# 2016 分野 1

nakao

2022 年 8 月 8 日

## 第 1 問

### (1)

梁の中央に作用する集中荷重 $P$ は分布荷重 $P\delta(x-L/2)$ と表せる。したがって、

$$EIw'''' = P\delta\left(x - \frac{L}{2}\right) \tag{1}$$

が成り立つ。単純支持条件で梁の両端で鉛直方向の変位と曲げモーメントが 0 になるから、境界条件は

$$w(0) = 0 \tag{2}$$
$$w(L) = 0 \tag{3}$$
$$w''(0) = 0 \tag{4}$$
$$w''(L) = 0 \tag{5}$$

である。

### (2)

微小部分の力のつり合いより、曲げモーメントを $M(x)$ とすると

$$\frac{\mathrm{d}^2 M}{\mathrm{d}x^2} + P\delta\left(x - \frac{L}{2}\right) = 0 \tag{6}$$

が成り立つ。また、断面でのモーメントのつり合いから、

$$M(x) = -EI(x)w''(x) \tag{7}$$

が成り立つ。式 (7) を式 (6) に代入して、

$$E\left(I(x)w''''(x) + 2I'(x)w'''(x) + I''(x)w''(x)\right) = P\delta\left(x - \frac{L}{2}\right) \tag{8}$$

を得る。

### (3)

変化しない。曲げモーメントは式 (6) から求められ、この式は断面 2 次モーメントの分布によらない。

### (4)

変化する。式 (7) より、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = -\frac{EI(x)}{M(x)} \tag{9}$$

である。損傷の前後で $M(x)$ は同一、$I(x)$ のみが変化するが、式 (9) より、たわみ角の微分が変化することになる。たわみ角が変化しないと仮定すると、たわみ角の微分も変化しないはずであり矛盾する。

## 第 2 問

### (1)

#### (a)

運動方程式は、

$$m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 = -m\alpha \tag{10}$$

となる。

#### (b)

特解を $x = C_1\sin\left(\sqrt{1.1}\omega_0 t\right)$ として運動方程式に代入すると、$C_1 = \frac{10}{\omega_0^2}$ を得る。したがって、解は

$$x = \frac{10}{\omega_0^2}\sin\left(\sqrt{1.1}\omega_0 t\right) + C_2\cos(\omega_0 t) + C_3\sin(\omega_0 t) \tag{11}$$

と表せる。初期条件を満たすように $C_2, C_3$ を定め、

$$x = \frac{10}{\omega_0^2}\sin\left(\sqrt{1.1}\omega_0 t\right) - \frac{10\sqrt{1.1}}{\omega_0^2}\sin(\omega_0 t) \tag{12}$$

を得る。

### (2)

#### (a)

運動方程式は

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + k_1(x_1 - x_2) = -m_1\alpha \\ m_2\ddot{x}_2 + k_1(x_2 - x_1) + k_2x_2 = -m_2\alpha \end{cases} \tag{13}$$

であり、これを行列表示すると、

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m_1\alpha \\ -m_2\alpha \end{pmatrix} \tag{14}$$

である。

(b)

行列 $M, K$ を

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \tag{15}$$

$$K = \begin{pmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 \end{pmatrix} \tag{16}$$

とする。このとき、固有振動数を $\omega$ とおくと $\det(K - \omega^2 M) = 0$ が成り立つ。

$$\begin{aligned} \det(K - \omega^2 M) &= \det \begin{pmatrix} k_1 - \omega^2 m_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 - \omega^2 m_2 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} k_1 - \omega^2 m_1 & -k_1 \\ -k_1 & 111k_1 - 110\omega^2 m_1 \end{pmatrix} \\ &= (k_1 - \omega^2 m_1)(111k_1 - 110\omega^2 m_1) - k_1^2 \\ &= m^2(10\omega^2 - 11\omega_0^2)(11\omega^2 - 10\omega_0^2) \end{aligned} \tag{17}$$

であるから、固有振動数は

$$\omega = \sqrt{\frac{10}{11}}\omega_0, \sqrt{\frac{11}{10}}\omega_0 \tag{18}$$

である。

(c)

上で求めた固有振動数のうち、小さい方の $\sqrt{\frac{10}{11}}\omega_0$ が 1 次モードの固有振動数である。対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{\phi}$ として、$(K - \omega^2 M)\boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}$ を解くと、

$$\boldsymbol{\phi} \propto \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{19}$$

を得る。したがって、固有振動において $x_1, x_2$ の振幅をそれぞれ $A_1, A_2$ とすると、$A_1/A_2 = 11$ である。求める値は、

$$\frac{A_1 - A_2}{A_2} = \frac{A_1}{A_2} - 1 = 10 \tag{20}$$

である。

(d)

減衰の性能を高める。

剛性を高める。