2024 分野 1

nakao

2024 年 8 月 25 日

第 1 問

(1)

(a)

部材の中立軸に直交する平面は，変形後においても平面を保ち，中立軸に垂直である．

(b)

変形後の部材の扇形がなす頂角を $\Delta\theta$ として，中立軸から高さ z 離れた部分の変形後の長さを Δs とすると，

$$\Delta s = (R - z)\Delta\theta \tag{1}$$

が成り立つ．中立面では軸ひずみが生じないため $\Delta s = dx$ となるから

$$\Delta\theta = \frac{dx}{R} \tag{2}$$

である．これを式 (1) に代入して，

$$\Delta s = \left(1 - \frac{z}{R}\right) dx \tag{3}$$

が得られる．これより，軸ひずみ ε は

$$\varepsilon = \frac{\Delta s - dx}{dx} = -\frac{z}{R} \tag{4}$$

$$\tag{5}$$

となる．

(c)

ヤング率を E とすると，軸応力 σ は

$$\sigma = E\varepsilon = -\frac{Ez}{R} \tag{6}$$

となる．

(2)

断面上の微小面積 $\mathrm{d}A$ に作用する軸力によるモーメントを断面全体で積分すると，

$$
\begin{aligned}
M &= \int_A (-z)\sigma \mathrm{d}A \\
&= \int_A (-z)\left(-\frac{Ez}{R}\right)\mathrm{d}A \\
&= \frac{E}{R}\int_A z^2 \mathrm{d}A = \frac{EI}{R}
\end{aligned}
\tag{7}
$$

となる．

(3)

(a)

せん断応力が作用する面積は，$2\left(\sqrt{r_2^2-z^2}-\sqrt{r_1^2-z^2}\right)dx$ であり，x 軸方向の力のつり合いを考えると，

$$
\int_{\hat{A}}\left(\sigma+\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}x}dx\right)\mathrm{d}A-\int_{\hat{A}}\sigma\mathrm{d}A-\tau\times 2\left(\sqrt{r_2^2-z^2}-\sqrt{r_1^2-z^2}\right)dx=0 \tag{8}
$$

が成り立つ．これより，

$$
\tau=\frac{1}{2\left(\sqrt{r_2^2-z^2}-\sqrt{r_1^2-z^2}\right)}\int_{\hat{A}}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}A \tag{9}
$$

が得られる．

(b)

式 (7) を x で微分して，

$$
\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}=EI\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{R}\right] \tag{10}
$$

が得られる．ここで，

$$
\begin{aligned}
\int_{\hat{A}}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}A &= \int_{\hat{A}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[-\frac{Ez}{R}\right]\mathrm{d}A \\
&= \int_{\hat{A}}(-Ez)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{R}\right]\mathrm{d}A \\
&= -E\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{R}\right]\int_{\hat{A}}z\mathrm{d}A \\
&= -E\frac{1}{EI}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}J \\
&= -\frac{J}{I}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}
\end{aligned}
\tag{11}
$$

である．したがって，

$$
\tau=\frac{1}{2\left(\sqrt{r_2^2-z^2}-\sqrt{r_1^2-z^2}\right)}\int_{\hat{A}}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}A=-\frac{J}{2I\left(\sqrt{r_2^2-z^2}-\sqrt{r_1^2-z^2}\right)}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} \tag{12}
$$

となる．

(c)

$$
\begin{aligned}
J &= \int_{\hat{A}} z\mathrm{d}A \\
&= 2\left(\int_{-r_2}^{-r_1}\int_0^{\sqrt{r_2^2-z^2}} z\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \int_{-r_1}^{-z}\int_{\sqrt{r_1^2-z^2}}^{\sqrt{r_2^2-z^2}} z\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right) \\
&= 2\left(\int_{-r_2}^{-r_1} z\sqrt{r_2^2-z^2}\mathrm{d}z + \int_{-r_1}^{-z} z\left(\sqrt{r_2^2-z^2}-\sqrt{r_1^2-z^2}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right) \\
&= 2\left(\int_{-r_2}^{-z} z\sqrt{r_2^2-z^2}\mathrm{d}z - \int_{-r_1}^{-z} z\sqrt{r_1^2-z^2}\mathrm{d}z\right) \\
&= -\frac{2}{3}\left\{(r_2^2-z^2)^{\frac{3}{2}} - (r_1^2-z^2)^{\frac{3}{2}}\right\}
\end{aligned} \tag{13}
$$

