

## 2023 分野 1

nakao

2024 年 8 月 24 日

### 第 1 問

(1)

変形後の部材の扇形がなす頂角を  $\Delta\theta$  として、中立軸から高さ  $y$  離れた部分の変形後の長さを  $\Delta s$  とすると、

$$\Delta s = (R - y)\Delta\theta \quad (1)$$

が成り立つ。中立面では軸ひずみが生じないため  $\Delta s = dx$  となるから

$$\Delta\theta = \frac{dx}{R} \quad (2)$$

である。これを式 (1) に代入して、

$$\Delta s = \left(1 - \frac{y}{R}\right) dx \quad (3)$$

が得られる。これより、軸ひずみ  $\varepsilon$  と軸応力  $\sigma$  は

$$\varepsilon = \frac{\Delta s - dx}{dx} = -\frac{y}{R} \quad (4)$$

$$\sigma = -E\varepsilon = -\frac{Ey}{R} \quad (5)$$

となる。

(2)

はりに生じる弾性エネルギー  $H$  は、

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \int_V \sigma \varepsilon dV \\ &= \frac{1}{2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-h}^h \int_0^L \left(-\frac{Ey}{R}\right) \left(-\frac{y}{R}\right) dx dy dz \\ &= \frac{E}{2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-h}^h y^2 dy dz \int_0^L \frac{dx}{R^2} \\ &= \frac{EI}{2} \int_0^L \frac{dx}{R^2} \end{aligned} \quad (6)$$

となる。

(3)

$w = \alpha x^3 + \beta x^2$  のとき ,

$$\frac{1}{R} = 6\alpha x + 2\beta \quad (7)$$

であるから ,

$$\begin{aligned} H &= \frac{E}{2} I \int_0^L (6\alpha x + 2\beta)^2 dx \\ &= 2EIL(3\alpha^2 L^2 + 3\alpha\beta L + \beta^2) \end{aligned} \quad (8)$$

を得る . したがって ,  $\Delta H$  は

$$\Delta H = 2EIL(3\alpha^2 L^2 + 3\alpha\beta + \beta^2) - P(\alpha L^3 + \beta L^2) \quad (9)$$

と表される .  $\alpha, \beta$  による  $H$  の偏微分を 0 として

$$\frac{\partial \Delta H}{\partial \alpha} = 2EIL(6\alpha L^2 + 3\beta L) - PL^3 = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial \Delta H}{\partial \beta} = 2EIL(3\alpha L + 2\beta) - PL^2 = 0 \quad (11)$$

を解くと ,

$$\alpha = -\frac{P}{6EI}, \beta = \frac{PL}{2EI} \quad (12)$$

を得る .

(4)

(a)

$u$  は微分方程式

$$\frac{du}{dx} = \frac{P}{GA} \quad (13)$$

に従う . この一般解は定数  $C$  を用いて

$$u = \frac{P}{GA}x + C \quad (14)$$

と表され , 境界条件  $u(0) = 0$  より  $C = 0$  と決定される .  $G = E / \{2(1 + \nu)\}$  より ,

$$u = \frac{2(1 + \nu)P}{EA}x \quad (15)$$

となる .

(b)

$x \sim L$  のとき ,

$$u = \frac{2(1 + \mu)P}{EA}x \sim \frac{PL}{EA} = \frac{PL^3}{E} \frac{1}{L^2 A} \quad (16)$$

$$w = -\frac{P}{6EI}x^3 + \frac{PL}{2EI}x^2 \sim \frac{PL^3}{EI} = \frac{PL^3}{E} \frac{1}{I} \quad (17)$$

のように見積もれる． $h \ll L$  を仮定すると

$$I = \int y^2 dA < \int h^2 dA = h^2 A \ll L^2 A \quad (18)$$

であることから，

$$u \sim \frac{PL^3}{E} \frac{1}{L^2 A} \ll \frac{PL^3}{E} \frac{1}{I} \sim w \quad (19)$$

がわかる．

(5)

(a)

回転バネの弾性エネルギーを考慮すると，この系におけるトータル弾性エネルギー  $H'$  は

$$H' = \frac{1}{2} \int_V \sigma \varepsilon dV + \frac{1}{2} k \left( \frac{dw}{dx}(0) \right)^2 \quad (20)$$

と表せる．外力による仕事  $W'$  は回転バネを導入する前の系と同じく

$$W' = Pw(L) \quad (21)$$

である．したがって，

$$\Delta H' = H' - W' = \frac{1}{2} \int_V \sigma \varepsilon dV + \frac{1}{2} k \left( \frac{dw}{dx}(0) \right)^2 - Pw(L) \quad (22)$$

と表せる．

(b)

$w' = \alpha^3 x^3 + \beta^2 x^2 + \gamma x$  と仮定する． $w$  は  $x$  の微分方程式

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} = 0 \quad (23)$$

に従うため  $x$  の 3 次までの多項式で表せ， $x = 0$  での境界条件  $w(0) = 0$  より定数項はゼロである．回転バネがある場合は， $x = 0$  での境界条件で回転角  $w'(0)$  が一般には 0 ではないため， $x$  の 1 次の係数をパラメータ表示に加えた．

(c)

このパラメータ設定のもとで  $\Delta H'$  は，

$$\Delta H' = 2EIL (3L^2 \alpha^2 + 3L\alpha\beta + \beta^2) - LP (L^2 \alpha + L\beta + \gamma) + \frac{\gamma^2 k}{2} \quad (24)$$

と計算できる． $\alpha, \beta, \gamma$  による偏微分を 0 として

$$\frac{\partial \Delta H'}{\partial \alpha} = L^2 (6EI (2L\alpha + \beta) - LP) = 0 \quad (25)$$

$$\frac{\partial \Delta H'}{\partial \beta} = L (2EI (3L\alpha + 2\beta) - LP) = 0 \quad (26)$$

$$\frac{\partial \Delta H'}{\partial \gamma} = -LP + \gamma k = 0 \quad (27)$$

を解くと ,

$$\alpha = -\frac{P}{6EI}, \beta = \frac{LP}{2EI}, \gamma = \frac{LP}{k} \quad (28)$$

が得られる .

