北京信息科技大学 2017 ~2018 学年第一学期

《 高等数学 A(1) 》课程期末考试参考答案（A卷）

课程所在学院：理学院　　　适用专业班级：96学时普通班

考试形式：（闭卷）

一、选择题（本题满分 10 分，共含 5 道小题，每小题 2 分）

1、 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^x}{2x}=$（　　C　　）

A． 1　　　　B． -1

C． $-\dfrac{1}{2}$　　　　D． $\dfrac{1}{2}$

2、设函数 $y=\int_0^x\cos(2t+1)\mathrm{d}t$，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$　（　　A　　）

A． $\cos(2x+1)$　　　　B． $\sin(2x+1)$

C． $2\cos(2x+1)$　　　　D． $2\sin(2x+1)$

3、曲线 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{2}{3}$ 在点 $(1,1)$ 处的切线斜率是（　　B　　）

A． 0　　　　B． 1

C． 3　　　　D． 2

4、 $\int\dfrac{1}{4+x^2}\mathrm{d}x=$（　　A　　）

A． $\dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{x}{2}+C$　　　　B． $\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{x}{2}+C$

C． $\arctan\dfrac{x}{2}+C$　　　　D． $\arcsin\dfrac{x}{2}+C$

5、 微分方程 $y''-y'-2y=(x+2)e^x$ 的特解形式是（　　D　　）

A． $y=(ax+b)e^{-x}$　　　　B． $y=x(ax+b)e^x$

C． $y=x(ax+b)e^{-x}$　　　　D． $y=(ax+b)e^x$

二、计算题（本题满分 30 分，共含 6 道小题，每小题 5 分）

6、计算极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^2 x}{x(e^x-1)}$.

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^2 x}{x(e^x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x\cdot x}=1$　（2+2+1）

7、设函数 $y\left(x\right)$ 由方程 $e^{x+y}=xy+1$ 确定，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解：方程 $e^{x+y}=xy+1$ 两边关于 x 求导，有

$e^{x+y}(1+y')=y+xy'$，从而有　$(e^{x+y}-x)y'=y-e^{x+y}$，所以

$$\frac{dy}{dx}=y'=\frac{y-e^{x+y}}{e^{x+y}-x}\qquad（4+1）$$

8、设 $\begin{cases} x=e^t\sin 2t \\ y=e^t\cos 2t \end{cases}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}$.

解：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{e^t(\cos 2t-2\sin 2t)}{e^t(\sin 2t+2\cos 2t)}=\dfrac{\cos 2t-2\sin 2t}{\sin 2t+2\cos 2t}$，　$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=-2$。　（2+2+1）

9、求方程 $x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y=0$ 的通解.

解：　分离变量，$x\mathrm{d}x=-y\mathrm{d}y$,　两边同时积分得 $\int x\mathrm{d}x=-\int ydy$

即 $\dfrac{1}{2}x^2=-\dfrac{1}{2}y^2+C$ ，即所求通解为 $x^2+y^2=C$　（2+2+1）

10、计算不定积分：$\int(x+1)\sin xdx$.

解：　$\int(x+1)\sin x\mathrm{d}x=-\int(x+1)\mathrm{d}\cos x=-(x+1)\cos x+\int\cos x\mathrm{d}x$

$$=-(x+1)\cos x+\sin x+C\qquad（2+2+1）$$

11、计算定积分: $\int_0^1\dfrac{x}{4+x^2}\mathrm{d}x$.

解：　$\int_0^1\dfrac{x}{4+x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int_0^1\dfrac{1}{4+x^2}\mathrm{d}x^2=\dfrac{1}{2}\ln(4+x^2)\Big|_0^1=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{5}{4}$　（2+2+1）

三、解答题 （本题满分 60 分，共含 10 道小题，每小题 6 分）

12、设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[f(x)-f(0)]\sin 3x}{x^2}=4$，求 $f'(0)$.

解：$4=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[f(x)-f(0)]\sin 3x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}=3f'(0),$

故 $f'(0)=\dfrac{4}{3}$. （2+2+2）

13、求函数 $y=\dfrac{1}{2}\ln x-\arctan x+1$ 的单调区间。

解：函数的定义域为$(0,+\infty)$，$y'=\dfrac{1}{2x}-\dfrac{1}{1+x^2}=\dfrac{(x-1)^2}{2x(1+x^2)}>0$，

故函数的单调增区间为$(0,+\infty)$。 （1+2+2+1）

14、求曲线 $y=\ln(1+x^2)-3x$ 的拐点。

解：$y'=\dfrac{2x}{1+x^2}-3$，$y''=\dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$，令 $y''=0$ 得 $x=\pm1$，当 $x<-1$ 时，$y''<0$，时，

当 $-1<x<1$ 时，$y''>0$，当 $x>1$ 时，$y''<0$，故拐点为$(-1,\ln 2+3)$，$(1,\ln 2-3)$

（1+1+2+2）

15、计算不定积分：$\int e^{\sqrt{x+1}}dx$

解：令 $\sqrt{x+1}=t$, 则 $x=t^2-1$，$dx=2tdt$

$$\int e^{\sqrt{x+1}}dx=\int 2te^t dt=2\int tde^t=2te^t-2\int e^t dt \qquad （2+2+2）$$

$$=2(t-1)e^t+C==2(\sqrt{x+1}-1)e^{\sqrt{x+1}}+C$$

16、求曲线 $y=e^x$, 与直线 $y=ex$ 及 $x=0$ 轴所围图形的面积 S。

解： $S=\int_0^1(e^x-ex)dx=(e^x-\dfrac{1}{2}ex^2)\Big|_0^1=\dfrac{1}{2}e-1$ （3+2+1）

17、求曲线 $y=x^2-2x$，$y=0,\ x=1$ 和 $x=2$ 所围的平面图形绕 x 轴旋转所得立体的体积 V.

