

2024 分野 1

nakao

2024 年 8 月 25 日

第 1 問

(1)

(a)

部材の中立軸に直交する平面は，変形後においても平面を保ち，中立軸に垂直である．

(b)

変形後の部材の扇形がなす頂角を $\Delta\theta$ として，中立軸から高さ z 離れた部分の変形後の長さを Δs とすると，

$$\Delta s = (R - z)\Delta\theta \quad (1)$$

が成り立つ．中立面では軸ひずみが生じないため $\Delta s = dx$ となるから

$$\Delta\theta = \frac{dx}{R} \quad (2)$$

である．これを式 (1) に代入して，

$$\Delta s = \left(1 - \frac{z}{R}\right) dx \quad (3)$$

が得られる．これより，軸ひずみ ε は

$$\varepsilon = \frac{\Delta s - dx}{dx} = -\frac{z}{R} \quad (4)$$

(5)

となる．

(c)

ヤング率を E とすると，軸応力 σ は

$$\sigma = E\varepsilon = -\frac{Ez}{R} \quad (6)$$

となる．

(2)

断面上の微小面積 dA に作用する軸力によるモーメントを断面全体で積分すると、

$$\begin{aligned} M &= \int_A (-z) \sigma dA \\ &= \int_A (-z) \left(-\frac{Ez}{R} \right) dA \\ &= \frac{E}{R} \int_A z^2 dA = \frac{EI}{R} \end{aligned} \quad (7)$$

となる。

(3)

(a)

せん断応力が作用する面積は、 $2 \left(\sqrt{r_2^2 - z^2} - \sqrt{r_1^2 - z^2} \right) dx$ であり、 x 軸方向の力のつり合いを考えると、

$$\int_{\hat{A}} \left(\sigma + \frac{d\sigma}{dx} dx \right) dA - \int_{\hat{A}} \sigma dA - \tau \times 2 \left(\sqrt{r_2^2 - z^2} - \sqrt{r_1^2 - z^2} \right) dx = 0 \quad (8)$$

が成り立つ。これより、

$$\tau = \frac{1}{2 \left(\sqrt{r_2^2 - z^2} - \sqrt{r_1^2 - z^2} \right)} \int_{\hat{A}} \frac{d\sigma}{dx} dA \quad (9)$$

が得られる。

(b)

式 (7) を x で微分して、

$$\frac{dM}{dx} = EI \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{R} \right] \quad (10)$$

が得られる。ここで、

$$\begin{aligned} \int_{\hat{A}} \frac{d\sigma}{dx} dA &= \int_{\hat{A}} \frac{d}{dx} \left[-\frac{Ez}{R} \right] dA \\ &= \int_{\hat{A}} (-Ez) \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{R} \right] dA \\ &= -E \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{R} \right] \int_{\hat{A}} z dA \\ &= -E \frac{1}{EI} \frac{dM}{dx} J \\ &= -\frac{J}{I} \frac{dM}{dx} \end{aligned} \quad (11)$$

である。したがって、

$$\tau = \frac{1}{2 \left(\sqrt{r_2^2 - z^2} - \sqrt{r_1^2 - z^2} \right)} \int_{\hat{A}} \frac{d\sigma}{dx} dA = -\frac{J}{2I \left(\sqrt{r_2^2 - z^2} - \sqrt{r_1^2 - z^2} \right)} \frac{dM}{dx} \quad (12)$$

となる。

(c)

$$\begin{aligned}
J &= \int_{\hat{A}} z dA \\
&= 2 \left(\int_{-r_2}^{-r_1} \int_0^{\sqrt{r_2^2 - z^2}} z dy dz + \int_{-r_1}^{-z} \int_{\sqrt{r_1^2 - z^2}}^{\sqrt{r_2^2 - z^2}} z dy dz \right) \\
&= 2 \left(\int_{-r_2}^{-r_1} z \sqrt{r_2^2 - z^2} dz + \int_{-r_1}^{-z} z \left(\sqrt{r_2^2 - z^2} - \sqrt{r_1^2 - z^2} \right) dy dz \right) \\
&= 2 \left(\int_{-r_2}^{-z} z \sqrt{r_2^2 - z^2} dz - \int_{-r_1}^{-z} z \sqrt{r_1^2 - z^2} dz \right) \\
&= -\frac{2}{3} \left\{ (r_2^2 - z^2)^{\frac{3}{2}} - (r_1^2 - z^2)^{\frac{3}{2}} \right\}
\end{aligned} \tag{13}$$

