2012 分野 1

nakao

2022 年 8 月 27 日

第 1 問

(1)

(a)

問題設定において x 軸方向、z 軸方向、回転モーメントのつりあいより、図 1 のように点 B における支点反力が得られる。s 座標が 0 からある s までの部分で力のつり合いを考えると、内力について

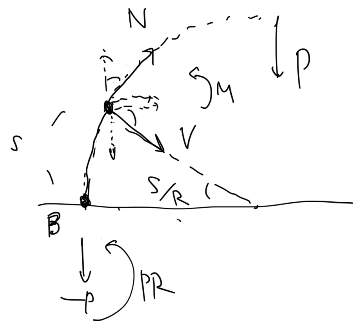

図 1　支点反力と内力

$$N \sin \frac{s}{R} + V \cos \frac{s}{R} = 0 \tag{1}$$

$$-N \cos \frac{s}{R} + V \sin \frac{s}{R} - P = 0 \tag{2}$$

$$M + PR - PR(1 - \cos \frac{s}{R}) = 0 \tag{3}$$

となる。これを解いて、

$$N = -P \cos \frac{s}{R} \tag{4}$$

$$V = P \sin \frac{s}{R} \tag{5}$$

$$M = -PR \cos \frac{s}{R} \tag{6}$$

を得る。

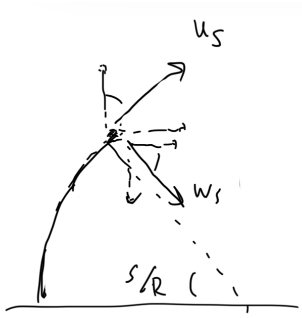

図 2　u_s, w_s の方向

(b)

ベルヌーイ・オイラーの仮定より、

$$N = EA\varepsilon \tag{7}$$
$$M = EI\lambda' \tag{8}$$

が成り立つ。これより、

$$\varepsilon = \frac{N}{EA} = -\frac{P}{EA}\cos\frac{s}{R} \tag{9}$$
$$\lambda = \lambda(s=0) + \int_0^s \frac{M}{EI}\mathrm{d}s = -\frac{PR^2}{EI}\sin\frac{s}{R} \tag{10}$$

である。

(c)

s 軸に平行な方向の変位を u_s、垂直な方向の変位を w_s とする。u, w, u_s, w_s は図 2 のような関係にあり、

$$u = u_s \sin\frac{s}{R} + w_s \cos\frac{s}{R} \tag{11}$$
$$w = -u_s \cos\frac{s}{R} + w_s \sin\frac{s}{R} \tag{12}$$

が成り立つ。式 (11),(12) を s で微分し、$\varepsilon = \frac{\mathrm{d}u_s}{\mathrm{d}s}, \lambda = -\frac{\mathrm{d}w_s}{\mathrm{d}s}$ を用いると、

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = \varepsilon \sin\frac{s}{R} - \lambda \cos\frac{s}{R} \tag{13}$$
$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}s} = -\varepsilon \cos\frac{s}{R} - \lambda \sin\frac{s}{R} \tag{14}$$

であり、ここに式 (9),(10) の分布を代入すると、

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = -\frac{P}{EA}\cos\frac{s}{R}\sin\frac{s}{R} + \frac{PR^2}{EI}\cos\frac{s}{R}\sin\frac{s}{R} \tag{15}$$
$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}s} = \frac{P}{EA}\cos^2\frac{s}{R} + \frac{PR^2}{EI}\sin^2\frac{s}{R} \tag{16}$$

となる。

(d)

式 (15),(16) より、

$$u\left(s=\frac{\pi R}{2}\right)=u(s=0)+\int_0^{\frac{\pi R}{2}}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s=-\frac{PR}{2EA}+\frac{PR^3}{2EI} \tag{17}$$

$$w\left(s=\frac{\pi R}{2}\right)=w(s=0)+\int_0^{\frac{\pi R}{2}}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s=\frac{\pi PR}{4EA}+\frac{\pi PR^3}{4EI} \tag{18}$$

$$\tag{19}$$

を得る。

(2)

$R=D/2$ とする。(1) a) と同様に支点反力を求め、内力とのつり合いを考えると、

$$N=-Q\sin\frac{s}{R} \tag{20}$$

$$V=-Q\cos\frac{s}{R} \tag{21}$$

$$M=-QR\sin\frac{s}{R} \tag{22}$$

を得る。ここで $s=\pi R/2$ に関する対称性より、$\lambda(s=\pi R/2)=0$ とすると、式 (7),(8) より

$$\varepsilon=\frac{N}{EA}=-\frac{Q}{EA}\sin\frac{s}{R} \tag{23}$$

$$\lambda=\lambda\left(s=\frac{\pi R}{2}\right)+\int_{\frac{\pi R}{2}}^{s}\frac{M}{EI}\mathrm{d}s=\frac{QR^2}{EI}\cos\frac{s}{R} \tag{24}$$

となる。これらを式 (13),(14) に代入すると、

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}=-\frac{Q}{EA}\sin^2\frac{s}{R}-\frac{QR^2}{EI}\cos^2\frac{s}{R} \tag{25}$$

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}s}=\frac{Q}{EA}\cos\frac{s}{R}\sin\frac{s}{R}-\frac{QR^2}{EI}\cos\frac{s}{R}\sin\frac{s}{R} \tag{26}$$

を得る。したがって、

$$u\left(s=\frac{\pi R}{2}\right)=u(s=0)+\int_0^{\frac{\pi R}{2}}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s=-\frac{\pi QR}{4EA}-\frac{\pi QR^3}{4EI} \tag{27}$$

$$w\left(s=\frac{\pi R}{2}\right)=w(s=0)+\int_0^{\frac{\pi R}{2}}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s=\frac{QR}{2EA}-\frac{QR^3}{2EI} \tag{28}$$

である。$R=D/2$ を代入すると、

$$u\left(s=\frac{\pi R}{2}\right)=-\frac{\pi QD}{8EA}-\frac{\pi QD^3}{32EI} \tag{29}$$

$$w\left(s=\frac{\pi R}{2}\right)=\frac{QD}{4EA}-\frac{QD^3}{16EI} \tag{30}$$

を得る。

第２問

あーー