2015 分野 1

nakao

2024 年 8 月 9 日

第 1 問

(1)

つり合いを表す微分方程式は、

$$EIw'''' = p \tag{1}$$

と表せる。単純支持条件では梁の両端で鉛直方向の変位と曲げモーメントが 0 になるから、境界条件は

$$w(0) = 0 \tag{2}$$
$$w(L) = 0 \tag{3}$$
$$w''(0) = 0 \tag{4}$$
$$w''(L) = 0 \tag{5}$$

である。

(2)

微小部分の力のつり合いより、曲げモーメントを $M(x)$ とすると

$$\frac{\mathrm{d}^2 M}{\mathrm{d}x^2} + p = 0 \tag{6}$$

が成り立つ。また、断面でのモーメントのつり合いから、

$$M(x) = -EI(x)w''(x) \tag{7}$$

が成り立つ。式 (7) を式 (6) に代入して、

$$E\left(I(x)w''''(x) + 2I'(x)w'''(x) + I''(x)w''(x)\right) = p \tag{8}$$

を得る。

(3)

変化しない。曲げモーメントは式 (6) から求められ、この式は断面 2 次モーメントの分布によらない。

(4)

変化する。オイラーの座屈荷重は，梁に軸力 $-P$ を加えたときの変位 w の分布から導出される．この w が従う微分方程式は

$$EI(x)w'' + Pw = 0 \tag{9}$$

であり，これより同じ軸力によって梁に生じる変位が $I(x)$ に依存するため，座屈を起こす軸力も $I(x)$ に依存する．

第 2 問

(1)

$t < 0$ のとき、

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= 0 \\ m\ddot{x}_2 + k(x_2 - x_3) &= 0 \\ m\ddot{x}_3 + k(x_3 - x_2) &= 0 \end{aligned} \tag{10}$$

より、

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & -k \\ 0 & -k & k \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{11}$$

が成り立つ。

$t \geq 0$ のとき、

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 + k(x_1 - x_2) &= 0 \\ m\ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) + k(x_2 - x_3) &= 0 \\ m\ddot{x}_3 + k(x_3 - x_2) &= 0 \end{aligned} \tag{12}$$

より、

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{13}$$

が成り立つ。

(2)

行列 M, K を

$$M = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{pmatrix} \tag{14}$$

とする。このとき、固有振動数 ω と固有モード $\boldsymbol{\phi}$ について、

$$\left(K - \omega^2 M\right) \boldsymbol{\phi} = \mathbf{0} \tag{15}$$

が成り立つ。$\boldsymbol{\phi} \neq \mathbf{0}$ なる解が存在するためには、$\det\left(K - \omega^2 M\right) = 0$ が必要であり、

$$\det\left(K - \omega^2 M\right) = -\omega^2 m(\omega^2 m - k)(\omega^2 m - 3k) \tag{16}$$

より、条件を満たすのは

$$\omega = 0, \sqrt{\frac{k}{m}}, \sqrt{\frac{3k}{m}} \tag{17}$$

のときである。

$\omega = 0$ のとき、$(K - \omega^2 M)\boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}$ を解くと、

$$\boldsymbol{\phi} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{18}$$

となる。これを 1 次モードとすれば、

$$\omega_1 = 0, \boldsymbol{\phi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{19}$$

である。

$\omega = \sqrt{k/m}$ のとき、$(K - \omega^2 M)\boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}$ を解くと、

$$\boldsymbol{\phi} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{20}$$

となる。これを 2 次モードとすれば、

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \boldsymbol{\phi}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{21}$$

である。

$\omega = \sqrt{3k/m}$ のとき、$(K - \omega^2 M)\boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}$ を解くと、

$$\boldsymbol{\phi} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{22}$$

となる。これを 3 次モードとすれば、

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{3k}{m}}, \boldsymbol{\phi}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{23}$$

である。

(3)

2 つの異なる固有モード形 $\boldsymbol{\phi}_i, \boldsymbol{\phi}_j$ に対して、

$$\boldsymbol{\phi}_i M \boldsymbol{\phi}_j = 0 \tag{24}$$

$$\boldsymbol{\phi}_i K \boldsymbol{\phi}_j = 0 \tag{25}$$

が成り立つことを多自由度系モードの直交性という。これを利用することで、複数の変数で連立された運動方程式が独立な微分方程式に分解できる。

$1 \leq i,j \leq 3, i \neq j$ なる任意の (i,j) に対して、式 (15) より、

$$\boldsymbol{\phi}_j^T(K - \omega_i^2 M)\boldsymbol{\phi}_i = 0 \tag{26}$$
$$\boldsymbol{\phi}_i^T(K - \omega_j^2 M)\boldsymbol{\phi}_j = 0 \tag{27}$$

