2019 分野 1

nakao

2022 年 7 月 30 日

第 1 問

(1)

x 軸方向の力のつり合いから、

$$(\sigma + \mathrm{d}\sigma)w\mathrm{d}z + (\tau + \mathrm{d}\tau)w\mathrm{d}x - \sigma w\mathrm{d}z + \tau w\mathrm{d}x = 0 \tag{1}$$

が成り立つ。式 (1) を $w\mathrm{d}x\mathrm{d}z$ で割ると、

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}z} = 0 \tag{2}$$

となり、したがって、x 軸方向のつり合い式は、

$$\frac{\partial\sigma}{\partial dx} + \frac{\partial\tau}{\partial dz} = 0 \tag{3}$$

で与えられる。

(2)

微小部分の右端まわりのモーメントのつり合いから、

$$M + \mathrm{d}M - M - V\mathrm{d}x = 0 \tag{4}$$

となる。これより、

$$V = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} \tag{5}$$

が成り立つ。

(3)

$$V = \iint \tau \mathrm{d}A \tag{6}$$

$$M = \iint \sigma z \mathrm{d}A \tag{7}$$

より、

$$V = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau w \mathrm{d}z \tag{8}$$

$$M = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma z w \mathrm{d}z \tag{9}$$

である。

(4)

$$\frac{\partial}{\partial x}[A(x)z] = A'(x)z \tag{10}$$

であるから、式 (3) は

$$\frac{\partial \tau}{\partial z} = -A'(x)z \tag{11}$$

と書き直せる。これより、

$$\tau = \int (-A'(x)z)\,\mathrm{d}z = -\frac{1}{2}A'(x)z^2 + C(x) \tag{12}$$

を得る。ここで、$C(x)$ は任意の x の関数である。境界条件 $\tau(z = \pm h/2) = 0$ より、

$$C(x) = \frac{1}{2}A'(x)\frac{h^2}{4} \tag{13}$$

と定まり、

$$\tau = \frac{1}{2}A'(x)\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right) \tag{14}$$

となる。

(5)

式 (8) に式 (14)、式 (9) に $\sigma = A(x)z$ をそれぞれ代入すると、

$$M = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} A(x)z^2 w \mathrm{d}z = \frac{A(x)}{12}wh^3 \tag{15}$$

$$V = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{1}{2}A'(x)\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right)\mathrm{d}z = \frac{A'(x)}{12}wh^3 \tag{16}$$

となり、式 (5) の成立が確認できる。

(6)

せん断歪を 0 と近似した上で、直応力を部材全体にわたって求めることで $\sigma = A(x)z$ と表したときの $A(x)$ が得られる。それと式 (14) を用いてせん断歪を計算すれば良い。