北京信息科技大学 2020–2021 学年第一学期

《高等数学 A(1)》课程期末考试试卷 (A 卷)

课程所在学院：理学院　适用专业班级: 96 学时 (普通班)
考试形式: (闭卷)

一、 选择题 (本题满分 10 分，含 5 道小题, 每小题 2 分)

1. 当 $x \to 0$ 时，函数 $f(x) = \sqrt[4]{1+x^3} - 1$ 是 x^4 的 (　　) 无穷小. 【 C 】

A. 高阶　　B. 同阶但不等价　　C. 低阶　　D. 等价

2. 设函数 $f(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的 (　　). 【 C 】

A. 连续点　　B. 可去间断点　　C. 跳跃间断点　　D. 第二类间断点

3. 设函数 $y = \int_0^x \ln(1+t^3)\mathrm{d}t$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = ($　　$)$. 【 D 】

A. $3x^2\ln(1+x^3)$　　B. $3x^2\ln(1+3x^2)$　　C. $\ln(1+3x^2)$　　D. $\ln(1+x^3)$

4. 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 $[a,b]$ 上, 下列论断中错误的是 (　　). 【 D 】

A. $f(x)+g(x)$ 连续　　B. $f(x)\cdot g(x)$ 连续

C. $\max\{f(x), g(x)\}$ 连续　　D. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 连续

5. 设数列 $a_n = \left(\frac{1}{n^2+n+1} + \frac{2}{n^2+n+1} + \cdots + \frac{n}{n^2+n+1}\right)$, 下列论断中正确的是 (　　). 【 B 】

A. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$　　B. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{2}$　　C. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$　　D. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 不存在

二、 解答题 (本题满分 30 分，含 6 道小题, 每小题 5 分)

6. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 3x}{x}, & x>0\\ a+\arctan x, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 求常数 a.

【解】分别计算 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的左、右极限

$$f(0^-)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(a+\arctan x)=a \qquad (2\text{ 分})$$

$$f(0^+)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin 3x}{x}=3. \qquad (2\text{ 分})$$

由连续性可得， $f(0^-)=f(0)=f(0^+) \implies a=3.$ (1 分)

7. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\mathrm{e}^{x^2+y}-xy^2=0$ 确定, 求 $\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}$ 在点 $(1,-1)$ 处的取值.

【解】方程两端关于 x 求导，得

$$\mathrm{e}^{x^2+y}\cdot(2x+\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x})-(y^2+2xy\cdot\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x})=0. \qquad (2\text{ 分})$$

整理可得

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=-\frac{2x\mathrm{e}^{x^2+y}-y^2}{\mathrm{e}^{x^2+y}-2xy}. \qquad (2\text{ 分})$$

特别地,

$$\left.\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}\right|_{(1,-1)}=-\frac{1}{3}. \qquad (1\text{ 分})$$

8. 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=\ln(1+t^2)\\ y=t-\arctan t\end{cases}$ 所确定, 求 $\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}$, $\left.\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}\right|_{t=1}$.

【解】计算可得

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=\frac{\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t}}{\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t}}=\frac{1-\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{t}{2}. \qquad (2\text{ 分 }+2\text{ 分})$$

于是

$$\left.\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}\right|_{t=1}=\frac{1}{2}. \qquad (1\text{ 分})$$

9. 计算定积分 $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}(9-x)}\,\mathrm{d}x$.

【解】凑微分，可得

$$\begin{aligned}
\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}(9-x)}\,\mathrm{d}x =& 2\int_1^4 \frac{1}{3^2-(\sqrt{x})^2}\,\mathrm{d}\sqrt{x} && (2\text{ 分})\\
=& 2\cdot\frac{1}{6}\ln\left|\frac{3+\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}}\right|_1^4 && (2\text{ 分})\\
=& \frac{1}{3}\ln\frac{5}{2}. && (1\text{ 分})
\end{aligned}$$

10. 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=x^2\sec(3y)$ 的通解.

【解】所求通解为

$$\begin{aligned}
&\cos(3y)\mathrm{d}y = x^2\mathrm{d}x.\\
&\int\cos(3y)\mathrm{d}y = \int x^2\mathrm{d}x. && (2\text{ 分})\\
&\frac{1}{3}\sin(3y)=\frac{1}{3}x^3+C_1 \implies \sin(3y)=x^3+C. && (3\text{ 分})
\end{aligned}$$

11. 求微分方程 $y'-\dfrac{3y}{x}=3x^3$ 的通解.

