Função Racional

Prof.^{o} Ricardo Reis
Universidade Federal do Ceará
Campus de Quixadá

31 de março de 2014

1 Definição

Uma função racional é definida como,

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \tag{1}$$

onde $P(x)$ e $Q(x)$ são polinômios e $Q(x) \neq 0$.

Ilustração 1 A função $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x - 11}{2x^2 - 21x + 1}$ é racional?

Solução

Sim, pois $x^3 - 2x - 11$ e $2x^2 - 21x + 1$ são polinômios.

Ilustração 2 A função $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{\sqrt{x-3}}$ é racional?

Solução

Não, pois $\sqrt{x-3}$ não é um polinômio.

2 Domínio

O domínio de uma função racional é o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais excetuando-se as raízes do polinômio-denominador - $Q(x)$ da equação-(1). De fato não podem existir *números racionais* [1] com denominador nulo.

Ilustração 3 Determinar o domínio da função $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$.

Solução

Calculando-se as raízes do polinômio-denominador $Q(x) = x^2 - 1$ obtemos,

$$\begin{aligned} Q(x) = x^2 - 1 &= 0 \\ x^2 &= 1 \\ x &= \{-1, 1\} \end{aligned}$$

logo o domínio de f é dado por $D(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

Ilustração 4 Determine o domínio da função $f(x) = \dfrac{5}{x^3 + 1}$.

Solução

Determinando as raízes do polinômio denominador obtemos,

$$\begin{aligned} Q(x) = x^3 + 1 &= 0 \\ x^3 &= -1 \\ x &= -1 \\ D(f) &= \mathbb{R} - \{-1\} \end{aligned}$$

Ilustração 5 Determine o domínio da função $f(x) = \dfrac{x - 3}{x^2 + 1}$.

Solução

Determinando as raízes do polinômio denominador obtemos,

$$\begin{aligned} Q(x) = x^2 + 1 &= 0 \\ x^2 &= -1 \\ x &= \varnothing \\ D(f) &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

[1] números reais que podem ser representados na forma de uma fração $\frac{a}{b}$ onde $a, b \in \mathbb{Z}$

3 Raízes

O conjunto das raízes da função racional, equação-(1), é formado pelas raízes do polinômio-numerador $P(x)$ excetuando-se, se for o caso, as raízes do polinômio-denominador $Q(x)$. Em outras palavras o numerador determina os candidatos a raízes da função e o denominador informa quais destes candidatos pertencem ao domínio da função.

Ilustração 6 Determinar as raízes da função $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$.

Solução

O conjunto de raízes do numerador e denominador são $\{1\}$ e $\{-1\}$. Como estes conjuntos são disjuntos (sem elementos em comum) então o conjunto de raízes da f é o conjunto das raízes do numerador, ou seja, $x \in \{1\}$

Ilustração 7 Determinar as raízes da função $f(x) = \dfrac{x^2 - 8x + 7}{x^2 - 9x + 14}$

Solução

As raízes dos polinômios numerador e denominador são,

$$\begin{aligned}
P(x) &= x^2 - 8x + 7 = 0 \\
\Delta &= (-8)^2 - 4(1)(7) = 36 \\
x &= \frac{(8) \pm \sqrt{36}}{2(1)} \\
x &= \{1, 7\} \\
Q(x) &= x^2 - 9x + 14 = 0 \\
\Delta &= (-9)^2 - 4(1)(14) = 25 \\
x &= \frac{(9) \pm \sqrt{25}}{2(1)} \\
x &= \{2, 7\}
\end{aligned}$$

Os candidatos a raízes de f são $\{1, 7\}$. Entretanto $7 \notin D(f)$ pois é raiz do denominador também. Logo a função f só possui como raiz o 1, ou seja, $x \in \{1\}$.

Ilustração 8 Determinar as raízes da função $f(x) = \dfrac{x^2 + 9}{x - 1}$

Solução

O numerador de f é uma função de segundo grau cujo Δ vale -36 e logo não possui raízes. Assim f também não possui raízes.

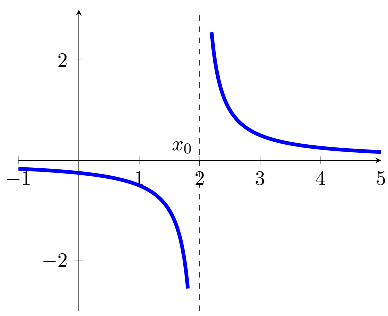
Ilustração 9 Determinar as raízes da função $f(x) = \dfrac{(x-1)(x-5)(x+2)}{(x-8)(x+2)}$.

Solução

O polinômio do numerador está em forma fatorada de onde extrai-se facilmente o conjunto de raízes, $\{-2, 1, 5\}$ (candidatos a raízes). De forma similar as raízes do denominador são $\{-2, 8\}$. O único candidato excluído é -2 e assim o conjunto de raízes de f fica $x \in \{1, 5\}$.

