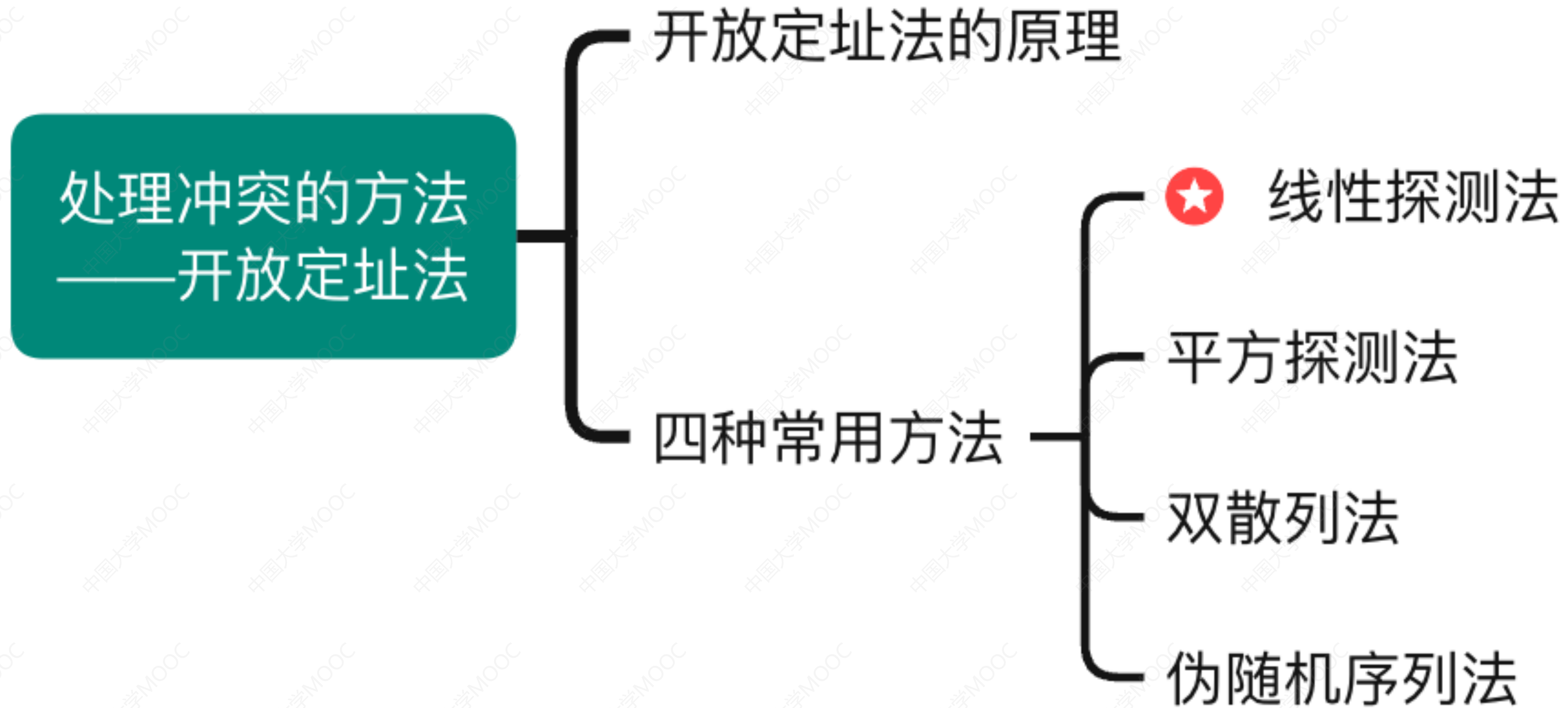


本节内容

处理冲突的 方法

——开放定址法

知识总览



如何处理“冲突”？——开放定址法



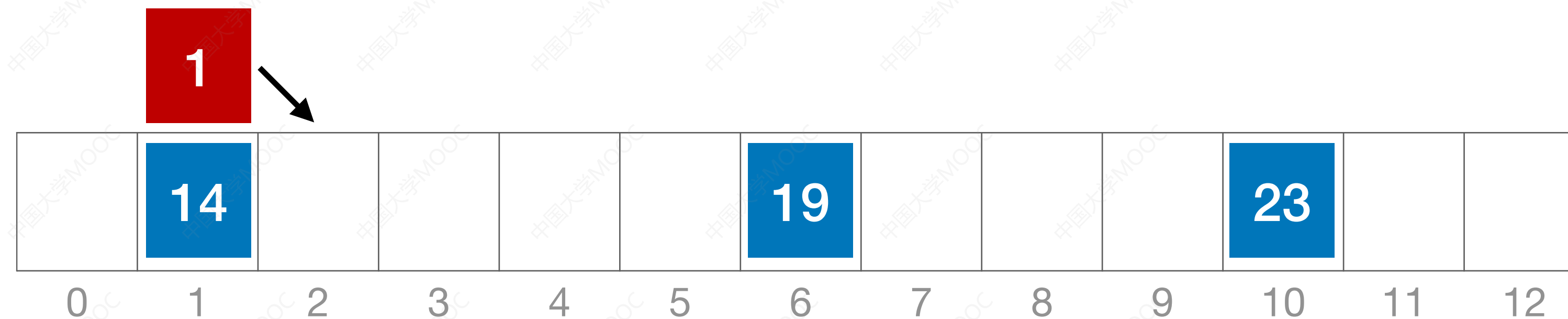
例：某散列表的长度为13，散列函数 $H(\text{key}) = \text{key} \% 13$ 。依次将数据元素 19、14、23、1 插入散列表：

