于比较大或比较复杂，难于直接进行分析和实验的系统，一般都需要设计出系统模型来代替真实系统。通过对系统模型的研究掌握真实系统的本质和规律。从多种可能的途径中，选择出最优的系统方案，使系统处于最优状态，达到最优效果。

3、复杂性研究方法

复杂性研究方法起始于 20 世纪 80 年代的复杂性研究或复杂性科学，是系统科学发展的新阶段，也是当代科学发展的前沿之一。尽管目前它仍处于萌芽和形成阶段，但已引起科学界和哲学界的广泛关注，并被誉为“21 世纪的哲学变革”。复杂性科学获得如此的盛誉，主要是因为它在科学方法论上的突破。

复杂性研究方法是是研究自然、社会、思维中普遍存在的复杂性的特殊的方法。人们期望借助这些方法来研究和解决社会、经济、生命、人脑、生态环境、管理等各种问题。复杂性科学研究的对象都是十分复杂的系统，它需要在各门学科基础上的交叉综合研究。需要数学、物理学、经济学、计算机及信息网络等多门学科以及多门学科方法的相互配合、相互协调才能完成。复杂性系统所观测和统计数据的量是十分庞大的，对这些数据分析、整理、计算等单靠人是无法完成的，只能靠日益发展起来的、数据处理能力惊人的计算机系统来完成。

2.2　数学模型的定义和分类

本节全面地讲解数学模型的概念，指出“数学模型是对现实世界的理想化”这一观点，以此描述数学模型的定义，并对数学模型加以分类。

科学抽象提供了思考问题的方法，但从现实问题到计算机程序之间，还需要借助数学模型这个桥梁。数学模型其实是科学抽象的产物，它将复杂的现实问题抽象为特定的数学问题，并在此基础上利用数学的概念、方法和理论进行深入的分析和研究。进而从定性或定量的角度来刻画实际问题、揭示现实对象

的内在特征，并为解决现实问题提供精确的数据或可靠的指导。数学模型是对现实世界现象的理想化，是我们认识世界的重要途径。现实世界很多实际问题看起来与数学无关，但通过抽象和分析都可以用简捷的数学方法有效解决。

2.2.1　数学模型的定义

理解数学模型，需要辨析三个基本概念：模型、数学模型和数学建模。其中，**模型**是抽象的产物，是为了一定目的，对客观事物进行简缩、抽象、提炼出来的原型替代物。

数学模型是模型中的一种。**数学模型**是指对于一个现实对象，为了特定的目的，做出一些必要的简化和假设后，根据对象的内在规律，运用适当的数学工具，得到的一个数学结构。简而言之，数学模型就是刻画实际问题的数学描述。**数学建模**就是建立数学模型的全过程，包括表述、求解、解释、检验等，即实际问题的数学化过程。

数学模型不是对现实系统的简单模拟，而是通过分析、提炼、归纳等科学抽象方法，对现实对象升华的结果。它通过数学语言精确、严谨、抽象地描述现实对象的内在特征，并运用数学推理和计算求解深化对实际现象的认识。比如著名的牛顿第二运动定律使用公式$F=ma$来表示物体的加速度 a、所受合外力 F 和物体质量 m 之间的关系。该数学模型在建立时抓住了物体受力运动中的三个关键因素，忽略了物体的质地、形状、大小和变加速运动过程等非理想化的干扰因素，使得人们可以透过复杂的物体运动现象理解物体运动规律的内在本质。

数学建模的创建，涉及原型和模型两个概念。数学建模的创建过程其实就是从原型到模型的转化。原型（Prototype）是指人们在现实世界里关心、研究或者从事生产、管理的实际对象。比如计算机系统、导弹飞行过程、生产销售过程、物体运动过程等。模型（Model）则是指为了某些特定目的将原型的某一部分信息简缩、提炼而构造的原型替代物。需要特别强调，模型不是原型的完全复制品，而是只反映原型与某种目的有关的某些方面和层次特征。一个原型，可以创建出许多针对不同目的的模型。比如，以学生为原型，在创建学生信息系统时，它对应的模型需要包括年龄、性别、民族等学生属性信息；而在设计选课系统时，学生模型则需要包含学生已修课程、选课时间、课程学分等信息。

另外，数学模型的创建离不开所研究的实际问题和相关背景。数学建模的目的就是运用数学方法解决实际问题。在建模过程中，必须注意实际问题的要求，满足实际问题的条件，最终得到适合实际问题的解。一个高质量的数学模型都是从实际问题抽象出来的，具有明确的针对性，能够接受实践的检验，并且被证明是正确的、可用的。

2.2.2　数学模型的分类

现实世界的问题五花八门、千变万化，与之相对应的数学模型也是种类繁多，各式各样。本文列举几种常用的常见的数学模型的分类方法。

按研究对象的特性，可以分为确定的、随机的，模糊的、突变的，静态的、动态的，连续的、离散的，线性的、非线性的模型。根据对某个实际问题了解的深入程度，可以分为白箱模型、灰箱模型和黑箱模型。

1、 确定性模型和随机模型

确定性模型是指描述客体必然现象的模型，其数学工具一般是代数方程、微分方程、积分方程和差分方程等。随机模型是指描述客体自然现象的模型。随机模型中变量之间的关系是以统计值或概率分布的形式给出的。在本章 3.4.4 中给出的“食堂排队”问题案例，就是一个典型的利用泊松分布建立的随机模型。

2、 静态模型和动态模型

静态模型是指要描述的系统各对象之间的关系是不随时间变化而变化的，一般都是用代数方程来表达。动态模型是指描述系统各对象之间随时间变化的规律的数学表达式，一般用微分方程或差分方程表示。经典控制理论中常用的系统中的传递函数就是一个动态模型，因为它是从描述系统的微分方程变换

而来的。

3、 连续时间模型和离散时间模型

连续时间模型是指模型中时间变量是在一定区间内变化的模型。各种用微分方程描述的模型都属于连续时间模型。离散时间模型是指在处理集中参数模型时，时间变量被离散化的模型。各种用差分方程描述的模型都属于离散时间模型。

4、 参数模型与非参数模型

参数模型是用代数方程、微分方程、微分方程组以及传递函数等描述的模型。建立参数模型的关键在于确定已知模型结构中的各个参数，并通过理论分析创建参数模型。例如本章 3.3.3 中的“行车间距”问题就属于参数模型。非参数模型是直接或间接地从实际系统的实验分析中得到的响应。运用各种系统辨识方法，可由非参数模型得到参数模型。例如本章 3.3.3 中的“人口预测”问题就属于这种情况。如果实验前可以决定系统结构，则通过实验辨识可以直接得到参数模型。

5、 线性模型与非线性模型

线性模型中各对象之间是线性关系，可以应用叠加原理，即几个不同的输入量同时作用于系统的响应，等于几个输入量单独作用的响应之和。例如本章 3.3.3 中的“行程”问题就是线性模型。线性模型因其简单而应用广泛。非线性模型中各对象之间不是线性关系，不满足叠加原理。在允许的情况下，非线性模型常可以线性化为线性模型，方法是把非线性模型在工作点邻域内展开成泰勒级数，保留一阶项，略去高阶项，即可得到近似的线性模型。但这种转换必然会降低模型质量。

6、 白箱模型、灰箱模型和黑箱模型

白箱模型是指所有过程都建立在因果关系基础上的模型，即那些内部结构和规律比较清楚的系统所对应的模型。如力学、热学、电学以及相关的工程技术问题所对应的模型。

灰箱模型是指那些内部规律尚不十分清楚、在建立和改善模型方面都还不同程度地有许多工作要做的问题所对应的模型。如气象学、生态学、经济学等领域的模型。

黑箱模型是指一些其内部结构和规律还很少为人们所知的系统或对象所对应的模型。如生命科学、社会科学等方面的问题。但由于因素众多、关系复杂，也可以将它们简化为灰箱模型来研究。

