2013 分野 3

nakao

2022 年 8 月 25 日

第 1 問

(1)

(a)

断面平均流速を v とすると、

$$E = \frac{v^2}{2g} + h \tag{1}$$

が成り立つ。連続式 $Q = vbh$ により、

$$E = \frac{Q^2}{2gb^2h^2} + h \tag{2}$$

となる。

(b)

式 (2) より、

$$\left(\frac{Q^2}{b^2}\right)^2 = 2gh^2(E - h) \tag{3}$$

となるから、

$$f(h) = 2gh^2(E - h) \tag{4}$$

である。$f'(h) = 0$ を解いて $h = \frac{2}{3}E$ を得る。

(c)

$Q = b\sqrt{f(h)}$ より、$f(h)$ が最大のときに Q が最大になる。$h = \frac{2}{3}E$ とすれば $f(h)$ が最大になり、

$$Q_{max} = b\sqrt{f\left(\frac{2}{3}E\right)} = b\sqrt{\frac{8}{27}gE^3} \tag{5}$$

である。このとき断面 B における流速と水深をそれぞれ v_B, h_B とすると、

$$v_B h_B \frac{b}{2} = Q_{max} \tag{6}$$

であることから

$$v_B = \frac{4}{3h_B}\sqrt{\frac{2gE^3}{3}} \tag{7}$$

を得る。

(d)

比エネルギーの保存則

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{Q^2}{2gb^2h^2} + h\right) = 0 \tag{8}$$

を展開すると、

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{Fr}^2}{1-\mathrm{Fr}^2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}x} \tag{9}$$

が得られる。Fr はフルード数である。比エネルギーが保存するためには跳水が起こらないことが必要であり、流下方向に常流か射流かは変化しない。したがって、$1-\mathrm{Fr}^2$ の符号は流下方向に変化しない。常流と射流のそれぞれの場合について、水面形は図 1 の通り。

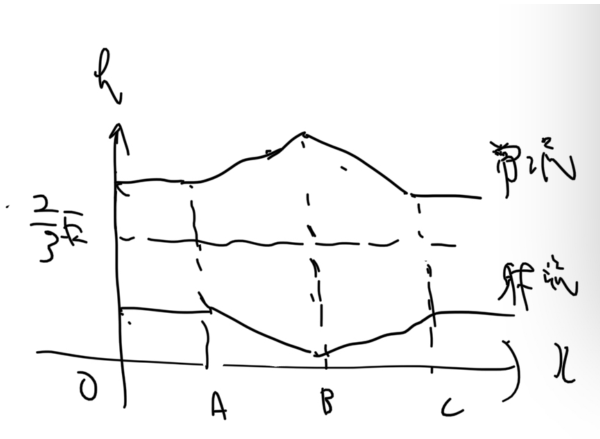

図 1　常流または射流のときの水面形

(2)

(a)

エネルギーフラックス F を表す式で各項の積分を計算すると、

$$\overline{\int_{-h}^{0}\rho gzu\mathrm{d}z} = -\frac{1}{2}a\rho\sqrt{g^3h^3}\,\overline{\cos(kx-\omega t)} = 0 \tag{10}$$

$$\overline{\int_{-h}^{0}\frac{\rho}{2}u^3\mathrm{d}z} = \frac{1}{8}\rho a^3\sqrt{\frac{g^3}{h}}\left(\overline{\cos 3(kx\omega t)} + 3\overline{\cos(kx-\omega t)}\right) = 0 \tag{11}$$

$$\overline{\int_{-h}^{0}pu\mathrm{d}z} = \frac{1}{2}\rho a\sqrt{g^3h}\left(a + a\overline{\cos 2(kx-\omega t)} + h\overline{\cos(kx-\omega t)}\right) = \frac{1}{2}\rho a^2\sqrt{g^3h} \tag{12}$$

であり、

$$F = \overline{\int_{-h}^{0}\left(\rho gz + \frac{\rho}{2}u^2\right)\mathrm{d}z} + \overline{\int_{-h}^{0}pu\mathrm{d}z} = \frac{1}{2}\rho a^2\sqrt{g^3h} \tag{13}$$

を得る。

(b)

　断面 B における波の振幅を a_B とすると、エネルギーフラックスが一定であるから、

$$\frac{1}{2}\rho a^3\sqrt{g^3h}b = \frac{1}{2}\rho a_B^3\sqrt{g^3h}\frac{b}{2} \tag{14}$$

が成り立つ。したがって、

$$a_B = 2^{\frac{1}{3}}a \tag{15}$$

である。