【解】所求通解为

$$\begin{aligned}
y &= \mathrm{e}^{\int\frac{3}{x}\,\mathrm{d}x}\left(\int 3x^3\cdot\mathrm{e}^{-\int\frac{3}{x}\,\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right) && (2\text{ 分})\\
&= x^3\left(\int 3x^3\cdot\frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x+C\right)\\
&= x^3\big(3x+C\big)=3x^4+Cx^3. && (3\text{ 分})
\end{aligned}$$

【解】相应齐次线性方程 $y'-\dfrac{3y}{x}=0$ 的通解为

$$Y=C\mathrm{e}^{\int\frac{3}{x}\mathrm{d}x}=Cx^3. \qquad (2\text{ 分})$$

由常数变易法, 将 $y=C(x)x^3$ 代入非齐次线性方程, 得

$$C'(x)x^3=3x^3 \implies C(x)=\int 3\,\mathrm{d}x=3x+C. \qquad (2\text{ 分})$$

故, 通解为

$$y=(3x+C)x^3=3x^4+Cx^3. \qquad (1\text{ 分})$$

三、 解答题 (本题满分 60 分，含 10 道小题, 每小题 6 分)

12. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right)$.

【解】连续两次使用洛必达法则，可得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1-x}{x(\mathrm{e}^x-1)} && (1\text{ 分})\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x-1+x\mathrm{e}^x} && (2\text{ 分})\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x}{2\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x} && (2\text{ 分})\\ &= \frac{1}{2}. && (1\text{ 分})\end{aligned}$$

13. 求函数 $f(x)=(x+3)x^{\frac{1}{3}}$ 的极值.

【解】计算导数

$$f'(x)=x^{\frac{1}{3}}+(x+3)\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}=\frac{4x+3}{3x^{\frac{2}{3}}}. \qquad (2\text{ 分})$$

可疑的极值点为 $x_1=-\frac{3}{4}$, $x_2=0$. (2 分)

在 $x_1=-\frac{3}{4}$ 两侧, f' 左负右正, 相应的极小值为 $f(-\frac{3}{4})=-\frac{9}{4}\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$. (1 分)

在 $x_2=0$ 两侧, f' 不变号, 不是极值点. (1 分)

14. 求曲线 $f(x)=3x^5-10x^3+x-1$ 的拐点.

【解】计算导数

$$f'(x)=15x^4-30x^2+1,\ f''(x)=60x^3-60x=60(x+1)x(x-1).$$

可疑拐点为 $(-1,5)$, $(0,-1)$, $(1,-7)$. (3 分)

在 $x=-1$ 两侧，$f''(x)$ 变号, 故 $(-1,5)$ 为拐点. (1 分)

在 $x=0$ 两侧，$f''(x)$ 变号, 故 $(0,-1)$ 为拐点. (1 分)

在 $x=1$ 两侧，$f''(x)$ 变号, 故 $(1,-7)$ 为拐点. (1 分)

15. 计算不定积分 $\displaystyle\int\frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$.

【解】设 $x=\tan t$, $t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, 则有

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x &= \int\frac{1}{\sec^4 t}\cdot\sec^2 t\,\mathrm{d}t && (2\text{ 分})\\ &= \int\cos^2 t\,\mathrm{d}t=\int\frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t && (2\text{ 分})\\ &= \frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin 2t+C\\ &= \frac{1}{2}\arctan x+\frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2}+C. && (2\text{ 分})\end{aligned}$$

16. 计算不定积分：$\displaystyle\int 4x^3 \arctan x \,\mathrm{d}x$.

【解】分部积分，可得

$$
\begin{aligned}
\int 4x^3 \arctan x \,\mathrm{d}x &= \int \arctan x \,\mathrm{d}x^4 \\
&= x^4 \arctan x - \int x^4 \,\mathrm{d}\arctan x \qquad (2\text{ 分}) \\
&= x^4 \arctan x - \int \frac{x^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= x^4 \arctan x - \int (x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2})\,\mathrm{d}x \qquad (2\text{ 分}) \\
&= x^4 \arctan x - \frac{1}{3}x^3 + x - \arctan x + C. \qquad (2\text{ 分})
\end{aligned}
$$