$$19 \% 13 = 6$$

$$14 \% 13 = 1$$

$$23 \% 13 = 10$$

$$1 \% 13 = 1$$



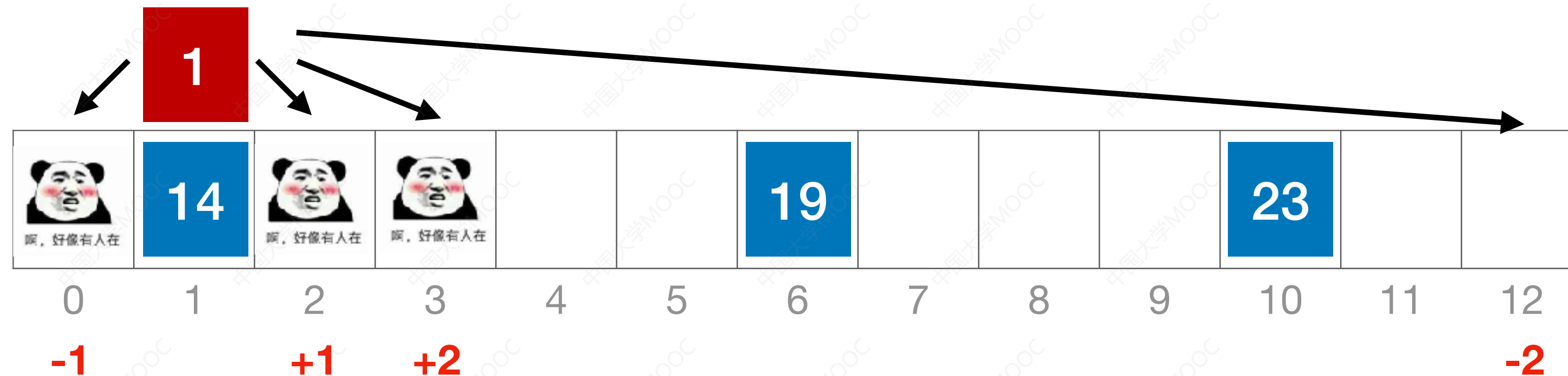
开放定址法：如果发生“冲突”，就给新元素找另一个空闲位置。

为什么叫“开放定址”？—— 一个散列地址，既对同义词开放，也对非同义词开放。

开放定址法的基本原理

开放定址法：如果发生“冲突”，就给新元素找另一个空闲位置。

$19\%13=6$
 $14\%13=1$
 $23\%13=10$
 $1\%13=1$



待解决的问题：用什么规则确定“另一个空闲位置”？

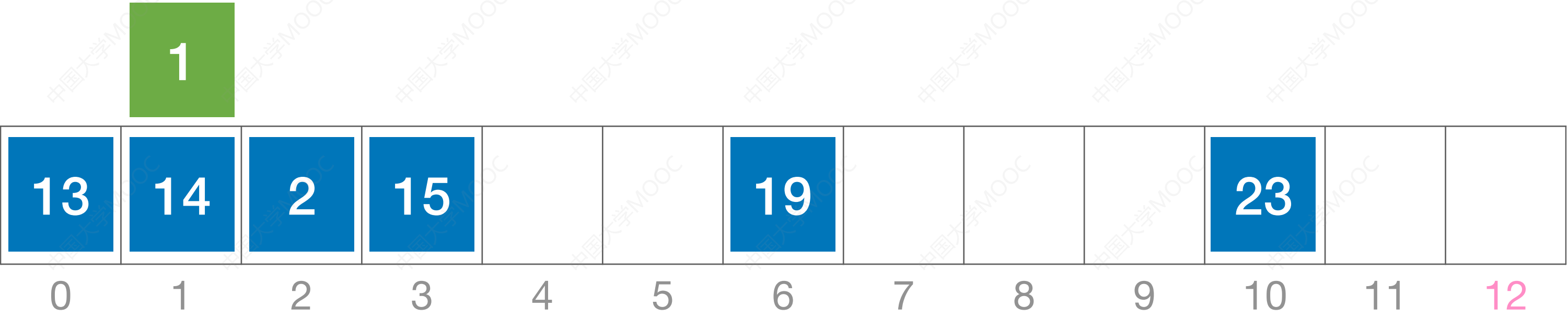
思路：需确定一个“探测的顺序”，从初始散列地址出发，去寻找下一个空闲位置。

eg: $d_0=0, d_1=1, d_2=-1, d_3=2, d_4=-2, \dots$

注： d_i 表示第 i 次发生冲突时，下一个探测地址与初始散列地址的相对偏移量。

开放定址法的基本原理

根据散列函数 $H(key)$ ，求得初始散列地址。若发生冲突，如何找到“另一个空闲位置”？



发生第 i 次冲突时的散列地址

散列表表长

$$H_i = (H(key) + d_i) \% m$$

初始散列地址

偏移量

四种常用方法构造探测序列 d_i

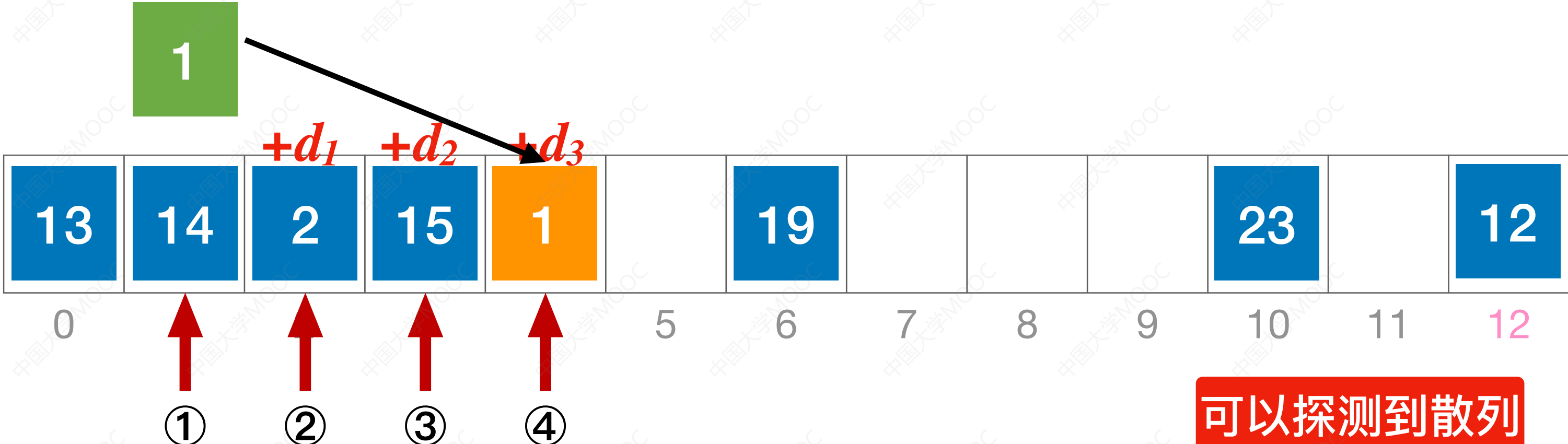
注： $0 \leq i \leq m-1$

探测序列/增量序列

- ★ 线性探测法 $d_i = 0, 1, 2, 3, \dots, m-1$
- 平方探测法 $d_i = 0^2, 1^2, -1^2, 2^2, -2^2, \dots, k^2, -k^2$ 。其中 $k \leq m/2$
