北京信息科技大学 2019–2020 学年第一学期

《高等数学 A(1)》课程期末考试试卷 (A 卷)

课程所在学院：理学院　适用专业班级: 96 学时 (普通班)

考试形式: (闭卷)

一、 选择题 (本题满分 10 分，含 5 道小题, 每小题 2 分)

1. 当 $x \to 0$ 时，函数 $f(x) = 1 - \cos(x^2)$ 是 x^3 的 (　　) 无穷小. 【 A 】

A. 高阶　　B. 同阶　　C. 低阶　　D. 等价

2. 设函数 $f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{|x|}\right)$，则 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的 (　　). 【 D 】

A. 连续点　　B. 可去间断点　　C. 跳跃间断点　　D. 第二类间断点

3. 设函数 $y = \int_0^x \sin(t^2)\mathrm{d}t$, 则 $\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} =$ (　　). 【 C 】

A. $\cos(x^2)$　　B. $-\cos(x^2)$　　C. $\sin(x^2)$　　D. $2x\cos(x^2)$

4. 设函数 $f(x)$ 在有限闭区间 $[a, b]$ 上连续, 下列论断中错误的是 (　　). 【 B 】

A. $f(x)$ 必有原函数　　B. $f(x)$ 必可微

C. $f(x)$ 必可积　　D. $f(x)$ 必有界

5. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义, 且极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$ 存在, 下列论断中错误的是 (　　). 【 B 】

A. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x^2) = a$　　B. $\lim\limits_{x\to0} f(\frac{1}{x}) = a$

C. $\lim\limits_{x\to\infty} f(|x|) = a$　　D. $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n^2) = a$

二、 解答题 (本题满分 30 分，含 6 道小题, 每小题 5 分)

6. 设函数 $f(x)=\begin{cases}(1+2x)^{\frac{1}{x}}, & x>0\\ 2a+\sin x, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 求常数 a.

【解】分别计算 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的左、右极限

$$f(0^-)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(2a+\sin x)=2a \qquad (2\text{ 分})$$

$$f(0^+)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^2. \qquad (2\text{ 分})$$

由连续性可得， $f(0^-)=f(0)=f(0^+)\implies a=\dfrac{\mathrm{e}^2}{2}$. (1 分)

7. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\mathrm{e}^{xy}-5x^2y=0$ 确定, 求 $\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}$ 在点 $(\frac{\mathrm{e}^2}{10},\frac{20}{\mathrm{e}^2})$ 处的取值.

【解】方程两端关于 x 求导，得

$$\mathrm{e}^{xy}[y+x\cdot\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}]-10xy-5x^2\cdot\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=0. \qquad (2\text{ 分})$$

整理可得

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=\frac{10xy-y\mathrm{e}^{xy}}{x\mathrm{e}^{xy}-5x^2}. \qquad (2\text{ 分})$$

特别地,

$$\left.\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}\right|_{\left(\frac{\mathrm{e}^2}{10},\frac{20}{\mathrm{e}^2}\right)}=0. \qquad (1\text{ 分})$$

8. 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t^2\ln t\\ y=t\sin(\pi t)\end{cases}$ 所确定, 求 $\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}$, $\left.\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}\right|_{t=1}$.

【解】计算可得

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=\frac{\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t}}{\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t}}=\frac{\sin(\pi t)+\pi t\cdot\cos(\pi t)}{2t\ln t+t^2\cdot\frac{1}{t}}=\frac{\sin(\pi t)+\pi t\cdot\cos(\pi t)}{2t\cdot\ln t+t}. \qquad (2\text{ 分 }+2\text{ 分})$$

于是

$$\left.\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}\right|_{t=1}=-\pi. \qquad (1\text{ 分})$$

9. 计算定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \,\mathrm{d}x$.

【解】凑微分，可得

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x) \,\mathrm{d}\sin x & (2\text{ 分})\\ &=\left[\sin x - \frac{\sin^3 x}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} & (2\text{ 分})\\ &=\frac{2}{3}. & (1\text{ 分})\end{aligned}$$

10. 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = \mathrm{e}^{4x-2y}$ 的通解.

