2017 分野 1

nakao

2022 年 8 月 6 日

第 1 問

(1)

つり合い式の

$$EIw'''' = p \tag{1}$$

(2)

両端において、変位と曲げモーメントが 0 であるから、

$$w(0) = 0 \tag{2}$$
$$w(L) = 0 \tag{3}$$
$$w''(0) = 0 \tag{4}$$
$$w''(L) = 0 \tag{5}$$

である。

(3)

(a)

両端において、変位とたわみ角が 0 であるから、

$$w(0) = 0 \tag{6}$$
$$w(L) = 0 \tag{7}$$
$$w'(0) = 0 \tag{8}$$
$$w'(L) = 0 \tag{9}$$

である。

(b)

鉛直方向の力のつり合いと、$x = L/2$ に関する対称性より明らか。

(c)

固定支持で載荷した構造系は、単純支持で載荷した構造系と、単純支持で載荷せず両端に集中モーメントのみを加えた構造系の足し合わせとして表せる。単純支持で載荷せず両端に集中モーメントのみを加えた構造系における変位が、固定支持の場合と単純支持の場合の変位の差に相当している。

第 2 問

(1)

運動方程式は、

$$\begin{cases} M\ddot{x}_1 + k_1(x_1 - x_2) & = f_1 \\ m\ddot{x}_2 + k_1(x_2 - x_1) + k_2 x_2 & = f_2 \end{cases} \tag{10}$$

であり、行列表示すると、

$$\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \tag{11}$$

となる。

(2)

$M = 3m, k_2 = 3k_1$ より、運動方程式は

$$\begin{pmatrix} 3m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & 4k_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \tag{12}$$

と簡略化できる。ここで、行列 M, K を

$$M = \begin{pmatrix} 3m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \tag{13}$$

$$K = \begin{pmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & 4k_1 \end{pmatrix} \tag{14}$$

とする。固有モード $\boldsymbol{\phi}$ と固有振動数 ω について、

$$(K - \omega^2 M)\boldsymbol{\phi} = \mathbf{0} \tag{15}$$

が成り立つ。$\boldsymbol{\phi} \neq \mathbf{0}$ であるような $\boldsymbol{\phi}$ が存在するとき、

$$\det(K - \omega^2 M) = 0 \tag{16}$$

が満たされる。

$$\det(K - \omega^2 M) = \det \begin{pmatrix} k_1 - 3m\omega^2 & -k_1 \\ -k_1 & 4k_1 - m\omega^2 \end{pmatrix} = 3m^2\omega^4 - 13k_1 m\omega^2 + 3k_1^2 \tag{17}$$

であり、これを 0 とすると、

$$\omega = \sqrt{\frac{(13 \pm \sqrt{133})k_1}{6m}} \tag{18}$$

を得る。これをもとに、

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{(13+\sqrt{133})k_1}{6m}} \tag{19}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{(13-\sqrt{133})k_1}{6m}} \tag{20}$$

$$\tag{21}$$

とする。ω_1, ω_2 に対応する固有モードを $\boldsymbol{\phi}_1, \boldsymbol{\phi}_2$ として、$(K-\omega_1^2 M)\boldsymbol{\phi}_1 = \mathbf{0}$ を解くと、

$$\boldsymbol{\phi}_1 \propto \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-11-\sqrt{133}}{2} \end{pmatrix} \tag{22}$$

を得る。また、$(K-\omega_2^2 M)\boldsymbol{\phi}_2 = \mathbf{0}$ を解くと、

$$\boldsymbol{\phi}_2 \propto \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-11+\sqrt{133}}{2} \end{pmatrix} \tag{23}$$

を得る。したがって、固有振動数は $\omega_1 = \sqrt{\frac{(13+\sqrt{133})k_1}{6m}}, \omega_2 = \sqrt{\frac{(13-\sqrt{133})k_1}{6m}}$ であり、それぞれに対応する固有モードは、$\boldsymbol{\phi}_1 = \left(1, \frac{-11-\sqrt{133}}{2}\right), \boldsymbol{\phi}_2 = \left(1, \frac{-11+\sqrt{133}}{2}\right)$ である。

(3)

曲げの伝達が表現されないこと。減衰が考慮されないこと。