であるから，

$$\begin{aligned}
\tau &= -\frac{J}{2I(\sqrt{r_2^2 - z^2} - \sqrt{r_1^2 - z^2})} \frac{dM}{dx} \\
&= \frac{(r_2^2 - z^2)^{\frac{3}{2}} - (r_1^2 - z^2)^{\frac{3}{2}}}{3I(\sqrt{r_2^2 - z^2} - \sqrt{r_1^2 - z^2})} \frac{dM}{dx} \\
&= \frac{(r_2^2 - z^2) + \sqrt{r_2^2 - z^2}\sqrt{r_1^2 - z^2} + (r_1^2 - z^2)}{3I} \frac{dM}{dx} \\
&= \frac{r_1^2 + r_2^2 - 2z^2 + \sqrt{(r_2^2 - z^2)(r_1^2 - z^2)}}{3I} \frac{dM}{dx}
\end{aligned} \tag{14}$$

と表せる．これを z で微分すると

$$\frac{d\tau}{dz} = -\frac{z}{3I} \frac{dM}{dx} \left(4 + \frac{r_1^2 + r_2^2 - 2z^2}{\sqrt{(r_2^2 - z^2)(r_1^2 - z^2)}} \right) \tag{15}$$

となり， $-r_1 \leq z \leq r_1$ の範囲では， $z = 0$ で τ が最大になる．よって最大の τ は

$$\tau = \frac{r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2}{3I} \frac{dM}{dx} \tag{16}$$

となる．さらに，

$$\begin{aligned}
I &= \int_A z^2 dA \\
&= \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} (r \sin \theta)^2 r dr d\theta \\
&= \int_{r_1}^{r_2} r^3 dr \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \\
&= \frac{\pi(r_2^4 - r_1^4)}{4}
\end{aligned} \tag{17}$$

であるから，最大の τ は

$$\tau = \frac{4(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)}{3\pi(r_2^4 - r_1^4)} \frac{dM}{dx} \tag{18}$$

と表せる．

(4)

(a)

内側と外側の筒の断面二次モーメントをそれぞれ I_1, I_2 とすると,

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} z^2 r dr d\theta = \frac{\pi(r_2^4 - r_1^4)}{4} \quad (19)$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \int_{r_2}^{r_3} z^2 r dr d\theta = \frac{\pi(r_3^4 - r_2^4)}{4} \quad (20)$$

曲率半径が R のときに内側と外側のはりに生じる曲げモーメントをそれぞれ M_1, M_2 とすると,

$$M_1 = \frac{EI_1}{R} = \frac{\pi E(r_2^4 - r_1^4)}{4R} \quad (21)$$

$$M_2 = \frac{EI_2}{R} = \frac{\pi E(r_3^4 - r_2^4)}{4R} \quad (22)$$

したがって, 内側の外側のはりに生じるモーメントの割合はそれぞれ,

$$\frac{M_1}{M_1 + M_2} = \frac{r_2^4 - r_1^4}{r_3^4 - r_1^4} \quad (23)$$

$$\frac{M_2}{M_1 + M_2} = \frac{r_3^4 - r_2^4}{r_3^4 - r_1^4} \quad (24)$$

$$(25)$$

である.

(b)

No. 固着される前の状態で, トータルの曲げモーメントが M であるとき,

$$M = M_1 + M_2 = \frac{\pi E(r_3^4 - r_1^4)}{4R} \quad (26)$$

より,

$$R = \frac{\pi E(r_3^4 - r_1^4)}{4M} \quad (27)$$

である. 固着された後の状態の断面二次モーメントを I_3 とすると,

$$I_3 = \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_3} z^2 r dr d\theta = \frac{\pi(r_3^4 - r_1^4)}{4} \quad (28)$$

であり, 曲率半径が R' のときに生じる曲げモーメントは

$$\frac{EI_3}{R'} = \frac{\pi E(r_3^4 - r_1^4)}{4R'} \quad (29)$$

となる. 曲げモーメントが M のときに対応する R' は,

$$R' = \frac{\pi E(r_3^4 - r_1^4)}{4M} \quad (30)$$

となる. 式 (27), (30) の比較より, 同一の曲げモーメント M のもとでの曲率半径は固着する前後で等しい.

