2016 分野 3

nakao

2022 年 8 月 22 日

第 1 問

(1)

(a)

管路に作用する力を右向き正で f とすると、流体には $-f$ の力が作用する。断面 I,II での流速をそれぞれ v_1, v_2、断面 II(噴射直前) における圧力を p_2 とすると、運動量保存則から

$$\rho Q v_2 - \rho Q v_1 = -f + p_1 A_1 - p_2 \frac{A_1}{4} \tag{1}$$

が成り立つ。ここで連続式 $Q = A_1 v_1 = \frac{A_1}{4} v_2$ より、

$$v_1 = \frac{Q}{A_1} \tag{2}$$

$$v_2 = \frac{4Q}{A_1} \tag{3}$$

である。また、Bernoulli の定理

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} \tag{4}$$

より、

$$p_2 = p_1 - \frac{\rho}{2}(v_2^2 - v_1^2) = p_1 - \frac{15\rho Q^2}{2A_1^2} \tag{5}$$

である。式 (2),(3),(5) を式 (1) に代入すると、

$$f = \frac{3p_1 A_1}{4} - \frac{9\rho Q^2}{8A_1} \tag{6}$$

を得る。

(b)

断面 II(噴射直前) と板に衝突した後の流れで運動量保存を考え、

$$-\rho Q v_2 = -F + p_2 \frac{A_1}{4} \tag{7}$$

が成り立つ。式 (3),(5) をこれに代入して、

$$F = \frac{p_1 A_1}{4} + \frac{17\rho Q^2}{8A_1} \tag{8}$$

を得る。

(2)

(a)

容器から観測すると $-2g$ の物体力が鉛直方向に作用する。水圧分布は図 1 のようになる。

(b)

容器から観測すると物体力が作用しない。水圧分布は図 2 のようになる。

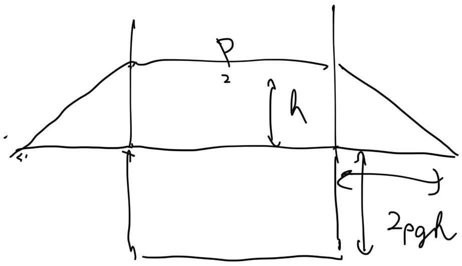

図 1　(a) の水圧分布

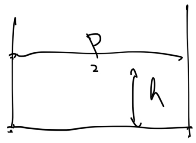

図 2　(b) の水圧分布

(3)

鉛直方向の運動方程式は、

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g \tag{9}$$

である。壁面付近では鉛直方向の流速が卓越し $u \ll w$ であるとして、式 (9) は

$$\frac{\partial w}{\partial t} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g \tag{10}$$

で近似でき、これより

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g - \rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) \tag{11}$$

を得る。

点 A の水圧を p_A として、問題文の図 5 の状態の壁面における水面高さを h とする。このとき、

$$\int_0^h \frac{\partial p}{\partial z}\mathrm{d}z = 0 - p_A \tag{12}$$

であるから、

$$p_A = -\int_0^h \frac{\partial p}{\partial z}\mathrm{d}z \tag{13}$$

と表せる。これに式 (11) を代入すると、

$$p_A = \int_0^h \left\{\rho g + \rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right\}\mathrm{d}z = \rho g h + \rho\int_0^h \left(\frac{\partial w}{\partial t} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right)\mathrm{d}z \tag{14}$$

を得る。問題の図 5 の流速分布では $0 \leq z \leq h$ で $\frac{\partial w}{\partial t} > 0, \frac{\partial w}{\partial z} > 0$ であり、$p_A > \rho g h$ となっている。

第 2 問

(1)

連続式 $q = v_1 C_c h_1 = v_0 h_0$ より $v_0 = C_c h_1 v_1 / h_0$ であり、これをベルヌーイの定理

$$\frac{v_0^2}{2g} + h_0 = \frac{v_1^2}{2g} + C_c h_1 \tag{15}$$

に代入すると、

$$v_1 = h_0 \sqrt{\frac{2g}{h_0 + C_c h_1}} \tag{16}$$

を得る。したがって、

$$q = v_1 C_c h_1 = C_c h_0 h_1 \sqrt{\frac{2g}{h_0 + C_c h_1}} \tag{17}$$

である。

ゲート開口部では渦運動が卓越しているため、流量算出においては A 地点の水深を用いる必要がある。

(2)

運動量保存則から

$$\rho q v_3 - \rho q v_2 = \frac{1}{2}\rho g h_2^2 - \frac{1}{2}\rho g h_3^2 \tag{18}$$

が成り立つ。連続式より $v_2 = q/h_2, v_3 = q/h_3$ であり、これを代入すると、

$$h_2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{h_3^2 + \frac{8q^2}{g h_3}} - h_3\right) \tag{19}$$

を得る。

(3)

式 (19) を h_2 で微分すると、

$$\frac{\partial h_2}{\partial h_3} = \frac{1}{2}\left(\frac{2h_3 - \frac{8q^2}{g h_3^2}}{2\sqrt{h_3^2 + \frac{8q^2}{g h_3}}} - 1\right) = \frac{1}{4\sqrt{h_3^2 + \frac{8q^2}{g h_3}}}\left(2h_3 - 2\sqrt{h_3^2 + \frac{8q^2}{g h_3}} - \frac{8q^2}{g h_3^2}\right) < 0 \tag{20}$$

であるから、h_3 の増加に対して、h_2 は減少する。

A 地点で跳水が起こるためには、$h_2 = C_c h_1$ であればよい。このとき式 (19) より、

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{h_3^2 + \frac{8q^2}{g h_3}} - h_3\right) = C_c h_1 \tag{21}$$

であり、ここに式 (17) を代入して h_3 について解くと、

$$h_3 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{C_c^2 h_1^2 + \frac{16 C_c h_0^2 h_1}{h_0 + C_c h_1}} - C_c h_1\right) \tag{22}$$

を得る。

(4)

副ダムが高すぎる場合は、ダムのかなり手前のエネルギーが大きい状態で跳水が起こる。副ダムが低すぎる場合は、跳水が起こらない。