2023 分野 1

nakao

2024 年 8 月 5 日

第 1 問

(1)

変形後の部材の扇形がなす頂角を $\Delta\theta$ として，中立軸から高さ y 離れた部分の変形後の長さを Δs とすると，

$$\Delta s = (R - y)\Delta\theta \tag{1}$$

が成り立つ．中立面では軸ひずみが生じないため $\Delta s = 0$ となるから

$$\Delta\theta = \frac{dx}{R} \tag{2}$$

である．これを式 (1) に代入して，

$$\Delta s = \left(1 - \frac{y}{R}\right) dx \tag{3}$$

が得られる．これより，軸ひずみ ε と軸応力 σ は

$$\varepsilon = \frac{\Delta s - dx}{dx} = -\frac{y}{R} \tag{4}$$

$$\sigma = -E\varepsilon = -\frac{Ey}{R} \tag{5}$$

となる．

(2)

はりに生じる弾性エネルギー H は，

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}\int_V \sigma\varepsilon \mathrm{d}V \\ &= \frac{1}{2}\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-h}^{h}\int_0^L \left(-\frac{Ey}{R}\right)\left(-\frac{y}{R}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \frac{E}{2}\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-h}^{h} y^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}z \int_0^L \frac{\mathrm{d}x}{R^2} \\ &= \frac{EI}{2}\int_0^L \frac{\mathrm{d}x}{R^2} \end{aligned} \tag{6}$$

となる．

(3)

$w = \alpha x^3 + \beta x^2$ のとき，

$$\frac{1}{R} = 6\alpha x + 2\beta \tag{7}$$

であるから，

$$\begin{aligned} H &= \frac{E}{2} I \int_0^L (6\alpha x + 2\beta)^2 \mathrm{d}x \\ &= 2EIL(3\alpha^2 L^2 + 3\alpha\beta L + \beta^2) \end{aligned} \tag{8}$$

を得る．したがって，ΔH は

$$\Delta H = 2EIL\left(3\alpha^2 L^2 + 3\alpha\beta + \beta^2\right) - P\left(\alpha L^3 + \beta L^2\right) \tag{9}$$

と表される．α, β による H の偏微分を 0 として

$$\frac{\partial \Delta H}{\partial \alpha} = 2EIL\left(6\alpha L^2 + 3\beta L\right) - PL^3 = 0 \tag{10}$$

$$\frac{\partial \Delta H}{\partial \beta} = 2EIL\left(3\alpha L + 2\beta\right) - PL^2 = 0 \tag{11}$$

を解くと，

$$\alpha = -\frac{P}{6EI}, \beta = \frac{PL}{2EI} \tag{12}$$

を得る．

(4)

(a)

u は微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{P}{GA} \tag{13}$$

に従う．この一般解は定数 C を用いて

$$u = \frac{P}{GA} x + C \tag{14}$$

と表され，境界条件 $u(0) = 0$ より $C = 0$ と決定される．$G = E/\left\{2(1+\nu)\right\}$ より，

$$u = \frac{2(1+\nu)P}{EA} x \tag{15}$$

となる．

(b)

$x \sim L$ のとき，

$$u = \frac{2(1+\mu)P}{EA} x \sim \frac{PL}{EA} = \frac{PL^3}{E} \frac{1}{L^2 A} \tag{16}$$

$$w = -\frac{P}{6EI} x^3 + \frac{PL}{2EI} x^2 \sim \frac{PL^3}{EI} = \frac{PL^3}{E} \frac{1}{I} \tag{17}$$

のように見積もれる．$h \ll L$ を仮定すると

$$I = \int y^2 \mathrm{d}A < \int h^2 \mathrm{d}A = h^2 A \ll L^2 A \tag{18}$$

であることから，

$$u \sim \frac{PL^3}{E} \frac{1}{L^2 A} \ll \frac{PL^3}{E} \frac{1}{I} \sim w \tag{19}$$

がわかる．

(5)

(a)

回転バネの弾性エネルギーを考慮すると，この系におけるトータルの弾性エネルギーは

$$W' = \frac{1}{2} \int_V \sigma \varepsilon \mathrm{d}V + \frac{1}{2} k \left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}(0) \right)^2 \tag{20}$$

と表せる．外力による仕事 W' は回転バネを導入する前の系と同じく

$$W' = Pw(L) \tag{21}$$

である．したがって，

$$\Delta H' = H' - W' = \frac{1}{2} \int_V \sigma \varepsilon \mathrm{d}V + \frac{1}{2} k \left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}(0) \right)^2 - Pw(L) \tag{22}$$

と表せる．

(b)

$w' = \alpha^3 x^3 + \beta^2 x^2 + \gamma x$ と仮定する．w は x の微分方程式

$$EI \frac{\mathrm{d}^4 w}{\mathrm{d}x^4} = 0 \tag{23}$$

に従うため x の 3 次までの多項式で表せ，$x = 0$ での境界条件 $w(0) = 0$ より定数項はゼロである．回転バネがある場合は，$x = 0$ での境界条件で回転角 $w'(0)$ が一般には 0 ではないため，x の 1 次の係数をパラメータ表示に加えた．

(c)

このパラメータ設定のもとで $\Delta H'$ は，

$$\Delta H' = 2EIL \left(3L^2 \alpha^2 + 3L\alpha\beta + \beta^2 \right) - LP \left(L^2 \alpha + L\beta + \gamma \right) + \frac{\gamma^2 k}{2} \tag{24}$$

と計算できる．α, β, γ による偏微分を 0 として

$$\frac{\partial \Delta H}{\partial \alpha} = L^2 \left(6EI \left(2L\alpha + \beta \right) - LP \right) = 0 \tag{25}$$

$$\frac{\partial \Delta H}{\partial \beta} = L \left(2EI \left(3L\alpha + 2\beta \right) - LP \right) = 0 \tag{26}$$

$$\frac{\partial \Delta H}{\partial \gamma} = -LP + \gamma k = 0 \tag{27}$$

を解くと,

$$\alpha = -\frac{P}{6EI}, \beta = \frac{LP}{2EI}, \gamma = \frac{LP}{k} \tag{28}$$

が得られる.