- 双散列法 $d_i = i \times \text{hash}_2(key)$ 。其中 $\text{hash}_2(key)$ 是另一散列函数
- 伪随机序列法 d_i 是一个伪随机序列，如 $d_i = 0, 5, 3, 11, \dots$

线性探测法（插入、查找操作）

例：长度为13的散列表状态如下图所示，散列函数 $H(key)=key\%13$ ，采用线性探测法解决冲突。分析：插入元素1、查找元素1 的过程



可以探测到散列表的每个地址

发生第 i 次冲突时的散列地址

$$H_i = (H(key) + d_i) \% m$$

初始散列地址

偏移量

散列表表长

线性探测法， $d_i = 0, 1, 2, 3, \dots, m-1$

初始散列地址 $H_0 = 1 \% 13 = 1$ ，发生冲突(第1次)

$H_1 = (1 + 1) \% 13 = 2$ ，发生冲突(第2次)

$H_2 = (1 + 2) \% 13 = 3$ ，发生冲突(第3次)

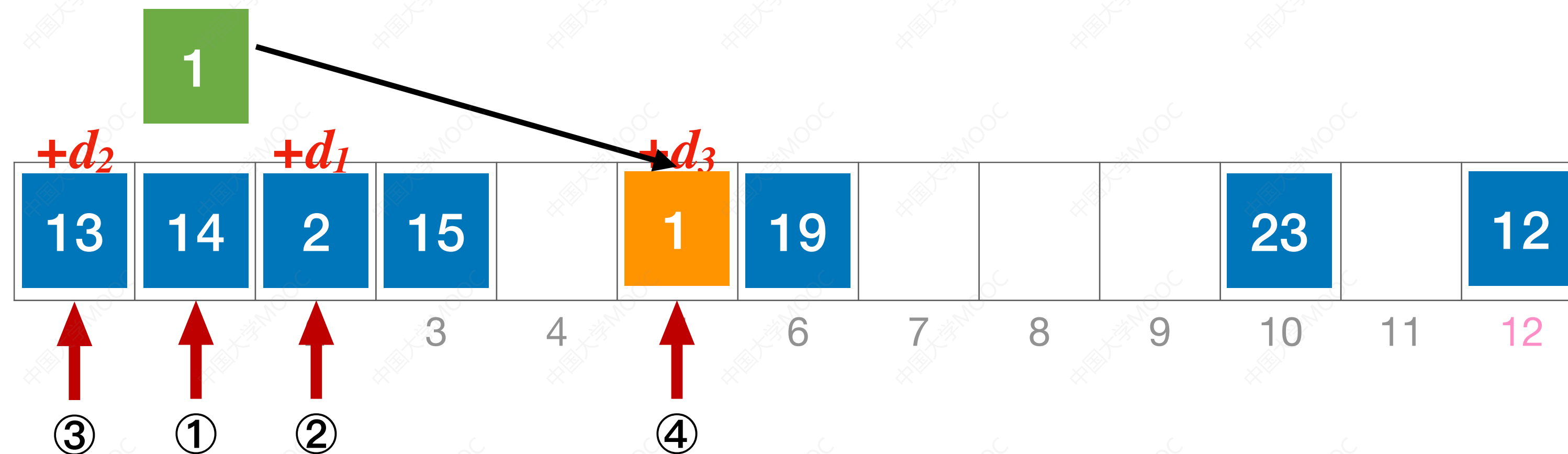
$H_3 = (1 + 3) \% 13 = 4$ ，未发生冲突，插入位置#4

注：查找操作原理类似，根据探测序列依次对比各存储单元内的关键字。
若探测到目标关键字，则查找成功。
若探测到空单元，则查找失败。

平方探测法（插入、查找操作）

又称“二次探测法”

例：长度为13的散列表状态如下图所示，散列函数 $H(key)=key\%13$ ，采用平方探测法解决冲突。分析：插入元素1、查找元素1 的过程



发生第 i 次冲突时的散列地址

$$H_i = (H(key) + d_i) \% m$$

初始散列地址

偏移量

散列表表长

平方探测法， $d_i = 0^2, 1^2, -1^2, 2^2, -2^2, \dots, k^2, -k^2$ 。
其中 $k \leq m/2$

初始散列地址 $H_0 = 1\%13 = 1$ ，发生冲突(第1次)