であるから，

$$
\begin{aligned}
\tau &= -\frac{J}{2I(\sqrt{r_2^2-z^2}-\sqrt{r_1^2-z^2})}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} \\
&= \frac{(r_2^2-z^2)^{\frac{3}{2}} - (r_1^2-z^2)^{\frac{3}{2}}}{3I(\sqrt{r_2^2-z^2}-\sqrt{r_1^2-z^2})}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} \\
&= \frac{(r_2^2-z^2) + \sqrt{r_2^2-z^2}\sqrt{r_1^2-z_2} + (r_1^2-z^2)}{3I}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} \\
&= \frac{r_1^2+r_2^2-2z^2+\sqrt{(r_2^2-z^2)(r_1^2-z^2)}}{3I}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}
\end{aligned} \tag{14}
$$

と表せる．これを z で微分すると

$$
\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}z} = -\frac{z}{3I}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}\left(4+\frac{r_1^2+r_2^2-2z^2}{\sqrt{(r_2^2-z^2)(r_1^2-z^2)}}\right) \tag{15}
$$

となり，$-r_1 \leq z \leq r_1$ の範囲では，$z=0$ で τ が最大になる．よって最大の τ は

$$
\tau = \frac{r_1^2+r_2^2+r_1r_2}{3I}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} \tag{16}
$$

となる．さらに，

$$
\begin{aligned}
I &= \int_A z^2\mathrm{d}A \\
&= \int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2}(r\sin\theta)^2 r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \int_{r_1}^{r_2} r^3\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{\pi(r_2^4-r_1^4)}{4}
\end{aligned} \tag{17}
$$

であるから，最大の τ は

$$
\tau = \frac{4(r_1^2+r_2^2+r_1r_2)}{3\pi(r_2^4-r_1^4)}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} \tag{18}
$$

と表せる．

(4)

(a)

内側と外側の筒の断面二次モーメントをそれぞれ I_1, I_2 とすると，

$$I_1 = \int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2} z^2 r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \frac{\pi(r_2^4 - r_1^4)}{4} \tag{19}$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi}\int_{r_2}^{r_3} z^2 r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \frac{\pi(r_3^4 - r_2^4)}{4} \tag{20}$$

曲率半径が R のときに内側と外側のはりに生じる曲げモーメントをそれぞれ M_1, M_2 とすると，

$$M_1 = \frac{EI_1}{R} = \frac{\pi E(r_2^4 - r_1^4)}{4R} \tag{21}$$

$$M_2 = \frac{EI_2}{R} = \frac{\pi E(r_3^4 - r_2^4)}{4R} \tag{22}$$

したがって，内側の外側のはりに生じるモーメントの割合はそれぞれ，

$$\frac{M_1}{M_1 + M_2} = \frac{r_2^4 - r_1^4}{r_3^4 - r_1^4} \tag{23}$$

$$\frac{M_2}{M_1 + M_2} = \frac{r_3^4 - r_2^4}{r_3^4 - r_1^4} \tag{24}$$

$$\tag{25}$$

である．

(b)

No. 固着される前の状態で，トータルの曲げモーメントが M であるとき，

$$M = M_1 + M_2 = \frac{\pi E(r_3^4 - r_1^4)}{4R} \tag{26}$$

より，

$$R = \frac{\pi E(r_3^4 - r_1^4)}{4M} \tag{27}$$

である．固着された後の状態の断面二次モーメントを I_3 とすると，

$$I_3 = \int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{r_3} z^2 r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \frac{\pi(r_3^4 - r_1^4)}{4} \tag{28}$$

であり，曲率半径が R' のときに生じる曲げモーメントは

$$\frac{EI_3}{R'} = \frac{\pi E(r_3^4 - r_1^4)}{4R'} \tag{29}$$

となる．曲げモーメントが M のときに対応する R' は，

$$R' = \frac{\pi E(r_3^4 - r_1^4)}{4M} \tag{30}$$

となる．式 (27), (30) の比較より，同一の曲げモーメント M のもとでの曲率半径は固着する前後で等しい．

(5)

No. 内径が r_{in}，外径が r_{out} の筒の微小な長さ Δx の部分を考える．$-r_{\mathrm{in}} \leq z \leq r_{\mathrm{in}}$ において，このに生じるせん断力を V として，力のつり合い

$$\int_{\hat{A}} \left(\sigma + \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}x} \Delta x \right) \mathrm{d}A - \int_{\hat{A}} \sigma \mathrm{d}A - V = 0 \tag{31}$$

