

4 octobre 2015

82 exercices de mathématiques pour 2^{nde}

Stéphane PASQUET

Sommaire

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

4 octobre 2015

I	Calculs & ordres	1
I.1	Calculs divers	1
I.2	Simplification d'une racine carrée particulière	1
I.3	Simplification de radicaux	2
I.4	Expressions conjuguées	2
I.5	Union et intersection d'intervalles	2
I.6	Calcul sur les puissances (avec des lettres)	3
I.7	Compilation	3
II	Coordonnées de points	11
II.1	Lecture de coordonnées de points	11
II.2	Lecture de coordonnées	11
II.3	Calcul de longueurs	12
III	Factorisations	15
III.1	Avec facteur commun évident	15
III.2	En faisant apparaître le facteur commun	15
III.3	À l'aide des identités remarquables	15
III.4	À l'aide d'une identité remarquable	16
IV	Équations & inéquations	20
IV.1	Équations diverses	20
IV.2	Équations avec carrés	20
IV.3	Équations avec racines carrées	20
IV.4	Dans un triangle équilatéral	21
IV.5	Inéquations diverses	21
IV.6	Dans le jardin	21
V	Fonctions : généralités	35
V.1	Reconnaître la courbe représentative d'une fonction	35
V.2	Tableau de valeurs à la calculatrice	35
V.3	Appartenance de points à une courbe	36
V.4	Images et antécédents	36
V.5	Établir une expression d'une fonction	37
V.6	Lectures graphiques	38
V.7	Lectures graphiques	38
V.8	Lectures graphiques	39

V.9 Triangle équilatéral	39
VI Équation de droites	50
VI.1 À partir d'un graphique	50
VI.2 À partir des coordonnées de points	50
VI.3 Appartenance de points à une droite	50
VI.4 Intersection de deux droites – Vecteur directeur	51
VI.5 Une histoire d'aire	51
VI.6 Les taxis	52
VII Fonctions du second degré	57
VII.1 Forme canonique & factorisation	57
VII.2 Sens de variation	57
VII.3 Aire d'un triangle dans un triangle équilatéral	57
VIII Vecteurs	63
VIII.1 Placement de points	63
VIII.2 Placement de points & alignement de points	63
VIII.3 Relation de Chasles	63
VIII.4 Égalités de vecteurs	64
VIII.5 Exprimer un vecteur en fonction d'un autre	64
VIII.6 Construction de points, égalité vectorielle	64
VIII.7 Alignement de points	64
VIII.8 Dans un repère, trouver des coordonnées	64
VIII.9 Alignement de points & nature d'un triangle	65
VIII.10 Milieu, centre de gravité, points alignés	65
VIII.11 Distance & milieu	65
VIII.12 Triangles équilatéraux et points alignés	66
VIII.13 Dans un repère, trouver des coordonnées	66
VIII.14 Exercice récapitulatif	66
IX Géométrie dans l'espace	78
IX.1 Tétraèdre & parallélogramme	78
IX.2 Cube & section	78
IX.3 Parallélépipède, distance & volume	78
IX.4 Cube, distance, volume & aire	79
IX.5 Droites & plans parallèles et sécants	79
IX.6 Cube et angle au centre	80
IX.7 Pyramide et intersection	81
IX.8 Construction d'un cube et d'une pyramide	81
X Statistiques	89
X.1 Caractères discrets : moyenne, e.c.c. et médiane	89
X.2 Moyenne, e.c.c. & médiane avec classes	89
X.3 Calcul d'effectifs, diagramme en barres	90
X.4 Calculs avec classes	90
X.5 Salaires dans une entreprise	90

XI Probabilités	97
XI.1 QCM	97
XI.2 Lancer de deux dés équilibrés	97
XI.3 Réunion et intersection	98
XI.4 Avec un dé portant des lettres	98
XI.5 Changement d'univers	98
XI.6 Chez les profs de math	99
XI.7 Le digicode	100
XI.8 Dans un magasin	100
XI.9 Dans un sac	100
XII Fluctuations et échantillonnage	109
XII.1 Le dé d'Al	109
XII.2 Le Dédale	109
XII.3 Influence de la taille d'un échantillon	109
XII.4 Recherche de la taille d'un échantillon	110
XII.5 Effet placebo	110
XII.6 Fourchette de sondage	110
XIII Algorithmique	113
XIII.1 Laboratoire pharmaceutique	113
XIII.2 Le site marchand	114

Règles de navigation

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

4 octobre 2015

Bonjour.