4 Assíntotas Verticais

Se x_0 é uma raiz do polinômio-denominador $Q(x)$, equação-(1), mas não é uma raiz do polinômio-numerador $P(x)$ ($x_0 \notin D(f)$) então isso se manifestará no gráfico da função através de uma descontinuidade no domínio com aspecto como ilustrado a seguir,



onde as duas linhas curvas e contínuas representam a função racional nas proximidades de x_0. A linha vertical tracejada, chamada de *assíntota vertical* da função f passa por x_0 e *não* cruza f. À proporção que os valores de domínio de f se aproximam do valor x_0, sejam através de valores maiores ou menores que x_0, a curva da função se aproxima da assíntota e consequentemente os valores de imagem aumentam rapidamente em módulo. Isso é facilmente observado na tabela-1 onde valores entre -1 e 1 são operados para $f(x) = 1/x$ e demonstram valores elevados em módulo nas proximidades de 0 (raiz do polinômio-denominador).

Mais de uma assíntota vertical poderá estar presente em uma função racional. Para toda raiz x_0 do polinômio-denominador que não seja raiz do polinômio-numerador existirá uma assíntota vertical em x_0. Por exemplo, a função $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 16}$ possui duas assíntotas verticais como ilustra seu gráfico,

Tabela 1: Valores de domínio e imagem da função $f(x) = \dfrac{1}{x}$ no intervalo $x \in \{-1, 1\}$

x	y
-1.0000000000	-1.0
-0.1000000000	-10.0
-0.0100000000	-100.0
-0.0010000000	-1000.0
-0.0001000000	-10000.0
-0.0000100000	-100000.0
-0.0000010000	-1000000.0
-0.0000001000	-10000000.0
-0.0000000100	-100000000.0
-0.0000000010	-1000000000.0
-0.0000000001	-10000000000.0
0.0000000001	10000000000.0
0.0000000010	1000000000.0
0.0000000100	100000000.0
0.0000001000	10000000.0
0.0000010000	1000000.0
0.0000100000	100000.0
0.0001000000	10000.0
0.0010000000	1000.0
0.0100000000	100.0
0.1000000000	10.0
1.0000000000	1.0

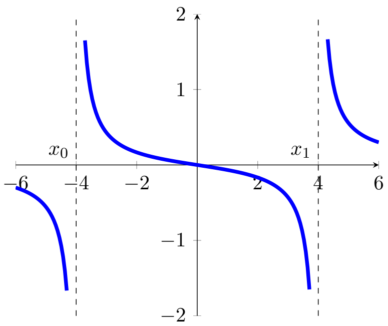


ILUSTRAÇÃO 10 Determinar assíntotas verticais da função racional $f(x) = \dfrac{x^2 - 13x + 22}{(x^2 - 14x + 44)(5 - x)}$.

SOLUÇÃO

A fatoração de $f(x)$ revela que,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2 - 13x + 22}{(x^2 - 14x + 44)(5 - x)} \\ &= \frac{(x-2)(x-11)}{(x-3)(x-11)(5-x)} \end{aligned}$$

Logo as raízes do polinômio-denominador que não são raízes do polinômio-numerador são $\{3, 5\}$ e logo existem duas assíntotas verticais em $f(x)$: $x = 3$ e $x = 5$.

Se entretanto um valor x_0 é raiz de ambos polinômios numerador e denominador isso se manifesta no gráfico como um *buraco*. Por exemplo, na função $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ ambos polinômios são divisíveis por $x - 1$ e logo $x = 1$ é raiz de ambos. De fato a divisão de $x^2 - 1$ por $x - 1$ é exata e revela quociente $x + 1$, ou seja, $f(x)$ é uma reta com buraco em $x = 1$. Veja o gráfico,

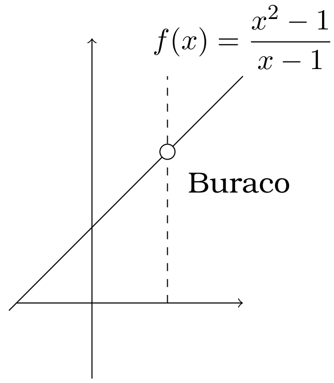


ILUSTRAÇÃO 11 Esboçar gráfico da função $f(x) = \dfrac{x^2 - 8x + 15}{x - 3}$.

SOLUÇÃO

Nesta função existe uma descontinuidade do domínio em $x = 3$ por se tratar da raiz do polinômio-denominador. Fatorando e simplificando a fração funcional obtemos,

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 8x + 15}{x - 3} &= \frac{(x-5)(x-3)}{(x-3)} \\ &= x - 5 \end{aligned}$$

Como é exata a divisão então o gráfico de f é a reta $x - 5$ com buraco em $x = 3$. O gráfico deste exemplo é,