另外，根据建模所用的数学方法，还可将数学模型划分为微分方程模型、几何模型、线性代数模型、概率论模型、统计模型、图论模型、初等模型、规划模型等。

2.3 数学建模的基本过程和方法

本节以“哥尼斯堡的七座桥”问题为例，分析数学模型的建立过程，将整个过程细化为七个部分，并以具体案例说明数学模型建立的几种基本方法。

2.3.1 数学建模的基本过程

数学模型建立的过程是一个复杂的系统工程，整体上分为模型的抽象过程和求解过程，即一方面要用数学的语言和方法，对具体问题进行抽象、假设、简化，建立能有效解决问题的数学关系，另一方面，需要对所建立的数学关系，通过计算机进行求解，并对求解结果进行解释、分析、检验、修改。而在模型的抽象过程中，由于对问题的理解角度不同，使得进行假设简化的程度不同，采用的数学方法也不同，这些都影响着所建模型的求解难度和模型的精确性及实用性。因此，模型的抽象过程是建立数学模型的关键。由于实际问题的复杂性，无法给出若干条普遍使用的建模的准则和技巧。在此，仅给出模型抽象过程中解决问题的思考方法与步骤，如图 2- 5 所示。

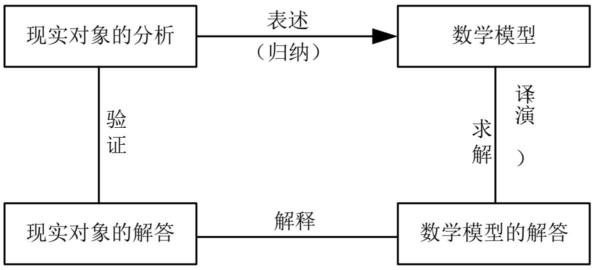

图 2- 5　现实对象与数学模型的关系

【案例 2.1】数学建模基本过程示例：“哥尼斯堡的七座桥”问题。

1、 现实对象的信息

“哥尼斯堡的七座桥”问题描述详见 2.1.2 节。

2、 数学模型的建立

数学模型建立是整个建模的核心，它主要分为以下几个步骤：

1）明确问题——理解和分析（基础）

首先，要对问题进行正确的理解和分析，了解问题的实际背景，明确建模的目的，搜集建模必需的各种信息。在这一过程中要对问题的复杂性和解决问题的难度有充分的思想准备，仔细检查问题的各个组成部分，确定影响问题的所有变量因素和条件。从内部联系和外部表现上把握其本质，从运动变化中把握规律。此外，为了对问题有更直观的理解，可考虑对问题进行重新表达，如变语言表达为图形表达，通过增加、舍弃或重排某些因素的方法改变问题的表达形式。还可以详细考察一部分而忽略其它部分，或考虑问题的整体特征而忽略部分细节，从而去除因素之间的关系，使复杂问题简单化，杂乱无章的因素明朗化，突出问题中的主要因素，进而初步确定用哪一类数学方法建立模型。

通过对七桥问题的分析，得出它主要是研究图形的一笔画问题，即能否从一个点出发不重复地走完图形中的所有边并最终回到起始点。

2）假设简化——假设和抽象（关键）

其次，根据前面对问题的理解与分析，进行合理的、必要的假设简化。假设简化的目的是把实际问题转化为数学问题，用数学关系表达问题的实质。

原型简化的过程绝非天马行空、肆意妄为，它需要“以事实为依据、以合理为前提”，切忌脱离实际。简化原则为“抓主弃次、合情合理”（抓住主要矛盾、舍弃次要矛盾、符合实际情况、符合事物原理）。只有抓住问题的本质，才能建立合理模型。一个模型的优劣，取决于是否采用了恰当的解题方法、合理的问题描述、适度的模型抽象，而不在于是否采用了高深的数学知识。简化后的模型的不能过易，也不能太难，抓住本质最佳。同时，在合理和简化之间要做出折中。

假设简化的依据有三个：

①出于对问题内在规律的认识，对感性材料进行深入的分析，从问题的内部联系和外部表现上把握其实质，比较各因素之间的异同。把各种表面形象进行加工和改造，通过分解、重组形成新的形象，在头脑中进行创新性的构思。把未知关系化为已知关系，在不同的对象或完全不相关的对象中，识别与已有知识相同或相似的关系，而在表面上相似或相同的事物之间找出本质属性的不同点。在分析这一现象的基础上，进行假设简化，寻找解决问题的关键和与之模拟的数学方法。

②通过理想化抽象方法或其它抽象方法进行假设，不仅赋予所研究对象在现实原型中抽象出来的已有的性质，还赋予原始对象所没有的想象的性质，用研究理想化形象的方法使对客观原型的研究简化，在归纳的基础上，避开事物的某些属性，抓住事物的本质特征。

③是对资料现象的分析，也可以是二者的综合，即假设简化时不能把重要的因素漏掉，以免影响模型的精确度和使用的效果。同时，也不应当把一些无用的冗余的变量放在模型中，这不仅增加模型的复杂性，还会给使用带来麻烦。

因此，用精确的数学语言做出合理的假设，是建立模型的关键。进行假设时，既要运用与问题相关的物理、化学、生物、经济等方面的知识，又要使无意识思维开动起来，充分发挥想象力、洞察判断力，

通过联想、想象、归纳，模拟重现已学过的知识或查找与之相关的知识，如常用的有规划论、图论、微分方程、概率统计等。从而承担起构造各种各样思想组合的复杂任务，找到相应的数学方法，达到解决问题的目的。

在解决七桥问题时，欧拉利用几何知识对研究对象进行了抽象化和理想化，他将岛和河岸抽象为了点，将桥抽象为了线。

3）寻找方法——映射数学方法（经验）

经过前面的分析和假设简化，我们对所要解决的问题有了比较直观的认识，但对建立解决问题的数学关系还可能处于几种途径的选择之中。选择什么样的途径，采取什么样的策略是解决问题的关键。模型建立需要有深厚的数学知识和丰富的建模经验，是一个集经验、灵感、想象力、洞察力、创造力、判断力等于一身的过程，也是一个只可意会，不可言传的过程。但该过程也是有章可循，有法可依的。“站在巨人的肩膀上”就是一种常用的建模技巧。因为时间和知识水平等的限制，一般都是在现有模型中查找与实际问题相似度较高的求解方法或在常用算法中选择较为合适的方法，并进行适度修正和条件创建，以满足该问题需求。

建模的选择策略原则是尽量采用成熟的数学关系和已有模型，同时注意新方法的应用。具体应用哪一方面的数学知识来解决，需要在分析问题的各种关系的基础上，通过假设，在适合模型需要的前提下，基于对某一数学分支的熟悉程度，从解决问题的不同角度寻求与之模拟的数学关系；或利用已经掌握的知识，联想与假设和结论密切相关的已知法则，寻找与经典模型作模拟的条件。虽然经典模型可能并不完全适合我们需要建立的模型系统的真实情况，但可作为我们分析、归纳问题的指南。其实，许多为不同种类的系统建立的数学模型，常常具有相似的数学表达形式，如传染病问题、捕鱼问题、耐用消费品的销售问题等在一定条件下，都服从于人口增长模型这一经典模型。另外，可利用计算机进行模拟，在计算机上尽可能真实地创造一种实验环境，模仿某种系统的实际运行过程，重现所要描绘的客观现象，从而对这种现象所存在的某些规律做出描绘、判断、预测，进而找出描绘该规律的数学关系，建立模型。

根据七桥问题的特点，我们尝试选用图论方法进行解决，即我们需要找到证明连通图是否能够被一笔画的充分必要条件。

3、 数学模型的解答

数学模型的解答相比数学模型的建立要容易些，它主要是利用已知的数学方法来求解已经建好的模型。在求解时，常需要分析和判断结果的正确性、合理性和完备性。若求解结果不符合建模目的时，需要重新修正上一步的建模过程，直至满足要求。