(5)

No. 内径が r_{in} , 外径が r_{out} の筒の微小な長さ Δx の部分を考える . $-r_{\text{in}} \leq z \leq r_{\text{in}}$ において , このに生じるせん断力を V として , 力のつり合い

$$\int_{\hat{A}} \left(\sigma + \frac{d\sigma}{dx} \Delta x \right) dA - \int_{\hat{A}} \sigma dA - V = 0 \quad (31)$$

より ,

$$V = \int_{\hat{A}} \frac{d\sigma}{dx} \Delta x dA = -E \Delta x \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{R} \right] \int_{\hat{A}} z dA \quad (32)$$

が得られる . 式 (13) と同様に計算すると ,

$$V = \frac{2E\Delta x}{3} \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{R} \right] \left\{ (r_{\text{out}}^2 - z^2)^{\frac{3}{2}} - (r_{\text{in}}^2 - z^2)^{\frac{3}{2}} \right\} \quad (33)$$

となる .

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -2E\Delta x \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{R} \right] \frac{z(r_{\text{out}}^2 - r_{\text{in}}^2)}{\sqrt{r_{\text{out}}^2 - z^2} + \sqrt{r_{\text{in}}^2 - z^2}} \quad (34)$$

より , V は $r_{\text{in}}, r_{\text{out}}$ の値によらず $z = 0$ で最大値をとり , その値は ,

$$V = \frac{2E\Delta x}{3} \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{R} \right] (r_{\text{out}}^3 - r_{\text{in}}^3) \quad (35)$$

となる .

同一の変形 , すなわち同一の R のもとで , はりが固着する前の最大のせん断力は ,

$$\frac{2E\Delta x}{3} \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{R} \right] (r_2^3 - r_1^3) + \frac{2E\Delta x}{3} \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{R} \right] (r_3^3 - r_2^3) = \frac{2E\Delta x}{3} \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{R} \right] (r_3^3 - r_1^3) \quad (36)$$

はりを固着した後の最大のせん断力は ,

$$\frac{2E\Delta x}{3} \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{R} \right] (r_3^3 - r_1^3) \quad (37)$$

式 (36),(37) の比較より , 固着する前後ではりに生じるせん断力の最大値は等しい .

第 2 問

(1)

(a)

$$w = a_1(t) \sin \frac{\pi x}{L} \quad (38)$$

のとき ,

$$\dot{w} = \dot{a}_1(t) \sin \frac{\pi x}{L} \quad (39)$$

$$w'' = -\frac{\pi^2}{L^2} a_1(t) \sin \frac{\pi x}{L} \quad (40)$$

が成り立つ．これを用いて，

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} \int_0^L m \dot{w}^2 dx \\
&= \frac{1}{2} m (\dot{a}_1(t))^2 \int_0^L \sin^2 \frac{\pi x}{L} dx \\
&= \frac{mL}{4} (\dot{a}_1(t))^2
\end{aligned} \tag{41}$$

および，

$$\begin{aligned}
V &= \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(-\frac{\pi^2}{L^2} a_1(t) \sin \frac{\pi x}{L} \right)^2 \sin^2 \frac{\pi x}{L} dx - mg \int_0^L a_1(t) \sin \frac{\pi x}{L} dx \\
&= \frac{EI\pi^4}{2L^4} (a_1(t))^2 \int_0^L \sin^2 \frac{\pi x}{L} dx - mga_1(t) \int_0^L \sin \frac{\pi x}{L} dx \\
&= \frac{EI\pi^4}{4L^3} (a_1(t))^2 - \frac{2mgL}{\pi} a_1(t)
\end{aligned} \tag{42}$$

が得られる． $a_1(t)$ に摂動 $\delta a_1(t)$ を加えると，

$$Q_1 \delta a_1(t) = \int_0^L f(x, t) \delta a_1(t) \sin \frac{\pi x}{L} dx \tag{43}$$

が成り立つ．右辺を計算すると，

$$\begin{aligned}
\int_0^L f(x, t) \delta a_1(t) \sin \frac{\pi x}{L} dx &= \int Mg \delta(x - vt) \delta a_1(t) \sin \frac{\pi x}{L} dx \\
&= Mg \delta a_1(t) \sin \frac{\pi vt}{L}
\end{aligned} \tag{44}$$

