2023 分野 1

nakao

2024 年 8 月 24 日

第 1 問

(1)

変形後の部材の扇形がなす頂角を $\Delta\theta$ として，中立軸から高さ y 離れた部分の変形後の長さを Δs とすると，

$$\Delta s = (R - y)\Delta\theta \tag{1}$$

が成り立つ．中立面では軸ひずみが生じないため $\Delta s = dx$ となるから

$$\Delta\theta = \frac{dx}{R} \tag{2}$$

である．これを式 (1) に代入して，

$$\Delta s = \left(1 - \frac{y}{R}\right) dx \tag{3}$$

が得られる．これより，軸ひずみ ε と軸応力 σ は

$$\varepsilon = \frac{\Delta s - dx}{dx} = -\frac{y}{R} \tag{4}$$

$$\sigma = -E\varepsilon = -\frac{Ey}{R} \tag{5}$$

となる．

(2)

はりに生じる弾性エネルギー H は，

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}\int_V \sigma\varepsilon \mathrm{d}V \\ &= \frac{1}{2}\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-h}^{h}\int_0^L \left(-\frac{Ey}{R}\right)\left(-\frac{y}{R}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \frac{E}{2}\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-h}^{h} y^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}z \int_0^L \frac{\mathrm{d}x}{R^2} \\ &= \frac{EI}{2}\int_0^L \frac{\mathrm{d}x}{R^2} \end{aligned} \tag{6}$$

となる．

(3)

$w = \alpha x^3 + \beta x^2$ のとき,

$$\frac{1}{R} = 6\alpha x + 2\beta \tag{7}$$

であるから,

$$\begin{aligned} H &= \frac{E}{2} I \int_0^L (6\alpha x + 2\beta)^2 \mathrm{d}x \\ &= 2EIL(3\alpha^2 L^2 + 3\alpha\beta L + \beta^2) \end{aligned} \tag{8}$$

を得る．したがって，ΔH は

$$\Delta H = 2EIL\left(3\alpha^2 L^2 + 3\alpha\beta + \beta^2\right) - P\left(\alpha L^3 + \beta L^2\right) \tag{9}$$

と表される．α, β による H の偏微分を 0 として

$$\frac{\partial \Delta H}{\partial \alpha} = 2EIL\left(6\alpha L^2 + 3\beta L\right) - PL^3 = 0 \tag{10}$$

$$\frac{\partial \Delta H}{\partial \beta} = 2EIL\left(3\alpha L + 2\beta\right) - PL^2 = 0 \tag{11}$$

を解くと,

$$\alpha = -\frac{P}{6EI}, \beta = \frac{PL}{2EI} \tag{12}$$

を得る．

(4)

(a)

u は微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{P}{GA} \tag{13}$$

に従う．この一般解は定数 C を用いて

$$u = \frac{P}{GA} x + C \tag{14}$$

と表され，境界条件 $u(0) = 0$ より $C = 0$ と決定される．$G = E / \{2(1+\nu)\}$ より,

$$u = \frac{2(1+\nu)P}{EA} x \tag{15}$$

となる．

(b)

$x \sim L$ のとき,

$$u = \frac{2(1+\mu)P}{EA} x \sim \frac{PL}{EA} = \frac{PL^3}{E} \frac{1}{L^2 A} \tag{16}$$

$$w = -\frac{P}{6EI} x^3 + \frac{PL}{2EI} x^2 \sim \frac{PL^3}{EI} = \frac{PL^3}{E} \frac{1}{I} \tag{17}$$

のように見積もれる．$h \ll L$ を仮定すると

$$I = \int y^2 \mathrm{d}A < \int h^2 \mathrm{d}A = h^2 A \ll L^2 A \tag{18}$$

であることから，

$$u \sim \frac{PL^3}{E}\frac{1}{L^2 A} \ll \frac{PL^3}{E}\frac{1}{I} \sim w \tag{19}$$

がわかる．

(5)

(a)

回転バネの弾性エネルギーを考慮すると，この系におけるトータルの弾性エネルギー H' は

$$H' = \frac{1}{2}\int_V \sigma\varepsilon \mathrm{d}V + \frac{1}{2}k\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}(0)\right)^2 \tag{20}$$

と表せる．外力による仕事 W' は回転バネを導入する前の系と同じく

$$W' = Pw(L) \tag{21}$$

である．したがって，

$$\Delta H' = H' - W' = \frac{1}{2}\int_V \sigma\varepsilon \mathrm{d}V + \frac{1}{2}k\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}(0)\right)^2 - Pw(L) \tag{22}$$

と表せる．

(b)

$w' = \alpha^3 x^3 + \beta^2 x^2 + \gamma x$ と仮定する．w は x の微分方程式

$$EI\frac{\mathrm{d}^4 w}{\mathrm{d}x^4} = 0 \tag{23}$$

に従うため x の 3 次までの多項式で表せ，$x = 0$ での境界条件 $w(0) = 0$ より定数項はゼロである．回転バネがある場合は，$x = 0$ での境界条件で回転角 $w'(0)$ が一般には 0 ではないため，x の 1 次の係数をパラメータ表示に加えた．

(c)

このパラメータ設定のもとで $\Delta H'$ は，

$$\Delta H' = 2EIL\left(3L^2\alpha^2 + 3L\alpha\beta + \beta^2\right) - LP\left(L^2\alpha + L\beta + \gamma\right) + \frac{\gamma^2 k}{2} \tag{24}$$

と計算できる．α, β, γ による偏微分を 0 として

$$\frac{\partial \Delta H}{\partial \alpha} = L^2\left(6EI\left(2L\alpha + \beta\right) - LP\right) = 0 \tag{25}$$

$$\frac{\partial \Delta H}{\partial \beta} = L\left(2EI\left(3L\alpha + 2\beta\right) - LP\right) = 0 \tag{26}$$

$$\frac{\partial \Delta H}{\partial \gamma} = -LP + \gamma k = 0 \tag{27}$$

を解くと,

$$\alpha = -\frac{P}{6EI}, \beta = \frac{LP}{2EI}, \gamma = \frac{LP}{k} \tag{28}$$

が得られる.