$H_1 = (1 + 1) \% 13 = 2$ ，发生冲突(第2次)

$H_2 = (1 + -1) \% 13 = 0$ ，发生冲突(第3次)

$H_3 = (1 + 4) \% 13 = 5$ ，未发生冲突，插入位置#5

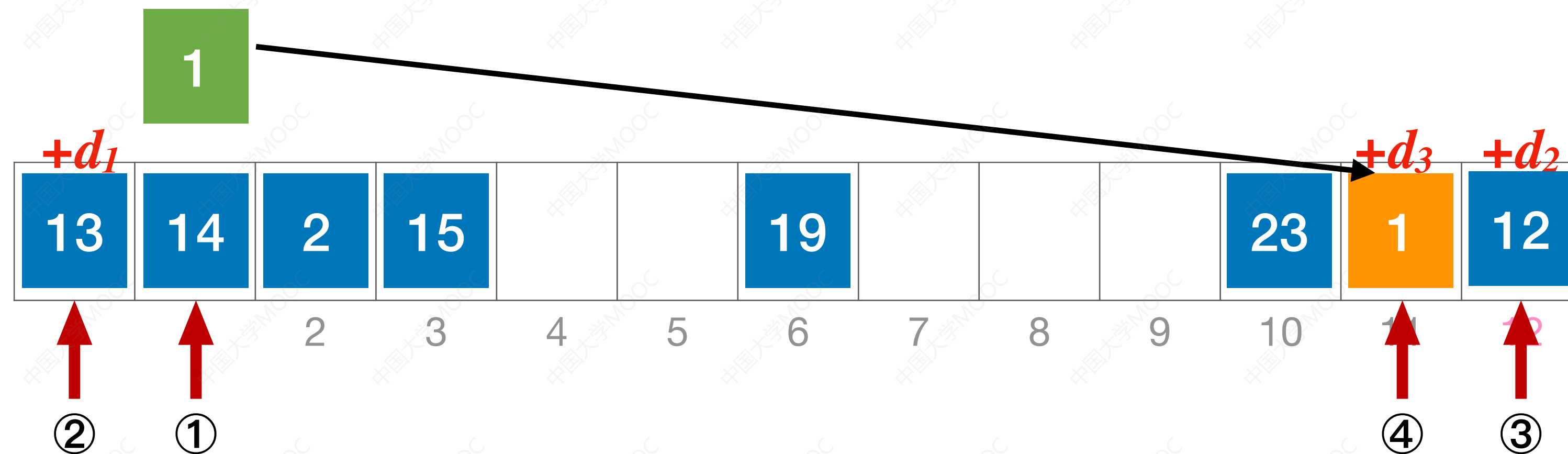
注：查找操作原理类似，根据探测序列依次对比各存储单元内的关键字。

若探测到目标关键字，则查找成功。

若探测到空单元，则查找失败。

双散列法（插入、查找操作）

例：长度为13的散列表状态如下图所示，散列函数 $H(key)=key\%13$ ，采用双散列法解决冲突，假设 $hash_2(key)=13-(key\%13)$ 。分析：插入元素1、查找元素1 的过程



发生第 i 次冲突时的散列地址

$$H_i = (H(key) + d_i) \% m$$

初始散列地址

偏移量

散列表表长

双散列法， $d_i = i \times hash_2(key)$

初始散列地址 $H_0 = 1\%13 = 1$ ，发生冲突(第1次)

由于 $key=1$ ， $hash_2(key) = 13 - (key\%13) = 12$

$H_1 = (1 + 1 \times 12) \% 13 = 0$ ，发生冲突(第2次)

$H_2 = (1 + 2 \times 12) \% 13 = 12$ ，发生冲突(第3次)

$H_3 = (1 + 3 \times 12) \% 13 = 11$ ，未发生冲突，插入位置#11

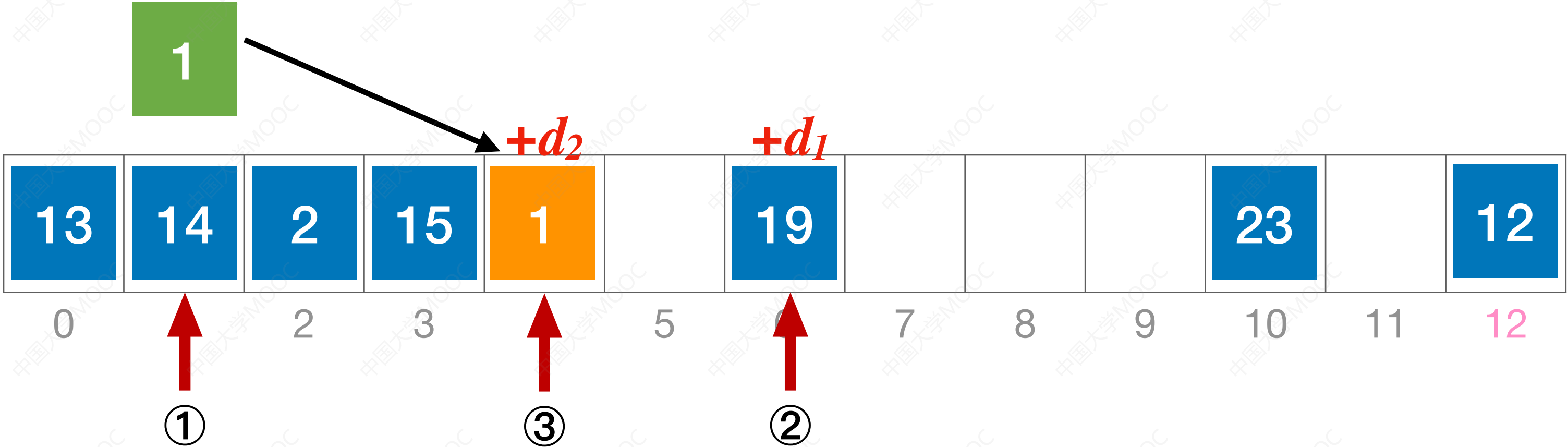
注：查找操作原理类似，根据探测序列依次对比各存储单元内的关键字。

若探测到目标关键字，则查找成功。

若探测到空单元，则查找失败。

伪随机序列法（插入、查找操作）

例：长度为13的散列表状态如下图所示，散列函数 $H(key)=key\%13$ ，采用伪随机序列法解决冲突，假设伪随机序列 $d_i=0, 5, 3, 11, \dots$ ，其中 d_i 表示第 i 次发生冲突时的增量。分析：插入元素1、查找元素1 的过程