であるから，

$$Q_1 = Mg \sin \frac{\pi vt}{L} \tag{45}$$

である．

(b)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{a}} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{mL}{2} \dot{a}(t) \right) = \frac{1}{2} mL \ddot{a}(t) \tag{46}$$

$$\frac{\partial T}{\partial a_1} = 0 \tag{47}$$

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} = \frac{EI\pi^4}{2L^3} a_1(t) - \frac{2mgL}{\pi} \tag{48}$$

より，運動方程式は，

$$\frac{1}{2} mL \ddot{a}_1(t) + \frac{EI\pi^4}{2L^3} a_1(t) - \frac{2mgL}{\pi} - Mg \sin \frac{\pi vt}{L} = 0 \tag{49}$$

となる．

(c)

この系の固有振動数 ω_0 は,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{EI\pi^4}{2L^3} \frac{mL}{2}} = \frac{\pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad (50)$$

である．系の固有周期が載荷の周期と一致するための条件は,

$$\frac{l}{v} = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (51)$$

すなわち,

$$v = \frac{\pi l}{2L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad (52)$$

と表せる．

(2)

(a)

$w(x, y) = 0$ のときの高さを $y = 0$ として, 鉛直上向きに y 軸をとる．質点の位置 $\mathbf{r}(t)$ は,

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} vt \\ -w(vt, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} vt \\ -a_1(t) \sin \frac{\pi vt}{L} \end{pmatrix} \quad (53)$$

であるから, 質点の速度は,

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} v \\ -\dot{a}_1(t) \sin \frac{\pi vt}{L} - \frac{\pi v}{L} a_1(t) \cos \frac{\pi vt}{L} \end{pmatrix} \quad (54)$$

と表せる．質点の運動エネルギーと位置エネルギーを考慮すると,

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_0^L m \dot{w}^2 dx + \frac{1}{2} M \|\dot{\mathbf{r}}\|^2 \\ &= \frac{mL}{4} (\dot{a}_1(t))^2 + \frac{Mv^2}{2} + \frac{M}{2} \left(\dot{a}_1(t) \sin \frac{\pi vt}{L} + \frac{\pi v}{L} a_1(t) \cos \frac{\pi vt}{L} \right)^2 \end{aligned} \quad (55)$$

また,

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \int_0^L EI w'' dx - mg \int_0^L w dx + Mg \left(-a_1(t) \sin \frac{\pi vt}{L} \right) \\ &= \frac{EI\pi^4}{4L^3} (a_1(t))^2 - \frac{2mgL}{\pi} a_1(t) - Mga_1(t) \sin \frac{\pi vt}{L} \end{aligned} \quad (56)$$

が得られる．

(b)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{a}} \right) = \left\{ \frac{mL}{2} + \frac{M}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi vt}{L} \right) \right\} \ddot{a}_1(t) + \frac{3\pi Mv}{2L} \dot{a}_1(t) \sin \frac{2\pi vt}{L} + \frac{\pi^2 Mv^2}{L^2} \cos \frac{2\pi vt}{L} a_1(t) \quad (57)$$

$$\frac{\partial T}{\partial a_1} = \frac{\pi Mv}{2L} \sin \frac{2\pi vt}{L} \dot{a}_1(t) + \frac{\pi^2 Mv^2}{2L^2} \left(1 + \cos \frac{2\pi vt}{L} \right) \quad (58)$$

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} = \frac{\pi^4 EI}{2L^3} a_1(t) - \frac{2mgL}{\pi} - Mga_1(t) \sin \frac{\pi vt}{L} \quad (59)$$

より，運動方程式は，

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{mL}{2} + \frac{M}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi vt}{L} \right) \right\} \ddot{a}_1(t) + \frac{\pi Mv}{L} \sin \frac{2\pi vt}{L} \dot{a}_1(t) \\ & + \left\{ \frac{\pi^4 EI}{2L^3} - \frac{\pi^2 Mv^2}{2L^2} \left(1 - \cos \frac{2\pi vt}{L} \right) \right\} a_1(t) - \frac{2mgL}{\pi} - Mg \sin \frac{\pi vt}{L} = 0 \end{aligned} \quad (60)$$

となる．

(c)

(2)(b) の運動方程式では，振動数 $2\pi v/L$ の振動を表す非線形項があり，これにより，車の通過で駆動される振動数の 2 倍の振動数をもつ高周波応答が生じる．