2020 分野 1

nakao

2022 年 7 月 27 日

第 1 問

(1)

部材の軸に垂直な断面は変形後も軸に垂直であること。

(2)

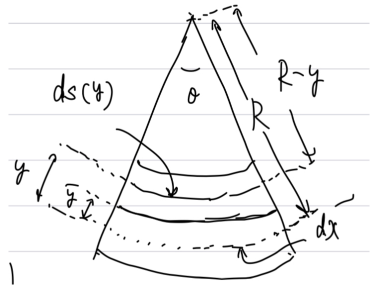

図 1　部材微小部分の変形形状

変形後の部材形状を扇形と見たときの中心角を θ、変形後の軸方向の長さを y の関数として $ds(y)$ とする。中立軸ではひずみが 0 であるから、$ds(0) = dx$ であり、

$$\begin{aligned} R\theta &= dx \\ (R-y)\theta &= ds(y) \end{aligned} \tag{1}$$

が成り立つ。軸ひずみ ε_{xx} は、

$$\varepsilon_{xx} = \frac{ds(y) - dx}{dx} = -\frac{y\theta}{R\theta} = -\frac{y}{R} \tag{2}$$

となる。

(3)

応力 σ_{xx} は、

$$\sigma_{xx} = \begin{cases} E_1\varepsilon_{xx} & (\bar{y} \le y \le y + h) \\ E_2\varepsilon_{xx} & (\bar{y} - h \le y \le \bar{y}) \end{cases} = \begin{cases} -\frac{E_1 y}{R} & (\bar{y} \le y \le y + h) \\ -\frac{E_2 y}{R} & (\bar{y} - h \le y \le \bar{y}) \end{cases} \tag{3}$$

であるから、応力分布は下の図のようになる。

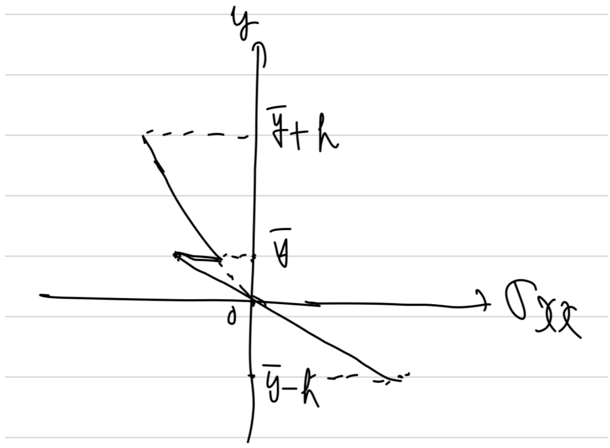

図 2　応力分布

(4)

満たすべき条件は、

$$\iint \sigma_{xx} \mathrm{d}A = 0 \tag{4}$$

である。

$$\begin{aligned}\iint \sigma_{xx} \mathrm{d}A &= \int_{\bar{y}-h}^{\bar{y}+h} \sigma_{xx} w \mathrm{d}y \\ &= \int_{\bar{y}-h}^{\bar{y}} \left(-\frac{E_2}{R} y\right) w \mathrm{d}y + \int_{\bar{y}}^{\bar{y}+h} \left(-\frac{E_1}{R} y\right) w \mathrm{d}y \\ &= -\frac{E_1 + E_2}{R} w \bar{y} h + \frac{E_2 - E_1}{2R} w h^2\end{aligned} \tag{5}$$

であり、これが 0 になるためには、

$$\bar{y} = \frac{E_2 - E_1}{2(E_1 + E_2)} h \tag{6}$$

(5)

モーメントのつり合いから

$$M = \iint \sigma_{xx} y \mathrm{d}A \tag{7}$$

である。これを計算すると、

$$
\begin{aligned}
M &= \iint \sigma_{xx} y \mathrm{d}A \\
&= \int_{\bar{y}-h}^{\bar{y}+h} \sigma_{xx} y w \mathrm{d}y \\
&= \int_{\bar{y}-h}^{\bar{y}} \left(-\frac{E_2}{R} y^2\right) w \mathrm{d}y + \int_{\bar{y}}^{\bar{y}+h} \left(-\frac{E_1}{R} y^2\right) w \mathrm{d}y \\
&= -\frac{2E_1}{3R} wh(6\bar{y}^2 - 3\bar{y}h + 2h^2)
\end{aligned}
\tag{8}
$$

となる。

(6)