发生第 i 次冲突时的散列地址

$$H_i = (H(key) + d_i) \% m$$

初始散列地址

偏移量

散列表表长

d_i 是一个伪随机序列，由题目可知 $d_i=0, 5, 3, 11, \dots$

初始散列地址 $H_0=1\%13=1$ ，发生冲突(第1次)

$H_1 = (1 + 5) \% 13 = 6$ ，发生冲突(第2次)

$H_2 = (1 + 3) \% 13 = 4$ ，未发生冲突，插入位置#4

注：查找操作原理类似，根据探测序列依次对比各存储单元内的关键字。
若探测到目标关键字，则查找成功。
若探测到空单元，则查找失败。

如何删除一个元素？

注：题目一定会说明具体是采用哪种探测序列（线性探测法、平方探测法、双散列法、伪随机序列法）

例：长度为13的散列表状态如下图所示，散列函数 $H(key)=key\%13$ ，采用开放定址法解决冲突。

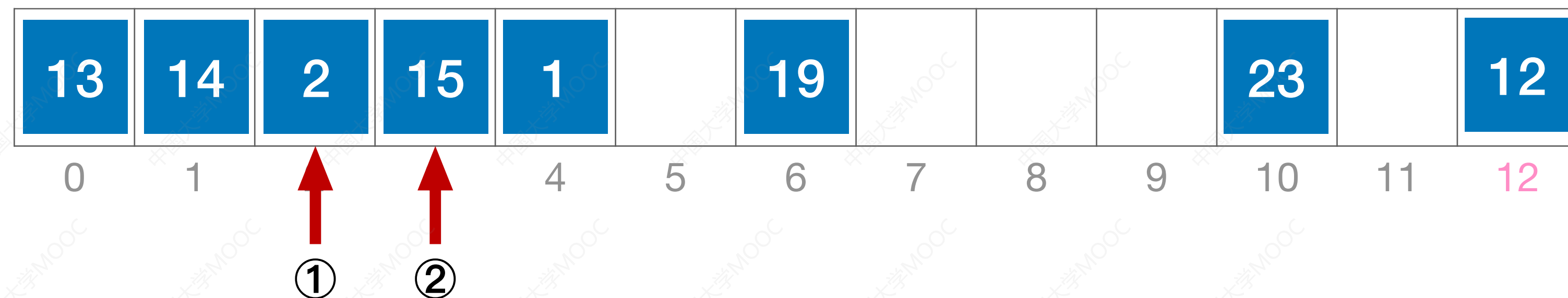
13	14	2	15	1		19				23		12
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

如何删除一个元素：

- Step 1: 先根据散列函数算出散列地址，并对比关键字是否匹配。若匹配，则“查找成功”
- Step 2: 若关键字不匹配，则根据“探测序列”对比下一个地址的关键字，直到“查找成功”或“查找失败”
- Step 3: 若“查找成功”，则删除找到的元素

特别注意：关于删除操作

例：长度为13的散列表状态如下图所示，散列函数 $H(key)=key\%13$ ，采用线性探测法解决冲突。



错误示范：删除元素15

- 计算元素15 的初始散列地址= $15\%13=2$ 。对比位置#2，关键字不等于15；
- 根据线性探测法的探测序列，继续对比位置#3，关键字等于15；
- 删除元素15，清空位置#3

