2018 分野 1

nakao

2022 年 7 月 31 日

第 1 問

(1)

$x = L/2$ の集中荷重 P は分布荷重 $P\delta(x - L/2)$ とみなせるため、

$$EIw''''(x) = P\delta(x - L/2) \tag{1}$$

が成り立つ。

(2)

梁の両端で変位と曲げモーメントが 0 になるから、

$$w(0) = 0 \tag{2}$$
$$w(L) = 0 \tag{3}$$
$$w''(0) = 0 \tag{4}$$
$$w''(L) = 0 \tag{5}$$

を満たせばよい。

(3)

(a)

梁の両端で変位とたわみ角が 0 になるから、

$$w(0) = 0 \tag{6}$$
$$w(L) = 0 \tag{7}$$
$$w'(0) = 0 \tag{8}$$
$$w'(L) = 0 \tag{9}$$

を満たせばよい。

(b)

両端のせん断力については、梁の $x = L/2$ に関する対称性と鉛直方向の力のつり合いより、単純支持でも固定支持でも同じである。

両端の曲げモーメントについては、単純支持では境界条件から 0 であるが、固定支持では単純支持の状態から両端に反力として集中モーメントが加わることで、たわみ角が 0 になると考え、固定支持のときのほうが大きい。

(c)

固定支持で載荷した構造系は、単純支持で載荷した構造系と、単純支持で載荷せず両端に集中モーメントのみを加えた構造系の足し合わせとして表せる。単純支持で載荷せず両端に集中モーメントのみを加えた構造系における変位が、固定支持の場合と単純支持の場合の変位の差に相当している。

(4)

大きくなる。式 (1) にみるように、変位は断面二次モーメントに反比例しているから。

第 2 問

(1)

バネの自然の位置を基準にすると、質点の鉛直方向変位は $-mg/k + y(t)$ と表せる。よって、

$$m\ddot{y} = -mg - k\left(-\frac{mg}{k} + y(t) - u_g(vt)\right) \tag{10}$$

したがって、

$$m\ddot{y} = -k\left(y(t) - u_g(vt)\right) \tag{11}$$

が成り立つ。

(2)

鉛直下向きを正として、

$$f(t) = -k\left(-\frac{mg}{k} + y(t) - u_g(vt)\right) = mg - k\left(y(t) - u_g(vt)\right) \tag{12}$$

である。

(3)

運動方程式が

$$m\ddot{y} = -ky \tag{13}$$

となり、一般解は定数 A_1, A_2 を用いて

$$y = A_1 \cos\omega t + A_2 \sin\omega t \tag{14}$$

と表せる。初期条件 $y(0) = y_0, \dot{y}(0) = \dot{y}_0$ を満たすように A_1, A_2 を定め、

$$y = y_0 \cos\omega t + \frac{\dot{y}_0}{w} \sin\omega t \tag{15}$$

を得る。

(4)

$x = vt$ より、

$$u_g(vt) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ -\sin\omega t & (0 \leq t \leq \frac{\pi}{\omega}) \\ 0 & (\frac{\pi}{\omega} < t) \end{cases} \tag{16}$$

である。

$0 \leq t \leq \frac{\pi}{\omega}$ のとき、$y = Ct\cos\omega t$ を式 (11) に代入すると $C = \omega/2$ を得る。よって、

$$y = \frac{1}{2}\omega t\cos\omega t \tag{17}$$

は式 (11) の特解である。したがって、一般解は定数 B_1, B_2 を用いて

$$y = \frac{1}{2}\omega t\cos\omega t + B_1\cos\omega t + B_2\sin\omega t \tag{18}$$

と表せる。初期条件 $y(0) = y_0, \dot{y}(0) = \dot{y}_0$ を満たすように B_1, B_2 を定め、

$$y = \frac{1}{2}\omega t\cos\omega t + y_0\cos\omega t + \left(\frac{\dot{y}_0}{\omega} - \frac{1}{2}\right)\sin\omega t \tag{19}$$

を得る。ここで、$t = \pi/\omega$ とすると、

$$y\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = -\frac{\pi}{2} - y_0 \tag{20}$$

$$\dot{y}\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = -\dot{y}_0 \tag{21}$$

である。

$\frac{\pi}{\omega} < t$ のとき、$u_g(vt) = 0$ より、一般解は定数 C_1, C_2 を用いて

$$y = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t \tag{22}$$

と表せる。式 (20),(21) の初期条件を満たすように C_1, C_2 を定めると、

$$y = \left(\frac{\pi}{2} + y_0\right)\cos\omega t + \frac{\dot{y}_0}{\omega}\sin\omega t \tag{23}$$

を得る。式 (19),(23) より、

$$y = \begin{cases} y = \frac{1}{2}\omega t\cos\omega t + y_0\cos\omega t + \left(\frac{\dot{y}_0}{\omega} - \frac{1}{2}\right)\sin\omega t & \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{\omega}\right) \\ y = \left(\frac{\pi}{2} + y_0\right)\cos\omega t + \frac{\dot{y}_0}{\omega}\sin\omega t & \left(\frac{\pi}{\omega} < t\right) \end{cases} \tag{24}$$

である。