七桥问题的求解过程如下：通过观察各种形式的连通图，我们发现图中的点可以根据其连接线条数的奇、偶性分为偶点和奇点。如果一个图形能一笔画成，那么除去起点和终点外，其他的经过点必定都是偶点。因为经过点是有进有出的点，即每有一条线进这个点，就一定有一条线出这个点。而对于起点和终点而言，如果起点和终点是同一个点，那么它也属于有进有出的点，即它也是偶点；如果起点和终点不是同一个点，那么它们必定是奇点。因此，能够一笔画的图形最多只有两个奇点，即一个图形如果能一笔画完，必须符合以下两个条件：图形是封闭连通的；图形中的奇点个数为 0 或 2。

4、 现实对象的解答

最后，数学模型要被放到现实世界中接受实践的检验。数学模型的建立是一个从实际——数学——实际的过程，在得到数学结果之后，建模过程并未结束，还需要使用该结果对模型的各种性能进行评价。模型检验包括两部分内容：一是对问题本身的检验，二是对同类问题的检验。首先，需要将模型分析的结果反馈到本系统，用本系统提供的数据、现象等检验模型的合理性、准确性和适应性。其次，最重要的是检验模型在实际同类问题中的可行性和有效性。一个好模型不应该对本系统中的数据结构有过多依赖，正如一个好程序总是将算法独立于数据之外一样。数学模型应该是对问题本质的描述，可将模型中某些固定量修改为可调性参数，并借此验证其适用范围和推广价值。

从图 2- 4 可知，七桥问题中的四个点全是奇点，不能一笔画，即不可能一次无重复地走完七座桥。在用一笔画数学模型解决不同连通图的一笔画问题时，我们进一步发现：如果图中的点全是偶点，那么可以任意选择一个点作为起点（起点和终点重合），该连通图均能被一笔画成；如果图中有两个奇点，那

么任意选一个奇点作为起点，另一个奇点为终点，该连通图可以被一笔画成。

2.3.2 数学建模的一般步骤

在对数学建模的基本过程有了一定程度的了解后，我们进一步对其进行细化，总结出数学模型建立的 7 个步骤，具体如图 2- 6 所示。

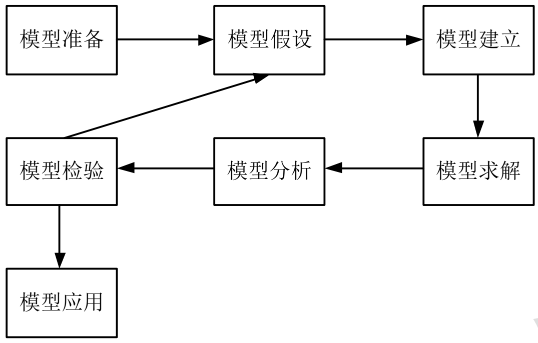

图 2- 6 数学建模过程图

为了便于采用计算机求解数学模型，这里用计算机流程图形式来描述数学建模的创建过程，如图 2-7 所示。本文以“行车间距”问题为例详细叙述这 7 个步骤的具体实现。

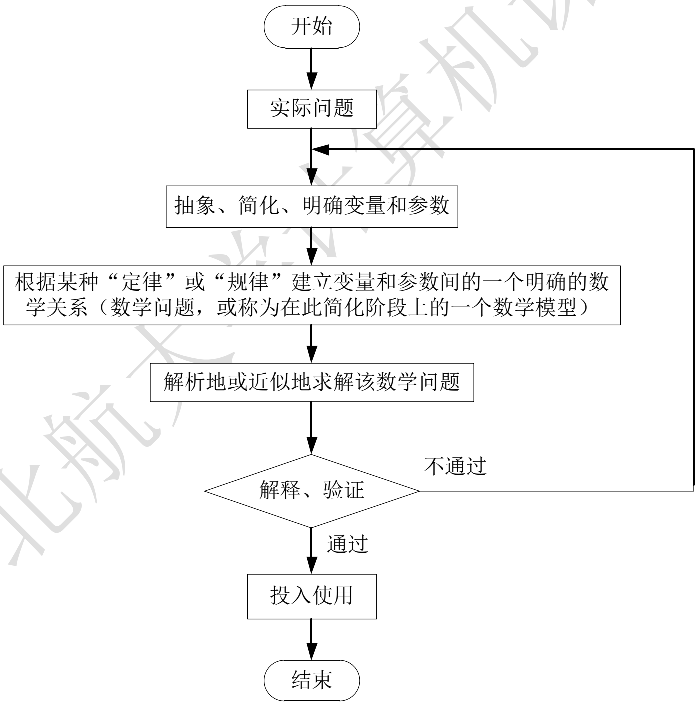

图 2- 7 数学建模过程流程图

【案例 2.2】“行车间距”问题。

根据美国的交通规则规定：正常的驾驶条件下对车与车之间的跟随距离的要求是，车速每增加 10 英里/小时，与前车距离应增加一个车身的长度，即所谓的“车身法则”。但是在不利天气或道路条件下要有更长的跟随距离。做到这一点有一个简便的“两秒法则”，即不管车速如何，从看见你前车经过某一标志开始，默数 2 秒钟后你才到达同一标志；如果 2 秒之前你已到达，说明你车速太快。判断“两秒法则”与“车身法则”是否一样；若不一致，试建立模型，寻求更好的驾驶规则。

1、模型准备

这一步需要对问题进行深入的理解和分析。最终目标是检验"两秒法则"，但是"两秒法则"的数学模型是什么？它和"车身法则"相同吗？如何判断"两秒法则"的优劣？遵守"两秒法则"是否就能够按最小间距保证行驶的前后两车不相撞？面对这一系列悬而未决的问题，我们需要掌握更多的细节。

根据"两秒法则"，可得当车速提高 10 英里/小时（≈ 16 千米/小时）且行驶 2 秒，增加的车间距为：

10 英里/小时×5280 英尺/英里×1 小时/3600 秒×2 秒≈ 29（英尺），

而车身的长度平均为 15 英尺。由此可知，"两秒法则"与"车身法则"是不相同的。导致它们不同的主要因素是车辆的行驶速度不同。

因此，根据上述分析在更为准确的问题描述和更为合理的数学分析的前提下，对题目进行改进，提出了一个新问题：具有不同车速的车辆刹车的最小安全间距是多少？

2、模型假设

模型假设主要是为模型的建立提供必要的变量定义和变量间关系的确定。其中，变量定义是基于步骤一中对问题的理解，析别出该问题所涉及的主要矛盾，确定哪些是自变量（因变量可以有多个），哪些是因变量，并通过减少变量数目对问题进行适度简化，降低模型的复杂程度；变量间关系的确定：根据识别出的各类变量，结合先验知识和实验数据，合理猜测自变量与因变量间的内在关系。

在本题中，通过查阅资料获得行车间距的相关知识，做出如下假设：

（1）v：表示行车速度（英尺/秒），假设车辆是匀速行驶的；

（2）d：表示总刹车距离（英尺），是指从司机决定刹车到车完全停止这段时间内汽车行驶的距离；

（3）d_1：表示反应距离（英尺），是指从司机意识到要停车时刻到真正开始刹车时刻期间车辆的行驶距离；

（4）d_2：表示制动距离（英尺），是指从制动器开始起作用到车完全停止所滑行的距离；

（5）t_1：表示反应时间（秒），是指司机从意识要刹车到真正刹车的时间间隔；

（6）m：表示车的质量（千克），是常量；

（7）a：表示刹车时的减速度 a，假设刹车时匀减速过程，满足牛顿第二定律，即 a 为常数；

（8）F：表示刹车时的最大制动力（牛顿米），假设最大制动力与车质量成正比，使汽车作匀减速运动；

（9）t_2：表示刹车时间（秒），是指从后车看到前车经过某一标志开始，默数 t_2 秒后后车才到达同一标志。

其中，司机刹车的反应时间受个人驾驶因素（如反射本能、警觉程度、视力程度等）和车辆操作系统等影响，无法准确获得。因此，为简化系统，我们将反应时间 t_1 视为常量，即通过经验估计，得到 t_1 = 0.75（秒）。

