2014 分野 3

nakao

2022 年 8 月 24 日

第 1 問

(1)

式 [1],[2] の左辺第 1 項は局所加速度であり、特定の場所における流速の変化率を表す。第 2,3 項は移流加速度であり、移動する流体粒子の加速度を表す。

(2)

流体の密度が一様であれば、x 方向、z 方向の長さがそれぞれ $\Delta x, \Delta z$ の微小領域において、流出と流入の流量が一致するから、

$$(u + \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x - u)\Delta z + (w + \frac{\partial w}{\partial z}\Delta z - w)\Delta x = 0 \tag{1}$$

が成り立つ。両辺を $\Delta x \Delta z$ で割ると、

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{2}$$

を得る。

(3)

式 (2) より、

$$\begin{aligned} u\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial u}{\partial z} &= u\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial u}{\partial z} + u\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \\ &= \frac{\partial (uu)}{\partial x} + \frac{\partial (uw)}{\partial z} \end{aligned} \tag{3}$$

であり、同様に、

$$\begin{aligned} u\frac{\partial w}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial z} &= u\frac{\partial w}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial z} + w\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \\ &= \frac{\partial (uw)}{\partial x} + \frac{\partial (ww)}{\partial z} \end{aligned} \tag{4}$$

が成り立つ。これを式 [1],[2] に代入することで、式 [3],[4] が得られる。

(4)

$(x, \eta(t,x))$ に存在した水粒子は時間 Δt の間に $(x+u\Delta t, \eta(t,x)+w\Delta t)$ に移動するから、

$$\eta(t+\Delta t, x+u\Delta t) = \eta(t,x) + w\Delta t \tag{5}$$

が成り立つ。左辺を Taylor 展開で 1 次近似すると、

$$\eta(t+\Delta t, x+u\Delta t) = \eta(t,x) + \frac{\partial \eta}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial \eta}{\partial x}u\Delta t \tag{6}$$

であり、これを式 (5) に代入して整理すると、式 [5] が得られる。

同様に、$(x, z_b(x))$ に存在した水粒子は時間 Δt の間に $(x+u\Delta t, z_b(x)+w\Delta t)$ に移動するから、

$$z_b(x+u\Delta t) = z_b(x) + w\Delta t \tag{7}$$

が成り立つ。左辺を Taylor 展開で 1 次近似すると、

$$z_b(x+u\Delta t) = z_b(x) + \frac{\partial z_b}{\partial x}u\Delta t \tag{8}$$

であり、これを式 (7) に代入して整理すると、式 [6] が得られる。

(5)

式 [2] と仮定より、

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho\left(g + \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) \simeq -\rho g \tag{9}$$

である。これを z から η まで鉛直方向に積分すると、

$$p_0 - p = -\rho g(\eta - z) \tag{10}$$

となり、式 [7] が得られる。

(6)

式 [3] に $u = U$ を代入すると、U は z に依存しないから、

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U^2}{\partial x} + U\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \tag{11}$$

となる。左辺の第 1,2 項は z に依存しないため、その積分は、

$$\int_{z_b}^{\eta}\left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U^2}{\partial x}\right)\mathrm{d}z = \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U^2}{\partial x}\right)(\eta - z_b) = \frac{\partial U}{\partial t}h + \frac{\partial U^2}{\partial x}h \tag{12}$$

となる。左辺第 3 項の積分は、

$$\int_{z_b}^{\eta} U\frac{\partial w}{\partial z}\mathrm{d}z = U\int_{z_b}^{\eta}\frac{\partial w}{\partial z}\mathrm{d}z = U\left(w(t,x,\eta) - w(t,x,z_b)\right) \tag{13}$$

であり、式 [5],[6] の境界条件を用いると、$h=\eta-z_b$ であるから、

$$\int_{z_b}^{\eta} U\frac{\partial w}{\partial z}\mathrm{d}z = U\left\{\frac{\partial \eta}{\partial t}+u\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}-\frac{\partial z_b}{\partial x}\right)\right\} = U\frac{\partial h}{\partial t}+U^2\frac{\partial h}{\partial x} \tag{14}$$

となる。したがって、式 (11) の左辺の積分は、

$$\int_{z_b}^{\eta}\left(\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial U^2}{\partial x}+U\frac{\partial w}{\partial z}\right)\mathrm{d}z = \frac{\partial U}{\partial t}h+\frac{\partial U^2}{\partial x}h+U\frac{\partial h}{\partial t}+U^2\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t}(Uh)+\frac{\partial}{\partial x}(U^2h) \tag{15}$$

となる。次に、式 [7] を用いると、

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\{p_0+\rho g(\eta-z)\} = \rho g\frac{\partial \eta}{\partial x} \tag{16}$$

で z に依存しないから、式 (11) の右辺第 1 項の積分は、

$$\int_{z_b}^{\eta}\left(-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\right)\mathrm{d}z = -\frac{1}{\rho}\rho g\frac{\partial \eta}{\partial x}\int_{z_b}^{\eta}\mathrm{d}z = -gh\frac{\partial \eta}{\partial x} \tag{17}$$