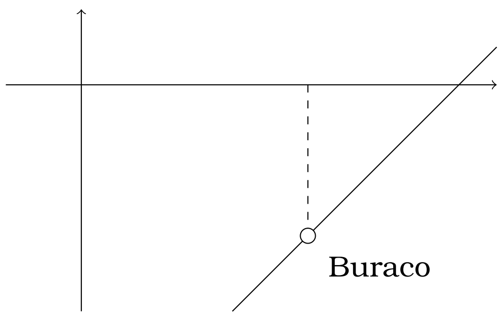


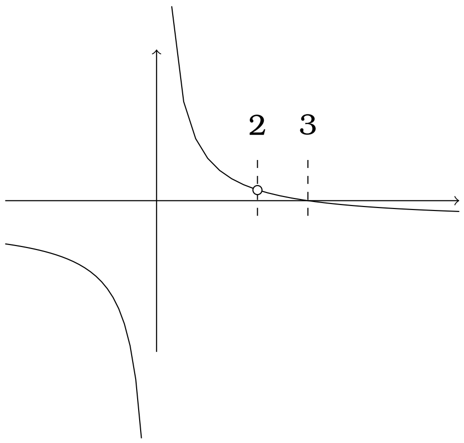
ILUSTRAÇÃO 12 Esboçar gráfico da função $f(x) = \dfrac{(2-x)(x-3)}{(2x^2 - 4x)}$.

SOLUÇÃO

A fatoração de $f(x)$ revela que,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(2-x)(x-3)}{(2x^2 - 4x)} \\ &= \frac{(2-x)(x-3)}{(-2x)(2-x)} \end{aligned}$$

Desta simplificação tem-se que as raízes do numerador são $\{2, 3\}$ e do denominador são $\{0, 2\}$. Logo em $x = 2$ existe um buraco, em $x = 0$ existe uma assíntota vertical e $x = 3$ é uma raiz da função. Um esboço do gráfico de f é,



5 Estudo de sinal

Para fazer o estudo de sinal de uma função racional deve-se fatorar numerador e denominador, em seguida fazer o estudo de sinal individual de todos os fatores obtidos e por fim *cruzar* os sinais destes resultados. Este processo naturalmente descarta raízes do polinômio-denominador haja vista não pertencerem ao domínio.

ILUSTRAÇÃO 13 Fazer o estudo de sinal da função $f(x) = \dfrac{x^2 - 16}{2 - x}$.

SOLUÇÃO

O numerador de f é um polinômio de segundo grau e o denominador um de primeiro grau. Efetuando os estudos de sinais destas partes, alinhando-os verticalmente e cruzando os sinais obtidos, obtemos um esquema como o seguinte,

		-4		2		4	
$x^2 - 16$	$+$		$- - - - - -$		$-$		$+$
$2 - x$	$+$		$+ + + + +$		$-$		$-$
$f(x)$	$+$		$- - - - -$	o	$+$		$-$

onde as duas primeiras linhas indicam respectivamente os estudos de sinais do numerador e denominador de f ao passo que a terceira linha indica o cruzamento de sinais [2]. O buraco na terceira linha indica que $2 \notin D(f)$. Utilizando esta figura podemos escrever o estudo de sinal da imagem de f como segue,

$$
\begin{aligned}
x < -4 \ \cup \ 2 < x < 4 &\Rightarrow y > 0 \\
-4 < x < 2 \ \cup \ x > 4 &\Rightarrow y < 0 \\
x \in \{-4, 4\} &\Rightarrow y = 0
\end{aligned}
$$

ILUSTRAÇÃO 14 Fazer o estudo de sinal da função $f(x) = \dfrac{(x-7)(9-x^2)}{x^2 - 8x + 15}$.

SOLUÇÃO

O polinômio-denominador de f possui raízes $\{3, 5\}$ e logo o domínio desta função é $D(f) = \mathbb{R} - \{3, 5\}$. As raízes do polinômio-numerador são $\{-3, 3, 7\}$, mas como 3 não pertence ao domínio então as raízes de f são apenas $\{-3, 7\}$. Estudando o sinal dos três fatores que compõem f, obtemos o seguinte esquema,

		-3		3		5		7	
$x - 7$	$-$		$- - - - -$		$-$		$-$		$+$
$9 - x^2$	$-$		$+ + + + +$		$-$		$-$		$-$
$x^2 - 8x + 15$	$+$		$+ + + + +$		$-$		$+$		$+$
$f(x)$	$+$		$- - - - -$	o	$-$	o	$+$		$-$

Do qual extraímos o estudo de sinal de f a seguir,

$$
\begin{aligned}
x < -3 \ \cup \ 5 < x < 7 &\Rightarrow y > 0 \\
-3 < x < 3 \ \cup \ 3 < x < 5 \ \cup \ x > 7 &\Rightarrow y < 0 \\
x \in \{-3, 7\} &\Rightarrow y = 0
\end{aligned}
$$