クラック発生直後から 2 本の梁が独立に曲げを受けると考えると、応力分布は下の図のようになる。上側の

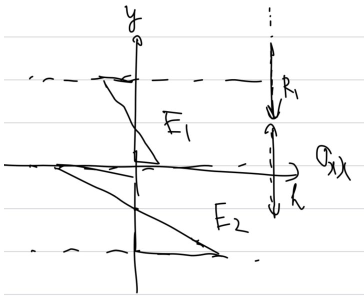

図 3　クラック発生後の応力分布

梁で変形時の中立軸の曲率半径を R_1 とすると、モーメントのつりあいから、

$$
\begin{aligned}
M &= \iint \sigma_{xx} y \mathrm{d}A \\
&= \int_{-h/2}^{h/2} E_1 \left(-\frac{y}{R_1}\right) w \mathrm{d}y + \int_{-h/2}^{h/2} E_2 \left(-\frac{y}{R_1 + h}\right) w \mathrm{d}y \\
&= \int_{-h/2}^{h/2} E_1 \left(-\frac{y}{R_1}\right) w \mathrm{d}y + \int_{-h/2}^{h/2} 3E_1 \left(-\frac{y}{R_1 + h}\right) w \mathrm{d}y \\
&= -\frac{4R_1 + h}{12R_1(R_1 + h)} E_1 w h^3
\end{aligned}
\tag{9}
$$

である。h が R_1 に比べて十分小さいとすると、$4R_1 + h \simeq 4R_1, R_1 + h \simeq R_1$ より、

$$
M = -\frac{E_1 w h^3}{3R_1} \tag{10}
$$

と表せる。一方、$E_2 = 3E_1$ と式 (6) より $\bar{y} = h/4$ であり、これを用いて式 (8) は、

$$
M = -\frac{13E_1 w h^2}{12R} \tag{11}
$$

と表せる。クラック発生前後でモーメントが同一であるとすると、式 (10),(11) より

$$
R_1 = \frac{4}{13} R \tag{12}
$$

を得る。よって、クラック発生前の中立軸における曲率半径は R から $R_1 + h/2 + \bar{y} \simeq 4R/13$ に変化する。曲率半径が小さくなっているから変形は大きくなっている。

第 2 問

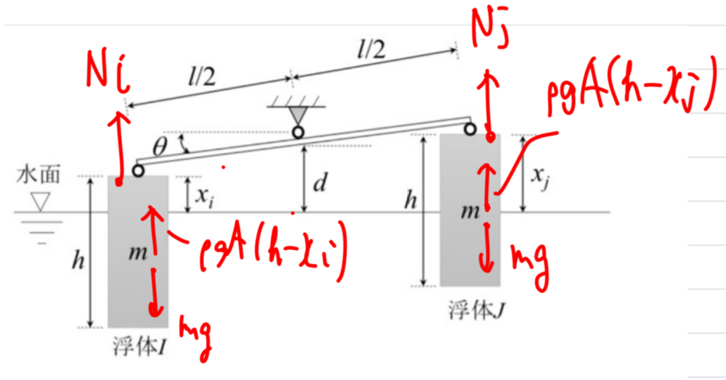

図 4　問題設定

(1)

(a)

浮体 I, J が連結棒から受ける力をそれぞれ N_i, N_j とする。連結棒の質量が無視できることから、この慣性モーメントは 0 と近似できる。よって、連結棒の中心まわりのモーメントがつりあうことから、

$$N_i = N_j = N \tag{13}$$

と表せる。浮体の運動方程式

$$\begin{cases} m\ddot{x}_i &= -mg + \rho g A(h - x_i) + N \\ m\ddot{x}_j &= -mg + \rho g A(h - x_j) + N \end{cases} \tag{14}$$

より、

$$m(\ddot{x}_i + \ddot{x}_j) = -2mg + \rho g A\{2h - (x_i + x_j)\} + 2N \tag{15}$$

が成り立つ。ここに $x_i + x_j = h$ を代入すると、

$$0 = -2mg + \rho g A h + 2N \tag{16}$$

であるから、

$$N = mg - \frac{1}{2}\rho g A h \tag{17}$$

となる。浮体 J に作用する保存力は

$$-mg + \rho g A(h - x_j) + N = \rho g A\left(\frac{h}{2} - x_j\right) \tag{18}$$

であるから、浮体 J のポテンシャル U_j について、

$$U_j = -\int \rho g A \left(\frac{h}{2} - x_j\right) \mathrm{d}x_j = \frac{1}{2}\rho g A \left(\frac{h}{2} - x_j\right)^2 \tag{19}$$

を得る。

(b)

浮体 J の運動方程式

$$m\ddot{x}_j = \rho g A \left(\frac{h}{2} - x_j\right) \tag{20}$$

に $x_j = h/2 + \sin\theta$ を代入すると、

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\sin\theta = -\rho g h \sin\theta \tag{21}$$

となる。

(c)

式 (21) に $\sin\theta \simeq \theta$ とすると、

$$m\ddot{\theta} = -\rho g A \theta \tag{22}$$

を得る。これより、固有振動数は $\sqrt{\rho g A/m}$ である。

(2)

一般の d について (1) と同様に計算すると、運動方程式は式 (21) と同じになる。d は固有振動数を変えないため、d は発電装置の効率を変えない。