解： $V=\pi\int_1^2(x^2-2x)^2dx=\pi(\dfrac{1}{5}x^5-x^4+\dfrac{4}{3}x^3)\Big|_1^2=\dfrac{8}{15}\pi$ （3+2+1）

18、计算反常积分：$\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x(5+\ln x)^2}$.

解： $$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(5+\ln x)^2}=\int_1^{+\infty}\frac{d(5+\ln x)}{(5+\ln x)^2}$$

$$=-\frac{1}{5+\ln x}\bigg|_1^{+\infty}=\frac{1}{5}$$ （2+2+2）

19、求微分方程 $y''+2y'-3y=0$ 的通解.

解：特征方程是 $r^2+2r-3=0$，即 $(r-1)(r+3)=0$ 特征根是 $r_1=1, r_2=-3$，

所以该方程的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{-3x}$ （2+2+2）

20、设 $x>0$，证明：$\ln(1+x)>\dfrac{x}{1+x}$。

证明:设 $f(x)=\left(1+x\right)\ln(1+x)-x$，$f'(x)=\ln(1+x)>0$，

函数 $f(x)$ 在 $x>0$ 单调递增，从而 $f(x)>f(0)=0$，即有

$$\ln(1+x)>\frac{x}{1+x}$$ （2+2+2）

21、设 $0<a<b$，函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\dfrac{b}{a}$.

证明：对 $f(x)$ 和函数 $\ln x$ 在 $[a,b]$ 上应用柯西中值定理，有

$$\frac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}=\frac{f'(\xi)}{\frac{1}{\xi}},$$

即有

$$f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}$$ （2+2+2）

北京信息科技大学 2018–2019 学年第一学期

《高等数学 A(1)》课程期末考试试卷 (A 卷)

课程所在学院：理学院　适用专业班级: 96 学时 (普通班)
考试形式: (闭卷)

一、 选择题 (本题满分 10 分，含 5 道小题, 每小题 2 分)

1. 当 $x \to 0$ 时，$\ln(1+2x^2)$ 是 x^2 的 (　　) 无穷小.　　【 B 】

A. 高阶　　B. 同阶　　C. 低阶　　D. 等价

2. 设函数 $f(x)=e^{\frac{1}{x-1}}$，则 $x=1$ 是它的 (　　)　　【 D 】

A. 连续点　　B. 可去间断点　　C. 跳跃间断点　　D. 第二类间断点

3. 设 $y=e^{\cos x}$, 则有 $\mathrm{d}y=$ (　　)　　【 C 】

A. $e^{\cos x}\,\mathrm{d}x$　　B. $\sin x\cdot e^{\cos x}\,\mathrm{d}x$　　C. $-\sin x\cdot e^{\cos x}\,\mathrm{d}x$　　D. $e^{-\sin x}\,\mathrm{d}x$

4. 设 $f(x)$ 可导, 且 $y=\int_0^x f(2t)\mathrm{d}t$, 则有 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$ (　　)　　【 D 】

A. $f'(2x)$　　B. $2f'(2x)$　　C. $2f(2x)$　　D. $f(2x)$

5. 微分方程 $y''-2y'+y=(2x+1)e^x$ 的特解可取作 (　　)　　【 A 】

A. $y=x^2(ax+b)e^x$　　B. $y=x(ax+b)e^x$

C. $y=ax+b$　　D. $y=x(ax+b)$

二、 解答题 (本题满分 30 分，含 6 道小题, 每小题 5 分)

6. 设 $f'(a)$ 存在, 求极限：$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+4h)-f(a-2h)}{h}$.

【解】利用导数的定义

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{f(a+4h)-f(a-2h)}{h}\\
=&\lim_{h\to 0}\frac{f(a+4h)-f(a)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(a-2h)-f(a)}{h} && (2\text{ 分})\\
=&4\lim_{h\to 0}\frac{f(a+4h)-f(a)}{4h}+2\lim_{h\to 0}\frac{f(a-2h)-f(a)}{-2h} && (2\text{ 分})\\
=&6f'(a) \qquad . && (1\text{ 分})
\end{aligned}$$

7. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\sin(x+y)+e^y=4x$ 所确定, 求 $\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}$.

【解】方程两端关于 x 求导，得

$$\cos(x+y)\cdot(1+y')+e^y\cdot y'=4. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2\text{ 分})$$

整理可得

$$[\cos(x+y)+e^y]y'=4-\cos(x+y). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2\text{ 分})$$

即

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=\frac{4-\cos(x+y)}{e^y+\cos(x+y)}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1\text{ 分})$$

8. 设 $\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=\sin t \end{cases}$ ，求 $\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}$, $\left.\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}\right|_{t=\pi}$.

【解】计算可得

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=\frac{\cos t}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{(1+t^2)\cos t}{2t}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2\text{ 分 }+2\text{ 分})$$

于是

$$\left.\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}\right|_{t=\pi}=-\frac{1+\pi^2}{2\pi}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1\text{ 分})$$

9. 求微分方程 $3x^2\,\mathrm{d}x - \cos y\,\mathrm{d}y = 0$ 的通解.