[2] O cruzamento ou jogo de sinais segue a lógica da tabela,

		Cruzamento
$+$	$+$	$+$
$+$	$-$	$-$
$-$	$+$	$-$
$-$	$-$	$+$

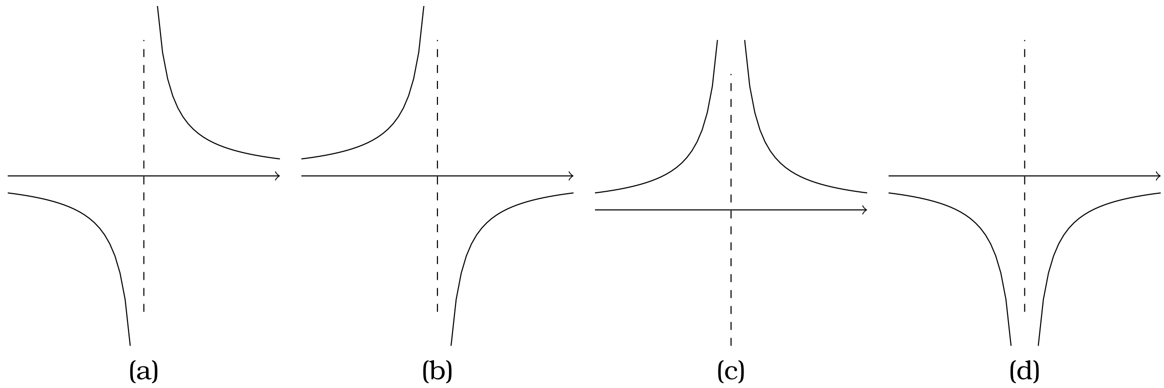


Figura 1: Padrões de comportamento de sinal de uma função racional nas proximidades de uma assíntota.

6 Esboço de Gráfico

Nas proximidades de uma assíntota vertical (x_0) em uma função racional f quatro padrões de comportamento de sinal de imagem podem ocorrer como ilustrado na Figura-1.

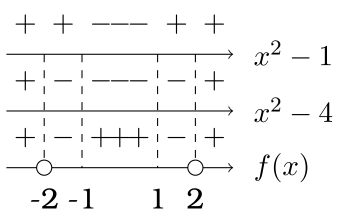
Na forma-(a) o sinal da imagem tende a valores negativos (de módulo grande) quando os valores de domínio se aproximam de x_0 pela esquerda ($x < x_0$) e para valores positivos quando os valores de domínio se aproximam de x_0 pela direita ($x > x_0$). Na forma-(b) ocorre o inverso. Na forma-(c) o sinal da imagem nas proximidades de x_0 tende a valores *sempre* positivos e na forma-(d) *sempre* negativos.

Estes valores de sinais podem ser determinados por um estudo de sinal ajudando evidentemente na construção do esboço da função.

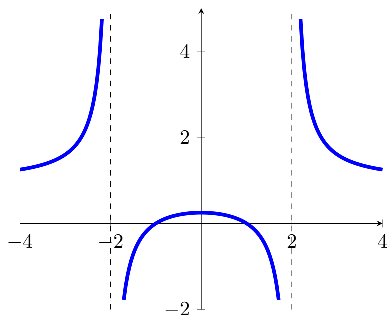
Ilustração 15 Construir um esboço do gráfico da função $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$.

Solução

As raízes dos polinômios numerador e denominador são respectivamente $\{-1, 1\}$ e $\{-2, 2\}$. Como estes conjuntos de números são disjuntos então f tem raízes $\{-1, 1\}$ e domínio $D(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$. Logo existem duas assíntotas verticais, uma em $x = -2$ e outra em $x = 2$. O estudo de sinal de f é,



Este estudo de sinal demonstra que à esquerda de -2 o sinal da imagem tende a positivo e à direita tende a negativo, ou seja, forma-(b), Figura-1. Já à esquerda de 2 o sinal da imagem tende a valores negativos e a direita à valores positivos, ou seja, forma-(a). Seguindo estes comportamentos traçamos o esboço,



7 Outras Assíntotas

Além das assíntotas verticais podem estar presentes *assíntotas horizontais* e *assíntotas inclinadas*. Representam ainda naturalmente retas não tocadas pela função mas cuja identificação difere do processo anterior.

Seja $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ uma função racional, m o grau do polinômio-numerador e n o grau do polinômio-denominador. Então,

1. Se $m < n$ então o eixo x será uma assíntota horizontal de f.

2. Se $m = n$ então f possuirá uma assíntota horizontal na forma,

$$y = \frac{a_m}{b_n}$$

onde a_m é o coeficiente do monômio de grau m em $P(x)$ e b_n o coeficiente do monômio de grau n em $Q(x)$.

3. Sejam $C(x)$ e $R(x)$ respectivamente os polinômios quociente e resto da divisão de $P(x)$ por $Q(x)$. Quando $m - n = 1$ então se $R(x)$ é não nulo, $C(x)$ representa uma assíntota inclinada de $f(x)$.