3、模型建立

（1）根据刹车距离等于反应距离与制动距离之和，得 $d = d_1 + d_2$；

（2）司机在准备刹车的反应过程中，车仍在匀速行驶，则反应距离与车速以及反应时间之间是线性关系，得 $d_1 = v\, t_1$；

（3）由于在刹车制动力 F 的作用下，车速从 v 变成 0，则根据最大制动力、刹车距离与刹车动能之间的转换关系，得 $Fd_2 = mv^2/2$；

（4）根据物体上的作用力、物体质量和加速度之间的关系，得 $F = ma$。

因此，行车间距模型为：

$d = d_1 + d_2 = t_1v + v^2/2a = t_1v + kv^2\,(k=1/2a)$，又因为 t = 0.75 秒，则模型可简化为：$d = 0.75v+kv^2$。

4、模型求解

根据表 2- 2 中车速和刹车距离的实际测量数据(第 1、2、3 列)，采用最小二乘法通过计算机拟合得到，k=0.0255。

表 2- 2 车速和刹车距离数据

车速 v		实测的刹车距离 d（英尺）	计算的刹车距离 $\overline{d}$（英尺）	以 v 匀速行驶距离 $\overline{d}$ 需要时间 t_2（秒）
英里/小时	英尺/秒			
20	29.3	42	43.9	1.5
30	44.0	73.5	82.5	1.87
40	58.7	116	132.1	2.25
50	73.3	173	192.2	2.62
60	88.0	248	263.8	3.00
70	102.7	343	364.5	3.37
80	117.3	464	439.5	3.75

根据拟合得到的模型中的关键参数 k =0.0255 和所建立的模型 $d = vt + kv^2$，可以依次计算出不同车速下的刹车距离 $\overline{d}$（表 2- 2 中第 4 列）和刹车时间。这里以车速 v=20 英里/小时为例，具体计算过程如下：

v=20 英里/小时==29.3 英尺/秒；刹车距离 $\overline{d}= t_1v + kv^2 = 0.75\times29.3+0.0255\times29.3^2=43.9$ 英尺（此时，t_1=0.75）；行驶距离 $\overline{d}$ 所花费的时间 $t_2= v/a = v\times2k = 29.3\times2\times0.0255=1.5$ 秒。

5、模型应用

根据上述创建和求解的模型，可以将所谓“2 秒准则”修正为“T 秒准则”，即后车司机从前车经过某一标志开始默数 T 秒钟后到达同一标志，就能确保不撞上前车。不同的车速下，T 为不同的值。如表 2- 3 所示。

表 2- 3 修正后的“T 秒准则”

车速(英里/小时)	0～29	30～59	60～80
T(秒)	2	3	4

2.3.3 数学建模的基本方法

数学建模的信息源包括先验知识、实验数据和预期目标。

先验知识是指前人研究、总结出来的知识或规律、定理、原理及模型等。在建模工作初始阶段，所研究的过程常常是前人已经研究过的。通常，随着时间的进展，关于“一类现象”的知识已经被集合起来，或被统一成一个科学分支，在这个分支里包含许多定理、原理及模型。建模过程是从以往的知识源出发而进行的。一个人的研究成果可以成为另一个人为解这某问题而进行研究的起点。先验知识为人们顺利建模提供了借鉴的方法和捷径。

牛顿曾说，“假如我看得远，那是因为我站在巨人的肩上”。正是由于后人站在达芬奇、伽利略、牛顿、高斯和爱因斯坦这些巨人的肩上，人类社会才会不断取得进步、不断发展。

而通过定量观测获得实验数据来建模是数学建模的另一个常用方法。

因此，数学建模的基本方法可分为：机理建模（机理分析方法），又称演绎法或理论建模法；实验建模（测试分析方法），又称归纳法或系统辨识法；综合（混合）建模。

1、机理建模

机理建模是根据对现实对象特性的认识，分析其因果关系，找出反映内部机理的规律，从而建立起

数学模型的方法。机理建模方法立足于揭示事物内在规律，它运用先验知识，根据构成系统的一些假设和基本原理，通过数学上的逻辑推导和演绎推理，从理论上建立描述系统中各部分的数学表达式或逻辑表达式。

机理建模是一个从一般到特殊过程，又被称为演绎法或理论建模法。在建模中，实验数据只被用来证实或否定原始的假设或原理。机理模型的建立，需要建模者有与问题相关的物理、化学、经济等方面的先验知识，并能够通过对数据和现象的分析对事物内在规律做出的猜想（模型假设）。因此，机理模型一般均具有明确的物理意义或现实意义。它主要适用于内部结构和特性基本清楚的系统，即白箱问题（如动力学问题）。

常用的机理模型建立方法有：

- 比例分析法：建立变量之间函数关系的最基本最常用的方法；
- 代数方法：求解离散问题（离散的数据、符号、图形）的主要方法；
- 逻辑方法：是数学理论研究的重要方法，对社会学和经济学等领域的实际问题，在决策、对策等学科中得到广泛应用；
- 常微分方程：解决两个变量之间的变化规律，关键是建立"瞬时变化率"的表达式；
- 偏微分方程：解决因变量与两个以上自变量之间的变化规律。

【案例 2.3】机理建模案例：求钟表的时针和分针在 24 小时内的重合次数。

假设钟表初始值为 0 点 0 分，即此时时针和分针是重合的。问：在 24 小时内，时针和分针将重合多少次？

解：

假设经过 x 小时，时针和分针再次重合。

众所周知，分针在表盘上走一圈，时针在表盘上走一格，即分针和时针的角速度分别为 360 度/小时和 30 度/小时。根据此先验知识，可得分针和时针转动角度之间的关系式为：$360x = 30x + 360$。

求解此一元一次方程，得 $x = \frac{12}{11}$。

由此可知，时针和分针每经过$\frac{12}{11}$小时就重合一次。

那么，它们在 24 小时内的重合次数为：$24 \div \frac{12}{11} = 22$ 次。

显然，本例采用的是比例分析法进行机理建模的。

2、实验建模

实验建模是在研究对象的内在规律难以获得的情况下，通过输入、输出数据的对比和分析，建立数学模型的方法。在建模过程中，建模者根据观测到的系统行为结果，推导出与观测结果相符合的模型。实验建模是一个从特殊到一般的过程，又被称为归纳法或系统辨识法。实验建模主要适用于内部结构和特性尚不清楚的系统，即黑箱问题（如外星球）。

实验建模主要采用数值分析法来创建模型，包括基于数理统计和基于作图两大类。其中，基于数理统计的建模方法主要是通过收集和分析随机数据，对数据来源的总体作出推断，抽象出一定的概率模型（如：抽样，给出产品检验的合格率）；基于作图的建模方法是以表格、图示等直观手段，探索数据的结构，据此对数据作出解释，包括饼图、直方图、走势图或插值法、曲线（面）拟合法等。

通过数值分析法建立实验模型的一般步骤如下：

首先，探索性数据分析，利用 Python 画出离散点，观察其分布特点，预测其规律，大致属于什么曲线（是直线、抛物线或椭圆，还是多项式表示的曲线）。通过作图、造表、用各种形式的方程拟合、计算某些特征量等手段探索规律性；

其次，提出一类或几类可能的模型的可能形式（如：进一步确定拟合多项式（方程）的次数和各项的系数）；

最后，推断分析建立的模型是否可靠、准确：通常使用数理统计方法对所定模型或估计的可靠程度和精确程度作出推断估计、统计推断。

【案例 2.4】实验建模案例："人口预测"问题。

据人口统计年鉴，已知我国从 2005 年至 2014 年人口数据资料，如表 2- 4 所示。试建立人口数与年份的函数关系，并估算 2018 年的人口数。查阅官方资料，看看你预测得是否准确？

表 2- 4　2005~2014 年人口数据统计表(单位为：百万)

