2015 分野 3

nakao

2022 年 8 月 22 日

第 1 問

(1)

$\boldsymbol{u} = (u, v)$ に対して、

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = a\cos\omega t - a\cos\omega t = 0 \tag{1}$$

より、非圧縮性流体の連続式が満たされている。

(2)

速度ポテンシャル ϕ を

$$\phi = \frac{1}{2}a(x^2 - y^2)\cos\omega t \tag{2}$$

とすれば、$\boldsymbol{\nabla}\phi = \boldsymbol{u}$ が満たされる。

(3)

流線上の微小変化 $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$ は流速ベクトルに平行であるから、

$$u\mathrm{d}y - v\mathrm{d}x = 0 \tag{3}$$

が成り立つ。これより、

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -\frac{\mathrm{d}x}{x} \tag{4}$$

が得られる。両辺を積分した結果は定数 C を用いて

$$\log y = -\log x + C \tag{5}$$

と表せる。したがって、流線は任意の実数 A を用いて、

$$xy = A \tag{6}$$

である。

(4)

流体加速度の x 方向成分は、

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-a\omega x\sin\omega t+a^2x\cos^2\omega t \tag{7}$$

である。また、y 方向成分は、

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=a\omega y\sin\omega t+a^2y\cos^2\omega t \tag{8}$$

である。

(5)

Euler の運動方程式より、

$$\begin{pmatrix}-a\omega x\sin\omega t+a^2x\cos^2\omega t\\ a\omega y\sin\omega t+a^2y\cos^2\omega t\end{pmatrix}=-\frac{\boldsymbol{\nabla}p}{\rho} \tag{9}$$

である。この解は定数 p_0 を用いて、

$$p=\frac{1}{2}\rho a\omega(x^2-y^2)\sin\omega t-\frac{1}{2}\rho a^2(x^2+y^2)\cos^2\omega t+p_0 \tag{10}$$

と表せる。したがって、

$$p_e=p(x,y,t)-p(0,0,t)=\frac{1}{2}\rho a\omega(x^2-y^2)\sin\omega t-\frac{1}{2}\rho a^2(x^2+y^2)\cos^2\omega t \tag{11}$$

となる。

(6)

経路 C を

$$\left\{\boldsymbol{r}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}x_p\\ y_p\end{pmatrix}\middle|\, 0\le s\le 1\right\} \tag{12}$$

とする。経路 C 上の微小変化を $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$、単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とすると、求める値は、

$$\int_C(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})|\mathrm{d}\boldsymbol{r}| \tag{13}$$

と表せる。ここで、

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s=\begin{pmatrix}x_p\mathrm{d}s\\ y_p\mathrm{d}s\end{pmatrix} \tag{14}$$

より、

$$\boldsymbol{n}=\frac{1}{\sqrt{x_p^2+y_p^2}}\begin{pmatrix}y_p\\ -x_p\end{pmatrix},\quad |\mathrm{d}\boldsymbol{r}|=\sqrt{x_p^2+y_p^2}\mathrm{d}s \tag{15}$$

であるから、

$$\int_C(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|=\int_0^1\begin{pmatrix}sax_p\cos\omega t\\ -say_p\cos\omega t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}y_p\\ -x_p\end{pmatrix}\mathrm{d}s=ax_py_p\cos\omega t \tag{16}$$

となる。

(7)

流体粒子の位置を $\tilde{\boldsymbol{r}}(t) = (\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ とすると、

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{u}(\tilde{\boldsymbol{r}}(t)) \tag{17}$$

が成り立つ。各成分を書き下すと、

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\tilde{x}}{\mathrm{d}t} &= a\tilde{x}\cos\omega t \\ \frac{\mathrm{d}\tilde{y}}{\mathrm{d}t} &= -a\tilde{y}\cos\omega t \end{aligned} \tag{18}$$

であり、ここから、

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\tilde{x}}{\tilde{x}} &= a\cos\omega t\mathrm{d}t \\ \frac{\mathrm{d}\tilde{y}}{\tilde{y}} &= -a\cos\omega t\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{19}$$

を得る。両辺を積分した結果は定数 C_x, C_y を用いて、

$$\begin{aligned} \log\tilde{x} &= \frac{a}{\omega}\sin\omega t + C_x \\ \log\tilde{y} &= -\frac{a}{\omega}\sin\omega t + C_y \end{aligned} \tag{20}$$

と表せる。初期条件 $\tilde{x}(0) = x_p, \tilde{y}(0) = y_p$ を満たすように C_x, C_y を決定し、

$$\tilde{\boldsymbol{r}} = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_p \exp\left(\frac{a}{\omega}\sin\omega t\right) \\ y_p \exp\left(-\frac{a}{\omega}\sin\omega t\right) \end{pmatrix} \tag{21}$$

を得る。

(8)

求める値は、

$$\left.\frac{\mathrm{d}p(\tilde{x}, \tilde{y}, t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \frac{1}{2}\rho a(\omega^2 - 2a^2)(x_p^2 - y_p^2) \tag{22}$$

である。