2012 分野 1

nakao

2022 年 8 月 27 日

第 1 問

(1)

(a)

問題設定において x 軸方向、z 軸方向、回転モーメントのつりあいより、図 1 のように点 B における支点反力が得られる。s 座標が 0 からある s までの部分で力のつり合いを考えると、内力について

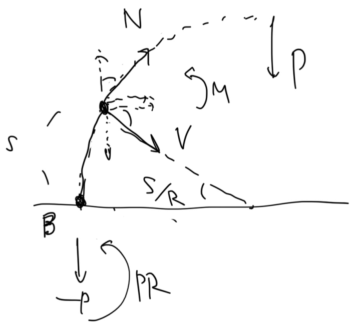

図 1　支点反力と内力

$$N \sin \frac{s}{R} + V \cos \frac{s}{R} = 0 \tag{1}$$

$$-N \cos \frac{s}{R} + V \sin \frac{s}{R} - P = 0 \tag{2}$$

$$M + PR - PR(1 - \cos \frac{s}{R}) = 0 \tag{3}$$

となる。これを解いて、

$$N = -P \cos \frac{s}{R} \tag{4}$$

$$V = P \sin \frac{s}{R} \tag{5}$$

$$M = -PR \cos \frac{s}{R} \tag{6}$$

を得る。

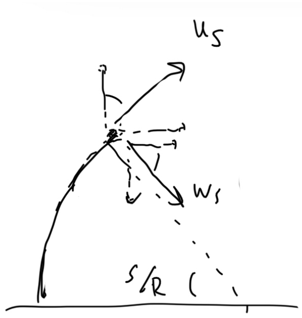

図 2　u_s, w_s の方向

(b)

ベルヌーイ・オイラーの仮定より、

$$N = EA\varepsilon \tag{7}$$

$$M = EI\lambda' \tag{8}$$

が成り立つ。これより、

$$\varepsilon = \frac{N}{EA} = -\frac{P}{EA}\cos\frac{s}{R} \tag{9}$$

$$\lambda = \lambda(s=0) + \int_0^s \frac{M}{EI}\mathrm{d}s = -\frac{PR^2}{EI}\sin\frac{s}{R} \tag{10}$$

である。

(c)

s 軸に平行な方向の変位を u_s、垂直な方向の変位を w_s とする。u, w, u_s, w_s は図 2 のような関係にあり、

$$u = u_s \sin\frac{s}{R} + w_s \cos\frac{s}{R} \tag{11}$$

$$w = -u_s \cos\frac{s}{R} + w_s \sin\frac{s}{R} \tag{12}$$

が成り立つ。式 (11),(12) を s で微分し、$\varepsilon = \frac{\mathrm{d}u_s}{\mathrm{d}s}, \lambda = -\frac{\mathrm{d}w_s}{\mathrm{d}s}$ を用いると、

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = \varepsilon \sin\frac{s}{R} - \lambda \cos\frac{s}{R} \tag{13}$$

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}s} = -\varepsilon \cos\frac{s}{R} - \lambda \sin\frac{s}{R} \tag{14}$$

であり、ここに式 (9),(10) の分布を代入すると、

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = -\frac{P}{EA}\cos\frac{s}{R}\sin\frac{s}{R} + \frac{PR^2}{EI}\cos\frac{s}{R}\sin\frac{s}{R} \tag{15}$$

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}s} = \frac{P}{EA}\cos^2\frac{s}{R} + \frac{PR^2}{EI}\sin^2\frac{s}{R} \tag{16}$$

となる。

(d)

式 (15),(16) より、

$$u\left(s=\frac{\pi R}{2}\right)=u(s=0)+\int_0^{\frac{\pi R}{2}}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s=-\frac{PR}{2EA}+\frac{PR^3}{2EI} \tag{17}$$

$$w\left(s=\frac{\pi R}{2}\right)=w(s=0)+\int_0^{\frac{\pi R}{2}}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s=\frac{\pi PR}{4EA}+\frac{\pi PR^3}{4EI} \tag{18}$$

$$\tag{19}$$

を得る。

(2)

$R=D/2$ とする。(1) a) と同様に支点反力を求め、内力とのつり合いを考えると、

$$N=-Q\sin\frac{s}{R} \tag{20}$$

$$V=-Q\cos\frac{s}{R} \tag{21}$$

$$M=-QR\sin\frac{s}{R} \tag{22}$$

を得る。ここで $s=\pi R/2$ に関する対称性より、$\lambda(s=\pi R/2)=0$ とすると、式 (7),(8) より

$$\varepsilon=\frac{N}{EA}=-\frac{Q}{EA}\sin\frac{s}{R} \tag{23}$$

$$\lambda=\lambda\left(s=\frac{\pi R}{2}\right)+\int_{\frac{\pi R}{2}}^{s}\frac{M}{EI}\mathrm{d}s=\frac{QR^2}{EI}\cos\frac{s}{R} \tag{24}$$

