

## 2024 分野 1

nakao

2024 年 8 月 7 日

### 第 1 問

(1)

(a)

部材の中立軸に直交する平面は，変形後においても平面を保ち，中立軸に垂直である．

(b)

変形後の部材の扇形がなす頂角を  $\Delta\theta$  として，中立軸から高さ  $z$  離れた部分の変形後の長さを  $\Delta s$  とすると，

$$\Delta s = (R - z)\Delta\theta \quad (1)$$

が成り立つ．中立面では軸ひずみが生じないため  $\Delta s = dx$  となるから

$$\Delta\theta = \frac{dx}{R} \quad (2)$$

である．これを式 (1) に代入して，

$$\Delta s = \left(1 - \frac{z}{R}\right) dx \quad (3)$$

が得られる．これより，軸ひずみ  $\varepsilon$  は

$$\varepsilon = \frac{\Delta s - dx}{dx} = -\frac{z}{R} \quad (4)$$

(5)

となる．

(c)

ヤング率を  $E$  とすると，軸応力  $\sigma$  は

$$\sigma = E\varepsilon = -\frac{Ez}{R} \quad (6)$$

となる．

(2)

断面上の微小面積  $dA$  に作用する軸力によるモーメントを断面全体で積分すると，

$$\begin{aligned} M &= \int_A (-z) \sigma dA \\ &= \int_A (-z) \left( -\frac{Ez}{R} \right) dA \\ &= \frac{E}{R} \int_A z^2 dA = \frac{EI}{R} \end{aligned} \quad (7)$$

となる．

(3)

(a)

せん断応力が作用する面積は， $2 \left( \sqrt{r_2^2 - z^2} - \sqrt{r_1^2 - z^2} \right) dx$  であり， $x$  軸方向の力のつり合いを考えると，

$$\int_{\hat{A}} \left( \sigma + \frac{d\sigma}{dx} dx \right) dA - \int_{\hat{A}} \sigma dA - \tau \times 2 \left( \sqrt{r_2^2 - z^2} - \sqrt{r_1^2 - z^2} \right) dx = 0 \quad (8)$$

が成り立つ．これより，

$$\tau = \frac{1}{2 \left( \sqrt{r_2^2 - z^2} - \sqrt{r_1^2 - z^2} \right)} \int_{\hat{A}} \frac{d\sigma}{dx} dA \quad (9)$$

が得られる．

(b)

式 (7) を  $x$  で微分して，

$$\frac{dM}{dx} = EI \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{R} \right] \quad (10)$$

が得られる．ここで，

$$\begin{aligned} \int_{\hat{A}} \frac{d\sigma}{dx} dA &= \int_{\hat{A}} \frac{d}{dx} \left[ -\frac{Ez}{R} \right] dA \\ &= \int_{\hat{A}} (-Ez) \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{R} \right] dA \\ &= -E \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{R} \right] \int_{\hat{A}} z dA \\ &= -E \frac{1}{EI} \frac{dM}{dx} J \\ &= -\frac{J}{I} \frac{dM}{dx} \end{aligned} \quad (11)$$

である．したがって，

$$\tau = \frac{1}{2 \left( \sqrt{r_2^2 - z^2} - \sqrt{r_1^2 - z^2} \right)} \int_{\hat{A}} \frac{d\sigma}{dx} dA = -\frac{J}{2I \left( \sqrt{r_2^2 - z^2} - \sqrt{r_1^2 - z^2} \right)} \frac{dM}{dx} \quad (12)$$

となる．

(c)

$$\begin{aligned}
J &= \int_{\hat{A}} z dA \\
&= 2 \left( \int_{-r_2}^{-r_1} \int_0^{\sqrt{r_2^2 - z^2}} z dy dz + \int_{-r_1}^{-z} \int_{\sqrt{r_1^2 - z^2}}^{\sqrt{r_2^2 - z^2}} z dy dz \right) \\
&= 2 \left( \int_{-r_2}^{-r_1} z \sqrt{r_2^2 - z^2} dz + \int_{-r_1}^{-z} z \left( \sqrt{r_2^2 - z^2} - \sqrt{r_1^2 - z^2} \right) dy dz \right) \\
&= 2 \left( \int_{-r_2}^{-z} z \sqrt{r_2^2 - z^2} dz - \int_{-r_1}^{-z} z \sqrt{r_1^2 - z^2} dz \right) \\
&= -\frac{2}{3} \left\{ (r_2^2 - z^2)^{\frac{3}{2}} - (r_1^2 - z^2)^{\frac{3}{2}} \right\}
\end{aligned} \tag{13}$$

であるから，

$$\begin{aligned}
\tau &= -\frac{J}{2I(\sqrt{r_2^2 - z^2} - \sqrt{r_1^2 - z^2})} \frac{dM}{dx} \\
&= \frac{(r_2^2 - z^2)^{\frac{3}{2}} - (r_1^2 - z^2)^{\frac{3}{2}}}{3I(\sqrt{r_2^2 - z^2} - \sqrt{r_1^2 - z^2})} \frac{dM}{dx} \\
&= \frac{(r_2^2 - z^2) + \sqrt{r_2^2 - z^2}\sqrt{r_1^2 - z^2} + (r_1^2 - z^2)}{3I} \frac{dM}{dx} \\
&= \frac{r_1^2 + r_2^2 - 2z^2 + \sqrt{(r_2^2 - z^2)(r_1^2 - z^2)}}{3I} \frac{dM}{dx}
\end{aligned} \tag{14}$$