より，

$$V = \int_{\hat{A}} \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}x} \Delta x \mathrm{d}A = -E\Delta x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left[\frac{1}{R} \right] \int_{\hat{A}} z \mathrm{d}A \tag{32}$$

が得られる．式 (13) と同様に計算すると，

$$V = \frac{2E\Delta x}{3} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left[\frac{1}{R} \right] \left\{ (r_{\mathrm{out}}^2 - z^2)^{\frac{3}{2}} - (r_{\mathrm{in}}^2 - z^2)^{\frac{3}{2}} \right\} \tag{33}$$

となる．

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -2E\Delta x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left[\frac{1}{R} \right] \frac{z(r_{\mathrm{out}}^2 - r_{\mathrm{in}}^2)}{\sqrt{r_{\mathrm{out}}^2 - z^2} + \sqrt{r_{\mathrm{in}}^2 - z^2}} \tag{34}$$

より，V は $r_{\mathrm{in}}, r_{\mathrm{out}}$ の値によらず $z = 0$ で最大値をとり，その値は,

$$V = \frac{2E\Delta x}{3} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left[\frac{1}{R} \right] (r_{\mathrm{out}}^3 - r_{\mathrm{in}}^3) \tag{35}$$

となる．

同一の変形，すなわち同一の R のもとで，はりが固着する前の最大のせん断力は,

$$\frac{2E\Delta x}{3} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left[\frac{1}{R} \right] (r_2^3 - r_1^3) + \frac{2E\Delta x}{3} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left[\frac{1}{R} \right] (r_3^3 - r_2^3) = \frac{2E\Delta x}{3} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left[\frac{1}{R} \right] (r_3^3 - r_1^3) \tag{36}$$

はりを固着した後の最大のせん断力は,

$$\frac{2E\Delta x}{3} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left[\frac{1}{R} \right] (r_3^3 - r_1^3) \tag{37}$$

式 (36),(37) の比較より，固着する前後ではりに生じるせん断力の最大値は等しい．

第 2 問

(1)

(a)

$$w = a_1(t) \sin \frac{\pi x}{L} \tag{38}$$

のとき,

$$\dot{w} = \dot{a}_1(t) \sin \frac{\pi x}{L} \tag{39}$$

$$w'' = -\frac{\pi^2}{L^2} a_1(t) \sin \frac{\pi x}{L} \tag{40}$$

が成り立つ．これを用いて，

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}\int_0^L m\dot{w}^2 \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}m\left(\dot{a}_1(t)\right)^2 \int_0^L \sin^2\frac{\pi x}{L}\mathrm{d}x \\
&= \frac{mL}{4}\left(\dot{a}_1(t)\right)^2
\end{aligned}
\tag{41}
$$

および，

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{1}{2}\int_0^L EI\left(-\frac{\pi^2}{L^2}a_1(t)\sin\frac{\pi x}{L}\right)^2 \sin^2\frac{\pi x}{L}\mathrm{d}x - mg\int_0^L a_1(t)\sin\frac{\pi x}{L}\mathrm{d}x \\
&= \frac{EI\pi^4}{2L^4}\left(a_1(t)\right)^2 \int_0^L \sin^2\frac{\pi x}{L}\mathrm{d}x - mga_1(t)\int_0^L \sin\frac{\pi x}{L}\mathrm{d}x \\
&= \frac{EI\pi^4}{4L^3}\left(a_1(t)\right)^2 - \frac{2mgL}{\pi}a_1(t)
\end{aligned}
\tag{42}
$$

が得られる．$a_1(t)$ に摂動 $\delta a_1(t)$ を加えると，

$$
Q_1\delta a_1(t) = \int_0^L f(x,t)\delta a_1(t)\sin\frac{\pi x}{L}\mathrm{d}x \tag{43}
$$

が成り立つ．右辺を計算すると，

$$
\begin{aligned}
\int_0^L f(x,t)\delta a_1(t)\sin\frac{\pi x}{L}\mathrm{d}x &= \int Mg\delta(x-vt)\delta a_1(t)\sin\frac{\pi x}{L}\mathrm{d}x \\
&= Mg\delta a_1(t)\sin\frac{\pi vt}{L}
\end{aligned}
\tag{44}
$$

であるから，

$$
Q_1 = Mg\sin\frac{\pi vt}{L} \tag{45}
$$

である．

(b)