となる。これらを式 (13),(14) に代入すると、

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}=-\frac{Q}{EA}\sin^2\frac{s}{R}-\frac{QR^2}{EI}\cos^2\frac{s}{R} \tag{25}$$

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}s}=\frac{Q}{EA}\cos\frac{s}{R}\sin\frac{s}{R}-\frac{QR^2}{EI}\cos\frac{s}{R}\sin\frac{s}{R} \tag{26}$$

を得る。したがって、

$$u\left(s=\frac{\pi R}{2}\right)=u(s=0)+\int_0^{\frac{\pi R}{2}}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s=-\frac{\pi QR}{4EA}-\frac{\pi QR^3}{4EI} \tag{27}$$

$$w\left(s=\frac{\pi R}{2}\right)=w(s=0)+\int_0^{\frac{\pi R}{2}}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s=\frac{QR}{2EA}-\frac{QR^3}{2EI} \tag{28}$$

である。$R=D/2$ を代入すると、

$$u\left(s=\frac{\pi R}{2}\right)=-\frac{\pi QD}{8EA}-\frac{\pi QD^3}{32EI} \tag{29}$$

$$w\left(s=\frac{\pi R}{2}\right)=\frac{QD}{4EA}-\frac{QD^3}{16EI} \tag{30}$$

を得る。

第 2 問

(1)

運動方程式は、

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 + kx_1 + k(x_1 - x_2) &= -m\ddot{z} \\ m\ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) &= -m\ddot{z} \end{aligned} \tag{31}$$

であり、これを行列表示すると、

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m\ddot{z} \\ -m\ddot{z} \end{pmatrix} \tag{32}$$

である。

(2)

行列 M, K を

$$M = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{pmatrix} \tag{33}$$

と定義すると、固有振動数 ω と固有モード $\boldsymbol{\phi}$ について、

$$(K - \omega^2 M)\boldsymbol{\phi} = \mathbf{0} \tag{34}$$

が成り立つ。$\boldsymbol{\phi} = 0$ となる解が存在するには、

$$\det(K - \omega^2 M) = 0 \tag{35}$$

が必要である。式 (35) を解くと、

$$\omega = \sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}}\omega_0 \tag{36}$$

となる。ここで、$\omega_0 = \sqrt{k/m}$ である。

$\omega = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\omega_0$ のとき、式 (34) を解くと、

$$\boldsymbol{\phi} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \tag{37}$$

である。これを 1 次モードとすると、

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}}\omega_0 \quad \boldsymbol{\phi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \tag{38}$$

である。

$\omega = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\omega_0$ のとき、式 (34) を解くと、

$$\boldsymbol{\phi} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \tag{39}$$

である。これを 2 次モードとすると、

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\omega_0 \quad \boldsymbol{\phi}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \tag{40}$$

である。

(3)

ベクトル $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{x}$ を

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} -m\ddot{z} \\ -m\ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mz_0\omega^2 \sin\omega_t \\ mz_0\omega^2 \sin\omega_t \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{41}$$

とすると、運動方程式は、

$$M\ddot{\boldsymbol{x}} + K\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P} \tag{42}$$

と表せる。$\boldsymbol{x}$ を固有振動の重ね合わせとして、スカラー q_1, q_2 を用いて

$$\boldsymbol{x} = q_1\boldsymbol{\phi}_1 + q_2\boldsymbol{\phi}_2 \tag{43}$$

と表すと、固有モードの直交性より、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\phi}_1^T M\boldsymbol{\phi}_1\ddot{q}_1 + \boldsymbol{\phi}_1^T K\boldsymbol{\phi}_1\ddot{q}_1 = \boldsymbol{\phi}_1^T\boldsymbol{P} \\ \boldsymbol{\phi}_2^T M\boldsymbol{\phi}_2\ddot{q}_2 + \boldsymbol{\phi}_2^T K\boldsymbol{\phi}_2\ddot{q}_2 = \boldsymbol{\phi}_2^T\boldsymbol{P} \end{aligned} \tag{44}$$

が成り立つ。これを計算すると、

$$\begin{aligned} \frac{5+\sqrt{5}}{2}m\ddot{q}_1 + \frac{5-\sqrt{5}}{2}kq_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}mz_0\omega^2\sin\omega t \\ \frac{5-\sqrt{5}}{2}m\ddot{q}_2 + \frac{5+\sqrt{5}}{2}kq_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}mz_0\omega^2\sin\omega t \end{aligned} \tag{45}$$