J'ai souhaité créer ici un document dans lequel il est facile de naviguer. C'est la raison pour laquelle :

- À chaque énoncé d'exercices, vous pouvez cliquer sur le numéro de la page où se trouve le corrigé pour vous y rendre directement ;
- À tout moment, vous pouvez retourner au sommaire en cliquant sur le petit carré ■ qui se trouve devant chaque titre.

D'autre part, il se peut que quelques erreurs se soient glissées dans les énoncés ou corrections ; si vous avez un doute, n'hésitez pas à me contacter via le formulaire qui se trouve sur mon site (<http://www.mathweb.fr/contact.html>) afin d'aboutir à un document tendant vers la perfection...

Je vous remercie par avance et vous souhaite un bon travail !

Stéphane Pasquet

Compilation \LaTeX 2 $_{\epsilon}$ de ce document

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

4 octobre 2015

Ce document repose sur l'extension personnelle :

- pas-exos.sty

disponible gratuitement sur la page :

<http://www.mathweb.fr/latex-packages-personnels.html>

de mon site.

Il a été initialement rédigé sous Ubuntu, mais dernièrement compilé sous Windows 10.

Calculs & ordres

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

A Exercices d'application du cours

R Exercices de réflexion

4 octobre 2015

■ Exercice 1. Calculs divers

★★★★★ **A**
Corrigé page 4

Effectuer et simplifier les calculs suivants :

$$A = \frac{1 + \frac{1}{2}}{2 - \frac{23}{7}} \times \left(3 - \frac{1}{3}\right)$$

$$B = \frac{(6 \times 10^{-2})^2 \times 3^2 \times 10^{-4}}{3^3 \times 10^{12}}$$

$$C = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$$

$$D = \sqrt{343} - 10\sqrt{112} + \sqrt{7}$$

$$E = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{126}}{\sqrt{12}}$$

$$F = \sqrt{\frac{48}{243}} \times \frac{\sqrt{405}}{121}$$

$$G = \frac{(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$$

■ Exercice 2. Simplification d'une racine carrée particulière

★★★★★ **R**
Corrigé page 5

On souhaite simplifier l'écriture du nombre :

$$A = \sqrt{29 + 12\sqrt{5}}.$$

1 Première approche.

On suppose que A peut s'écrire sous la forme $a + b\sqrt{5}$.

- Développer $(a + b\sqrt{5})^2$.
- Écrire le système d'équations (non nécessairement linéaire) auquel on arrive si l'on veut que $(a + b\sqrt{5})^2 = A^2$.
- Est-il facile de résoudre ce dernier système ?

2 Seconde approche.

- Développer $(3 + 2\sqrt{5})^2$.
- En déduire une écriture de A sous la forme $a + b\sqrt{5}$.

3 Revenons sur la première méthode.

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = x^4 - 29x^2 + 36.$$

- a. Vérifier que $x = 3$ est une solution de l'équation $f(x) = 0$.
- b. En déduire la valeur de a dans l'égalité $A = a + b\sqrt{5}$, puis à l'aide la question 1.c., trouver b .

■ Exercice 3. Simplification de radicaux

★★★★★ **R**
Corrigé page 6

1 On pose : $A = \sqrt{4 - \sqrt{7}} + \sqrt{4 + \sqrt{7}}$.

- a. Calculer A^2 .
- b. En déduire une écriture plus simple pour A .

2 D'une façon analogue, simplifier les radicaux suivants :

a. $B = \sqrt{11 - \sqrt{21}} + \sqrt{11 + \sqrt{21}}$

b. $C = \sqrt{8 - \sqrt{15}} - \sqrt{8 + \sqrt{15}}$

c. $D = \sqrt{6 + \sqrt{11}} - \sqrt{6 - \sqrt{11}}$

3 a. On pose $Z = \sqrt{76 + 42\sqrt{3}}$ et $X = 7 + 3\sqrt{3}$.