年份	**2005**	**2006**	**2007**	**2008**	**2009**
人口数	1307.56	1314.48	1321.29	1328.02	1334.50
年份	**2010**	**2011**	**2012**	**2013**	**2014**
人口数	1340.91	1347.35	1354.04	1360.72	1367.82

第一步：模型准备

首先，根据题目提供的数据绘制人口统计问题中的散点图，如图 2- 8 所示。

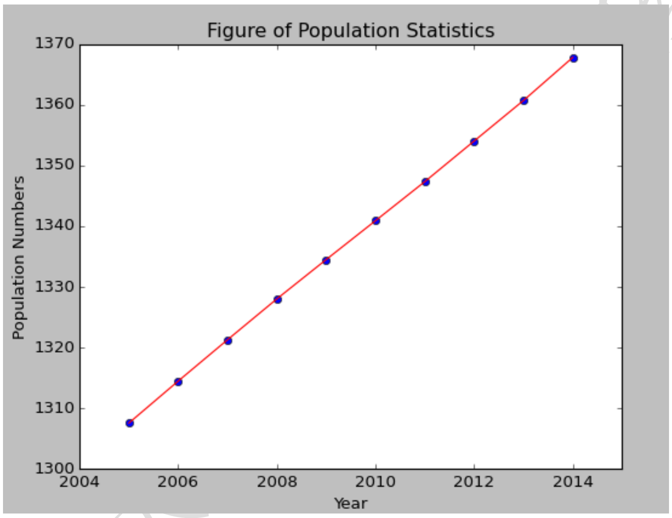

图 2- 8　人口数量离散图

然后，观察绘制的人口数量离散图，判断各离散点连线和直线形状相似。据此，提出假设——人口数量和年份呈线性关系。

第二步：模型建立

创建人口统计问题的线性模型：y=ax+b。

第三步：模型求解

采用合适的拟合算法（本题选用最小二乘拟合算法），编写程序通过计算机求解出线性方式特征量 a 和 b 的值，**a = 6.631**，**b = -11987.995**。

据此，得到人口数和年份间的线性预测模型：**y = 6.631x –11987.995**。

第四步：模型检验

将 x=2018 代入模型，可直接估算出该年对应的人口数为 **1394.035**（百万）。通过查阅官方资料，获知 2018 年实际人口数量为 **1395.38** 百万。

评价模型误差值：|预测值 – 实际值|/实际值 =|1394.035 -1395.38|/1395.38 ≈ 0.000964= **0.096%**

模型误差值为 0.096%，证明该模型预测较准确。

3、综合建模

综合（混合）建模是将机理建模和实验建模相结合的建模方法，即通过机理分析建立数学框架，通

过测试分析确定模型中包含的参数或关系。综合建模主要适用于内部结构和特性有些了解但又不十分清楚的系统，即灰箱问题（如过程控制、航空航天领域的问题）。

【案例 2.5】小行星绕太阳运行的轨道问题。

一天文学家要确定一颗小行星绕太阳运行的轨道。他在轨道平面内建立以太阳为原点的直角坐标系，其单位为天文测量单位，在 5 个不同的时间对小行星做了 5 次观察，测得轨道上的 5 个点的坐标数据，如表 2- 5 所示。尝试根据表 2- 5 中测量的数据，确立小行星的轨道方程，并画出小行星的运动轨线图形。

表 2- 5　轨道上 5 个点的坐标数据（单位：天文单位）

	1	**2**	**3**	4	5
x	5.764	6.286	6.759	7.168	7.408
y	0.648	1.202	1.823	2.526	3.360

注：一个天文单位等于地球到太阳的平均距离，即 1.4959787×10^{11}米。

1、模型准备

本题明确给出了问题的研究对象（小行星运动轨道）、求解目标（小行星轨道方程）和已知信息（轨道上 5 个测量点的坐标数据）。因此，从问题出发，在先验知识的指导下，通过研究和查阅与小行星运动相关的理论和方法，确定以开普勒第一定律（又称轨道定律）作为解题的切入点。具体思路如下：

（1）由开普勒第一定律可知“每一颗行星都沿着各自的椭圆轨道环绕太阳，并且太阳处在椭圆的一个焦点上”。

（2）根据小行星以椭圆方式绕太阳运行，创建描绘其运动轨迹的椭圆方程，即在轨道平面内建立以太阳为原点的空间直角坐标系。

（3）通过观测不同时刻小行星在其椭圆轨道上运行的坐标数据，求解出椭圆方程的待定系数。

2、模型假设

为了采用数学方法推导出小行星的轨道方程，小行星的运动需要满足如下条件，

（1）小行星的运动轨迹满足开普勒第一定律，即它的轨道是标准椭圆；

（2）小行星可视为质点；

（3）小行星的轨道不会变化；

（4）其他星体对小行星轨道的影响可以忽略不计；

（5）观测数据真实有效。

3、模型建立

根据开普勒第一定律，建立小行星轨道的椭圆方程：

$$a_1x^2+2a_2xy+a_3y^2+2a_4x+2a_5y+1=0 \tag{2- 4}$$

为了绘制小行星的运动轨线，需要确定式(2- 4)中各项的待定系数a_i，i=1,2,3,4,5。已知 5 个测量点的坐标数据，如表 2- 5 所示（设为(x_i, y_i)，i=1,2,3,4,5），因此，求解a_i等价于求解一个线性方程组，如式(2-5)：

$$\begin{cases} a_1x_1^2+2a_2x_1y_1+a_3y_1^2+2a_4x_1+2a_5y_1+1=0 \\ a_1x_2^2+2a_2x_2y_2+a_3y_2^2+2a_4x_2+2a_5y_2+1=0 \\ a_1x_3^2+2a_2x_3y_3+a_3y_3^2+2a_4x_3+2a_5y_3+1=0 \\ a_1x_4^2+2a_2x_4y_4+a_3y_4^2+2a_4x_4+2a_5y_4+1=0 \\ a_1x_5^2+2a_2x_5y_5+a_3y_5^2+2a_4x_5+2a_5y_5+1=0 \end{cases} \tag{2- 5}$$

式(2- 5)可简写成矩阵形式 AX=b，其中，

A=$\begin{bmatrix} x_1^2 & 2x_1y_1 & y_1^2 & 2x_1 & 2y_1 \\ x_2^2 & 2x_2y_2 & y_2^2 & 2x_2 & 2y_2 \\ x_3^2 & 2x_3y_3 & y_3^2 & 2x_3 & 2y_3 \\ x_4^2 & 2x_4y_4 & y_4^2 & 2x_4 & 2y_4 \\ x_5^2 & 2x_5y_5 & y_5^2 & 2x_5 & 2y_5 \end{bmatrix}$，X=$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix}$，b=$\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

4、模型求解

将表 2- 5 给出的 5 个测试点坐标分别代入线性方程组式(2- 5)中，求解出椭圆方程（如式(2- 4)所示）的 5 个待定系数a_i，i=1,2,3,4,5。

5、模型应用

通过确立小行星的运动轨迹和轨道方程，可以计算出其近日点、远日点、轨道周长等运行参数，从而可以预测小行星是否有撞击地球的危险。

2.4　建模的综合案例分析

本节通过地铁自动购票机找零、学生选课以及百度地图中的最短路径这三个具体案例，综合地分析建立数学模型的过程。并在分析过程中针对相同案例，比较性地提出多种不同的建模方法。

不同建模方法的计算机程序将在第 3 章中相应案例中介绍，以方便读者更好地理解建模以及问题求解的整个过程。

2.4.1　地铁自动购票机找零

【案例 2.6】建模典型案例：地铁自动购票机找零。

有面值为 1 元、2 元和 5 元的纸币，如何得到最少的找零数目？

1、模型准备

本题的题目描述很简单，这就需要对隐藏信息和内部关系进行深入挖掘和思考。为使得找零数目最少，应满足两个条件：面值大的纸币数量尽可能大，并且各面值纸币之和与所需找钱数相同。