となる。式 (11) の右辺第 2 項の積分は、

$$\int_{z_b}^{\eta}\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\mathrm{d}z = \frac{1}{\rho}\left(\tau_{zx}(x,\eta)-\tau_{zx}(x,z_b)\right) = \frac{\tau_{sx}-\tau_{bx}}{\rho} \tag{18}$$

となる。以上より、

$$\frac{\partial}{\partial t}(Uh)+\frac{\partial}{\partial x}(U^2h) = -gh\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\tau_{sx}-\tau_{bx}}{\rho} \tag{19}$$

が示された。

(7)

式 (2) の連続式に $u=U$ を代入し、

$$\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{20}$$

を得る。左辺第 1 項は z に依存しないため、その積分は

$$\int_{z_b}^{\eta}\frac{\partial U}{\partial x}\mathrm{d}z = \frac{\partial U}{\partial x}(\eta-z_b) = \frac{\partial U}{\partial x}h \tag{21}$$

となる。左辺第 2 項の積分は、式 (13),(14) を U で割った値であるから、

$$\int_{z_b}^{\eta}\frac{\partial w}{\partial z}\mathrm{d}z = \frac{\partial h}{\partial t}+U\frac{\partial h}{\partial x} \tag{22}$$

である。したがって、

$$\frac{\partial U}{\partial x}h+\frac{\partial h}{\partial t}+U\frac{\partial h}{\partial x} = 0 \tag{23}$$

であり、これより、

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(Uh) = 0 \tag{24}$$

が得られる。

(8)

η と h の時間変化が小さいため式 [8] の左辺第 1 項について、

$$\frac{\partial}{\partial t}(Uh) = \frac{\partial U}{\partial t}h + U\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial t}h + U\frac{\partial \eta}{\partial t} \simeq 0 \tag{25}$$

と近似できる。次に、連続式より

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(Uh) \simeq \frac{\partial}{\partial x}(Uh) = 0 \tag{26}$$

であり、微分を展開すると、

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{U}{h}\frac{\partial h}{\partial x} \tag{27}$$

が得られる。これを用いると、式 [8] の左辺第 2 項について、

$$\frac{\partial}{\partial x}(U^2 h) = \frac{\partial U}{\partial x}Uh + U\frac{\partial (Uh)}{\partial x} = -U^2\frac{\partial h}{\partial x} \tag{28}$$

である。以上のことと $\eta = z_b + h, \tau_{sx} = 0$ を用いると、式 [8] は

$$-U^2\frac{\partial h}{\partial x} = -gh\left(\frac{\partial z_b}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x}\right) - \frac{\tau_{bx}}{\rho} \tag{29}$$

と表せる。両辺を gh で割って整理すると、フルード数 $\mathrm{Fr} = U/\sqrt{gh}$ を用いて、

$$\frac{\partial z_b}{\partial x} + (1 - \mathrm{Fr}^2)\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\tau_{bx}}{\rho g h} = 0 \tag{30}$$

が得られる。x 軸方向の h の変化は z_b の変化に対して小さいから、

$$\frac{\partial z_b}{\partial x} + (1 - \mathrm{Fr}^2)\frac{\partial h}{\partial x} \simeq \frac{\partial z_b}{\partial x} \tag{31}$$

で近似でき、

$$-i + I_f = 0 \tag{32}$$

が得られる。

(9)

式 [13] を式 [12] に代入して、さらにそれを式 [11] に代入すると、

$$-i + \frac{f'}{2gh}U^2 = 0 \tag{33}$$

が得られる。したがって、

$$U = \sqrt{\frac{2igh}{f'}} \tag{34}$$

である。

(10)

kinematic wave の流量を Q_k と表すと、式 (34) より、

$$Q_k = \sqrt{\frac{2igh}{f'}}h = \sqrt{\frac{2igh^3}{f'}} \tag{35}$$

となる。一方で、式 [15] を変形すると、

$$U = \sqrt{\frac{2gh}{f'}\left(i_0 - \frac{\partial h}{\partial x}\right)} \tag{36}$$

が得られ、diffusion wave の流量を Q_d とすると、

$$Q_d = \sqrt{\frac{2gh}{f'}\left(i_0 - \frac{\partial h}{\partial x}\right)}h = \sqrt{\frac{2gh^3}{f'}\left(i_0 - \frac{\partial h}{\partial x}\right)} \tag{37}$$

である。Q_d の値は流下方向の水深変化に依存し、水深の勾配に応じて複数の $H-Q$ 曲線が必要になる。同一の h に対して、水深が減少する区間では $Q_d > Q_k$ で、水深が増加する区間では $Q_d < Q_k$ である。

(11)

流速が $\sqrt{gh}$ より十分に小さい。水位の時間変化は無視できるが、流速の時間変化は無視できない。底面せん断応力は小さい。

(12)

水面形は時間変化しないが、流速は重力加速度の変動や水位勾配に応じて時間変化する。diffusion wave では水面形を与えると流量が定まったが、この場合は水面計が決まっても流速は変化し続ける。