2014 分野 3

nakao

2022 年 8 月 23 日

第 1 問

(1)

式 [1],[2] の左辺第 1 項は局所加速度であり、特定の場所における流速の変化率を表す。第 2,3 項は移流加速度であり、移動する流体粒子の加速度を表す。

(2)

流体の密度が一様であれば、x 方向、z 方向の長さがそれぞれ $\Delta x, \Delta z$ の微小領域において、流出と流入の流量が一致するから、

$$(u + \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x - u)\Delta z + (w + \frac{\partial w}{\partial z}\Delta z - w)\Delta x = 0 \tag{1}$$

が成り立つ。両辺を $\Delta x \Delta z$ で割ると、

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{2}$$

を得る。

(3)

式 (2) より、

$$\begin{aligned} u\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial u}{\partial z} &= u\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial u}{\partial z} + u\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \\ &= \frac{\partial (uu)}{\partial x} + \frac{\partial (uw)}{\partial z} \end{aligned} \tag{3}$$

であり、同様に、

$$\begin{aligned} u\frac{\partial w}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial z} &= u\frac{\partial w}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial z} + w\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \\ &= \frac{\partial (uw)}{\partial x} + \frac{\partial (ww)}{\partial z} \end{aligned} \tag{4}$$

が成り立つ。これを式 [1],[2] に代入することで、式 [3],[4] が得られる。

(4)

$(x, \eta(t,x))$ に存在した水粒子は時間 Δt の間に $(x+u\Delta t, \eta(t,x)+w\Delta t)$ に移動するから、

$$\eta(t+\Delta t, x+u\Delta t) = \eta(t,x) + w\Delta t \tag{5}$$

が成り立つ。左辺を Taylor 展開で 1 次近似すると、

$$\eta(t+\Delta t, x+u\Delta t) = \eta(t,x) + \frac{\partial \eta}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial \eta}{\partial x}u\Delta t \tag{6}$$

であり、これを式 (5) に代入して整理すると、式 [5] が得られる。

同様に、$(x, z_b(x))$ に存在した水粒子は時間 Δt の間に $(x+u\Delta t, z_b(x)+w\Delta t)$ に移動するから、

$$z_b(x+u\Delta t) = z_b(x) + w\Delta t \tag{7}$$

が成り立つ。左辺を Taylor 展開で 1 次近似すると、

$$z_b(x+u\Delta t) = z_b(x) + \frac{\partial z_b}{\partial x}u\Delta t \tag{8}$$

であり、これを式 (7) に代入して整理すると、式 [6] が得られる。

(5)

式 [2] と仮定より、

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho\left(g + \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) \simeq -\rho g \tag{9}$$

である。これを z から η まで鉛直方向に積分すると、

$$p_0 - p = -\rho g(\eta - z) \tag{10}$$

となり、式 [7] が得られる。å

(6)