第 2 問

(1)

1 周分の F_D による仕事は,

$$\begin{aligned}
E_D &= \int_{0\to1} F_D \mathrm{d}x + \int_{2\to0} F_D \mathrm{d}x + \int_{0\to3} F_D \mathrm{d}x + \int_{4\to0} F_D \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{x_0} \eta k x \mathrm{d}x + \int_{x_0}^0 (-\eta k x) \mathrm{d}x + \int_0^{-x_0} \eta k x \mathrm{d}x + \int_{-x_0}^0 (-\eta k x) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{x_0} \eta k x \mathrm{d}x + \int_0^{x_0} \eta k x \mathrm{d}x + \int_{-x_0}^0 (-\eta k x) \mathrm{d}x + \int_{-x_0}^0 (-\eta k x) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} \eta k \left(x_0\right)^2 \times 4 \\
&= 2\eta k \left(x_0\right)^2
\end{aligned} \tag{29}$$

(2)

viscous damping の係数を c として変位 x は

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P_0 \sin(\omega t) \tag{30}$$

に従う．この定常解は

$$x = \frac{P_0}{\sqrt{(-m\omega^2 + k)^2 + (c\omega)^2}} \sin(\omega t - \varphi) \tag{31}$$

$$\sin\varphi = \frac{-m\omega^2 + k}{\sqrt{(-m\omega^2 + k)^2 + (c\omega)^2}} \tag{32}$$

$$\cos\varphi = \frac{c\omega}{\sqrt{(-m\omega^2 + k)^2 + (c\omega)^2}} \tag{33}$$

と表され,

$$\dot{x} = \frac{P_0 \omega}{\sqrt{(-m\omega^2 + k)^2 + (c\omega)^2}} \cos(\omega t - \varphi) \tag{34}$$

が得られる．viscous damping による力 $c\dot{x}$ が $t : \varphi/\omega \to (\varphi + 2\pi)/\omega$ の一周期でする仕事は,

$$\begin{aligned}
\int c\dot{x} \mathrm{d}x &= \int_{\varphi/\omega}^{(\varphi+2\pi)/\omega} c\dot{x} \times \dot{x} \mathrm{d}t \\
&= \int_{\varphi/\omega}^{(\varphi+2\pi)/\omega} \frac{\left(P_0\right)^2 \omega^2 c}{(-m\omega^2 + k)^2 + (c\omega)^2} \cos^2(\omega t - \varphi) \mathrm{d}t \\
&= \frac{\left(P_0\right)^2 \omega^2 c}{(-m\omega^2 + k)^2 + (c\omega)^2} \frac{\pi}{\omega} \\
&= \frac{\left(P_0\right)^2 \omega c \pi}{(-m\omega^2 + k)^2 + (c\omega)^2}
\end{aligned} \tag{35}$$

となる．これが E_D と等しくなるような c は,

$$c=\frac{2\eta k\left(x_0\right)^2\left\{(-m\omega^2+k)^2+(c\omega)^2\right\}}{\pi\omega\left(P_0\right)^2} \tag{36}$$

(3)

静的に載荷したときの力のつり合いより,

$$kX_{\mathrm{st}}=P_0 \tag{37}$$

が成り立つ．equivalent viscous system において，定常応答のピーク値が $3X_{\mathrm{st}}$ と等しくなる条件は,

$$\frac{P_0}{\sqrt{(m\omega^2+k)^2+(c\omega)^2}}=3X_{\mathrm{st}} \tag{38}$$

より,

$$\sqrt{(m\omega^2+k)^2+(c\omega)^2}=\frac{k}{3} \tag{39}$$

となる．これを満たす c は,

$$c=\sqrt{-\frac{8k^2}{9\omega^2}+2mk+m^2\omega^2} \tag{40}$$

これを式 (36) に代入して,

$$\eta=\frac{\pi\omega\left(P_0\right)^2}{2k\left(x_0\right)^2\left\{(-m\omega^2+k)^2+(c\omega)^2\right\}}\sqrt{-\frac{8k^2}{9\omega^2}+2mk+m^2\omega^2} \tag{41}$$

が得られる．

(4)

(a)

hysteretic damping では応答の振幅 x_0 が同じであれば，エネルギー散逸が周波数に依存しない．viscous damping では，応答の振幅が同じ場合でも周波数によってエネルギー散逸が異なる．

(b)

$P(t)=P_0\sin(\omega t)$ の外力を $\omega=0,\sqrt{k/m}$ の 2 つの振動数で作用させ，応答を観測する．$w=0$ のときは

$$x=\frac{P_0}{k}, \tag{42}$$

$w=\sqrt{k/m}$ のときは

$$x=\frac{P_0}{c}\sqrt{\frac{m}{k}}\sin(\omega t-\phi) \tag{43}$$

が応答となり，m,k を既知として，これら振幅の比から c が推定できる．