2、模型假设

找零问题的假设比较简单，只需要分析出问题中隐含的各变量，并逐一对它们进行数字化处理即可。

（1）i：表示第 i 种纸币（i=1,2,3 分别表示 1 元、2 元、5 元纸币）；

（2）v_i：表示第 i 种纸币的面值；

（3）T：表示所需找零的面值；

（4）d(T)：表示满足题目要求的最少找零数目。

3、模型建立

这里使用两种常用的数学建模方法求解“找零问题”，读者可以比较理解不同建模方法在创建难度、计算效率、求解范围等方面的差异。

（1）方法一：简单数学模型——线性模型

建立线性方程是最简单的问题求解方法，它符合人们思考问题的方式。

根据步骤 1 中对“找零问题”的理解和分析，建立如下线性方程：$T = n_1 \times v_1 + n_2 \times v_2 + n_3 \times v_3$；

根据求解目的，得到求解目标函数：$d(T) = \min(n_1 + n_2 + n_3)$。

利用数学方法建立三元一次方程组，得：

$$\begin{cases} n_1 \times v_1 + n_2 \times v_2 + n_3 \times v_3 = \mathrm{T} \\ \mathrm{d(T)} = \min(n_1 + n_2 + n_3) \end{cases} \qquad (2\text{-}6)$$

（2）方法二：复杂数学模型——动态规划模型

枚举模型的建立简单，但运算量较大，需要遍历所有可能的变量值。为了提高计算效率，对其进行

优化，主要从提取有效信息、减少重复计算、剪支问题规模、切分变量范围、引入高效算法等方面进行考虑。

这里，借助将大问题切分成小问题的分治思想，尝试能否通过逐步缩小问题的求解规模的方法来提高计算效率。那么，如何对 T 进行划分呢？例如，当 T=11 时，是将其划分成 1 个 10 元和 1 个 1 元，还是划分成 1 个 5 元和 1 个 6 元呢？当遇到复杂问题，一时无法理清头绪时，人们通常采用实例分析法，在具体的计算过程中发现和总结问题求解的规律和方法。求解过程可以按照变量从特殊到一般、从小到大等取值顺序进行。已知 T=11，若要使得 d(11)值最小，则要在 d(11-1)+1，d(11-3)+1，d(11-5)+1 这三种划分方案中选择找零数目最少的解，即 d(11)=min(d(11-1)+1,d(11-3)+1,d(11-5)+1)；进一步，若要使得 d(11-1)值最小，则要在 d(10-1)+1，d(10-3)+1，d(10-5)+1 这三种划分方案中选择找零数目最少的解，即 d(10)=min(d(10-1)+1,d(10-3)+1,d(10-5)+1)。通过逐层分解，我们可以观察和归纳出动态规划的模型公式：$d(i)=\min\{d(i-v_j)+1\}$，其中 i 表示所需找零的面值、v_j 表示第 j 种零钱的面值，且 d(0)=0，d(1)=1，d(3)=1，d(5)=1。

4、模型求解

通过编写计算机程序的方式求解在步骤 3 中创建的线性数学模型和动态规划数学模型。具体程序实现将在第 3 章【案例 3.1】中介绍。

2.4.2 学生选课

【案例 2.7】学生选课。

某同学考虑下学期的选课，其中必修课只有一门（2 学分），可供选修的限定选修课（限选课）有 8 门，任意选修课（任选课）有 10 门。由于有些课程间存在相互关联，使得可能在选修某门课程时必须同时选修其他某门课程，课程信息如表 2- 6 所示。按学校规定，学生每个学期选修的总学分数不能少于 20 学分（总学分=必修课学分+限选课学分+任选课学分），因此该同学必须在表 2- 6 中的 18 门课中至少选修 18 个学分；学校还规定，学生每学期选修任选课的比例不能少于所修总学分（包括 2 个必修学分）的 1/6，也不能超过所修总学分的 1/3。另外学院规定，课号为 5、6、7、8 的课程必须至少选一门。问：

（1）为了达到学校和院系的规定，该同学下学期最少应该选几门课？应该选哪几门课？

（2）若考虑在选修最少学分的情况下，该同学最多可以选修几门课？选哪几门？

表 2- 6 选修课程信息表

限选课课号	1	2	3	4	5	6	7	8		
学分	5	5	4	4	3	3	3	2		
同时选修要求					1		2			
任选课课号	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
学分	3	3	3	2	2	2	1	1	1	1
同时选修要求	8	6	4	5	7	6				

1、模型准备

本题的题目信息量大且繁杂，这就需要认真梳理、准确理解、全局把握，从凌乱的信息中抽取有价值的内容。整理的内容可用数学描述、逐条罗列等方式表达，便于分析和建模：

（1）每名学生每学期总学分≥20（包括 2 个必修学分），则每名学生每学期选修课程总学分≥18（选修课程数为 18 门）；

（2）$\frac{总学分}{6}\le$每名学生每学期任选课总学分$\le\frac{总学分}{3}$；

（3）课号为 5、6、7、8 的课程必须至少选一门。

2、模型假设

首先，关于“学生选课问题”，做以下几点假设：

（1）学生选修任何课程都是随机的，不存在主观意图；

（2）学生肯定能选课成功，不存在因人数超限、网络异常等因素选不上课的情况；

（3）学生只要选修某门课程，就能够获取相应学分，不考虑考试不及格、缺考等情况；

其次，对“学生选课问题”中出现的变量做数字化处理：

（1）i：$i=\begin{cases} i=1,2,\ldots,8 & \text{限选课} \\ i=9,10,\ldots,18 & \text{任选课} \end{cases}$；

（2）S_i：表示第 i 门课的学分；

（3）X_i：$X_i=\begin{cases} 1 & \text{表示选择第 i 门课程} \\ 0 & \text{表示不选第 i 门课程} \end{cases}$；

（4）N：表示每位学生所选课程的总门数；

（5）OS：表示每位学生任选课总学分；

（6）LS：表示每位学生限选课总学分；

（7）S：表示每位学生选修课（除必修课外）总学分；

（8）d(N)：表示满足题目要求的最少选课门数。

3、模型建立

根据步骤 1 的分析，分别对于题目中的问题（1）和问题（2）建立如下模型：

（1）建立“最少选课门数”模型

由每名学生每学期总学分≥20（包括 2 个必修学分），得 S +2≥20，即 S= OS+LS = $\sum_{i=1}^{18} S_i X_i \geq 18$；

由$\frac{总学分}{6}$ ≤每名学生每学期任选课总学分≤ $\frac{总学分}{3}$和 20≤总分≤ 48（48 为所有课程总学分之和），

得$\frac{20}{6}$ ≤OS≤ $\frac{48}{3}$；又由于 OS 是正整数，则 4≤OS≤16，即 4≤ $\sum_{i=9}^{18} S_i X_i$ ≤16；