## 第 2 問

(1)

1 周分の  $F_D$  による仕事は ,

$$\begin{aligned} E_D &= \int_{0 \rightarrow 1} F_D dx + \int_{2 \rightarrow 0} F_D dx + \int_{0 \rightarrow 3} F_D dx + \int_{4 \rightarrow 0} F_D dx \\ &= \int_0^{x_0} \eta k x dx + \int_{x_0}^0 (-\eta k x) dx + \int_0^{-x_0} \eta k x dx + \int_{-x_0}^0 (-\eta k x) dx \\ &= \int_0^{x_0} \eta k x dx + \int_0^{x_0} \eta k x dx + \int_{-x_0}^0 (-\eta k x) dx + \int_{-x_0}^0 (-\eta k x) dx \\ &= \frac{1}{2} \eta k (x_0)^2 \times 4 \\ &= 2 \eta k (x_0)^2 \end{aligned} \quad (29)$$

(2)

viscous damping の係数を  $c$  として変位  $x$  は

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P_0 \sin(\omega t) \quad (30)$$

に従う . この定常解は

$$x = \frac{P_0}{\sqrt{(-m\omega^2 + k)^2 + (c\omega)^2}} \sin(\omega t - \varphi) \quad (31)$$

$$\sin \varphi = \frac{-m\omega^2 + k}{\sqrt{(-m\omega^2 + k)^2 + (c\omega)^2}} \quad (32)$$

$$\cos \varphi = \frac{c\omega}{\sqrt{(-m\omega^2 + k)^2 + (c\omega)^2}} \quad (33)$$

と表され ,

$$\dot{x} = \frac{P_0 \omega}{\sqrt{(-m\omega^2 + k)^2 + (c\omega)^2}} \cos(\omega t - \varphi) \quad (34)$$

が得られる . viscous damping による力  $c\dot{x}$  が  $t : \varphi/\omega \rightarrow (\varphi + 2\pi)/\omega$  の一周期でする仕事は ,

$$\begin{aligned} \int c\dot{x} dx &= \int_{\varphi/\omega}^{(\varphi+2\pi)/\omega} c\dot{x} \times \dot{x} dt \\ &= \int_{\varphi/\omega}^{(\varphi+2\pi)/\omega} \frac{(P_0)^2 \omega^2 c}{(-m\omega^2 + k)^2 + (c\omega)^2} \cos^2(\omega t - \varphi) dt \\ &= \frac{(P_0)^2 \omega^2 c}{(-m\omega^2 + k)^2 + (c\omega)^2} \frac{\pi}{\omega} \\ &= \frac{(P_0)^2 \omega c \pi}{(-m\omega^2 + k)^2 + (c\omega)^2} \end{aligned} \quad (35)$$

となる．これが  $E_D$  と等しくなるような  $c$  は，

$$c = \frac{2\eta k (x_0)^2 \{(-m\omega^2 + k)^2 + (c\omega)^2\}}{\pi\omega (P_0)^2} \quad (36)$$

(3)

静的に載荷したときの力のつり合いより，

$$kX_{\text{st}} = P_0 \quad (37)$$

が成り立つ．equivalent viscous system において，定常応答のピーク値が  $3X_{\text{st}}$  と等しくなる条件は，

$$\frac{P_0}{\sqrt{(m\omega^2 + k)^2 + (c\omega)^2}} = 3X_{\text{st}} \quad (38)$$

より，

$$\sqrt{(m\omega^2 + k)^2 + (c\omega)^2} = \frac{k}{3} \quad (39)$$

となる．これを満たす  $c$  は，

$$c = \sqrt{-\frac{8k^2}{9\omega^2} + 2mk + m^2\omega^2} \quad (40)$$

これを式 (36) に代入して，

$$\eta = \frac{\pi\omega (P_0)^2}{2k (x_0)^2 \{(-m\omega^2 + k)^2 + (c\omega)^2\}} \sqrt{-\frac{8k^2}{9\omega^2} + 2mk + m^2\omega^2} \quad (41)$$

が得られる．

(4)

(a)

hysteretic damping では応答の振幅  $x_0$  が同じであれば，エネルギー散逸が周波数に依存しない．viscous damping では，応答の振幅が同じ場合でも周波数によってエネルギー散逸が異なる．

(b)

$P(t) = P_0 \sin(\omega t)$  の外力を  $\omega = 0, \sqrt{k/m}$  の 2 つの振動数で作用させ，応答を観測する． $\omega = 0$  のときは

$$x = \frac{P_0}{k}, \quad (42)$$

$\omega = \sqrt{k/m}$  のときは

$$x = \frac{P_0}{c} \sqrt{\frac{m}{k}} \sin(\omega t - \phi) \quad (43)$$

が応答となり， $m, k$  を既知として，これら振幅の比から  $c$  が推定できる．