Ilustração 16 Identificar assíntotas da função $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$, se existir,

Solução

Como o grau do numerador é zero e do denominador é um, então o eixo x representa uma assíntota horizontal de f. E ainda como $x = 1$ é uma raiz do polinômio-denominador, mas não é do numerador, então $x = 1$ representa uma assíntota vertical de f. Eis um esboço de f,

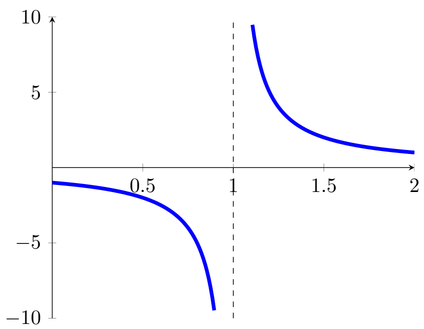


Ilustração 17 Determine assíntotas verticais e horizontais da função $f(x) = \dfrac{4x^2+1}{x^2-1}$,

Solução

As raízes do polinômio denominador são $\{-1, +1\}$ que por sua vez não são raízes do polinômio numerador e logo representam as assíntotas verticais $x = -1$ e $x = 1$. E ainda como os polinômios numerador e denominador possuem mesmo grau (2) e seus coeficientes dos monômios de parte literal x^2 são respectivamente 4 e 1 então $y = \frac{4}{1} = 4$ representa uma assíntota horizontal. O gráfico de f a seguir ilustra as três assíntotas,

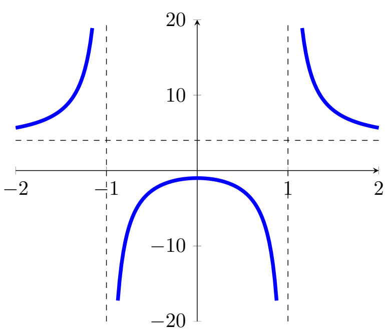


Ilustração 18 Determinar assíntotas da função $f(x) = \dfrac{x^2-3}{x-1}$.

Solução

$x = 1$ é raiz do polinômio denominador, mas não é raiz do polinômio numerador representando logo uma assíntota vertical. Como o grau do polinômio numerador (2) é uma unidade a mais que o do denominador (1) efetuamos a razão de polinômios obtendo,

$$\begin{array}{r|l} x^2 - 3 & x-1 \\ \cline{2-2} -x^2 + x & x+1 \\ \cline{1-1} x - 3 & \\ -x + 1 & \\ \cline{1-1} -2 & \end{array}$$

Logo $C(x) = x + 1$ e $R(x) = -2$. Como $R(x) \neq 0$ então $C(x)$ representa uma assíntota inclinada de $f(x)$. O gráfico de $f(x)$ a seguir ilustra as duas assíntotas encontradas,

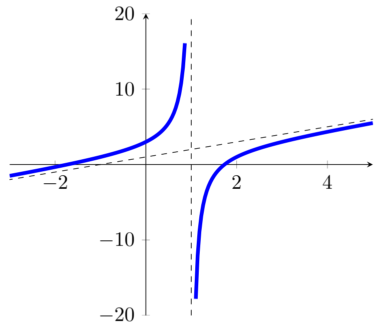


Ilustração 19 Determine assíntotas da função $f(x) = \dfrac{x^3+4x^2-11x-30}{x^2+5x+4}$

Solução

O polinômio denominador é de segundo grau e suas raízes são dadas por,

$$\begin{aligned} \Delta &= 5^2 - 4(1)(4) = 25 - 16 = 9 \\ x &= \frac{-(5) \pm \sqrt{9}}{2(1)} \\ &= \{-4 \ -1\} \end{aligned}$$

Substituindo estes valores no numerador de f obtemos,

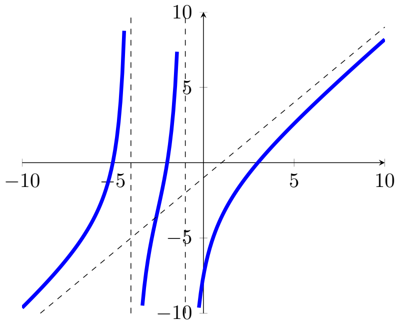
$$\begin{aligned} (-4)^3 + 4(-4)^2 - 11(-4) - 30 &= 14 \\ (-1)^3 + 4(-1)^2 - 11(-1) - 30 &= -16 \end{aligned}$$

Logo não são raízes representando assim assíntotas verticais.

Notemos ainda que o grau do polinômio numerador excede o do polinômio denominador em uma unidade. Para então determinar uma possível assíntota inclinada fazemos a divisão do polinômio numerador pelo denominador,

$$\begin{array}{r|l}
x^3+4x^2-11x-30 & x^2+5x+4 \\ \cline{2-2}
-x^3-5x^2-4x & x-1 \\ \cline{1-1}
-x^2-15x-30 & \\
+x^2+5x+4 & \\ \cline{1-1}
-10x-26 &
\end{array}$$

Logo $C(x) = x - 1$ e $R(x) = -10x + 26$. Como $R(x) \neq 0$ então $C(x)$ representa uma assíntota inclinada de $f(x)$. O gráfico de $f(x)$ a seguir ilustra as três assíntotas encontradas,