と表せる．これを  $z$  で微分すると

$$\frac{d\tau}{dz} = -\frac{z}{3I} \frac{dM}{dx} \left( 4 + \frac{r_1^2 + r_2^2 - 2z^2}{\sqrt{(r_2^2 - z^2)(r_1^2 - z^2)}} \right) \tag{15}$$

となり， $-r_1 \leq z \leq r_1$  の範囲では， $z = 0$  で  $\tau$  が最大になる．よって最大の  $\tau$  は

$$\tau = \frac{r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2}{3I} \frac{dM}{dx} \tag{16}$$

となる．さらに，

$$\begin{aligned}
I &= \int_A z^2 dA \\
&= \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} (r \sin \theta)^2 r dr d\theta \\
&= \int_{r_1}^{r_2} r^3 dr \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \\
&= \frac{\pi(r_2^4 - r_1^4)}{4}
\end{aligned} \tag{17}$$

であるから，最大の  $\tau$  は

$$\tau = \frac{4(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)}{3\pi(r_2^4 - r_1^4)} \frac{dM}{dx} \tag{18}$$

と表せる．

(4)

(a)

内側と外側の筒の断面二次モーメントをそれぞれ  $I_1, I_2$  とすると,

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} z^2 r dr d\theta = \frac{\pi(r_2^4 - r_1^4)}{4} \quad (19)$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \int_{r_2}^{r_3} z^2 r dr d\theta = \frac{\pi(r_3^4 - r_2^4)}{4} \quad (20)$$

曲率半径が  $R$  のときに内側と外側のはりに生じる曲げモーメントをそれぞれ  $M_1, M_2$  とすると,

$$M_1 = \frac{EI_1}{R} = \frac{\pi E(r_2^4 - r_1^4)}{4R} \quad (21)$$

$$M_2 = \frac{EI_2}{R} = \frac{\pi E(r_3^4 - r_2^4)}{4R} \quad (22)$$

したがって, 内側の外側のはりに生じるモーメントの割合はそれぞれ,

$$\frac{M_1}{M_1 + M_2} = \frac{r_2^4 - r_1^4}{r_3^4 - r_1^4} \quad (23)$$

$$\frac{M_2}{M_1 + M_2} = \frac{r_3^4 - r_2^4}{r_3^4 - r_1^4} \quad (24)$$

$$(25)$$

である.

(b)

No. 固着される前の状態で, トータルの曲げモーメントが  $M$  であるとき,

$$M = M_1 + M_2 = \frac{\pi E(r_3^4 - r_1^4)}{4R} \quad (26)$$

より,

$$R = \frac{\pi E(r_3^4 - r_1^4)}{4M} \quad (27)$$

である. 固着された後の状態の断面二次モーメントを  $I_3$  とすると,

$$I_3 = \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_3} z^2 r dr d\theta = \frac{\pi(r_3^4 - r_1^4)}{4} \quad (28)$$

であり, 曲率半径が  $R'$  のときに生じる曲げモーメントは

$$\frac{EI_3}{R'} = \frac{\pi E(r_3^4 - r_1^4)}{4R'} \quad (29)$$

となる. 曲げモーメントが  $M$  のときに対応する  $R'$  は,

$$R' = \frac{\pi E(r_3^4 - r_1^4)}{4M} \quad (30)$$

となる. 式 (27), (30) の比較より, 同一の曲げモーメント  $M$  のもとでの曲率半径は固着する前後で等しい.

(5)

No. 内径が  $r_{\text{in}}$  , 外径が  $r_{\text{out}}$  の筒の微小な長さ  $\Delta x$  の部分を考える .  $-r_{\text{in}} \leq z \leq r_{\text{in}}$  において , このに生じるせん断力を  $V$  として , 力のつり合い

$$\int_{\hat{A}} \left( \sigma + \frac{d\sigma}{dx} \Delta x \right) dA - \int_{\hat{A}} \sigma dA - V = 0 \quad (31)$$

より ,

$$V = \int_{\hat{A}} \frac{d\sigma}{dx} \Delta x dA = -E \Delta x \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{R} \right] \int_{\hat{A}} z dA \quad (32)$$

が得られる . 式 (13) と同様に計算すると ,

$$V = \frac{2E\Delta x}{3} \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{R} \right] \left\{ (r_{\text{out}}^2 - z^2)^{\frac{3}{2}} - (r_{\text{in}}^2 - z^2)^{\frac{3}{2}} \right\} \quad (33)$$

となる .

$$\frac{dV}{dx} = -2E\Delta x \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{R} \right] \frac{z(r_{\text{out}}^2 - r_{\text{in}}^2)}{\sqrt{r_{\text{out}}^2 - z^2} + \sqrt{r_{\text{in}}^2 - z^2}} \quad (34)$$

より ,  $V$  は  $r_{\text{in}}, r_{\text{out}}$  の値によらず  $z = 0$  で最大値をとり , その値は ,

$$V = \frac{2E\Delta x}{3} \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{R} \right] (r_{\text{out}}^2 - r_{\text{in}}^2) \quad (35)$$

となる .

同一の変形 , すなわち同一の  $R$  のもとで , はりが固着する前の最大のせん断力は ,

$$\frac{2E\Delta x}{3} \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{R} \right] (r_2^2 - r_1^2) + \frac{2E\Delta x}{3} \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{R} \right] (r_3^2 - r_2^2) = \frac{2E\Delta x}{3} \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{R} \right] (r_3^2 - r_1^2) \quad (36)$$

はりを固着した後の最大のせん断力は ,

$$\frac{2E\Delta x}{3} \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{R} \right] (r_3^2 - r_1^2) \quad (37)$$

式 (36),(37) の比較より , 固着する前後ではりに生じるせん断力の最大値は等しい .