由 S = OS+LS、S≥18 和 4≤OS≤16 等三个条件，得 LS≥2，即$\sum_{i=1}^{8} S_i X_i$ ≥2；

由课号为 5、6、7、8 的课程必须至少选一门，得 $X_5+X_6+X_7+X_8 \geq 1$；

由有些课程间存在相互关联性，得若第 j 门课程被选中，则与其相关的第 i 门课程被选中的充分条件为：$X_i \geq X_j$；

由 N 表示每位学生所选课程的总门数，得到求解目标函数为：d(N) = $\min\sum_{i=1}^{18} X_i$。

利用数学方法建立线性方程组，得 “最少选课门数” 模型约束条件和目标函数分别如式（2-7）、式（2-8）所示。

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{18} S_i X_i \geq 18 \\ 4 \leq \sum_{i=9}^{18} S_i X_i \leq 16 \\ \sum_{i=1}^{8} S_i X_i \geq 2 \\ \qquad X_i \geq X_j \\ X_5 + X_6 + X_7 + X_8 \geq 1 \end{cases} \tag{2-7}$$

$$\min\sum_{i=1}^{18} Xi \tag{2-8}$$

（2）建立“最少选修学分下最多选课门数”模型

根据求解目的，得满足要求的最少选修学分为 18，即 S=18，则约束条件和求解目标函数分别为：

$$
\begin{cases}
\sum_{i=1}^{18} S_i X_i \geq 18 \\
4 \leq \sum_{i=9}^{18} S_i X_i \leq 16 \\
\sum_{i=1}^{8} S_i X_i \geq 2 \\
X_5 + X_6 + X_7 + X_8 \geq 1
\end{cases}
\tag{2-9}
$$

$$
\max \sum_{i=1}^{18} Xi \tag{2-10}
$$

4、模型求解

编写计算机程序，求解步骤 3 创建的两个模型。具体程序实现将在第 3 章【案例 3.2】中介绍。

2.4.3 导航地图中的最短路径

【案例 2.8】建模典型案例：导航地图中的最短路径（以北航校园地图为例）。

假设你要从起点④（新主楼）出发，到达终点⑬（北区食堂），沿途可以有几条路径选择。试建立数学模型，模拟地图导航选择一条距离最短的线路。不同地点间的路径距离如图 2- 9 所示。

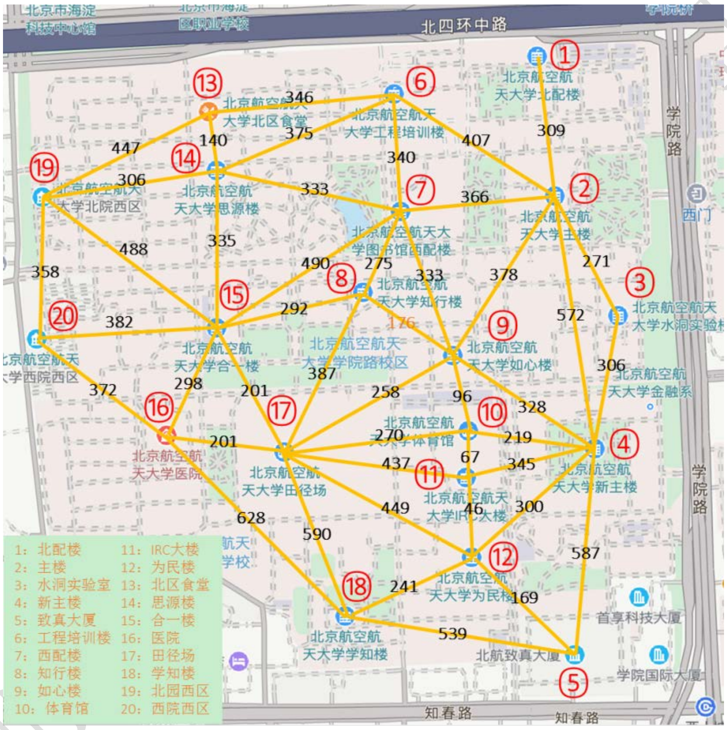

图 2- 9　北航校园地图示例图

1、模型准备

“最短路径问题”本身的理解并不复杂，其定义为：在有向加权图中两个顶点之间经过的边上权值和最小的路径。最短路问题是运筹学的一个重要而经典的研究内容，它可以衍生出很多实际应用。例如，边的权值可以是时间、损失、价格等任何具有沿路径线性积累的度量标准。在求解最短路径的过程中，我们还需要了解一些图论知识，包括顶点、边、权、有向图、无向图、出度、入度、回路、子回路等概念（请读者自行查阅图论相关知识）。

2、模型假设

首先，将实际的行走路线抽象为由点和线组成的简单图形。例如，假设从起点 1 到终点 5，可以走 1→2→4→5，也可以走 1→2→3→4→5，由于在计算机中，一般下标都是从 0 开始，则将顶点 1、2、3、4、5 命名为 V_0、V_1、V_2、V_3、V_4，如图 2- 10 所示。图中边的权值表示两点间的距离。

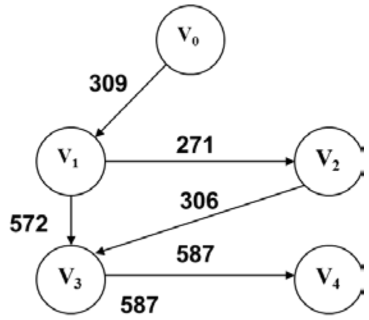

图 2- 10　行走路线图

其次，关于“最短路径问题”，做以下几点假设：

① 假设任意两地间均有路径可达；② 假设驾驶人完全按照导航指示的路线行驶，不走其他路线；

③ 假设到访点和行驶路径不存在重复、折返等情况；

④ 假设两点间的距离没有负值或零值等情况；

⑤ 假设最短路径是唯一的。

最后，对“最短路径问题”中出现的变量做数字化处理：

G：表示带权有向图，G = (V, E)，其中 V 为顶点集合，E 为边集合；

V_i：表示访问第 i 个顶点（i∈{1,2,3,....,n}）；

V：表示所有到访点的集合，V = {Vi}；

<Vi, Vj>：表示从 Vi 到 Vj 的有向边（有向边除 Vi 和 Vj 外，不经过其他顶点），<Vi, Vj>≠<Vj, Vi>；

d_{ij}：表示 Vi 和 Vj 有向边的距离（有向路径除 Vi 和 Vj 外，可能经过其他顶点），$d_{ij} = d_{ji}$（i≠ j）；

E_{ij}：表示从 Vi 到 Vj 的有向路径；

X_{ij}：$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{表示经过有向边} < V_i, V_j > \\ 0 & \text{表示不经过有向边} < V_i, V_j > \end{cases}$；

$S(E_{ij})$：表示有向路径E_{ij}中包含的顶点集合，∀S ⊆V；

$|S(E_{ij})|$：表示集合 S 中包含的顶点个数；

D(u,v)：表示从起点 *u* 到终点 *v* 间的最短距离。

3、模型建立

根据求解目的，建立“最短路径问题”的目标函数：

$$D(\text{u,v}) = min(\textstyle\sum_{i,j\in S(E_{uv})} d_{ij})(u\text{ 是起点，}v\text{ 是终点，u≠v}) \quad (2\text{-}11)$$

另外，该目标函数在求解过程中还需要满足若干约束条件：

① 如果有向路径E_{ij}经过除起点 *u* 与终点 *v* 外的某个顶点V_i，$i \in S(E_{uv})$且 $i \neq u$，$i \neq v$。则该顶点经过且仅经过一次，即该顶点在E_{ij}中的出度和入度值均等于 1，其数学表达式为：

$$\textstyle\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = 1 \text{ 且} \sum_{j=1}^{n} X_{ji} = 1 (j \in V) \quad (2\text{-}12)$$

② 有向路径E_{ij}中不存在子回路，即顶点的任意子集不能构成回路（当有向路径E_{ij}中边的条数小于或等于顶点的个数-1 时，不存在回路），其数学表达式为：

$$\textstyle\sum_{i,j\in S(E_{ij})} X_{ij} \leq |S(E_{ij})| - 1，2 \leq |S(E_{ij})| \leq \text{n} \quad (2\text{-}13)$$

在式（2-13）中，$\sum X_{ij}$表示有向路径E_{ij}中边的条数；$|S(E_{ij})|$表示有向路径E_{ij}中包含的顶点个数。

将上述分析过程通过数学方法转换为计算机能够计算的方程组，得约束条件如式（2-14）所示。

$$
\text{s.t}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = 1,\ \ j \in V \\ \sum_{j=1}^{n} X_{ji} = 1,\ \ j \in V \\ \sum_{i,j\in S(E_{ij})} X_{ij} \le |S(E_{ij})| - 1,\ \ 2 \le |S(E_{ij})| \le \mathrm{n} \\ X_{ij} \in \{0,1\}\end{cases} \tag{2-14}
$$