【解】分离变量，得

$$3x^2\mathrm{d}x = \cos y\mathrm{d}y. \quad \cdots\cdots(2\text{ 分})$$

两端取积分，得

$$\int 3x^2\mathrm{d}x = \int \cos y\mathrm{d}y. \quad \cdots\cdots(2\text{ 分})$$

于是，通解为

$$x^3 = \sin y + C, \text{即 } x^3 - \sin y = C. \quad \cdots\cdots(1\text{ 分})$$

10. 计算不定积分：$\displaystyle\int (x+1)e^x\,\mathrm{d}x$.

【解】分部积分，可得

$$\int (x+1)e^x\,\mathrm{d}x = \int (x+1)\,\mathrm{d}e^x. \quad (2\text{ 分})$$

$$=(x+1)e^x - \int e^x\,\mathrm{d}(x+1). \quad (2\text{ 分})$$

$$=(x+1)e^x - e^x + C. \quad (1\text{ 分})$$

11. 计算定积分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

【解】凑微分，可得

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \arctan x\,\mathrm{d}\arctan x. \quad (2\text{ 分})$$

$$=\left.\frac{(\arctan x)^2}{2}\right|_0^1. \quad (2\text{ 分})$$

$$=\frac{\pi^2}{32}. \quad (1\text{ 分})$$

【解】换元 $t = \arctan x$，可得

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/4} \frac{t}{1+\tan^2 t}\,\mathrm{d}\tan t = \int_0^{\pi/4} t\,\mathrm{d}t. \quad (2\text{ 分})$$

$$=\left.\frac{t^2}{2}\right|_0^{\pi/4}. \quad (2\text{ 分})$$

$$=\frac{\pi^2}{32}. \quad (1\text{ 分})$$

三、 **解答题** (**本题满分** 60 **分，含** 10 **道小题, 每小题** 6 **分**)

12. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$.

【解】连续两次使用洛必达法则，可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}. \quad \ldots\ldots(2\text{ 分 }+2\text{ 分 }+2\text{ 分})$$

【解】使用洛必达法则并使用等价无穷小替换，可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2/2}{3x^2}=\frac{1}{6}. \quad \ldots\ldots(2\text{ 分 }+2\text{ 分 }+2\text{ 分})$$

13. 求函数 $f(x)=x^2-\ln x^2(x<0)$ 的单调区间.

【解】计算导数

$$f'(x)=2x-\frac{2x}{x^2}=\frac{2(x^2-1)}{x},x<0. \quad \ldots\ldots(2\text{ 分})$$

当 $x\in(-1,0)$ 时, $f'(x)>0$, $f(x)$ 在 $[-1,0)$ 上单调增加. ……(2 分)
当 $x\in(-\infty,-1)$ 时, $f'(x)<0$, $f(x)$ 在 $(-\infty,-1]$ 上单调减少. ……(2 分)

14. 求曲线 $f(x)=(x^2+1)e^{-x}$ 的拐点.

【解】先计算导数

$$f'(x)=(-x^2+2x-1)e^{-x}, \qquad f''(x)=(x^2-4x+3)e^{-x}. \qquad (2\text{ 分})$$

令 $f''(x)=0$, 得可疑拐点为: $(1,\frac{2}{e})$, $(3,\frac{10}{e^3})$……(2 分)

在 $x=1$ 两侧，$f''(x)$ 左正右负；在 $x=3$ 两侧，$f''(x)$ 左负右正.

故拐点为 $(1,\frac{2}{e})$, $(3,\frac{10}{e^3})$. ……(2 分)

15. 计算不定积分 $\displaystyle\int\frac{1}{1+\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$.

【解】设 $t=\sqrt{x+1}$, 则 $x=t^2-1$

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{1+\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x&=\int\frac{2t}{1+t}\,\mathrm{d}t && (2\text{ 分})\\ &=2\int\left(1-\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t && (2\text{ 分})\\ &=2t-2\ln|1+t|+C=2\sqrt{1+x}-2\ln(1+\sqrt{x+1})+C. && (2\text{ 分})\end{aligned}$$

16. 求由曲线 $y=3x^2$, 曲线 $y=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ 与直线 $x=1$ 以及直线 $x=4$ 所围平面图形的面积 S.

【解】所求面积为

$$\begin{aligned}S=&\int_1^4\left(3x^2-\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}x && (3\text{ 分})\\=&\left(x^3-x\sqrt{x}\right)\Big|_1^4 && (2\text{ 分})\\=&64-8=56. && (1\text{ 分})\end{aligned}$$

17. 求由曲线 $y=\sin x, x\in[0,\pi]$ 与 x 轴所围平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体体积 V.

【解】所求体积为

$$\begin{aligned}V=&\pi\int_0^{\pi}\sin^2 x\,\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x && (2\text{ 分 }+1\text{ 分})\\=&\frac{\pi}{2}\left(x-\frac{\sin 2x}{2}\right)\Big|_0^{\pi} && (2\text{ 分})\\=&\frac{\pi^2}{2}. && (1\text{ 分})\end{aligned}$$

18. 计算反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x$.

【解】由

$$\int\frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{(x+1)^2+1}\,\mathrm{d}(x+1)=\arctan(x+1).\quad(2\text{ 分 }+2\text{ 分})$$

可得

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x=\arctan(x+1)\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}.\qquad(2\text{ 分})$$

【解】

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x=&\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x+1)^2+1}\,\mathrm{d}(x+1)\\=&\arctan(x+1)\Big|_0^{+\infty}\\=&\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}. && (2\text{ 分 }+2\text{ 分 }+2\text{ 分})\end{aligned}$$

19. 求微分方程 $y'' + y' - 6y = 0$ 的通解.