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{a}}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{mL}{2}\dot{(a)}(t)\right) = \frac{1}{2}mL\ddot{a}(t) \tag{46}
$$

$$
\frac{\partial T}{\partial a_1} = 0 \tag{47}
$$

$$
\frac{\partial V}{\partial a_1} = \frac{EI\pi^4}{2L^3}a_1(t) - \frac{2mgL}{\pi} \tag{48}
$$

より，運動方程式は，

$$
\frac{1}{2}mL\ddot{a}_1(t) + \frac{EI\pi^4}{2L^3}a_1(t) - \frac{2mgL}{\pi} - Mg\sin\frac{\pi vt}{L} = 0 \tag{49}
$$

となる．

(c)

この系の固有振動数 ω_0 は,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{EI\pi^4}{2L^3}\frac{mL}{2}} = \frac{\pi^2}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{m}} \tag{50}$$

である．系の固有周期が載荷の周期と一致するための条件は,

$$\frac{l}{v} = \frac{2\pi}{\omega_0} \tag{51}$$

すなわち,

$$v = \frac{\pi l}{2L^2}\sqrt{\frac{EI}{m}} \tag{52}$$

と表せる．

(2)

(a)

$w(x,y)=0$ のときの高さを $y=0$ として，鉛直上向きに y 軸をとる．質点の位置 $\boldsymbol{r}(t)$ は,

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} vt \\ -w(vt,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} vt \\ -a_1(t)\sin\frac{\pi vt}{L} \end{pmatrix} \tag{53}$$

であるから，質点の速度は,

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t) = \begin{pmatrix} v \\ -\dot{a}_1(t)\sin\frac{\pi vt}{L} - \frac{\pi v}{L}a_1(t)\cos\frac{\pi vt}{L} \end{pmatrix} \tag{54}$$

と表せる．質点の運動エネルギーと位置エネルギーを考慮すると,

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\int_0^L m\dot{w}^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2}M\left\|\dot{r}\right\|^2 \\ &= \frac{mL}{4}\left(\dot{a}_1(t)\right)^2 + \frac{Mv^2}{2} + \frac{M}{2}\left(\dot{a}_1(t)\sin\frac{\pi vt}{L} + \frac{\pi v}{L}a_1(t)\cos\frac{\pi vt}{L}\right)^2 \end{aligned} \tag{55}$$

また,

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}\int_0^L EIw''\mathrm{d}x - mg\int_0^L w\mathrm{d}x + Mg\left(-a_1(t)\sin\frac{\pi vt}{L}\right) \\ &= \frac{EI\pi^4}{4L^3}\left(a_1(t)\right)^2 - \frac{2mgL}{\pi}a_1(t) - Mga_1(t)\sin\frac{\pi vt}{L} \end{aligned} \tag{56}$$

が得られる．

(b)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{a}}\right) = \left\{\frac{mL}{2} + \frac{M}{2}\left(1-\cos\frac{2\pi vt}{L}\right)\right\}\ddot{a}_1(t) + \frac{3\pi Mv}{2L}\dot{a}_1(t)\sin\frac{2\pi vt}{L}L\frac{\pi^2 Mv^2}{L^2}\cos\frac{2\pi vt}{L}a_t(t) \tag{57}$$

$$\frac{\partial T}{\partial a_1} = \frac{\pi Mv}{2L}\sin\frac{2\pi vt}{L}\dot{a}_1(t) + \frac{\pi^2 Mv^2}{2L^2}\left(1+\cos\frac{2\pi vt}{L}\right) \tag{58}$$

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} = \frac{\pi^4 EI}{2L^3}a_1(t) - \frac{2mgL}{\pi} - Mg\sin\frac{\pi vt}{L} \tag{59}$$

より，運動方程式は，

$$
\begin{aligned}
&\left\{\frac{mL}{2}+\frac{M}{2}\left(1-\cos\frac{2\pi vt}{L}\right)\right\}\ddot{a}_1(t)+\frac{\pi Mv}{L}\sin\frac{2\pi vt}{L}\dot{a}_1(t)\\
&\quad+\left\{\frac{\pi^4 EI}{2L^3}-\frac{\pi^2 Mv^2}{2L^2}\left(1-\cos\frac{2\pi vt}{L}\right)\right\}a_1(t)-\frac{2mgL}{\pi}-Mg\sin\frac{\pi vt}{L}=0
\end{aligned}
\tag{60}
$$

となる．

(c)

(2)(b) の運動方程式では，振動数 $2\pi v/L$ の振動を表す非線形項があり，これにより，車の通過で駆動される振動数の 2 倍の振動数をもつ高周波応答が生じる．