2017 分野 3

nakao

2022 年 8 月 8 日

第 1 問

(1)

立方体 1 の鉛直方向の力のつり合いより、

$$\rho_w r_1^2 h g = \rho_1 r_1^3 g \tag{1}$$

が成り立ち、

$$h = \frac{\rho_1}{\rho_w} r_1 \tag{2}$$

を得る。また、左側の水槽の水面高さを $H_w + H_0$ とする。立方体 1 を入れる前後で左側の水槽の水の体積は変わらないから、

$$A(H_w + H_0) - r_1^2 h = A H_w \tag{3}$$

が成り立ち、

$$H_0 = \frac{r_1^2 h}{A} \tag{4}$$

を得る。したがって、左側の水槽の水面高さは $H_w + \frac{r_1^2 h}{A}$ である。

(2)

X 点と Y 点の圧力が等しくなる水位で静止するから、

$$\rho_w g(H_w + H_0 - \eta_0) = \rho_w g(H_w + \eta_0) \tag{5}$$

である。したがって、

$$\eta_0 = \frac{H_0}{2} = \frac{r_1^2 h}{2A} \tag{6}$$

を得る。

(3)

(a)

静水圧分布として、

$$p_X = \rho_w g(H_w + H_0 - \eta) \tag{7}$$
$$p_Y = \rho_g g(H_w + \eta) \tag{8}$$

である。

(b)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \tag{9}$$

が成り立つ。

(c)

式 (9) を X から Y まで積分すると、

$$\int_X^Y \frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}x = \int_X^Y \left(-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\right)\mathrm{d}x \tag{10}$$

である。ここで、u は x 依存しないから、

$$\int_X^Y \frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}x = \frac{\partial u}{\partial t}L \tag{11}$$

であり、また、

$$\int_X^Y \left(-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\right)\mathrm{d}x = -\frac{1}{\rho}(p_Y - p_X) = (H_0 - 2\eta)g \tag{12}$$

である。したがって、

$$\frac{\partial u}{\partial t}L = (H_0 - 2\eta)g \tag{13}$$

が成り立つ。

(d)

管路への流入量と左側の水槽からの流出量が等しいから、

$$us = A\frac{\partial \eta}{\partial t} \tag{14}$$

が成り立つ。

(e)

式 (14) より $u = \frac{A}{s}\frac{\partial \eta}{\partial t}$ であり、これと $\eta = \xi + \eta_0$ を式 (13) に代入すると、

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{2sg}{AL}\xi \tag{15}$$

を得る。

(f)

初期条件 $\xi(0) = -\eta_0, \dot{\xi}(0) = 0$ のもとで式 (15) を解くと、

$$\xi = -\eta_0 \cos\sqrt{\frac{2sg}{AL}}t \tag{16}$$

を得る。これより、

$$u = \frac{A}{s}\frac{\partial\eta}{\partial t} = \eta_0\sqrt{\frac{2Ag}{sL}}\sin\sqrt{\frac{2sg}{AL}}t \tag{17}$$

となる。したがって、

$$U_0 = \eta_0\sqrt{\frac{2Ag}{sL}} \tag{18}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2sg}{AL}} \tag{19}$$

である。

(g)

η_0, L が 100 倍に、A, s が 100^2 倍になる。このとき U_0 は 10 倍になるから流速は 10 倍になる。また、ω が 1/10 倍になるから、周期は 10 倍になる。

(4)

流速は $U_0 \sin\omega t$ で表され、そのグラフは図 1 の通り。

抗力は、

$$\begin{cases} \rho_w C_D r_2^2 U_0^2 \sin^2\omega t & \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{\omega}\right) \\ -\rho_w C_D r_2^2 U_0^2 \sin^2\omega t & \left(\frac{\pi}{\omega} \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega}\right) \end{cases} \tag{20}$$

と表され、そのグラフは図 2 の通り。

慣性力は $\rho_w C_M r_2^3 U_0 \omega \cos\omega t$ と表され、そのグラフは図 3 の通り。

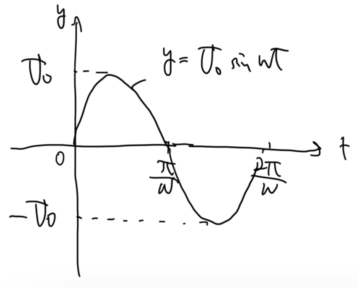

図 1　流速の時系列

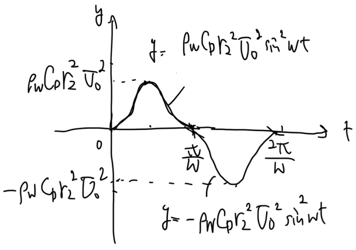

図 2　抗力の時系列

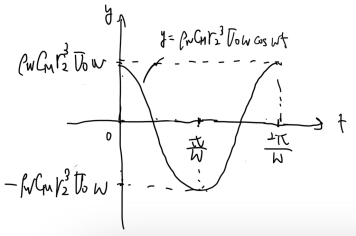

図 3　慣性力の時系列

(5)

(a)

式 [2] より、r_2 が 2 倍になったときに抗力は 4 倍、慣性力は 8 倍になる。また、摩擦力は立方体 2 の質量に比例するため 8 倍になる。したがって、立方体 2 は動かない。

(b)

式 (18) より、L を 1/2 倍にしたときに U_0 は $\sqrt{2}$ 倍になる。これを考慮すれば、r_2 が 2 倍になったときに抗力は 8 倍、慣性力は $8\sqrt{2}$ 倍になる。また、摩擦力は 8 倍になる。したがって、立方体 2 は動く。