【解】微分方程的特征方程为: $r^2 + r - 6 = 0$. (2 分)

特征根为: $r = -3, r = 2$. (2 分)

通解为: $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x}$. (2 分)

20. 设 $x \neq 0$, 证明: $e^x > 1 + x$.

【证】引入辅助函数 $f(x) = e^x - 1 - x, \quad x \in \mathbb{R}$. 注意到

$$f'(x) = e^x - 1 = \begin{cases} < 0, & x < 0, \\ > 0, & x > 0. \end{cases}$$ (2 分)

可知, $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调减少, $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调增加.
因此, $x = 0$ 为最小值点. (2 分)
于是

$$f(x) > f(0) = 0, \quad x \neq 0.$$

即 $e^x > 1 + x, \quad x \neq 0$. (2 分)

21. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(1) = 0$. 证明:

$$\exists \xi \in (0,1), \text{使得} \quad f(\xi) + f'(\xi) \tan \xi = 0.$$

【证】引入辅助函数

$$F(x) = f(x) \sin x, \qquad x \in [0,1].$$ (2 分)

则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且

$$F(0) = 0, \quad F(1) = f(1) \sin 1 = 0.$$ (1 分)

由 Rolle 中值定理, 可得

$$\exists \xi \in (0,1), \text{使得} \quad f(\xi) \cos \xi + f'(\xi) \sin \xi = 0.$$ (2 分)

由于 $\xi \in (0,1)$ 时, $\cos \xi \neq 0$, 两端同除 $\cos \xi$, 有

$$\exists \xi \in (0,1), \text{使得} \quad f(\xi) + f'(\xi) \tan \xi = 0.$$ (1 分)

北京信息科技大学 2019–2020 学年第一学期

《高等数学 A(1)》课程期末考试试卷 (A 卷)

课程所在学院：理学院　适用专业班级: 96 学时 (普通班)
考试形式: (闭卷)

一、 选择题 (本题满分 10 分，含 5 道小题, 每小题 2 分)

1. 当 $x \to 0$ 时，函数 $f(x) = 1 - \cos(x^2)$ 是 x^3 的 (　　) 无穷小. 【 A 】

A. 高阶　　B. 同阶　　C. 低阶　　D. 等价

2. 设函数 $f(x) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{|x|}\right)$，则 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的 (　　). 【 D 】

A. 连续点　　B. 可去间断点　　C. 跳跃间断点　　D. 第二类间断点

3. 设函数 $y = \int_0^x \sin(t^2)\mathrm{d}t$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = ($　　$)$. 【 C 】

A. $\cos(x^2)$　　B. $-\cos(x^2)$　　C. $\sin(x^2)$　　D. $2x\cos(x^2)$

4. 设函数 $f(x)$ 在有限闭区间 $[a, b]$ 上连续, 下列论断中错误的是 (　　). 【 B 】

A. $f(x)$ 必有原函数　　B. $f(x)$ 必可微

C. $f(x)$ 必可积　　D. $f(x)$ 必有界

5. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义, 且极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$ 存在, 下列论断中错误的是 (　　). 【 B 】

A. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x^2) = a$　　B. $\lim\limits_{x\to 0} f(\dfrac{1}{x}) = a$

C. $\lim\limits_{x\to\infty} f(|x|) = a$　　D. $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n^2) = a$

二、 解答题 (本题满分 30 分，含 6 道小题, 每小题 5 分)

6. 设函数 $f(x)=\begin{cases}(1+2x)^{\frac{1}{x}}, & x>0\\ 2a+\sin x, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 求常数 a.

【解】分别计算 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的左、右极限

$$f(0^-)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(2a+\sin x)=2a \qquad (2\text{ 分})$$

$$f(0^+)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^2. \qquad (2\text{ 分})$$

由连续性可得， $f(0^-)=f(0)=f(0^+)\implies a=\dfrac{\mathrm{e}^2}{2}$. (1 分)

7. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\mathrm{e}^{xy}-5x^2y=0$ 确定, 求 $\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}$ 在点 $(\frac{\mathrm{e}^2}{10},\frac{20}{\mathrm{e}^2})$ 处的取值.

【解】方程两端关于 x 求导，得

$$\mathrm{e}^{xy}[y+x\cdot\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}]-10xy-5x^2\cdot\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=0. \qquad (2\text{ 分})$$

整理可得

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=\frac{10xy-y\mathrm{e}^{xy}}{x\mathrm{e}^{xy}-5x^2}. \qquad (2\text{ 分})$$

特别地,

$$\left.\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}\right|_{\left(\frac{\mathrm{e}^2}{10},\frac{20}{\mathrm{e}^2}\right)}=0. \qquad (1\text{ 分})$$

8. 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t^2\ln t\\ y=t\sin(\pi t)\end{cases}$ 所确定, 求 $\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}$, $\left.\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}\right|_{t=1}$.

【解】计算可得

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=\frac{\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t}}{\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t}}=\frac{\sin(\pi t)+\pi t\cdot\cos(\pi t)}{2t\ln t+t^2\cdot\frac{1}{t}}=\frac{\sin(\pi t)+\pi t\cdot\cos(\pi t)}{2t\cdot\ln t+t}. \qquad (2\text{ 分 }+2\text{ 分})$$

于是

$$\left.\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}\right|_{t=1}=-\pi. \qquad (1\text{ 分})$$

9. 计算定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \, \mathrm{d}x$.

