2013 分野 1

nakao

2022 年 8 月 25 日

第 1 問

(1)

つり合いを表す微分方程式は、

$$EIw'''' = p \tag{1}$$

と表せる。単純支持条件では梁の両端で鉛直方向の変位と曲げモーメントが 0 になるから、境界条件は

$$w(0) = 0 \tag{2}$$
$$w(L) = 0 \tag{3}$$
$$w''(0) = 0 \tag{4}$$
$$w''(L) = 0 \tag{5}$$

である。

(2)

微小部分の力のつり合いより、曲げモーメントを $M(x)$ とすると

$$\frac{\mathrm{d}^2 M}{\mathrm{d}x^2} + p = 0 \tag{6}$$

が成り立つ。また、断面でのモーメントのつり合いから、

$$M(x) = -E(x)Iw''(x) \tag{7}$$

が成り立つ。式 (7) を式 (6) に代入して、

$$I\left(E(x)w''''(x) + 2E'(x)w'''(x) + E''(x)w''(x)\right) = p \tag{8}$$

を得る。

(3)

変化しない。曲げモーメントは式 (6) から求められ、この式はヤング率の分布によらない。

(4)

増加する。弾性変形のエネルギーは応力 σ とひずみ ε を用いて

$$\int \frac{1}{2}\sigma\varepsilon \mathrm{d}V \tag{9}$$

で定義される。ベルヌーイ・オイラーの仮定から

$$\sigma = \frac{M}{I}z, \quad \varepsilon = \frac{M}{EI}z \tag{10}$$

としてエネルギーを計算すると、

$$\int \frac{1}{2}\sigma\varepsilon \mathrm{d}V = \int_0^L \int_A \frac{M^2}{2EI^2}z^2 \mathrm{d}A\mathrm{d}x = \int_0^L \frac{M^2}{2EI^2}\mathrm{d}x \int_A z^2 \mathrm{d}A = \int_0^L \frac{M^2}{2EI}\mathrm{d}x \tag{11}$$

を得る。M, I は損傷前後で変化せず、E のみが低下したとき、エネルギーは増加する。

第 2 問

(1)

$u_g = 0$ のときのバネと重力のつり合い位置を $y = 0$ として、

$$m\ddot{y} + c\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(y - u_g(vt)\right) + k\left(y - u_g(vt)\right) = 0 \tag{12}$$

が成り立つ。

(2)

$z = y - u_g(vt)$ とすると、

$$m\left(\ddot{z} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}[u_g(vt)]\right) + c\dot{z} + kz = 0 \tag{13}$$

すなわち、

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = m\omega^2 v^2 \sin(\omega vt) \tag{14}$$

が成り立つ。この特解は、$\phi = \arctan\frac{2\xi\lambda}{1-\lambda^2}$ を用いて

$$z = \frac{ma\omega^2 v^2}{k}\frac{1}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + (2\xi\lambda)^2}}\sin(\omega vt - \phi) = \frac{a\lambda^2}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + (2\xi\lambda)^2}}\sin(\omega vt - \phi) \tag{15}$$

と表せる。したがって、y の定常応答は、

$$y = z + u_g(vt) = \frac{a\lambda^2}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + (2\xi\lambda)^2}}\sin(\omega vt - \phi) + a\sin(\omega vt) \tag{16}$$

となる。

(3)

$R_d = 1/\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + (2\xi\lambda)^2}$ とする。式 (16) で $\sin(\omega vt - \phi)$ を加法定理により展開することで

$$y = (a\lambda^2 R_d \cos\phi + a)\sin(\omega vt) - a\lambda^2 R_d \sin\phi \cos(\omega vt) \tag{17}$$

となるから、最大変位 y_m は

$$y_m = \sqrt{(a\lambda^2 R_d \cos\phi + a)^2 + a\lambda^2 R_d \sin\phi \cos^2} = a\sqrt{\lambda^4 R_d^2 + 2\lambda^2 R_d \cos\phi + 1} \tag{18}$$

となる。ここで

$$\cos\phi = \cos\left(\arctan\frac{2\xi\lambda}{1-\lambda^2}\right) = R_d(1-\lambda^2) \tag{19}$$