【解】所求通解为

$$\mathrm{e}^{2y}\mathrm{d}y = \mathrm{e}^{4x}\mathrm{d}x.$$

$$\int \mathrm{e}^{2y}\mathrm{d}y = \int \mathrm{e}^{4x}\mathrm{d}x. \qquad (2\text{ 分})$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2y} = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{4x} + C_1 \implies y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\mathrm{e}^{4x}}{2} + C\right). \qquad (3\text{ 分})$$

11. 求微分方程 $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{\sin x}{x}$ 的通解.

【解】所求通解为

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x}\left(\int \frac{\sin x}{x} \cdot e^{\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right) & (2\text{ 分})\\ &= \frac{1}{x}\left(\int \frac{\sin x}{x} \cdot x \,\mathrm{d}x + C\right)\\ &= \frac{1}{x}\left(-\cos x + C\right) = C \cdot \frac{1}{x} + \frac{-\cos x}{x}. & (3\text{ 分})\end{aligned}$$

【解】相应齐次线性方程 $y' + \frac{y}{x} = 0$ 的通解为

$$Y = C \cdot \frac{1}{x}. \qquad (2\text{ 分})$$

由常数变易法, 将 $y = C(x)\frac{1}{x}$ 代入非齐次线性方程, 得

$$C'(x)\frac{1}{x} = \frac{\sin x}{x} \implies C(x) = \int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + C. \qquad (2\text{ 分})$$

故, 通解为

$$y = \frac{-\cos x + C}{x} = C \cdot \frac{1}{x} + \frac{-\cos x}{x}. \qquad (1\text{ 分})$$

三、 解答题 (本题满分 60 分，含 10 道小题, 每小题 6 分)

12. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x+1}{x}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right)$.

【解】连续两次使用洛必达法则，可得

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+1}{x}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)\ln(1+x)-x}{x\ln(1+x)} \quad (1\text{ 分})$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}} \quad (2\text{ 分})$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}} \quad (2\text{ 分})$$

$$=\frac{1}{2}. \quad (1\text{ 分})$$

13. 求函数 $f(x)=(x-1)x^{\frac{2}{3}}$ 的极值.

【解】计算导数

$$f'(x)=x^{\frac{2}{3}}+(x-1)\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}=\frac{5x-2}{3x^{\frac{1}{3}}}. \quad (2\text{ 分})$$

可疑的极值点为 $x_1=\frac{2}{5}$, $x_2=0$. (2 分)

在 $x_1=\frac{2}{5}$ 两侧, f' 左负右正, 故为极小值点, 极小值为 $f(\frac{2}{5})=-\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}}$. (1 分)

在 $x_2=0$ 两侧, f' 左正右负, 故为极大值点, 极大值为 $f(0)=0$. (1 分)

14. 求曲线 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}$ 的拐点.

【解】计算导数

$$f'(x)=\frac{x-2}{x^3},\qquad f''(x)=\frac{-2(x-3)}{x^4}. \quad (2\text{ 分})$$

可疑拐点为 $(3,-\frac{2}{9})$. (2 分)

在 $x=3$ 两侧，$f''(x)$ 左正右负.

故拐点为 $(3,-\frac{2}{9})$. (2 分)

15. 计算不定积分 $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}\,\mathrm{d}x$.

【解】设 $t=\sqrt[3]{x}$, 即 $x=t^3$, 则有

$$\int\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}\,\mathrm{d}x=\int\frac{3t^2}{t-1}\,\mathrm{d}t \quad (2\text{ 分})$$

$$=3\int\left(t+1+\frac{1}{t-1}\right)\mathrm{d}t \quad (2\text{ 分})$$

$$=\frac{3}{2}t^2+3t+3\ln|t-1|+C$$

$$=\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+3\sqrt[3]{x}+3\ln|\sqrt[3]{x}-1|+C. \quad (2\text{ 分})$$

16. 计算不定积分：$\int \frac{\arctan x}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