【解】凑微分，可得

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \, \mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x) \, \mathrm{d}\sin x & (2\text{ 分})\\ &= \left[\sin x - \frac{\sin^3 x}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} & (2\text{ 分})\\ &= \frac{2}{3}. & (1\text{ 分})\end{aligned}$$

10. 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = \mathrm{e}^{4x-2y}$ 的通解.

【解】所求通解为

$$\mathrm{e}^{2y}\mathrm{d}y = \mathrm{e}^{4x}\mathrm{d}x.$$

$$\int \mathrm{e}^{2y}\mathrm{d}y = \int \mathrm{e}^{4x}\mathrm{d}x. \qquad (2\text{ 分})$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2y} = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{4x} + C_1 \implies y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\mathrm{e}^{4x}}{2} + C\right). \qquad (3\text{ 分})$$

11. 求微分方程 $y' + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x}$ 的通解.

【解】所求通解为

$$\begin{aligned}y &= e^{-\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x}\left(\int \frac{\sin x}{x} \cdot e^{\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right) & (2\text{ 分})\\ &= \frac{1}{x}\left(\int \frac{\sin x}{x} \cdot x \, \mathrm{d}x + C\right)\\ &= \frac{1}{x}\left(-\cos x + C\right) = C \cdot \frac{1}{x} + \frac{-\cos x}{x}. & (3\text{ 分})\end{aligned}$$

【解】相应齐次线性方程 $y' + \frac{y}{x} = 0$ 的通解为

$$Y = C \cdot \frac{1}{x}. \qquad (2\text{ 分})$$

由常数变易法, 将 $y = C(x)\frac{1}{x}$ 代入非齐次线性方程, 得

$$C'(x)\frac{1}{x} = \frac{\sin x}{x} \implies C(x) = \int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x + C. \qquad (2\text{ 分})$$

故, 通解为

$$y = \frac{-\cos x + C}{x} = C \cdot \frac{1}{x} + \frac{-\cos x}{x}. \qquad (1\text{ 分})$$

三、 解答题 (本题满分 60 分，含 10 道小题, 每小题 6 分)

12. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x+1}{x}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right)$.

【解】连续两次使用洛必达法则，可得

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+1}{x}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)\ln(1+x)-x}{x\ln(1+x)} \qquad (1\text{ 分})$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}} \qquad (2\text{ 分})$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}} \qquad (2\text{ 分})$$

$$=\frac{1}{2}. \qquad (1\text{ 分})$$

13. 求函数 $f(x)=(x-1)x^{\frac{2}{3}}$ 的极值.

【解】计算导数

$$f'(x)=x^{\frac{2}{3}}+(x-1)\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}=\frac{5x-2}{3x^{\frac{1}{3}}}. \qquad (2\text{ 分})$$

可疑的极值点为 $x_1=\frac{2}{5}$, $x_2=0$. (2 分)

在 $x_1=\frac{2}{5}$ 两侧, f' 左负右正, 故为极小值点, 极小值为 $f(\frac{2}{5})=-\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}}$. (1 分)

在 $x_2=0$ 两侧, f' 左正右负, 故为极大值点, 极大值为 $f(0)=0$. (1 分)

14. 求曲线 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}$ 的拐点.

【解】计算导数

$$f'(x)=\frac{x-2}{x^3},\qquad f''(x)=\frac{-2(x-3)}{x^4}. \qquad (2\text{ 分})$$

可疑拐点为 $(3,-\frac{2}{9})$. (2 分)

在 $x=3$ 两侧，$f''(x)$ 左正右负.

故拐点为 $(3,-\frac{2}{9})$. (2 分)

15. 计算不定积分 $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}\,\mathrm{d}x$.

【解】设 $t=\sqrt[3]{x}$, 即 $x=t^3$, 则有

$$\int\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}\,\mathrm{d}x=\int\frac{3t^2}{t-1}\,\mathrm{d}t \qquad (2\text{ 分})$$

$$=3\int\left(t+1+\frac{1}{t-1}\right)\mathrm{d}t \qquad (2\text{ 分})$$

$$=\frac{3}{2}t^2+3t+3\ln|t-1|+C$$

$$=\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+3\sqrt[3]{x}+3\ln|\sqrt[3]{x}-1|+C. \qquad (2\text{ 分})$$

16. 计算不定积分: $\int \frac{\arctan x}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

【解】换元 $t=\arctan x$, 或 $x=\tan t$,

$$\begin{aligned}\int \frac{\arctan x}{x^2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{t}{\tan^2 t}\cdot \sec^2 t\,\mathrm{d}t \\ &= -\int t\,\mathrm{d}\cot t & (2\text{ 分}) \\ &= -t\cdot\cot t+\int \cot t\,\mathrm{d}t \\ &= -t\cot t+\ln|\sin t|+C & (2\text{ 分}) \\ &= -\frac{\arctan x}{x}+\ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right|+C. & (2\text{ 分})\end{aligned}$$

【解】分部积分, 可得

$$\begin{aligned}\int \frac{\arctan x}{x^2}\,\mathrm{d}x &= -\int \arctan x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= -\frac{\arctan x}{x}+\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}\arctan x & (2\text{ 分}) \\ &= -\frac{\arctan x}{x}+\int \frac{1}{x}\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\arctan x}{x}+\int \frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x & (2\text{ 分}) \\ &= -\frac{\arctan x}{x}+\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C. & (2\text{ 分})\end{aligned}$$

17. 求曲线 $y=\sin x$, 直线 $y=2x$ 及 $x=1$ 所围成图形的面积 S.