特别注意：关于删除操作

例：长度为13的散列表状态如下图所示，散列函数 $H(key)=key\%13$ ，采用线性探测法解决冲突。



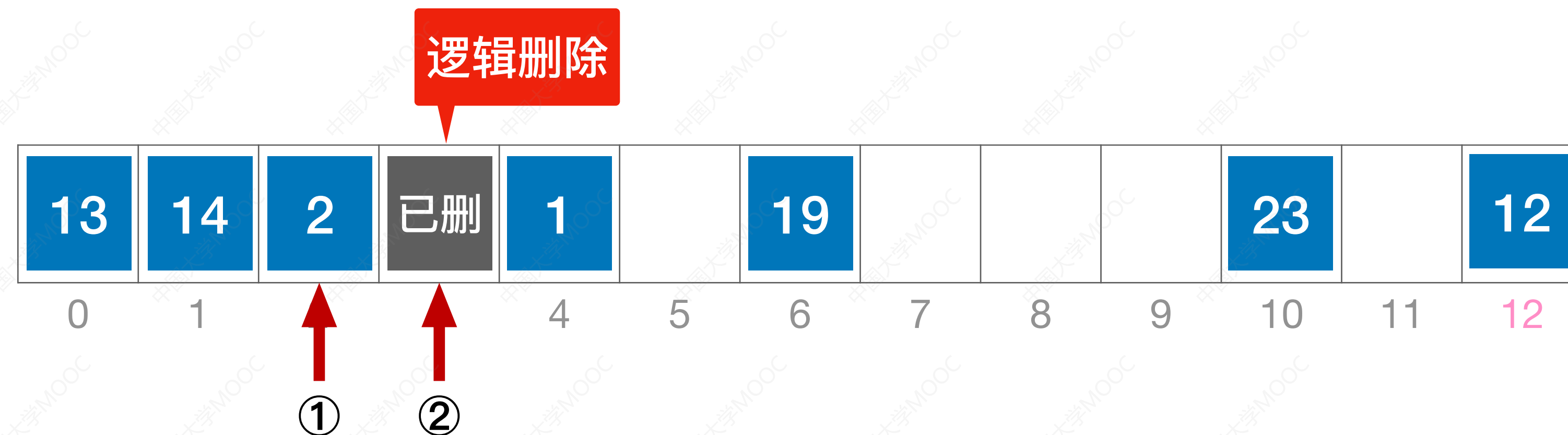
错误示范：查找元素1

- 计算元素1 的初始散列地址= $1\%13=1$ 。对比位置#1，关键字不等于1；
- 根据线性探测法的探测序列，继续对比位置#2，关键字不等于1；
- 根据线性探测法的探测序列，继续对比位置#3，探测到空单元，查找失败。



特别注意：关于删除操作

例：长度为13的散列表状态如下图所示，散列函数 $H(key)=key\%13$ ，采用线性探测法解决冲突。



正确示范：删除元素15

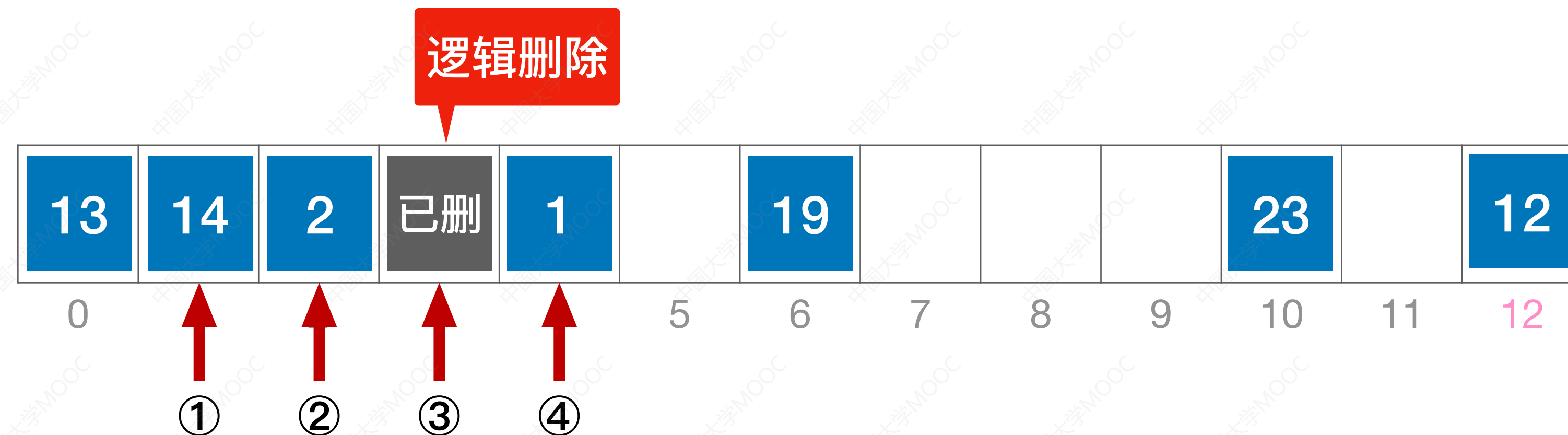
- 计算元素15 的初始散列地址= $15\%13=2$ 。对比位置#2，关键字不等于15；
- 根据线性探测法的探测序列，继续对比位置#3，关键字等于15；
- 逻辑删除元素15，将位置#3标记为“已删除”

注：无论线性探测法、平方探测法、双散列法、伪随机序列法原理都一样。删除元素时，只能逻辑删除

注意：采用“开放定址法”时，删除元素不能简单地将被删元素的空间置为空，否则将截断在它之后的探测路径，可以做一个“已删除”标记，进行逻辑删除。

特别注意：关于删除操作

例：长度为13的散列表状态如下图所示，散列函数 $H(key)=key\%13$ ，采用线性探测法解决冲突。



正确示范：查找元素1

- 计算元素1 的初始散列地址= $1\%13=1$ 。对比位置#1，关键字不等于1；
- 根据线性探测法的探测序列，继续对比位置#2，关键字不等于1；
- 根据线性探测法的探测序列，继续对比位置#3，该位置原关键字已删，继续探测后一个位置；
- 根据线性探测法的探测序列，继续对比位置#4，关键字等于1，查找成功。

特别注意：关于删除操作

注意：采用“开放定址法”时，删除元素不能简单地将被删元素的空间置为空，否则将截断在它之后的探测路径，可以做一个“已删除”标记，进行逻辑删除。

整理前

已删	已删	已删	已删	1		19				23		12
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

注：新元素也可以插入到已被“逻辑删除”的地址

带来的问题：查找效率低下，散列表看起来很满，实则很空。

Tips：可以不定期整理散列表内的数据。

整理后

	1					19				23		12
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12



知识回顾与重要考点

$$H_i = (H(\text{key}) + d_i) \% m$$

处理冲突的方法 ——开放定址法

基本原理

当初始散列地址发生冲突时，根据“探测序列” d_i 探测下一个地址

元素的操作

插入

根据散列函数算出初始散列地址，若发生冲突，就“探测”下一个地址，直到找到一个空闲地址，即可插入元素

查找

根据散列函数算出初始散列地址，对比关键字，若关键字不匹配，就“探测”下一个地址，直到关键字匹配(成功)或探测到一个空位置(失败)



