2024 分野 1

nakao

2024 年 8 月 7 日

第 1 問

(1)

(a)

部材の中立軸に直交する平面は，変形後においても平面を保ち，中立軸に垂直である．

(b)

変形後の部材の扇形がなす頂角を $\Delta\theta$ として，中立軸から高さ z 離れた部分の変形後の長さを Δs とすると，

$$\Delta s = (R - z)\Delta\theta \tag{1}$$

が成り立つ．中立面では軸ひずみが生じないため $\Delta s = dx$ となるから

$$\Delta\theta = \frac{dx}{R} \tag{2}$$

である．これを式 (1) に代入して，

$$\Delta s = \left(1 - \frac{z}{R}\right) dx \tag{3}$$

が得られる．これより，軸ひずみ ε は

$$\varepsilon = \frac{\Delta s - dx}{dx} = -\frac{z}{R} \tag{4}$$

$$\tag{5}$$

となる．

(c)

ヤング率を E とすると，軸応力 σ は

$$\sigma = E\varepsilon = -\frac{Ez}{R} \tag{6}$$

となる．

(2)

断面上の微小面積 $\mathrm{d}A$ に作用する軸力によるモーメントを断面全体で積分すると，

$$
\begin{aligned}
M &= \int_A (-z)\sigma \mathrm{d}A \\
&= \int_A (-z)\left(-\frac{Ez}{R}\right)\mathrm{d}A \\
&= \frac{E}{R}\int_A z^2 \mathrm{d}A = \frac{EI}{R}
\end{aligned}
\tag{7}
$$

となる．

(3)

(a)

せん断応力が作用する面積は，$2\left(\sqrt{r_2^2 - z^2} - \sqrt{r_1^2 - z^2}\right)dx$ であり，x 軸方向の力のつり合いを考えると，

$$
\int_{\hat{A}}\left(\sigma + \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}x}dx\right)\mathrm{d}A - \int_{\hat{A}}\sigma \mathrm{d}A - \tau \times 2\left(\sqrt{r_2^2 - z^2} - \sqrt{r_1^2 - z^2}\right)dx = 0 \tag{8}
$$

が成り立つ．これより，

$$
\tau = \frac{1}{2\left(\sqrt{r_2^2 - z^2} - \sqrt{r_1^2 - z^2}\right)}\int_{\hat{A}}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}A \tag{9}
$$

が得られる．

(b)

式 (7) を x で微分して，

$$
\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} = EI\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{R}\right] \tag{10}
$$

が得られる．ここで，

$$
\begin{aligned}
\int_{\hat{A}}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}A &= \int_{\hat{A}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[-\frac{Ez}{R}\right]\mathrm{d}A \\
&= \int_{\hat{A}}(-Ez)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{R}\right]\mathrm{d}A \\
&= -E\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{R}\right]\int_{\hat{A}} z\mathrm{d}A \\
&= -E\frac{1}{EI}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}J \\
&= -\frac{J}{I}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}
\end{aligned}
\tag{11}
$$

である．したがって，

$$
\tau = \frac{1}{2\left(\sqrt{r_2^2 - z^2} - \sqrt{r_1^2 - z^2}\right)}\int_{\hat{A}}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}A = -\frac{J}{2I\left(\sqrt{r_2^2 - z^2} - \sqrt{r_1^2 - z^2}\right)}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} \tag{12}
$$

となる．

(c)

$$
\begin{aligned}
J &= \int_{\hat{A}} z\mathrm{d}A \\
&= 2\left(\int_{-r_2}^{-r_1}\int_0^{\sqrt{r_2^2-z^2}} z\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \int_{-r_1}^{-z}\int_{\sqrt{r_1^2-z^2}}^{\sqrt{r_2^2-z^2}} z\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right) \\
&= 2\left(\int_{-r_2}^{-r_1} z\sqrt{r_2^2-z^2}\mathrm{d}z + \int_{-r_1}^{-z} z\left(\sqrt{r_2^2-z^2}-\sqrt{r_1^2-z^2}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right) \\
&= 2\left(\int_{-r_2}^{-z} z\sqrt{r_2^2-z^2}\mathrm{d}z - \int_{-r_1}^{-z} z\sqrt{r_1^2-z^2}\mathrm{d}z\right) \\
&= -\frac{2}{3}\left\{(r_2^2-z^2)^{\frac{3}{2}}-(r_1^2-z^2)^{\frac{3}{2}}\right\}
\end{aligned}
\tag{13}
$$

であるから，

$$
\begin{aligned}
\tau &= -\frac{J}{2I(\sqrt{r_2^2-z^2}-\sqrt{r_1^2-z^2})}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} \\
&= \frac{(r_2^2-z^2)^{\frac{3}{2}}-(r_1^2-z^2)^{\frac{3}{2}}}{3I(\sqrt{r_2^2-z^2}-\sqrt{r_1^2-z^2})}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} \\
&= \frac{(r_2^2-z^2)+\sqrt{r_2^2-z^2}\sqrt{r_1^2-z_2}+(r_1^2-z^2)}{3I}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} \\
&= \frac{r_1^2+r_2^2-2z^2+\sqrt{(r_2^2-z^2)(r_1^2-z^2)}}{3I}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}
\end{aligned}
\tag{14}
$$