【解】所求面积为

$$\begin{aligned}S &= \int_0^1 (2x-\sin x)\,\mathrm{d}x & (3\text{ 分}) \\ &= \left(x^2+\cos x\right)\Big|_0^1 & (2\text{ 分}) \\ &= \cos 1. & (1\text{ 分})\end{aligned}$$

18. 求曲线 $y=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, 直线 $x=1$ 及 x 轴所围图形绕 x 轴旋转所得旋转体的体积 V.

【解】所求体积为

$$\begin{aligned}V &= \pi\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\pi\int_0^1\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x & (2\text{ 分 }+1\text{ 分}) \\ &= \pi\left(x-\arctan x\right)\Big|_0^1 & (2\text{ 分}) \\ &= \pi\left(1-\frac{\pi}{4}\right)=\pi-\frac{\pi^2}{4}. & (1\text{ 分})\end{aligned}$$

19. 计算反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+9)\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

【解】作替换 $t=\sqrt{x}$, 可得

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+9)\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{2t\cdot \mathrm{d}t}{(t^2+9)t} \qquad (2\text{ 分})$$

$$= 2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+3^2)} \qquad (1\text{ 分})$$

$$= \frac{2}{3}\arctan\frac{t}{3}\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{3}. \qquad (3\text{ 分})$$

【解】凑微分

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+9)\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{(\sqrt{x})^2+3^2}\,\mathrm{d}\sqrt{x} \qquad (2\text{ 分})$$

$$= \frac{2}{3}\arctan\frac{\sqrt{x}}{3}\Big|_0^{+\infty} \qquad (2\text{ 分})$$

$$= \frac{\pi}{3}. \qquad (2\text{ 分})$$

20. 求微分方程 $y''-5y'+6y=e^{4x}$ 的一个特解.

【解】特征方程为: $r^2-5r+6=0$. 特征根为: $r=2,3$. (2 分)

原方程的一个特解可取: $y^*=Ae^{4x}$. (2 分)

把 y^* 代入原方程,

$$16Ae^{4x}-20Ae^{4x}+6Ae^{4x}=e^{4x}.$$

可得 $A=\frac{1}{2}$. 特解可取作 $y^*=\frac{1}{2}e^{4x}$. (2 分)

21. 设奇函数 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上连续，在 $(-2,2)$ 内可导, 且 $f(2)=2f(1)$. 证明:

$$\exists\xi\in(0,1), \text{使得} \quad f'(2\xi)=f'(\xi).$$

【证】引入辅助函数

$$F(x)=f(2x)-2f(x), \qquad x\in[0,1]. \qquad (2\text{ 分})$$

在 $[0,1]$ 上, $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 并注意到 $f(0)=0$, 可得

$$F(0)=0=F(1), \qquad (1\text{ 分})$$

由 Rolle 中值定理, 可得

$$\exists\xi\in(0,1), \text{使得} \quad F'(\xi)=2f'(2\xi)-2f'(\xi)=0. \qquad (2\text{ 分})$$

即

$$\exists\xi\in(0,1), \text{使得} \quad f'(2\xi)=f'(\xi). \qquad (1\text{ 分})$$

北京信息科技大学 2020–2021 学年第一学期

《高等数学 A(1)》课程期末考试试卷 (A 卷)

课程所在学院：理学院　适用专业班级: 96 学时 (普通班)
考试形式: (闭卷)

一、 选择题 (本题满分 10 分，含 5 道小题, 每小题 2 分)

1. 当 $x \to 0$ 时，函数 $f(x) = \sqrt[4]{1+x^3} - 1$ 是 x^4 的 (　　) 无穷小. 【 C 】

A. 高阶　B. 同阶但不等价　C. 低阶　D. 等价

2. 设函数 $f(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}$，则 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的 (　　). 【 C 】

A. 连续点　B. 可去间断点　C. 跳跃间断点　D. 第二类间断点

3. 设函数 $y = \int_0^x \ln(1+t^3)\mathrm{d}t$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = ($　　$)$. 【 D 】

A. $3x^2\ln(1+x^3)$　B. $3x^2\ln(1+3x^2)$　C. $\ln(1+3x^2)$　D. $\ln(1+x^3)$

4. 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 $[a,b]$ 上, 下列论断中错误的是 (　　). 【 D 】

A. $f(x)+g(x)$ 连续　B. $f(x)\cdot g(x)$ 连续

C. $\max\{f(x), g(x)\}$ 连续　D. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 连续

5. 设数列 $a_n = \left(\frac{1}{n^2+n+1} + \frac{2}{n^2+n+1} + \cdots + \frac{n}{n^2+n+1}\right)$, 下列论断中正确的是 (　　). 【 B 】

A. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$　B. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{2}$　C. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$　D. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 不存在

二、 解答题 (本题满分 30 分，含 6 道小题, 每小题 5 分)

6. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 3x}{x}, & x>0\\ a+\arctan x, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 求常数 a.

【解】分别计算 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的左、右极限

$$f(0^-)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(a+\arctan x)=a \qquad (2\text{ 分})$$

$$f(0^+)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin 3x}{x}=3. \qquad (2\text{ 分})$$

由连续性可得， $f(0^-)=f(0)=f(0^+)\implies a=3.$ (1 分)

7. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\mathrm{e}^{x^2+y}-xy^2=0$ 确定, 求 $\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}$ 在点 $(1,-1)$ 处的取值.