删除

先按照“查找操作”的规则找到目标元素。若查找成功，就把目标元素“逻辑删除”。注意不能“物理删除”

四种常用的“探测序列”



线性探测法

$$d_i = 0, 1, 2, 3, \dots, m-1$$

平方探测法

$$d_i = 0^2, 1^2, -1^2, 2^2, -2^2, \dots, k^2, -k^2。其中 k \leq m/2$$

双散列法

$$d_i = i \times \text{hash}_2(\text{key})。其中 \text{hash}_2(\text{key}) 是另一散列函数$$

伪随机序列法

$$d_i \text{ 是一个伪随机序列，如 } d_i = 0, 5, 3, 11, \dots$$

拓展：线性探测法的“探测覆盖率”



线性探测法， $d_i = 0, 1, 2, 3, \dots, m-1$

发生第 i 次冲突时的散列地址

散列表表长

$$H_i = (H(\text{key}) + d_i) \% m$$

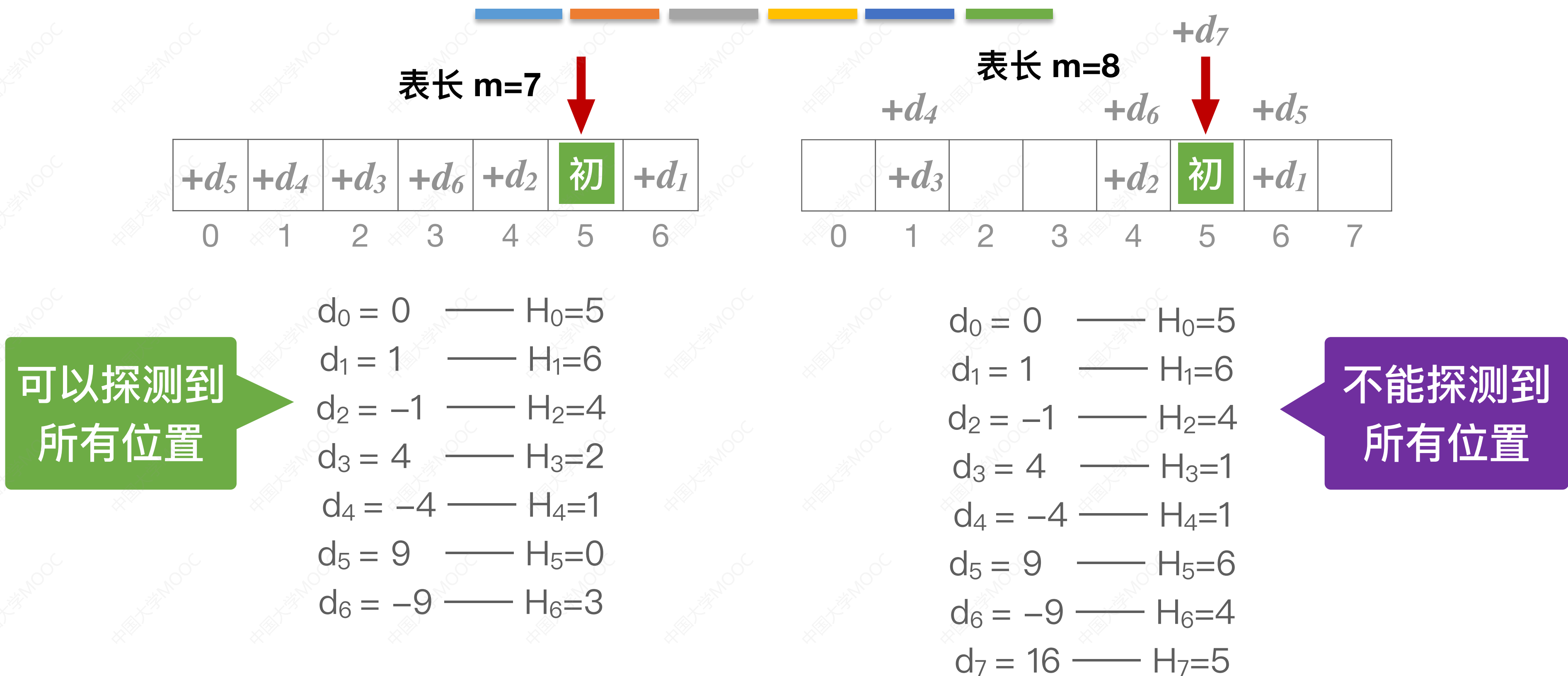
初始散列地址

偏移量

采用线性探测法，一定可以探测到散列表的每个位置
只要散列表中有空闲位置，就一定可以插入成功

理想情况下，若散列表表长= m ，则最多发生 $m-1$ 次冲突即可“探测”完整个散列表。

拓展：平方探测法的“探测覆盖率”