8 Exercícios

Efetue as seguintes divisões de polinômio a seguir,

1. $\dfrac{x^2 - 15x + 56}{x - 7}$

2. $\dfrac{-x^2 + 5x - 6}{-x + 2}$

3. $\dfrac{x^3 + 8x^2 - 28x + 55}{x + 11}$

4. $\dfrac{-x^3 + 9x^2 - 23x + 18}{x - 2}$

5. $\dfrac{x^3 - 9x^2 + 26x - 30}{x^2 - 4x + 6}$

6. $\dfrac{x^3 - 6x^2 - 28x + 147}{-x^2 - x + 21}$

7. $\dfrac{x^4 + 6x^3 - 16x^2}{x + 8}$

8. $\dfrac{x^4 - 2x^3 - 7x^2 - 80x - 65}{x^2 - 5x - 5}$

9. $\dfrac{x^4 - 4x^2 + 12x - 9}{x^2 - 2x + 3}$

10. $\dfrac{x^4 - 4x^3 - 74x^2 + 23x + 14}{x^3 - 11x^2 + 3x + 2}$

Determinar os valores de a, nos casos a seguir, para que a divisão polinomial seja exata,

11. $\dfrac{x^2 + (2a^2 - 7)x - (13a^2 + 1)}{x - 7}$

12. $\dfrac{x^2 + (3 - a)x + (a^2 - 10a)}{x - a}$

Para as funções racionais a seguir determine o domínio, raízes, assíntotas verticais, buracos, estudo de sinal da imagem e esboço do gráfico,

13. $f(x) = -\dfrac{1}{x}$

14. $f(x) = -\dfrac{4}{x^2}$

15. $f(x) = \dfrac{-x + 9}{-x + 8}$

16. $f(x) = \dfrac{x}{x^3 - 1}$

17. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - x + 1}$

18. $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{-x^2 + 5x - 12}$

19. $f(x) = \dfrac{(x - 6)(x - 5)(x + 5)}{(-2x - 10)(-x + 6)}$

20. $f(x) = \dfrac{-x^2 + 1}{x^2 + 1}$

21. $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 8}{x^2 + 6x + 8}$

22. $f(x) = \dfrac{x - 5}{x^3 - 7x^2 + 7x + 15}$

23. $f(x) = \dfrac{x^2 - 13x + 36}{x^2 - 15x + 50}$

24. $f(x) = \dfrac{-x^2 + 49}{x^4 - 4x^3 - 46x^2 + 196x - 147}$

Determine as retas assíntotas às funções seguintes e depois utilize-as para esboçar um gráfico da função,

25. $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x - 21}{x - 5}$

26. $f(x) = \dfrac{x^2 + 19x + 34}{x + 10}$

27. $f(x) = \dfrac{-x^2 + 3x + 10}{x - 2}$

28. $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 12}{x - 4}$

29. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 28}{x^2 + 3x - 28}$

30. $f(x) = \dfrac{(x^2 - 2x - 3)(x - 4)}{x^2 - 7x + 12}$

31. $f(x) = \dfrac{(x^2 - 7x + 10)(x - 8)}{x^2 - 4x + 3}$

32. $f(x) = \dfrac{(x^2 + 10x + 24)(x + 3)}{x^2 - x - 20}$

33. $f(x) = \dfrac{(x^2 - 8x + 12)(x^2 + 4x - 21)}{(x - 3)(x^2 - 13x + 42)}$

9 Respostas dos Exercícios

1. $x - 8$

2. $x - 3$

3. $x^2 - 3x + 5$

4. $-x^2 + 7x - 9$

5. $x - 5$

6. $-x + 7$

7. $x^3 - 2x^2$

8. $x^2 + 3x + 13$

9. $x^2 + 2x - 3$

10. $x + 7$

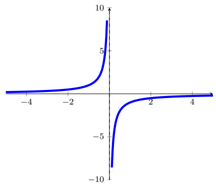
11. $a = \pm 1$

12. $a = \{0, 7\}$

13.

Domínio:	$\mathbb{R} - \{0\}$
Raíz(es):	$\oslash$
Assíntota(s):	$\{x = 0\}$
Buraco(s):	$\oslash$

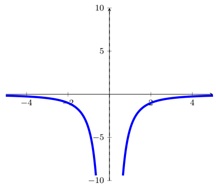
$$\begin{cases} y < 0 & x > 0 \\ y = 0 & \oslash \\ y > 0 & x < 0 \end{cases}$$



14.

Domínio:	$\mathbb{R} - \{0\}$
Raíz(es):	$\oslash$
Assíntota(s):	$\{x = 0\}$
Buraco(s):	$\oslash$

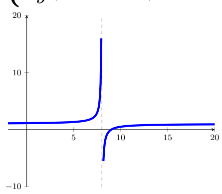
$$\begin{cases} y < 0 & x < 0 \,\cup\, x > 0 \\ y = 0 & \oslash \\ y > 0 & \oslash \end{cases}$$



15.

Domínio:	$\mathbb{R} - \{8\}$
Raíz(es):	$x = \{9\}$
Assíntota(s):	$\{x = 8, y = 1\}$
Buraco(s):	$\oslash$

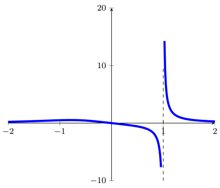
$$\begin{cases} y < 0 & 8 < x < 9 \\ y = 0 & x = \{9\} \\ y > 0 & x < 8 \,\cup\, x > 9 \end{cases}$$



16.

