qda_linear_solver 模块文档

ℹ 我们基于 QPanda (C++) 实现了 3 个线性求解器函数

```
// 理想的绝热演化求解器
VectorXcd linear_solver_ideal(MatrixXcd A, VectorXcd b);
// 严格符合赛题诸多要求限制的求解器
VectorXcd linear_solver_contest(MatrixXcd A, VectorXcd b);
// 为精度做了各种优化的求解器
VectorXcd linear_solver_ours(MatrixXcd A, VectorXcd b);
```

ideal

`linear_solver_ideal` 实现了基于理想哈密顿模拟的绝热演化求解器，其中时间演化算子 e^{-iHt} 直接由数学计算得到，通过 `matrix_decompose()` 来获取对应的量子逻辑门线路实现。基本程序结构如下：

```
// 绝热演化参数
const int S = 200;     // 总演化阶段步数
const int T = 10;      // 单步哈密顿量模拟时间
// 制备系统初态 |b>
qcir << amplitude_encode(qv, amplitude);
// 制备含时哈密顿量 H_s
H_s = (1 - s) * H0 + s * H1
// 绝热演化
for (int s = 1; s <= S; s++) {
  // 含时哈密顿量近似为不含时
  MatrixXcd H = H_s(float(s) / S);
  // 时间演化算子的矩阵形式
  MatrixXcd iHt = dcomplex(0, -1) * H * T;
  MatrixXcd U_iHt = iHt.exp();
  // 矩阵形式转化为量子逻辑门线路
  qcir << matrix_decompose(U_iHt, qv);
}
// 概率测量读取振幅，解出 |x>
QProg qprog = createEmptyQProg() << qcir;
qvm.directlyRun(qprog);
```

contest

`linear_solver_contest` 实现了基于近似哈密顿模拟的绝热演化求解器，其中时间演化算子 e^{-iHt} 通过一阶近似为 $e^{-iHt} \approx I - iHt$，通过 BlockEncoding 技术获得其酉矩阵版本，再通过 `matrix_decompose()` 来获取对应的量子逻辑门线路实现。基本程序结构如下，与 `linear_solver_ideal` 的主要差别是 12 ~ 16 行的近似。

```
1  // 绝热演化参数
2  const int S = 200;     // 总演化阶段步数
3  const int T = 1;       // 单步哈密顿量模拟时间
4  // 制备系统初态 |b>
5  qcir << amplitude_encode(qv, amplitude);
6  // 制备含时哈密顿量 H_s
7  H_s = (1 - s) * H0 + s * H1
8  // 绝热演化
9  for (int s = 1; s <= S; s++) {
10   // 含时哈密顿量近似为不含时
11   MatrixXcd H = H_s(float(s) / S);
12   // 时间演化算子的一阶近似
13   MatrixXcd iHt = exp_iHt_approx(H, T);
14   // 谱范数规范化 & 进行块编码
15   iHt = normalize_QSVT(iHt);
16   MatrixXcd U_iHt = block_encoding_QSVT(iHt);
17   // 近似的时间演化算子转化为量子逻辑门线路
18   qcir << matrix_decompose(U_iHt, qv);
19 }
20 // 概率测量读取振幅，解出 |x>
21 QProg qprog = createEmptyQProg() << qcir;
22 qvm.directlyRun(qprog);
```

ours

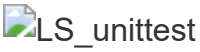
`linear_solver_ours` 基于 `linear_solver_contest` 迭代改造而成，引入了大量 trick 来提升结果的保真度，探索绝热演化线性求解器的能力上限，主要包含下列 trick：

- 更多的演化阶段步数 S，更长的物理演化时间 T (第 2 ~ 3 行)
- AQC(P) 调度函数 (第 7 行)
- e^{-iHt} 二阶近似 (第 13 行)
- 特征滤波 EF (第 20 ~ 24 行)

```
// 绝热演化参数
const int S = 300;     // 总演化阶段步数
const int T = 10;      // 单步哈密顿量模拟时间
// 制备系统初态 |b>
qcir << amplitude_encode(qv, amplitude);
// 制备含时哈密顿量 H_s，使用 AQC(P=2) 调度函数 f(s)
H_s = (1 - f(s)) * H0 + f(s) * H1
// 绝热演化
for (int s = 1; s <= S; s++) {
  // 含时哈密顿量近似为不含时
  MatrixXcd H = H_s(float(s) / S);
  // 时间演化算子的二阶近似
  MatrixXcd iHt = exp_iHt_approx(H, T, 2);
  // 谱范数规范化 & 进行块编码
  iHt = normalize_QSVT(iHt);
  MatrixXcd U_iHt = block_encoding_QSVT(iHt);
  // 近似的时间演化算子转化为量子逻辑门线路
  qcir << matrix_decompose(, U_iHt, qv);
}
// 制作特征滤波矩阵 & 进行块编码
MatrixXcd EF = EF_R_l(H1);
MatrixXcd U_EF = block_encoding_QSVT(EF);
// 特征滤波矩阵转化为量子逻辑门线路
qcir << matrix_decompose(U_EF, qv);
// 概率测量读取振幅，解出 |x>
QProg qprog = createEmptyQProg() << qcir;
qvm.directlyRun(qprog);
```