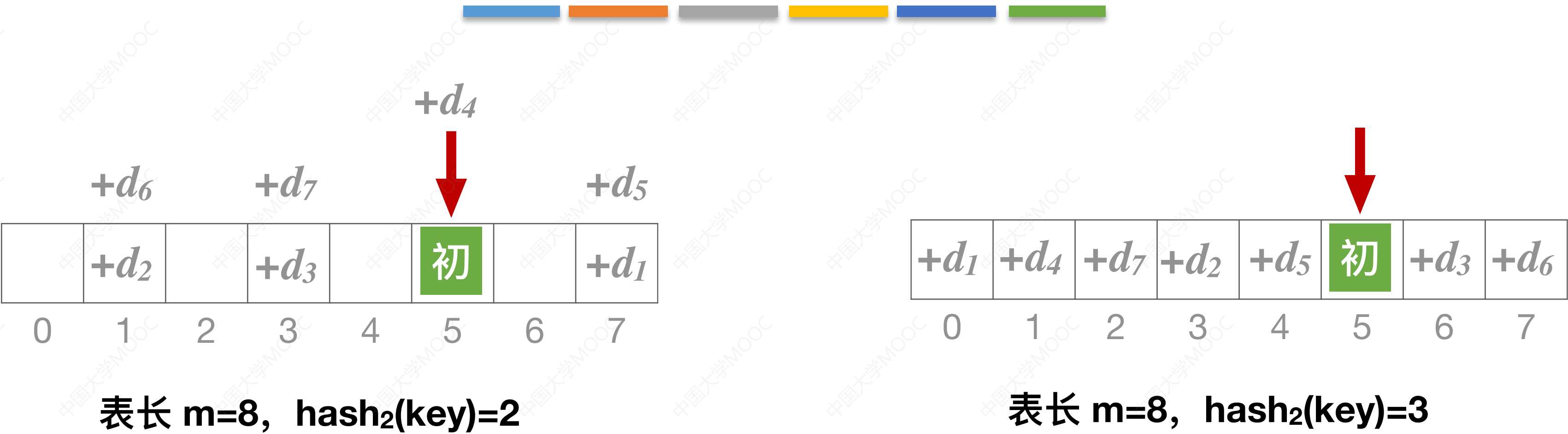


平方探测法， $d_i = 0^2, 1^2, -1^2, 2^2, -2^2, \dots, k^2, -k^2$ 。其中 $k \leq m/2$ ， $i \leq m-1$

采用平方探测法，至少可以探测到散列表中一半的位置
这意味着，即便散列表中有空闲位置，也未必能插入成功

若散列表长度 m 是一个可以表示成 $4j + 3$ 的素数(如 7、11、19)，平方探测法就能探测到所有位置

拓展：双散列法的“探测覆盖率”



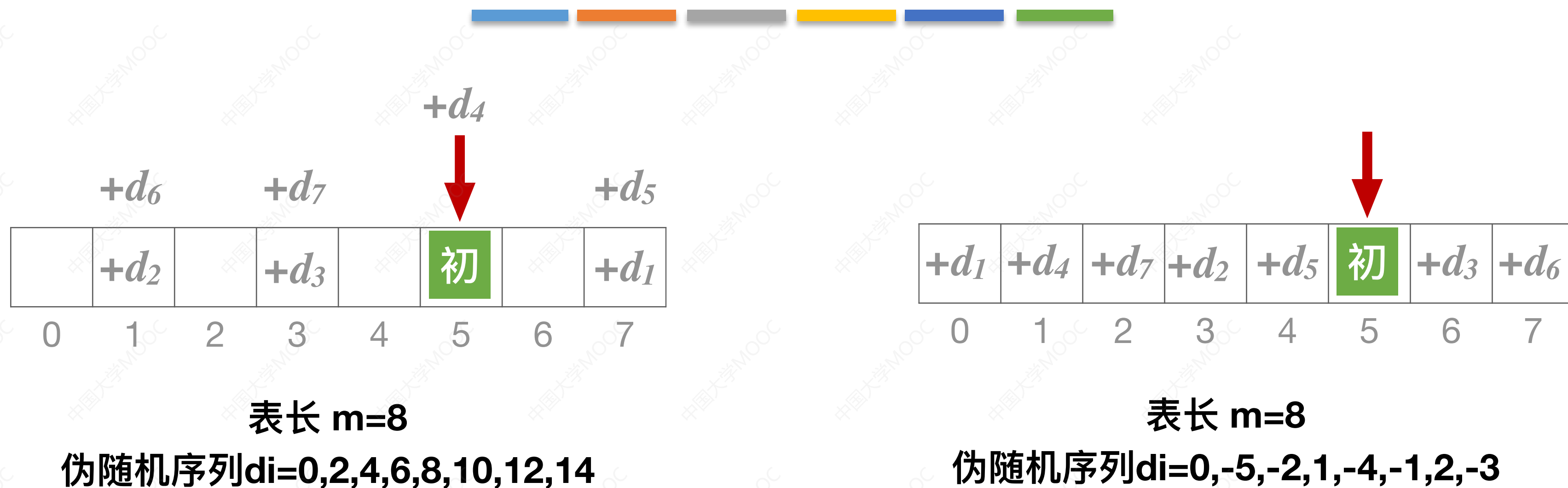
双散列法， $d_i = i \times \text{hash}_2(\text{key})$

双散列法未必能探测到散列表的所有位置。
双散列法的探测覆盖率取决于第二个散列函数 $\text{hash}_2(\text{key})$ 设计的是否合理。
若 $\text{hash}_2(\text{key})$ 计算得到的值与散列表表长 m 互质，就能保证双散列法可以探测所有单元

双散列法常用套路：令表长 m 本身就是质数， $\text{hash}_2(\text{key}) = m - (\text{key} \% m)$

无论 key 值是多少，
 $\text{hash}_2(\text{key})$ 和 m 一定互质

拓展：伪随机序列法的“探测覆盖率”



伪随机序列法： d_i 是一个伪随机序列，由程序员人为设计

采用伪随机序列法，是否能探测到散列表中全部位置，取决于伪随机序列的设计是否合理

拓展：四种探测序列的“探测覆盖率”

四种增量序列的“覆盖率”

- 线性探测法 —— 经过 $m-1$ 次冲突，一定能探测到散列表的所有单元
- 平方探测法 —— 一般来说，探测序列至少能覆盖到散列表的一半单元。若能保证表长 m 是一个可以表示成 $4X+3$ 的素数，则可以探测到散列表的所有单元
- 双散列法 —— 若能保证 $\text{hash2}(\text{key})$ 的值和表长 m 互质，则经过 $m-1$ 次冲突，一定能探测到散列表的所有单元
- 伪随机序列法 —— 只要伪随机序列设计合理，就能探测到全部单元