Domínio:	$\mathbb{R} - \{1\}$
Raíz(es):	$x = \{0\}$
Assíntota(s):	$\{x = 1\}$
Buraco(s):	$\oslash$

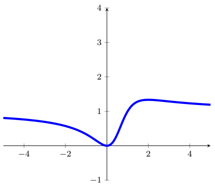
$$\begin{cases} y < 0 & 0 < x < 1 \\ y = 0 & x = \{0\} \\ y > 0 & x < 0 \,\cup\, x > 1 \end{cases}$$



17.

Domínio: $\mathbb{R}$
Raíz(es): $x = \{0\}$
Assíntota(s): $\{\}$
Buraco(s): $\emptyset$

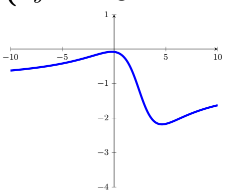
$$\begin{cases} y < 0 & \emptyset \\ y = 0 & x = \{0\} \\ y > 0 & x < 0 \ \cup \ x > 0 \end{cases}$$



18.

Domínio: $\mathbb{R}$
Raíz(es): $\emptyset$
Assíntota(s): $\{\}$
Buraco(s): $\emptyset$

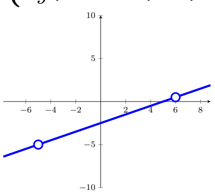
$$\begin{cases} y < 0 & \forall x \in \mathbb{R} \\ y = 0 & \emptyset \\ y > 0 & \emptyset \end{cases}$$



19.

Domínio: $\mathbb{R} - \{-5, 6\}$
Raíz(es): $x = \{5\}$
Assíntota(s): $\{\}$
Buraco(s): $x = \{-5, 6\}$

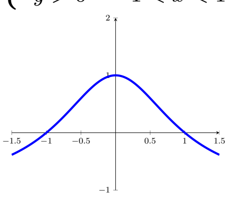
$$\begin{cases} y < 0 & x < -5 \ \cup \ -5 < x < 5 \\ y = 0 & x = \{5\} \\ y > 0 & 5 < x < 6 \ \cup \ x > 6 \end{cases}$$



20.

Domínio: $\mathbb{R}$
Raíz(es): $x = \{-1, 1\}$
Assíntota(s): $\{\}$
Buraco(s): $\emptyset$

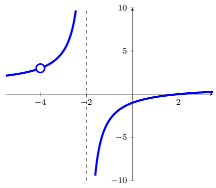
$$\begin{cases} y < 0 & x < -1 \ \cup \ x > 1 \\ y = 0 & x = \{-1, 1\} \\ y > 0 & -1 < x < 1 \end{cases}$$



21.

Domínio: $\mathbb{R} - \{-4, -2\}$
Raíz(es): $x = \{2\}$
Assíntota(s): $\{x = -2\}$
Buraco(s): $x = \{-4\}$

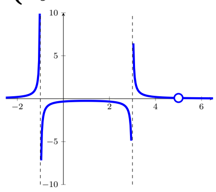
$$\begin{cases} y < 0 & -2 < x < 2 \\ y = 0 & x = \{2\} \\ y > 0 & x < -4 \ \cup \ -4 < x < -2 \ \cup \ x > 2 \end{cases}$$



22.

Domínio: $\mathbb{R} - \{-1, 3, 5\}$
Raíz(es): $\emptyset$
Assíntota(s): $\{x = -1, x = 3\}$
Buraco(s): $x = \{5\}$

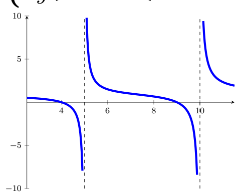
$$\begin{cases} y < 0 & -1 < x < 3 \\ y = 0 & \emptyset \\ y > 0 & x < -1 \ \cup \ 3 < x < 5 \ \cup \ x > 5 \end{cases}$$



23.

Domínio: $\mathbb{R} - \{5, 10\}$
Raíz(es): $x = \{4, 9\}$
Assíntota(s): $\{x = 5, x = 10\}$
Buraco(s): $\emptyset$

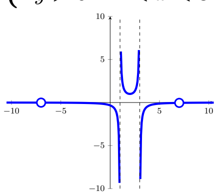
$$\begin{cases} y < 0 & 4 < x < 5 \ \cup \ 9 < x < 10 \\ y = 0 & x = \{4, 9\} \\ y > 0 & x < 4 \ \cup \ 5 < x < 9 \ \cup \ x > 10 \end{cases}$$



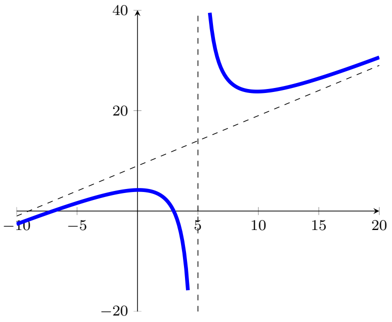
24.