を得る。この強制振動の方程式に対する定常解は、

$$\begin{aligned} q_1 = \frac{\frac{3+\sqrt{5}}{2}mz_0\omega^2}{\frac{5-\sqrt{5}}{2}k}\frac{1}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}\sin\omega t = \frac{4z_0\omega^2}{(5-\sqrt{5})\{(3-\sqrt{5})\omega_0^2 - 2\omega^2\}} \\ q_2 = \frac{\frac{3-\sqrt{5}}{2}mz_0\omega^2}{\frac{5+\sqrt{5}}{2}k}\frac{1}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2}\sin\omega t = \frac{4z_0\omega^2}{(5+\sqrt{5})\{(3+\sqrt{5})\omega_0^2 - 2\omega^2\}} \end{aligned} \tag{46}$$

と求められる。これを式 (43) に代入すると、$\boldsymbol{x}$ の定常応答は、

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{\omega^2 z0}{\omega^4 - 3\omega^2\omega_0^2 + \omega_0^4}\begin{pmatrix} 2\omega_0^2 - \omega^2 \\ 3\omega_0^2 - \omega^2 \end{pmatrix}\sin\omega t \tag{47}$$

と求められる。$x_1 = 0$ または $x_2 = 0$ が任意の時間で成り立つには、

$$\omega = \sqrt{2}\omega_0, \sqrt{3}\omega \tag{48}$$

であればよい。

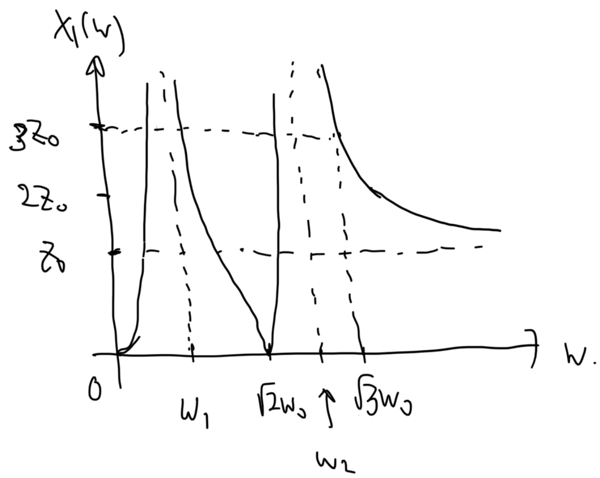

図 3　X_1 の分布

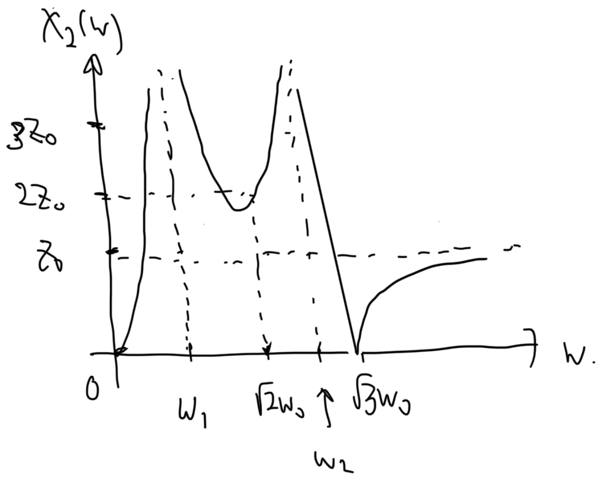

図 4　X_2 の分布

(4)

式 (47) より、

$$\begin{aligned} X_1(\omega) &= \left| \frac{\omega^2(2\omega_0^2 - \omega^2)z0}{\omega^4 - 3\omega^2\omega_0^2 + \omega_0^4} \right| \\ X_2(\omega) &= \left| \frac{\omega^2(3\omega_0^2 - \omega^2)z0}{\omega^4 - 3\omega^2\omega_0^2 + \omega_0^4} \right| \end{aligned} \tag{49}$$

である。これを固有振動数 $\omega = \omega_1, \omega 2$、零点 $\omega = \sqrt{2}\omega_0, \sqrt{3}\omega$、無限大 $\omega \to \infty$ について求めると、

$$(X_1(\omega_1), X_2(\omega_1)) = (\infty, \infty) \tag{50}$$

$$(X_1(\omega_2), X_2(\omega_2)) = (\infty, \infty) \tag{51}$$

$$\left(X_1(\sqrt{2}\omega_0), X_2(\sqrt{2}\omega_0)\right) = (0, 2z_0) \tag{52}$$

$$\left(X_1(\sqrt{3}\omega_0), X_2(\sqrt{3}\omega_0)\right) = (3z_0, 0) \tag{53}$$

$$(X_1(\infty), X_2(\infty)) = (z_0, z_0) \tag{54}$$

である。任意の $\omega > 0$ に対して $X_1(\omega), X_2(\omega)$ を図示すると、図 3,4 のようになる。

(5)

質量が多数の層になって分布しているときには、特定の層で応答が大きくなる外力の振動数において、他の層での応答が小さくなる場合がある。複数の振動モードを検討して、それぞれの層において厳しくなるような外力を別々に設定する必要がある。