# 第二章 一元函数微分学

### §2.1 导数与微分

一、可导性与连续性

例 设，问a和b为何值时，可导，且求。

二、导数与微分的运算法则和计算公式

三、切线和法线方程

例1 已知曲线的极坐标方程，求曲线上对应于处的切线与法线的直角坐标方程。

例2 设为周期是5的连续函数，在邻域内

恒有 

其中 ，在处可导，求曲线在点（）处的切线方程。

四、高阶导数

1.求二阶导数

例1、设，求。

例2 设由方程所确定，求

2.求*n*阶导数

1. 设，求 (*n*正整数)。
2. 设，求（n为正整数）。

〔注〕 有时求可以通过幂级数

的系数公式

反过来来计算，这就需要掌握把函数展成幂级数的有关技巧，数学一和数学三在无穷级数中有专门讨论。

### §2.2 微分中值定理

1. 罗尔定理

罗尔定理：设在上连续，内可导，且，则存在使。

在考研考题中，经常要作辅助函数，而对用罗尔定理，从而得出的有关结论，为此，我们引进两个模型及有关例题。

模型Ⅰ：设在上连续，内可导，且，是内的连续函数，则存在，使成立。

证 令，其中。

于是在上连续，在内可导，。根据罗尔定理，存在使

而 

，而

因此 

例1设在上连续，在内可导，，，试证：

1. 存在，使；
2. 存在，使 （为任意实数）。

模型Ⅱ 设，在上连续，内可导，且，则存在，使



例2 设在上连续，内可导，，k为正整数，求证存在，使得



3.例3 设在上连续，内可导，对任意k＞1，有，求证：存在，使



4. 例4 设在上连续，，求证：存在，，，使

1. 拉格朗日中值定理和柯西中值定理。
2. 拉格朗日中值定理：

设在上连续，内可导，则存在，使，即。

1. 柯西中值定理

设，在上皆连续，在内皆可导，且，则存在，

使 

* 1. 设在上连续，内可导，且,证明：存在使

1. 已知在上连续，在内可导，且，，证明

（Ⅰ）存在，使得

（Ⅱ）存在两个不同，，使得

在上面两个例子中，都是寻找的问题，但所用方法完全不同，

泰勒定理。

设在包含的区间内有n+1阶导数，在上有n阶连续导数，则对，存在在与之间，有公式





（称为拉格朗日余项形式的泰勒公式）

例 设在上具有三阶连续导数，且。

求证：使。

### §2.3 导数的应用

1. 不等式的证明

例1 求证：当时，。

例2 设，求证：

1. 极值与拐点
2. 设有二阶导数，满足。

求证：当时，为极小值

例2 设，则( )

（A）是的极值点，但不是曲线的拐点

（B）不是的极值点，但是曲线的拐点

（C）是的极值点，且是曲线的拐点

（D）不是的极值点，也不是曲线的拐点

例3 设的导数在处连续，又，则（ ）

（A）是的极小值点

（B）是的极大值点

（C）是曲线的拐点

（D）不是极值点，也不是曲线的拐点

上面用极值第一充分条件来判断，也可以用第二充分条件来判断。由 可知

根据在处连续，则

于是

根据极值第二充分条件则知为极大值。

故是的极大值点

1. 最大值和最小值的应用题
2. 数学一和数学二要考物理、力学方面内容。
3. 数学三要考经济方面内容，我们这里不再统一讨论。