2019 分野 1

nakao

2024 年 8 月 19 日

第 1 問

(1)

x 軸方向の力のつり合いから、

$$(\sigma + \mathrm{d}\sigma)w\mathrm{d}z + (\tau + \mathrm{d}\tau)w\mathrm{d}x - \sigma w\mathrm{d}z + \tau w\mathrm{d}x = 0 \tag{1}$$

が成り立つ。式 (1) を $w\mathrm{d}x\mathrm{d}z$ で割ると、

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}z} = 0 \tag{2}$$

となり、したがって、x 軸方向のつり合い式は、

$$\frac{\partial\sigma}{\partial dx} + \frac{\partial\tau}{\partial dz} = 0 \tag{3}$$

で与えられる。

(2)

微小部分の右端まわりのモーメントのつり合いから、

$$M + \mathrm{d}M - M - V\mathrm{d}x = 0 \tag{4}$$

となる。これより、

$$V = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} \tag{5}$$

が成り立つ。

(3)

$$V = \iint \tau \mathrm{d}A \tag{6}$$

$$M = \iint \sigma z \mathrm{d}A \tag{7}$$

より、

$$V = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau w \mathrm{d}z \tag{8}$$

$$M = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma z w \mathrm{d}z \tag{9}$$

である。

(4)

$$\frac{\partial}{\partial x}[A(x)z] = A'(x)z \tag{10}$$

であるから、式 (3) は

$$\frac{\partial \tau}{\partial z} = -A'(x)z \tag{11}$$

と書き直せる。これより、

$$\tau = \int (-A'(x)z)\,\mathrm{d}z = -\frac{1}{2}A'(x)z^2 + C(x) \tag{12}$$

を得る。ここで、$C(x)$ は任意の x の関数である。境界条件 $\tau(z = \pm h/2) = 0$ より、

$$C(x) = \frac{1}{2}A'(x)\frac{h^2}{4} \tag{13}$$

と定まり、

$$\tau = \frac{1}{2}A'(x)\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right) \tag{14}$$

となる。

(5)

式 (8) に式 (14)、式 (9) に $\sigma = A(x)z$ をそれぞれ代入すると、

$$M = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} A(x)z^2 w \mathrm{d}z = \frac{A(x)}{12}wh^3 \tag{15}$$

$$V = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{1}{2}A'(x)\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right)\mathrm{d}z = \frac{A'(x)}{12}wh^3 \tag{16}$$

となり、式 (5) の成立が確認できる。

(6)

せん断歪を 0 と近似した上で、直応力を部材全体にわたって求めることで $\sigma = A(x)z$ と表したときの $A(x)$ が得られる。それと式 (14) を用いてせん断歪を計算すれば良い。

第 2 問

(1)

(a)

水面から鉛直上方 $l-\frac{m}{\rho\pi r^2}$ の高さから測った円柱上面の高さを u とする。円柱にかかる y 方向の力は、

$$-mg+\rho g\pi r^2\left\{l-\left(l-\frac{m}{\rho\pi r^2}\right)-u\right\}=-\rho g\pi r^2 u \tag{17}$$

となり、運動方程式は、

$$m\ddot{u}=-\rho g\pi r^2 u \tag{18}$$

で与えられる。

(b)

円柱は単振動し、その周期は $2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho g\pi r^2}}$ となる。

(2)

(a)

質点のつり合い位置からの変位を x と表す。質点の運動方程式が

$$M\ddot{x}=-2kx \tag{19}$$

であるから、x の一般解は、定数 C_1, C_2 を用いて

$$x=C_1\cos\sqrt{\frac{2k}{M}}t+C_2\sin\sqrt{\frac{2k}{M}}t \tag{20}$$

で与えられる。初期条件 $x(0)=A, \dot{x}(0)=0$ より C_1, C_2 を決定し、

$$x=A\cos\sqrt{\frac{2k}{M}}t \tag{21}$$

となる。この微分より、質点の速度と加速度はそれぞれ、

$$\dot{x}=-\sqrt{\frac{2k}{M}}A\sin\sqrt{\frac{2k}{M}}t \tag{22}$$

$$\ddot{x}=-\frac{2k}{M}A\cos\sqrt{\frac{2k}{M}}t \tag{23}$$

となる。

(3)

質点の y 軸方向の変位を y で表す。それぞれのばねの伸びは、$\sqrt{L^2+y^2}-L$ であり、弾性力の鉛直方向成分は

$$k\left(\sqrt{L^2+y^2}-L\right)\frac{y}{\sqrt{L^2+y^2}}=ky\left(1-\frac{L}{\sqrt{L^2+y^2}}\right) \tag{24}$$

で与えられる。したがって、質点の運動方程式は、

$$M\ddot{y} = -2ky\left(1 - \frac{L}{\sqrt{L^2 + y^2}}\right) \tag{25}$$

となる。

(4)

$(1+\delta)^\alpha = 1 + \alpha\delta$ において、$\delta = y^2/L^2, \alpha = -1/2$ として、

$$\left(1 + \frac{y^2}{L^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \simeq 1 - \frac{y^2}{2L^2} \tag{26}$$

が得られる。これを用いると、式 (25) の右辺は、

$$-2ky\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{y^2}{L^2}}}\right) = -2ky\left\{1 - \left(1 - \frac{y^2}{2L^2}\right)\right\} = -\frac{ky^3}{L^2} \tag{27}$$

となる。したがって、運動方程式は、

$$M\ddot{y} = -\frac{ky^3}{L^2} \tag{28}$$

で近似できる。

質点のポテンシャルが y の 4 次関数となることから、この運動と単振動を比べると、振動の端では質点の加減速が激しく、振動中心付近では質点の速度変化が小さい。