Domínio: $\mathbb{R} - \{-7, 1, 3, 7\}$
Raíz(es): $\emptyset$
Assíntota(s): $\{x = 1, x = 3\}$
Buraco(s): $x = \{-7, 7\}$

$$\begin{cases} y < 0 & x < -7 \ \cup \ -7 < x < 1 \ \cup \ 3 < x < 7 \ \cup \ x > 7 \\ y = 0 & \emptyset \\ y > 0 & 1 < x < 3 \end{cases}$$

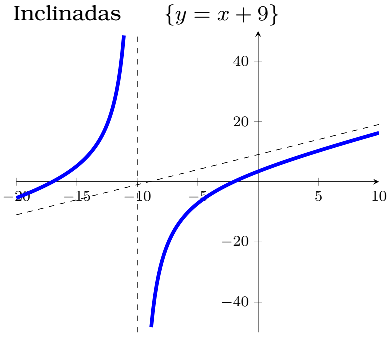


25. Assintotas,
Verticais $\{x = 5\}$
Horizontais $\emptyset$
Inclinadas $\{y = x + 9\}$



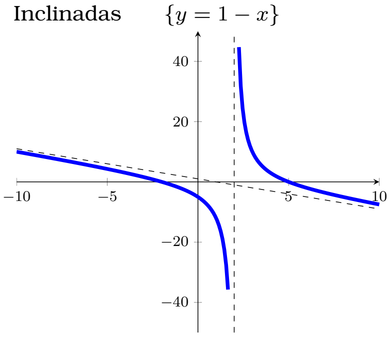
26. Assintotas,

Verticais	$\{x = -10\}$
Horizontais	$\emptyset$
Inclinadas	$\{y = x + 9\}$



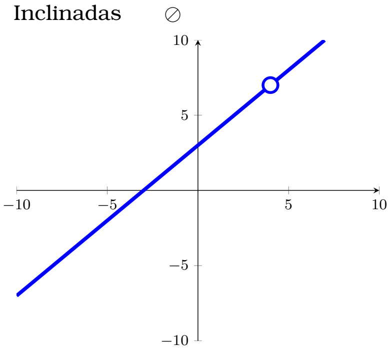
27. Assintotas,

Verticais	$\{x = 2\}$
Horizontais	$\emptyset$
Inclinadas	$\{y = 1 - x\}$



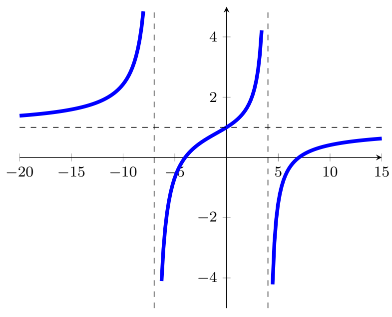
28. Assintotas,

Verticais	$\emptyset$
Horizontais	$\emptyset$
Inclinadas	$\emptyset$



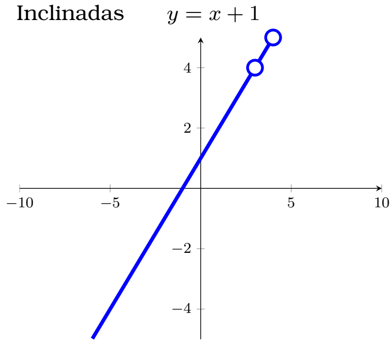
29. Assintotas,

Verticais	$\{x = -7, x = 4\}$
Horizontais	$y = 1$
Inclinadas	$\emptyset$



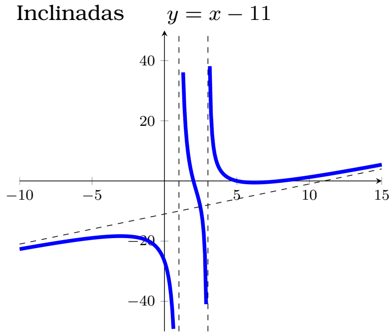
30. Assintotas,

Verticais	$\emptyset$
Horizontais	$\emptyset$
Inclinadas	$y = x + 1$



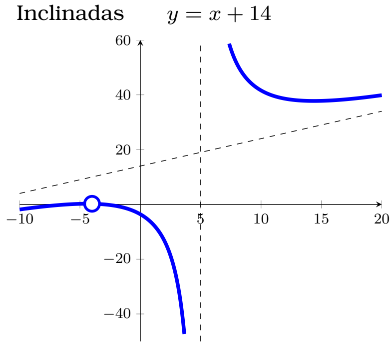
31. Assintotas,

Verticais	$\{x = 1, x = 3\}$
Horizontais	$\emptyset$
Inclinadas	$y = x - 11$



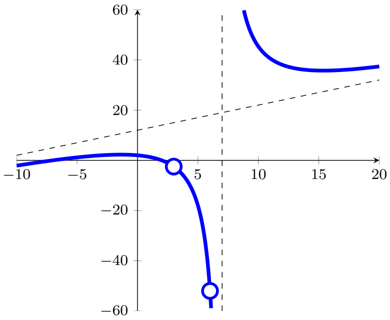
32. Assintotas,

Verticais	$\{x = 5\}$
Horizontais	$\emptyset$
Inclinadas	$y = x + 14$



33. Assintotas,

Verticais	$\{x = 7\}$
Horizontais	$\emptyset$
Inclinadas	$y = x + 12$


60
40
20
−20
−40
−60
−10
−5
5
10
15
20