Après avoir calculé X^2 , donner une écriture simplifiée de Z .

b. On pose $Z = \sqrt{179 - 20\sqrt{2}}$ et $X = 2 - 5\sqrt{7}$.

Après avoir calculé X^2 , donner une écriture simplifiée de Z .

c. On pose $Z = \sqrt{13 + 4\sqrt{3}}$ et $X = 1 + 2\sqrt{3}$.

Après avoir calculé X^2 , donner une écriture simplifiée de Z .

■ Exercice 4. Expressions conjuguées

★★★★☆ **A**
Corrigé page 8

Utiliser les expressions conjuguées pour simplifier les expressions suivantes :

1 $A = \frac{2}{\sqrt{7} - \sqrt{5}}$

2 $B = \frac{3 - 2\sqrt{5}}{3 + 2\sqrt{5}}$

3 $C = \frac{1 + 2\sqrt{2}}{3 - \sqrt{2}}$

4 $D = \frac{5 - 7\sqrt{5}}{3 + 2\sqrt{5}}$

5 $E = \frac{8 - \sqrt{11}}{7 - 2\sqrt{11}}$

■ Exercice 5. Union et intersection d'intervalles

☆☆☆☆☆ **A**
Corrigé page 9

Pour chacun des intervalles I et J suivants, donnez l'intersection $I \cap J$ et l'union $I \cup J$.

$$1 \quad I = [-3; 5] \text{ et } J = [-4; 2]$$

$$2 \quad I = [-2; 0[\text{ et } J =]-3; -1]$$

$$3 \quad I =]-\infty; 0[\text{ et } J =]0; +\infty[$$

$$4 \quad I = [-4; 5[\text{ et } J =]-5; 6[$$

■ Exercice 6. Calcul sur les puissances (avec des lettres)

★★★★☆ A

Corrigé page 10

Simplifier les calculs suivants en les mettant sous la forme $a^n b^m c^p$, où n , m et p sont des entiers relatifs.

$$1 \quad \frac{(a^2 b^{-3})^{-2} c^5}{a^{-1} b^6 c^{-2}}$$

$$2 \quad \frac{(a^8 b^{-2} c^{-1})^2}{a^3 b^5 c^{-3}}$$

$$3 \quad \frac{a^5}{b^2} \div \frac{[(a^{-1} b^5)^{-2} c^{-3}]^{-2}}{[a^2 (b^{-1} c^{-3})^2]^2}$$

■ Exercice 7. Compilation

★★★★☆ A

Corrigé page 10

Effectuer les calculs suivants :

$$1 \quad A = \frac{\frac{5}{4} \times (\frac{1}{2} - \frac{1}{3})}{\frac{5}{4} \times \frac{8}{25} - \frac{1}{2}}$$

$$6 \quad F = \frac{\frac{\pi}{6} (\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3})}{\frac{5}{9} - \frac{1}{2}}$$

$$2 \quad B = \frac{3 \times 10^5 \times 15 \times 10^{-2}}{9 \times 10^7}$$

$$7 \quad G = \frac{1,5 \times 10^4 + 8,01 \times 10^5}{2 \times 10^3}$$

$$3 \quad C = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{7}}$$

$$8 \quad H = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{3}{8}}{\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8}}$$

$$4 \quad D = \frac{(5 \times 10^9)^2 \times 2 \times 10^{-5}}{4 \times 10^6}$$

$$9 \quad I = \frac{\frac{1}{7} + \frac{3}{4} - \frac{1}{16}}{\frac{1}{7} - \frac{3}{4} + \frac{3}{16}}$$

$$5 \quad E = \frac{(\frac{1}{4} + \frac{2}{5})^2 \times \frac{20}{13}}{1 + \frac{3}{5}}$$

$$10 \quad J = \frac{\frac{3}{2} \times (\frac{1}{4} - \frac{2}{5})}{\frac{3}{4} - \frac{1}{8}}$$

■ Corrigé de l'exercice 1.