附录

基准单元测试运行结果参考（`T=1000`）：



case-study experiment

对比实验

在 playground/qda_linear_solver.py 和 playground/vis_eigen_filter_ls.py 中我们也实现了 Randomization Method, vanillan AQC, AQC(P), AQC(EXP) 和 Eigen Filter 作为对比参考。

解示例方程组：

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

implementation	solution	fidelity	comment
LS_ideal	[-0.722392, -0.691484]	0.999761	S=200, T=S*10
LS_contest	[-0.777313, 0.629114]	0.104793	S=200, T=S*1
LS_contest	[-0.882665, -0.470002]	0.95648	S=200, T=S*2
LS_contest	[-0.692988, -0.720949]	0.999805	S=200, T=S*4
LS_contest	[-0.683247, -0.730187]	0.999449	S=200, T=S*10
LS_contest	[-0.6704, -0.742]	0.998718	S=300, T=S*4
LS_ours	[-0.630297, -0.776354]	0.994653	S=200, T=S*2
LS_ours	[-0.709877, -0.704326]	0.999992	S=200, T=S*4
LS_ours	[-0.706603, -0.70761]	**0.999999**	S=400, T=S*2
vanilla AQC	[-0.7393, -0.6715]	0.997554	S=200, T=19799
AQC(p=1.001)	[-0.6839, -0.7295]	0.999437	S=200, T=1027
AQC(p=1.5)	[-0.7174, -0.6965]	0.999745	S=200, T=1027
AQC(p=2)	[-0.7002, -0.7139]	0.999960	S=200, T=1027
AQC(exp)	[-0.4929, -0.855]	0.953056	S=200, T=12959
QDA	[0.635718, 0.771922]	0.995351	S=5000
RM (algo 1)	[(0.5037+0.0351j), (0.4846+0.0373j), (0.4954-0.0359j), (0.5113-0.0258j)]	0.997524	S=310
RM (algo 2)	[0.509, 0.5133, 0.4881, 0.4885]	0.999385	S=310

i Note that target solution is [0.7071, 0.7071] for all AQC-based methods (up to a global phase), while [0.5, 0.5, 0.5, 0.5] for RM-based ones

对比实验: AQC 神话

implementation	solution	fidelity	comment
AQC(p=1.001)	[-0.6850, -0.7284]	0.999436	S=310, T=1027

implementation	solution	fidelity	comment
AQC(p=1.25)	[-0.7221, -0.6917]	0.999707	S=310, T=1027
AQC(p=1.5)	[-0.7162, -0.6976]	0.999745	S=310, T=1027
AQC(p=1.75)	[-0.7028, -0.7112]	0.999878	S=310, T=1027
AQC(p=2)	[-0.7007, -0.7135]	0.999959	S=310, T=1027
AQC(v-func)	[-0.7030, -0.7111]	0.999923	S=310, T=1027

消融实验

TODO: C++ 反复编译实在太烦人，再说吧……

i QSVT 与 ideal 精度持平，即使使用了 approx(-iHt) 近似；ARCSIN 比 QSVT 差在逐渐积累的浮点误差

◯ `f(s) = linear`

fidelity	solution	run config
0.116225	[-0.784498, 0.620131]	ideal; S=200, T=1
0.999883	[-0.696206, -0.717842]	ideal; S=200, T=10
0.999964	[-0.701095, -0.713068]	ideal; S=300, T=10
0.116241	[-0.784508, 0.620118]	QSVT; S=200, T=1
0.999527	[-0.685027 -0.728517]	QSVT; S=200, T=10
1.000000	[-0.707475, -0.706739]	QSVT; S=300, T=10
0.999998	[-0.708495, -0.705716]	QSVT; S=2000, T=1
0.640244	[0.9959, -0.090459]	ARCSIN; S=200, T=1
0.873111	[0.962113, 0.272652]	ARCSIN; S=200, T=1, norm(lmbd*iHt)
0.321988	[0.897129, -0.441769]	ARCSIN; S=2000, T=1

◯ `f(s) = poly(2)`

fidelity	solution	run config
0.856842	[-0.970448, -0.241309]	QSVT; S=200, T=1
0.999872	[-0.718318, -0.695715]	QSVT; S=200, T=10
0.999988	[-0.71061, -0.703587]	QSVT; S=300, T=10
1.000000	[-0.70689, -0.707324]	QSVT; S=2000, T=1
0.828373	[0.981853, 0.189643]	ARCSIN; S=200, T=1
0.489276	[0.962659 -0.270718]	ARCSIN; S=200, T=1, norm(iHt)
0.983201	[0.824295, 0.56616]	ARCSIN; S=200, T=1, norm(lmbd*iHt)
0.998871	[0.672715, 0.739901]	ARCSIN; S=2000, T=1
0.917811	[0.929724, 0.368257]	ARCSIN; S=2000, T=1, norm(lmbd*iHt)

by Armit
2024/5/30