であることを用いると、

$$y_m = a\sqrt{\lambda^2(2-\lambda^2)R_d^2 + 1} \tag{20}$$

が得られる。よって、

$$\eta = \frac{y_m}{a} = \sqrt{\lambda^2(2-\lambda^2)R_d^2 + 1} \tag{21}$$

である。

$\xi = 0$ のとき、$R_d = \frac{1}{|1-\lambda^2|}$ であるから、

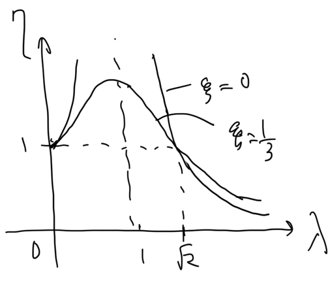
$$\eta = \frac{1}{|1-\lambda^2|} \tag{22}$$

となる。

$\xi = 1/3$ のとき、$R_d = \frac{3}{\sqrt{9\lambda^4 - 14\lambda^2 + 9}}$ であるから、

$$\eta = \sqrt{\frac{4\lambda^2 + 9}{9\lambda^4 - 14\lambda^2 + 9}} \tag{23}$$

となる。式 (22),(23) のグラフは図 1 の通り。



また、式 (21) より η が ξ に依存しないためには、

$$\lambda^2(2-\lambda^2) = 0 \tag{24}$$

であればよい。$\lambda \geq 0$ の範囲でこれを満たすのは、$\lambda = 0, \sqrt{2}$ である。

(4)

運動方程式は式 (12) で $c=0$ として、

$$m\ddot{y}+ky=ku_g(vt) \tag{25}$$

と表せる。車両には $ku_g(vt)$ の外力が作用する。

$0\le t\le \frac{d}{v}$ の期間で車両に加わる力積は

$$\int_0^{\frac{d}{v}} ku_g(vt)\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{d}{v}} kb\sin\left(\frac{\pi vt}{d}\right)\mathrm{d}t=\frac{2m\omega_0^2bd}{\pi v} \tag{26}$$

である。荷重を衝撃作用とみなせば、この期間の外力は $\frac{2m\omega_0^2bd}{\pi v}\delta(t)$ である。

同様に、$\frac{d}{v}+\frac{\pi}{\omega_0}<t\le\frac{2d}{v}+\frac{\pi}{\omega_0}$ の期間で車両に作用する外力は、

$$\frac{2m\omega_0^2bd}{\pi v}\delta\left(t-\left(\frac{d}{v}+\frac{\pi}{\omega_0}\right)\right)=\frac{2m\omega_0^2bd}{\pi v}\delta\left(t-\frac{1}{\omega_0}\left(\frac{d\omega_0}{v}+\pi\right)\right)\simeq\frac{2m\omega_0^2bd}{\pi v}\delta\left(t-\frac{\pi}{\omega_0}\right) \tag{27}$$

とみなせる。

したがって、解くべき運動方程式は、

$$m\ddot{y}+ky=\frac{2m\omega_0^2bd}{\pi v}\left(\delta(t)+\delta\left(t-\frac{\pi}{\omega_0}\right)\right) \tag{28}$$

となる。解は Duhamel's Integral により

$$y=\frac{1}{m\omega_0}\int_0^t\sin\omega_0(t-\tau)\frac{2m\omega_0^2bd}{\pi v}\left(\delta(t)+\delta\left(t-\frac{\pi}{\omega_0}\right)\right)\mathrm{d}\tau \tag{29}$$

で与えられる。

$0<t<\frac{\pi}{\omega_0}$ のとき、

$$y=\frac{2\omega_0bd}{\pi v}\sin\omega_0t \tag{30}$$

となる。

$\frac{\pi}{\omega_0}\le t<\frac{2\pi}{\omega_0}$ のとき、

$$y=\frac{2\omega_0bd}{\pi v}\left(\sin\omega_0t+\sin\omega_0\left(t-\frac{\pi}{\omega_0}\right)\right)=0 \tag{31}$$

となる。したがって、

$$y=\begin{cases}\frac{2\omega_0bd}{\pi v}\sin\omega_0t & \left(0<t<\frac{\pi}{\omega_0}\right)\\ 0 & \left(\frac{\pi}{\omega_0}\le t<\frac{2\pi}{\omega_0}\right)\end{cases} \tag{32}$$

である。