template

nakao

2022 年 7 月 27 日

第 1 問

(1)

(a)

断面流速を v とすると、

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{ah^{\frac{3}{2}}} \tag{1}$$

であるから、比エネルギー E は、

$$E = \frac{v^2}{2g} + h = \frac{Q^2}{2ga^2h^3} + h \tag{2}$$

となる。

(b)

式 (2) を h で微分して、

$$\frac{\partial E}{\partial h} = -\frac{3Q^2}{2ga^2h^4} + 1 \tag{3}$$

を得る。$h = h_c$ において $\frac{\partial E}{\partial h} = 0$ であるから、

$$h_c = \left(\frac{3Q^2}{2ga^2}\right)^{\frac{1}{4}} \tag{4}$$

となる。

(c)

式 (2),(4) より、

$$E = \frac{1}{3}h_c^4h^{-3} + h \tag{5}$$

と表される。$h = h_c$ をこれに代入して、

$$E_c = \frac{1}{3}h_c^4h_c^{-3} + h_c = \frac{4}{3}h_c \tag{6}$$

となる。

(2)

開水路の勾配を I、開水路断面の径心を R、断面流速を v とする。

ここでは Manning の式 $v = \frac{1}{n}R^{\frac{2}{3}}I^{\frac{1}{2}}$ により摩擦を評価する。$R = A/s$(s は潤辺) を用いると、流量 Q について、

$$Q = Av = A\frac{1}{n}\left(\frac{A}{s}\right)^{\frac{2}{3}} I^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{n}A^{\frac{5}{3}}I^{\frac{1}{2}}s^{-\frac{2}{3}} \tag{7}$$

を得る。したがって、Q を最大化するには s を最小化すればよい。A と h の間には $A = mh^2$、つまり $h = \sqrt{A/m}$ が成り立つことを用いれば、

$$s = 2\sqrt{m^2+1}h = 2\sqrt{A\left(m + \frac{1}{m}\right)} \tag{8}$$

である。ここで、

$$f(m) = m + \frac{1}{m} \tag{9}$$

とおいて、これを最小化する。

$$f'(m) = 1 - \frac{1}{m^2} \tag{10}$$

であり、これを 0 とすることにより、最適な m は $m = 1$ である。

(3)

(a)

断面流速を v とする。水路の摩擦が無視できるとき、エネルギー保存則

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{v^2}{2g} + h + z\right) = 0 \tag{11}$$

が成り立つ。これと $v = q/h$ であることを用いると、

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{q^2}{2gh^2} + h\right) = -\left(-\frac{q^2}{gh^3} + 1\right)\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} = \left(\mathrm{Fr}^2 - 1\right)\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} \tag{12}$$

が得られる。よって、

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\mathrm{Fr}^2 - 1}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} \tag{13}$$

が成り立つ。したがって、

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(h+z) = \left(\frac{1}{\mathrm{Fr}^2 - 1} + 1\right)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{Fr}^2}{\mathrm{Fr}^2 - 1}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} \tag{14}$$

となる。

(b)

常流を仮定すると、$\mathrm{Fr} < 1$ である。式 (14) より、z と H の増減は逆になる。上流側からマウンドのある区間にさしかかると、z が増加し H が減少し、マウンド頂部を越えると z が減少し H が増加する。エネルギー保存則より、マウンドの下流側では $H = h_0$ であり、マウンドのある区間では水位が下がっていることになる。

(c)

条件を満たすとき、エネルギー保存則より

$$\frac{q^2}{2gh_c^2} + h_c + z_0 = \frac{q^2}{2gh_0^2} + h_0 \tag{15}$$

であり、

$$z_0 = \frac{q^2}{2g}\left(\frac{1}{h_0^2} - \frac{1}{h_c^2}\right) + h_0 - h_c \tag{16}$$

となる。

(4)

(a)

運動量保存則により、

$$\rho Q v_1 - \rho Q v_2 = \frac{1}{2}\rho g B_1 h_1^2 - \frac{1}{2}\rho g B_2 h_2^2 \tag{17}$$

が成り立つ。連続式 $Q = B_1 h_1 v_1 = B_2 h_2 v_2$ より、

$$\rho B_1 h_1 v_1^2 - \rho B_2 h_2 v_2^2 = \frac{1}{2}\rho g B_1 h_1^2 - \frac{1}{2}\rho g B_2 h_2^2 \tag{18}$$

となる。

(b)

連続式 $B_1 h_1 v_1 = B_2 h_2 v_2$ より、

$$v_2 = \frac{B_1 h_1}{B_2 h_2} v_1 = \frac{1}{AC} v_1 \tag{19}$$

である。これと $h_2 = Ah_1, B_2 = CB_1$ を式 (18) に代入して、

$$\rho B_1 h_1 v_1^2 \left(1 - \frac{1}{AC}\right) = \frac{1}{2}\rho g B_1 h_1^2 (1 - A^2 C) \tag{20}$$

を得る。これより、

$$\frac{v_1^2}{gh_1} = \frac{AC(1 - A^2 C)}{2(AC - 1)} \tag{21}$$

となるから、

$$\mathrm{Fr}_1 = \sqrt{\frac{v_1^2}{gh_1}} = \sqrt{\frac{AC(1 - A^2 C)}{2(AC - 1)}} \tag{22}$$

である。

第 2 問

(1)

(a)