【解】方程两端关于 x 求导，得

$$\mathrm{e}^{x^2+y}\cdot(2x+\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x})-(y^2+2xy\cdot\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x})=0. \qquad (2\text{ 分})$$

整理可得

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=-\frac{2x\mathrm{e}^{x^2+y}-y^2}{\mathrm{e}^{x^2+y}-2xy}. \qquad (2\text{ 分})$$

特别地,

$$\left.\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}\right|_{(1,-1)}=-\frac{1}{3}. \qquad (1\text{ 分})$$

8. 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=\ln(1+t^2)\\ y=t-\arctan t\end{cases}$ 所确定, 求 $\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}$, $\left.\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}\right|_{t=1}$.

【解】计算可得

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=\frac{\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t}}{\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t}}=\frac{1-\dfrac{1}{1+t^2}}{\dfrac{2t}{1+t^2}}=\frac{t}{2}. \qquad (2\text{ 分 }+2\text{ 分})$$

于是

$$\left.\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}\right|_{t=1}=\frac{1}{2}. \qquad (1\text{ 分})$$

9. 计算定积分 $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}(9-x)}\,\mathrm{d}x$.

【解】凑微分，可得

$$\begin{aligned}\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}(9-x)}\,\mathrm{d}x =& 2\int_1^4 \frac{1}{3^2-(\sqrt{x})^2}\,\mathrm{d}\sqrt{x} && (2\text{ 分})\\ =&2\cdot\frac{1}{6}\ln\left|\frac{3+\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}}\right|_1^4 && (2\text{ 分})\\ =&\frac{1}{3}\ln\frac{5}{2}. && (1\text{ 分})\end{aligned}$$

10. 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=x^2\sec(3y)$ 的通解.

【解】所求通解为

$$\begin{aligned}&\cos(3y)\mathrm{d}y = x^2\mathrm{d}x.\\ &\int\cos(3y)\mathrm{d}y=\int x^2\mathrm{d}x. && (2\text{ 分})\\ &\frac{1}{3}\sin(3y)=\frac{1}{3}x^3+C_1 \implies \sin(3y)=x^3+C. && (3\text{ 分})\end{aligned}$$

11. 求微分方程 $y'-\dfrac{3y}{x}=3x^3$ 的通解.

【解】所求通解为

$$\begin{aligned}y&=\mathrm{e}^{\int\frac{3}{x}\,\mathrm{d}x}\left(\int 3x^3\cdot\mathrm{e}^{-\int\frac{3}{x}\,\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right) && (2\text{ 分})\\ &=x^3\left(\int 3x^3\cdot\frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x+C\right)\\ &=x^3\big(3x+C\big)=3x^4+Cx^3. && (3\text{ 分})\end{aligned}$$

【解】相应齐次线性方程 $y'-\dfrac{3y}{x}=0$ 的通解为

$$Y=C\mathrm{e}^{\int\frac{3}{x}\mathrm{d}x}=Cx^3. \qquad (2\text{ 分})$$

由常数变易法, 将 $y=C(x)x^3$ 代入非齐次线性方程, 得

$$C'(x)x^3=3x^3 \implies C(x)=\int 3\,\mathrm{d}x=3x+C. \qquad (2\text{ 分})$$

故, 通解为

$$y=(3x+C)x^3=3x^4+Cx^3. \qquad (1\text{ 分})$$

三、 解答题 (本题满分 60 分，含 10 道小题, 每小题 6 分)

12. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right)$.

【解】连续两次使用洛必达法则，可得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right)&=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1-x}{x(\mathrm{e}^x-1)} &&(1\text{ 分})\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x-1+x\mathrm{e}^x} &&(2\text{ 分})\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x}{2\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x} &&(2\text{ 分})\\&=\frac{1}{2}. &&(1\text{ 分})\end{aligned}$$

13. 求函数 $f(x)=(x+3)x^{\frac{1}{3}}$ 的极值.

【解】计算导数

$$f'(x)=x^{\frac{1}{3}}+(x+3)\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}=\frac{4x+3}{3x^{\frac{2}{3}}}. \qquad (2\text{ 分})$$

可疑的极值点为 $x_1=-\frac{3}{4}$, $x_2=0$. (2 分)

在 $x_1=-\frac{3}{4}$ 两侧, f' 左负右正, 相应的极小值为 $f(-\frac{3}{4})=-\frac{9}{4}\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$. (1 分)

在 $x_2=0$ 两侧, f' 不变号, 不是极值点. (1 分)

14. 求曲线 $f(x)=3x^5-10x^3+x-1$ 的拐点.

【解】计算导数

$$f'(x)=15x^4-30x^2+1,\ f''(x)=60x^3-60x=60(x+1)x(x-1).$$

可疑拐点为 $(-1,5)$, $(0,-1)$, $(1,-7)$. (3 分)

在 $x=-1$ 两侧，$f''(x)$ 变号, 故 $(-1,5)$ 为拐点. (1 分)

在 $x=0$ 两侧，$f''(x)$ 变号, 故 $(0,-1)$ 为拐点. (1 分)

在 $x=1$ 两侧，$f''(x)$ 变号, 故 $(1,-7)$ 为拐点. (1 分)

15. 计算不定积分 $\displaystyle\int\frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$.