【解】换元 $t = \arctan x$, 或 $x = \tan t$,

$$
\begin{aligned}
\int 4x^3 \arctan x \,\mathrm{d}x &= \int 4t \tan^3 t \cdot \sec^2 t \,\mathrm{d}t \\
&= \int t \,\mathrm{d}\tan^4 t \qquad (2\text{ 分}) \\
&= t \cdot \tan^4 t - \int \tan^4 t \,\mathrm{d}t = t \cdot \tan^4 t - \int \tan^2 t(\sec^2 t - 1)\,\mathrm{d}t \\
&= t \cdot \tan^4 t - \int \tan^2 t \sec^2 t - \sec^2 t + 1 \,\mathrm{d}t \qquad (2\text{ 分}) \\
&= t \cdot \tan^4 t - \frac{1}{3}\tan^3 t + \tan t - t + C \\
&= x^4 \arctan x - \frac{1}{3}x^3 + x - \arctan x + C. \qquad (2\text{ 分})
\end{aligned}
$$

17. 求曲线 $y = -x^3 + x^2 + 2x$ 与 x 轴所围成图形的面积 S.

【解】曲线与 x 轴交点的横坐标为 $x = -1, \quad x = 0, \quad x = 2.$ (1 分)

所求面积为

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^2 -x^3 + x^2 + 2x \,\mathrm{d}x - \int_{-1}^0 -x^3 + x^2 + 2x \,\mathrm{d}x \qquad (2\text{ 分}) \\
&= \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + x^2\right]_0^2 - \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + x^2\right]_{-1}^0 \qquad (1\text{ 分}) \\
&= \frac{8}{3} + \frac{5}{12} = \frac{37}{12}. \qquad (2\text{ 分})
\end{aligned}
$$

18. 求曲线 $y = \dfrac{x^{5/2}}{\sqrt{x^3+1}}$, 直线 $x = 1$ 与 x 轴所围图形绕 x 轴旋转所得旋转体的体积 V.

【解】所求体积为

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^1 \frac{x^5}{x^3+1}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{3}\int_0^1 \frac{x^3}{x^3+1}\,\mathrm{d}(x^3) \qquad (2\text{ 分 }+1\text{ 分}) \\
&= \frac{\pi}{3}\int_0^1 \frac{t}{t+1}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{3}\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t \qquad (2\text{ 分}) \\
&= \frac{\pi}{3}\big(t - \ln(t+1)\big)_0^1 = \frac{\pi}{3}(1 - \ln 2). \qquad (1\text{ 分})
\end{aligned}
$$

19. 计算反常积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x$.

【解】作替换 $t=2x+1$, 可得

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(2x+1)^2+2^2} && (2\text{ 分})\\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+2^2)} && (2\text{ 分})\\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\arctan\frac{t}{2}\bigg|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{4}. && (2\text{ 分})
\end{aligned}$$

【解】凑微分

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(2x+1)^2+2^2} && (2\text{ 分})\\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2x+1)^2+2^2}\,\mathrm{d}(2x+1) && (2\text{ 分})\\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\arctan\frac{2x+1}{2}\bigg|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{4}. && (2\text{ 分})
\end{aligned}$$

20. 求微分方程 $y''-3y'+2y=\mathrm{e}^{3x}$ 的一个特解.

【解】特征方程为: $r^2-3r+2=0$. 特征根为: $r=1,2$. (2 分)

原方程的一个特解可取: $y^*=A\mathrm{e}^{3x}$. (2 分)

把 y^* 代入原方程,

$$9A\mathrm{e}^{3x}-9A\mathrm{e}^{3x}+2A\mathrm{e}^{3x}=\mathrm{e}^{3x}.$$

可得 $A=\dfrac{1}{2}$. 特解可取作 $y^*=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{3x}$. (2 分)

21. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导. 证明:

$$\exists\xi\in(0,1),\text{使得}\quad \xi^{-2}f'(\xi)=3f'(\xi^3).$$

【证】引入辅助函数

$$F(x)=f(x)-f(x^3),\qquad x\in[0,1]. \tag{2 分}$$

$F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且

$$F(0)=0=F(1). \tag{1 分}$$

由 Rolle 中值定理, 可得

$$\exists\xi\in(0,1),\text{使得}\quad F'(\xi)=f'(\xi)-3\xi^2f'(\xi^3)=0. \tag{2 分}$$

即

$$\exists\xi\in(0,1),\text{使得}\quad \xi^{-2}f'(\xi)=3f'(\xi^3). \tag{1 分}$$