が成立している。ここで、スカラーの値は転置しても同じであるから、

$$\boldsymbol{\phi}_j^T K \boldsymbol{\phi}_i = \left(\boldsymbol{\phi}_j^T K \boldsymbol{\phi}_{\boldsymbol{i}}\right)^T = \boldsymbol{\phi}_i^T K \boldsymbol{\phi}_j \tag{28}$$
$$\boldsymbol{\phi}_j^T M \boldsymbol{\phi}_i = \left(\boldsymbol{\phi}_j^T M \boldsymbol{\phi}_{\boldsymbol{i}}\right)^T = \boldsymbol{\phi}_i^T M \boldsymbol{\phi}_j \tag{29}$$

が成り立つ。式 (28),(29) を式 (26) に代入して式 (27) - 式 (26) を計算すると、

$$(\omega_j^2 - \omega_i^2)\boldsymbol{\phi}_i^T M \boldsymbol{\phi}_j = 0 \tag{30}$$

を得る。$i \neq j$ であるから $\omega_i \neq \omega_j$ であり、ここから $\boldsymbol{\phi}_i^T M \boldsymbol{\phi}_j = 0$ を得る。これを式 (27) に代入して、$\boldsymbol{\phi}_i^T K \boldsymbol{\phi}_j = 0$ を得る。

(4)

応答を固有振動の重ね合わせとして、スカラー q_1, q_2, q_3 を用いて

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{3} q_i \boldsymbol{\phi}_i \tag{31}$$

と表す。これを運動方程式 $M\ddot{\boldsymbol{x}} + K\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ に代入すると、モードの直交性より以下の独立な方程式

$$\boldsymbol{\phi}_i^T M \boldsymbol{\phi}_i \ddot{q}_i + \boldsymbol{\phi}_i^T K \boldsymbol{\phi}_i q_i = 0 \quad \text{for} \quad i = 1,2,3 \tag{32}$$

を得る。$\boldsymbol{\phi}_i^T M \boldsymbol{\phi}_i, \boldsymbol{\phi}_i^T K \boldsymbol{\phi}_i$ の値をそれぞれ計算すると、

$$\begin{cases} 3m\ddot{q}_1 & = 0 \\ 2m\ddot{q}_2 + 2kq_2 & = 0 \\ 6m\ddot{q}_3 + 18kq_3 & = 0 \end{cases} \tag{33}$$

となる。

初期条件については、

$$\boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dot{\boldsymbol{x}}(0) = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{34}$$

であるが、モードの直交性より、

$$q_i(0) = \frac{\boldsymbol{\phi}_i^T M \boldsymbol{x}(0)}{\boldsymbol{\phi}_i^T M \boldsymbol{\phi}_i}, \dot{q}_i(0) = \frac{\boldsymbol{\phi}_i^T M \dot{\boldsymbol{x}}(0)}{\boldsymbol{\phi}_i^T M \boldsymbol{\phi}_i} \quad \text{for} \quad i = 1,2,3 \tag{35}$$

が成り立つ。これをそれぞれ計算し、

$$q_1(0) = 0, \quad q_2(0) = 0, \quad q_3(0) = 0 \tag{36}$$
$$\dot{q}_1(0) = \frac{v}{3}, \quad \dot{q}_2(0)\frac{v}{2}, \quad \dot{q}_3(0) = \frac{v}{6} \tag{37}$$

をとなる。式 (33),(36),(37) を解くと、

$$\begin{cases} q_1 &= \frac{v}{3}t \\ q_2 &= \frac{v}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t \\ q_3 &= \frac{v}{6}\sqrt{\frac{m}{3k}}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t \end{cases} \tag{38}$$

を得る。したがって、求める応答は、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \frac{v}{3}t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{v}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + \frac{v}{6}\sqrt{\frac{m}{3k}}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{v}{3}t + \frac{v}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{v}{6}\sqrt{\frac{m}{3k}}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t \\ \frac{v}{3}t - \frac{v}{3}\sqrt{\frac{m}{3k}}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t \\ \frac{v}{3}t - \frac{v}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{v}{6}\sqrt{\frac{m}{3k}}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{39}$$

である。