【解】换元 $t = \arctan x$, 或 $x = \tan t$,

$$\begin{aligned}\int \frac{\arctan x}{x^2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{t}{\tan^2 t}\cdot \sec^2 t\,\mathrm{d}t \\ &= -\int t\,\mathrm{d}\cot t && (2\text{ 分}) \\ &= -t\cdot\cot t + \int \cot t\,\mathrm{d}t \\ &= -t\cot t + \ln|\sin t| + C && (2\text{ 分}) \\ &= -\frac{\arctan x}{x} + \ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right| + C. && (2\text{ 分})\end{aligned}$$

【解】分部积分，可得

$$\begin{aligned}\int \frac{\arctan x}{x^2}\,\mathrm{d}x &= -\int \arctan x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= -\frac{\arctan x}{x} + \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}\arctan x && (2\text{ 分}) \\ &= -\frac{\arctan x}{x} + \int \frac{1}{x}\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\arctan x}{x} + \int \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x && (2\text{ 分}) \\ &= -\frac{\arctan x}{x} + \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C. && (2\text{ 分})\end{aligned}$$

17. 求曲线 $y = \sin x$, 直线 $y = 2x$ 及 $x = 1$ 所围成图形的面积 S.

【解】所求面积为

$$\begin{aligned}S &= \int_0^1 (2x - \sin x)\,\mathrm{d}x && (3\text{ 分}) \\ &= (x^2 + \cos x)\big|_0^1 && (2\text{ 分}) \\ &= \cos 1. && (1\text{ 分})\end{aligned}$$

18. 求曲线 $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, 直线 $x = 1$ 及 x 轴所围图形绕 x 轴旋转所得旋转体的体积 V.

【解】所求体积为

$$\begin{aligned}V &= \pi\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \pi\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x && (2\text{ 分} +1\text{ 分}) \\ &= \pi\left(x - \arctan x\right)\Big|_0^1 && (2\text{ 分}) \\ &= \pi\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \pi - \frac{\pi^2}{4}. && (1\text{ 分})\end{aligned}$$

19. 计算反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+9)\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

【解】作替换 $t=\sqrt{x}$, 可得

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+9)\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{2t\cdot \mathrm{d}t}{(t^2+9)t} \qquad (2\text{ 分})$$

$$= 2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+3^2)} \qquad (1\text{ 分})$$

$$= \frac{2}{3}\arctan\frac{t}{3}\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{3}. \qquad (3\text{ 分})$$

【解】凑微分

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+9)\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{(\sqrt{x})^2+3^2}\,\mathrm{d}\sqrt{x} \qquad (2\text{ 分})$$

$$= \frac{2}{3}\arctan\frac{\sqrt{x}}{3}\Big|_0^{+\infty} \qquad (2\text{ 分})$$

$$= \frac{\pi}{3}. \qquad (2\text{ 分})$$

20. 求微分方程 $y''-5y'+6y=e^{4x}$ 的一个特解.

【解】特征方程为: $r^2-5r+6=0$. 特征根为: $r=2,3$. (2 分)

原方程的一个特解可取: $y^*=Ae^{4x}$. (2 分)

把 y^* 代入原方程,

$$16Ae^{4x}-20Ae^{4x}+6Ae^{4x}=e^{4x}.$$

可得 $A=\frac{1}{2}$. 特解可取作 $y^*=\frac{1}{2}e^{4x}$. (2 分)

21. 设奇函数 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上连续，在 $(-2,2)$ 内可导, 且 $f(2)=2f(1)$. 证明:

$$\exists\xi\in(0,1),\text{使得}\quad f'(2\xi)=f'(\xi).$$

【证】引入辅助函数

$$F(x)=f(2x)-2f(x),\qquad x\in[0,1]. \qquad (2\text{ 分})$$

在 $[0,1]$ 上, $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 并注意到 $f(0)=0$, 可得

$$F(0)=0=F(1), \qquad (1\text{ 分})$$

由 Rolle 中值定理, 可得

$$\exists\xi\in(0,1),\text{使得}\quad F'(\xi)=2f'(2\xi)-2f'(\xi)=0. \qquad (2\text{ 分})$$

即

$$\exists\xi\in(0,1),\text{使得}\quad f'(2\xi)=f'(\xi). \qquad (1\text{ 分})$$