4、模型求解

在第 4 章【案例 4.13】中，将使用计算机中两种经典的求解“最短路径问题”的算法：Dijkstra 算法和 Floyd 算法来求解本问题。

本章小结

数学建模并不是一个纯粹的数学概念，而是与人们的生活息息相关，是为解决现实问题而产生的。当需要从定量的角度分析和研究一个实际问题时，人们就要在深入调查研究、了解对象信息、作出简化假设、分析内在规律等工作的基础上，用数学的符号和语言，把它表述为数学式子（称为数学模型）。然后利用通过计算得到的模型结果来解释实际问题，并接受实际的检验。这个全过程就称为数学建模。计算机的出现，为数学模型建立、求解和验证提供了更为便捷的手段。

通过本章的学习，大家应该掌握应用抽象方法将实际问题转换为解空间模型的思维方法；掌握使用数学方法建立数学建模的基本过程和一般方法；学会采用计算机技术求解数学模型的编程方法；理解数学模型的定义和分类。

在建模过程中，抽象是解决问题的第一步，也是最重要的一步。抽象的好坏决定了模型的复杂程度和解的质量，如何利用分离、提纯、简化等科学抽象方法和归纳、演绎、类比等逻辑思维手段对实际问题进行合理的简化和适度的抽象，得到一个具体、明确的问题，是大家面临的难题和挑战。

另外，寻找合适、高效的求解问题的数学方法也是模型建立的重要环节。大家需要培养自己的知识迁移能力，能够在已有知识中快速找到求解问题的有效方法，逐步建立实际问题和数学方法间的映射关系，从而不断丰富自己的问题经验库，提高解题效率。

在数学建模过程中，计算机起到了很好地辅助作用。但计算机不仅仅是一个工具，它的引入，使得数学建模在思维方式和求解过程上都发生了很大变化。计算机有自己解决问题的方法和概念，即计算思维。

计算思维将现实世界和计算机世界相关联，它将机器世界的一个个孤立的、抽象的计算机知识与现实世界的客观事物和实际问题紧密地连接在一起。在学习综合案例时，大家应该理解和体会计算机独特的一维存储空间、串行处理方式（单核）和重复性执行等特征，同时掌握数据结构（将实际数据输入到计算机中的存储结构）和算法（为解决实际问题而研究的数据的处理方法和解题步骤）两个核心概念。

习　题

1、小杨是南华大学的一名 2011 级大一的新生，因为家境的原因决定申请助学贷款，大学期间需要借贷 20000 元。已知助学贷款的申请是一年之中最少申请 1000 元，最高不能超过 6000 元，借款期限最低为 6 年，最长为 14 年，可以在大学期间接连申请，在大学就读期间贷款所产生的利息由国家（或地区）支付，每年的 12 月 20 日为还款期，从毕业时的 6 月 20 号到次年的 12 月 20 日为宽限期，宽限期内只需

自付利息，不需偿还本金。宽限期结束后次年的 12 月 20 日除自付利息外开始等额还本，贷款期限最后一年的 12 月 20 日要求全部还清。小杨 2015 年 6 月 20 日大学毕业，想在 2020 年将钱款全部还清。小杨决定在大学期间每年 6 月 20 日申请助学贷款 5000 元，还款结止日期为 2020 年 12 月 20 日，现在有两种还款方式供选择。

（1）申请生源地助学贷款，即每年等额还款，直到期限为至贷款还清。

（2）申请国家助学贷款，即每次偿还当年产生的利息后并且等额还本。

请用数学建模的方法分析，小杨应当采用哪种还款方式他偿还贷款的金额最少？

2、根据表 2- 7 数据（也可利用其它文献如国家统计局公布的中国历史人口数据），计算 1978-2010 年我国人口自然增长率，画出死亡率和自然增长率的散点图，指出其随年份变动的趋势，利用 Excel 或其他统计软件得到它们的经验回归方程。

表 2- 7　我国历年人口出生率和死亡率（%）

年份	出生率	死亡率	年份	出生率	死亡率	年份	出生率	死亡率
1978	18.25	6.25	1990	21.06	6.67	2001	13.38	6.43
1980	18.21	6.34	1991	19.68	6.70	2002	12.86	6.41
1981	20.91	6.36	1992	18.24	6.64	2003	12.41	6.40
1982	22.28	6.60	1993	18.09	6.64	2004	12.29	6.42
1983	20.19	6.90	1994	17.70	6.49	2005	12.40	6.51
1984	19.90	6.82	1995	17.12	6.57	2006	12.09	6.81
1985	21.04	6.78	1996	16.98	6.56	2007	12.10	6.93
1986	22.43	6.86	1997	16.57	6.51	2008	12.14	7.06
1987	22.33	6.72	1998	15.64	6.50	2009	11.95	7.08
1988	22.37	6.64	1999	14.64	6.46	2010	11.90	7.11
1989	21.58	6.54	2000	14.03	6.45			

3、爱美之心，人皆有之，尤其对于女生来说，选择一双适合自己的高跟鞋可以显得更加迷人，那么什么样的高跟鞋才最适合自己？（提示：采用黄金分割点）。

4、小高在中午 12 点喝了一瓶啤酒，下午 6 点检查时符合新的驾车标准，紧接着他在晚上 8 点时又喝了一瓶啤酒，为了保险起见，他待到凌晨 2 点才驾车回家，检测时被认定为酒驾，这让他即懊悔又困惑，为什么喝同样多的酒，休息同样的时间，两次检测结果会不一样呢？

请参考下面给出的数据（或自己收集资料），建立饮酒后血液中酒精含量的数学模型，并讨论以下问题。

（1）对小高碰到的情况作出解释。

（2）在喝了 3 瓶啤酒或者半斤低度白酒后多长时间内驾车就会违反上述标准，在以下情况下回答：

① 酒是在很短时间内喝完的；

② 酒是在较长一段时间内喝完的（如 2 小时）。

（3）如何估计血液中的酒精含量在什么时间最高。

（4）根据你的模型论证：如果天天喝酒，是否还能开车？

提示：

（1）国家质量监督检验检疫局于 2004 年 5 月 31 日发布了新的《车辆驾驶人员血液、呼气酒精含量阈值与检验》国家标准。新标准规定，车辆驾驶人员血液中的酒精含量大于或等于 20 毫克/百毫升、小于 80 毫克/百毫升为饮酒驾车，血液中的酒精含量大于或等于 80 毫克/百毫升为醉酒驾车。

（2）参考数据：

① 人的体液占人的体重的 65%~70%，其中血液只占体重的 7%左右，而药物（包括酒精）在血液中的含量与在体液中的含量大体是一样的。

② 体重约 70kg 的某人在短时间内喝下 2 瓶啤酒后，隔一定时间测量他血液中酒精含量（mg/100mL），得到数据如表 2- 8 所示。

表 2- 8　体重约 70kg 的某人在短时间内喝下 2 瓶啤酒后血液中酒精含量（mg/100mL）

时间（h）	0.25	0.5	0.75	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
酒精含量	30	68	75	82	82	77	68	68	58	51	50	41
时间（h）	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
酒精含量	38	35	28	25	18	15	12	10	7	7	4	

5、假设你所在的年级有 5 个班，每班一支球队在同一块场地上进行单循环赛（所谓单循环赛是所有参加比赛的队均能相遇一次，最后按各队在全部比赛中的积分、得失分率排列名次）要进行 10 场比赛。

如何安排赛程使对各队来说都尽量公平呢？请回答以下问题：

（1）对于 5 支球队的比赛, 给出一个各队每两场比赛中间都至少相隔一场的赛程。

（2）当 n 支球队比赛时，各队每两场比赛中间相隔的场次数的上限是多少。

（3）在达到问题（2）的上限条件下，分别给出 n=8 和 n=9 的赛程，并说明它们的编制过程。

（4）除了每两场比赛间相隔场次数这一指标外，你还能给出哪些指标来衡量一个赛程的优劣，并说明问题（3)中给出的赛程达到这些指标的程度。