と表せる．これを z で微分すると

$$
\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}z} = -\frac{z}{3I}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}\left(4+\frac{r_1^2+r_2^2-2z^2}{\sqrt{(r_2^2-z^2)(r_1^2-z^2)}}\right) \tag{15}
$$

となり，$-r_1 \leq z \leq r_1$ の範囲では，$z=0$ で τ が最大になる．よって最大の τ は

$$
\tau = \frac{r_1^2+r_2^2+r_1r_2}{3I}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} \tag{16}
$$

となる．さらに，

$$
\begin{aligned}
I &= \int_A z^2\mathrm{d}A \\
&= \int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2}(r\sin\theta)^2 r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \int_{r_1}^{r_2} r^3\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{\pi(r_2^4-r_1^4)}{4}
\end{aligned}
\tag{17}
$$

であるから，最大の τ は

$$
\tau = \frac{4(r_1^2+r_2^2+r_1r_2)}{3\pi(r_2^4-r_1^4)}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} \tag{18}
$$

と表せる．

(4)

(a)

内側と外側の筒の断面二次モーメントをそれぞれ I_1, I_2 とすると，

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} z^2 r \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta = \frac{\pi(r_2^4 - r_1^4)}{4} \tag{19}$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \int_{r_2}^{r_3} z^2 r \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta = \frac{\pi(r_3^4 - r_2^4)}{4} \tag{20}$$

曲率半径が R のときに内側と外側のはりに生じる曲げモーメントをそれぞれ M_1, M_2 とすると，

$$M_1 = \frac{EI_1}{R} = \frac{\pi E(r_2^4 - r_1^4)}{4R} \tag{21}$$

$$M_2 = \frac{EI_2}{R} = \frac{\pi E(r_3^4 - r_2^4)}{4R} \tag{22}$$

したがって，内側の外側のはりに生じるモーメントの割合はそれぞれ，

$$\frac{M_1}{M_1 + M_2} = \frac{r_2^4 - r_1^4}{r_3^4 - r_1^4} \tag{23}$$

$$\frac{M_2}{M_1 + M_2} = \frac{r_3^4 - r_2^4}{r_3^4 - r_1^4} \tag{24}$$

$$\tag{25}$$

である．

(b)

No. 固着される前の状態で，トータルの曲げモーメントが M であるとき，

$$M = M_1 + M_2 = \frac{\pi E(r_3^4 - r_1^4)}{4R} \tag{26}$$

より，

$$R = \frac{\pi E(r_3^4 - r_1^4)}{4M} \tag{27}$$

である．固着された後の状態の断面二次モーメントを I_3 とすると，

$$I_3 = \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_3} z^2 r \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta = \frac{\pi(r_3^4 - r_1^4)}{4} \tag{28}$$

であり，曲率半径が R' のときに生じる曲げモーメントは

$$\frac{EI_3}{R'} = \frac{\pi E(r_3^4 - r_1^4)}{4R'} \tag{29}$$

となる．曲げモーメントが M のときに対応する R' は，

$$R' = \frac{\pi E(r_3^4 - r_1^4)}{4M} \tag{30}$$

となる．式 (27), (30) の比較より，同一の曲げモーメント M のもとでの曲率半径は固着する前後で等しい．

(5)

No. 内径が r_{in}，外径が r_{out} の筒の微小な長さ Δx の部分を考える．$-r_{\mathrm{in}} \leq z \leq r_{\mathrm{in}}$ において，このに生じるせん断力を V として，力のつり合い

$$\int_{\hat{A}} \left(\sigma + \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}x}\Delta x \right) \mathrm{d}A - \int_{\hat{A}} \sigma \mathrm{d}A - V = 0 \tag{31}$$

より，

$$V = \int_{\hat{A}} \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}x}\Delta x \mathrm{d}A = -E\Delta x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{R}\right] \int_{\hat{A}} z \mathrm{d}A \tag{32}$$

が得られる．式 (13) と同様に計算すると，

$$V = \frac{2E\Delta x}{3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{R}\right]\left\{ (r_{\mathrm{out}}^2 - z^2)^{\frac{3}{2}} - (r_{\mathrm{in}}^2 - z^2)^{\frac{3}{2}} \right\} \tag{33}$$

となる．

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = -2E\Delta x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{R}\right] \frac{z(r_{\mathrm{out}}^2 - r_{\mathrm{in}}^2)}{\sqrt{r_{\mathrm{out}}^2 - z^2} + \sqrt{r_{\mathrm{in}}^2 - z^2}} \tag{34}$$

より，V は $r_{\mathrm{in}}, r_{\mathrm{out}}$ の値によらず $z = 0$ で最大値をとり，その値は,

$$V = \frac{2E\Delta x}{3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{R}\right](r_{\mathrm{out}}^2 - r_{\mathrm{in}}^2) \tag{35}$$

となる．

同一の変形，すなわち同一の R のもとで，はりが固着する前の最大のせん断力は,

$$\frac{2E\Delta x}{3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{R}\right](r_2^2 - r_1^2) + \frac{2E\Delta x}{3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{R}\right](r_3^2 - r_2^2) = \frac{2E\Delta x}{3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{R}\right](r_3^2 - r_1^2) \tag{36}$$

はりを固着した後の最大のせん断力は,

$$\frac{2E\Delta x}{3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{R}\right](r_3^2 - r_1^2) \tag{37}$$

式 (36),(37) の比較より，固着する前後ではりに生じるせん断力の最大値は等しい．