【解】设 $x=\tan t$, $t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, 则有

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x&=\int\frac{1}{\sec^4 t}\cdot\sec^2 t\,\mathrm{d}t &&(2\text{ 分})\\&=\int\cos^2 t\,\mathrm{d}t=\int\frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t &&(2\text{ 分})\\&=\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin 2t+C\\&=\frac{1}{2}\arctan x+\frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2}+C. &&(2\text{ 分})\end{aligned}$$

16. 计算不定积分：$\int 4x^3 \arctan x \,\mathrm{d}x$.

【解】分部积分，可得

$$
\begin{aligned}
\int 4x^3 \arctan x \,\mathrm{d}x &= \int \arctan x \,\mathrm{d}x^4 \\
&= x^4 \arctan x - \int x^4 \,\mathrm{d} \arctan x & (2\text{ 分}) \\
&= x^4 \arctan x - \int \frac{x^4}{1+x^2} \,\mathrm{d}x \\
&= x^4 \arctan x - \int (x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2}) \,\mathrm{d}x & (2\text{ 分}) \\
&= x^4 \arctan x - \frac{1}{3}x^3 + x - \arctan x + C. & (2\text{ 分})
\end{aligned}
$$

【解】换元 $t = \arctan x$, 或 $x = \tan t$,

$$
\begin{aligned}
\int 4x^3 \arctan x \,\mathrm{d}x &= \int 4t \tan^3 t \cdot \sec^2 t \,\mathrm{d}t \\
&= \int t \,\mathrm{d} \tan^4 t & (2\text{ 分}) \\
&= t \cdot \tan^4 t - \int \tan^4 t \,\mathrm{d}t = t \cdot \tan^4 t - \int \tan^2 t(\sec^2 t - 1) \,\mathrm{d}t \\
&= t \cdot \tan^4 t - \int \tan^2 t \sec^2 t - \sec^2 t + 1 \,\mathrm{d}t & (2\text{ 分}) \\
&= t \cdot \tan^4 t - \frac{1}{3} \tan^3 t + \tan t - t + C \\
&= x^4 \arctan x - \frac{1}{3}x^3 + x - \arctan x + C. & (2\text{ 分})
\end{aligned}
$$

17. 求曲线 $y = -x^3 + x^2 + 2x$ 与 x 轴所围成图形的面积 S.

【解】曲线与 x 轴交点的横坐标为 $x = -1, \quad x = 0, \quad x = 2.$ (1 分)

所求面积为

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^2 -x^3 + x^2 + 2x \,\mathrm{d}x - \int_{-1}^0 -x^3 + x^2 + 2x \,\mathrm{d}x & (2\text{ 分}) \\
&= \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + x^2 \right]_0^2 - \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + x^2 \right]_{-1}^0 & (1\text{ 分}) \\
&= \frac{8}{3} + \frac{5}{12} = \frac{37}{12}. & (2\text{ 分})
\end{aligned}
$$

18. 求曲线 $y = \dfrac{x^{5/2}}{\sqrt{x^3+1}}$, 直线 $x = 1$ 与 x 轴所围图形绕 x 轴旋转所得旋转体的体积 V.

【解】所求体积为

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^1 \frac{x^5}{x^3+1} \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{3} \int_0^1 \frac{x^3}{x^3+1} \,\mathrm{d}(x^3) & (2\text{ 分 }+1\text{ 分}) \\
&= \frac{\pi}{3} \int_0^1 \frac{t}{t+1} \,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{3} \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{t+1} \right) \mathrm{d}t & (2\text{ 分}) \\
&= \frac{\pi}{3} \big(t - \ln(t+1) \big)_0^1 = \frac{\pi}{3}(1 - \ln 2). & (1\text{ 分})
\end{aligned}
$$

19. 计算反常积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x$.

【解】作替换 $t=2x+1$, 可得

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(2x+1)^2+2^2} && \text{(2 分)}\\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+2^2)} && \text{(2 分)}\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\arctan\frac{t}{2}\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{4}. && \text{(2 分)}\end{aligned}$$

【解】凑微分

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(2x+1)^2+2^2} && \text{(2 分)}\\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2x+1)^2+2^2}\,\mathrm{d}(2x+1) && \text{(2 分)}\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\arctan\frac{2x+1}{2}\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{4}. && \text{(2 分)}\end{aligned}$$

20. 求微分方程 $y''-3y'+2y=\mathrm{e}^{3x}$ 的一个特解.

【解】特征方程为: $r^2-3r+2=0$. 特征根为: $r=1,2$. (2 分)
原方程的一个特解可取: $y^*=A\mathrm{e}^{3x}$. (2 分)
把 y^* 代入原方程,

$$9A\mathrm{e}^{3x}-9A\mathrm{e}^{3x}+2A\mathrm{e}^{3x}=\mathrm{e}^{3x}.$$

可得 $A=\dfrac{1}{2}$. 特解可取作 $y^*=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{3x}$. (2 分)

21. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导. 证明:

$$\exists\xi\in(0,1), \text{使得}\quad \xi^{-2}f'(\xi)=3f'(\xi^3).$$

【证】引入辅助函数

$$F(x)=f(x)-f(x^3),\qquad x\in[0,1]. \qquad \text{(2 分)}$$

$F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且

$$F(0)=0=F(1). \qquad \text{(1 分)}$$

由 Rolle 中值定理, 可得

$$\exists\xi\in(0,1), \text{使得}\quad F'(\xi)=f'(\xi)-3\xi^2f'(\xi^3)=0. \qquad \text{(2 分)}$$

即

$$\exists\xi\in(0,1), \text{使得}\quad \xi^{-2}f'(\xi)=3f'(\xi^3). \qquad \text{(1 分)}$$