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1 + \frac{1}{2}}{2 - \frac{23}{7}} \times \left(3 - \frac{1}{3}\right) \\
 &= \frac{\frac{2}{2} + \frac{1}{2}}{\frac{14}{7} - \frac{23}{7}} \times \left(\frac{9}{3} - \frac{1}{3}\right) \\
 &= \frac{\frac{3}{2}}{\frac{-9}{7}} \times \frac{8}{3} \\
 &= \frac{3}{2} \times \left(-\frac{7}{9}\right) \times \frac{84}{3}
 \end{aligned}$$

$$A = -\frac{28}{9}$$

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{(6 \times 10^{-2})^2 \times 3^2 \times 10^{-4}}{3^3 \times 10^{12}} \\
 &= \frac{6^2 \times 10^{-2 \times 2} \times 3^2 \times 10^{-4}}{3^3 \times 10^{12}} \\
 &= \frac{6^2 \times 3^2}{3^3} \times \frac{10^{-4} \times 10^{-4}}{10^{12}} \\
 &= \frac{36}{3} \times \frac{10^{-8}}{10^{12}} \\
 &= 12 \times 10^{-8-12}
 \end{aligned}$$

$$B = 12 \times 10^{-20}$$

$$\begin{aligned}
 C &= \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \\
 &= \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})} \\
 &= \frac{\sqrt{3}^2 - 2\sqrt{3} \times \sqrt{2} + \sqrt{2}^2}{\sqrt{3}^2 - \sqrt{2}^2} \\
 &= \frac{3 - 2\sqrt{6} + 2}{3 - 2}
 \end{aligned}$$

$$C = 5 - 2\sqrt{6}$$

$$\begin{aligned}
 D &= \sqrt{343} - 10\sqrt{112} + \sqrt{7} \\
 &= \sqrt{7 \times 49} - 10\sqrt{7 \times 16} + \sqrt{7} \\
 &= \sqrt{7 \times 7^2} - 10\sqrt{4^2} + \sqrt{7} \\
 &= 7\sqrt{7} - 10 \times 4\sqrt{7} + \sqrt{7}
 \end{aligned}$$

$$D = -32\sqrt{7}$$

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{126}}{\sqrt{12}} \\
 &= \frac{\sqrt{7 \times 126}}{\sqrt{3 \times 12}} \\
 &= \frac{\sqrt{7 \times 7 \times 9 \times 2}}{\sqrt{3 \times 3 \times 4}} \\
 &= \frac{7 \times 3 \times \sqrt{2}}{3 \times 2}
 \end{aligned}$$

$$E = \frac{7}{2}\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned}
 F &= \sqrt{\frac{48}{243}} \times \frac{\sqrt{405}}{121} \\
 &= \sqrt{\frac{16 \times 3}{81 \times 3}} \times \frac{\sqrt{81 \times 5}}{\sqrt{11 \times 11}} \\
 &= \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{81}} \times \frac{9\sqrt{5}}{11} \\
 &= \frac{4}{9} \times \frac{9\sqrt{5}}{11}
 \end{aligned}$$

$$F = \frac{4}{11}\sqrt{5}$$

$$\begin{aligned}
G &= \frac{(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} \\
&= \frac{(\sqrt{5})^2 - 2 \times \sqrt{5} \times \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} \\
&= \frac{5 - 2\sqrt{15} + 3}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} \\
&= \frac{(8 - 2\sqrt{15})(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3})} \\
&= \frac{8\sqrt{5} - 8\sqrt{3} - 2\sqrt{75} - 2\sqrt{45}}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2} \\
&= \frac{8\sqrt{5} - 8\sqrt{3} - 10\sqrt{3} - 6\sqrt{5}}{5 - 3} \\
&= \frac{2\sqrt{5} - 18\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{G = \sqrt{5} - 9\sqrt{3}}$$

■ Corrigé de l'exercice 2.

1 Première approche.

$$\begin{aligned}
a. \quad (a + b\sqrt{5})^2 &= a^2 + 2 \times a \times b\sqrt{5} + (b\sqrt{5})^2 \\
&= a^2 + 2ab\sqrt{5} + 5b^2 \\
&= a^2 + 5b^2 + 2ab\sqrt{5}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b. \quad (a + b\sqrt{5})^2 &= A^2 \iff a^2 + 5b^2 + 2ab\sqrt{5} = 29 + 12\sqrt{5} \\
&\iff \begin{cases} a^2 + 5b^2 = 29 \\ 2ab = 12 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a^2 + 5b^2 = 29 \\ ab = 6 \end{cases}
\end{aligned}$$

c. On pourrait écrire la seconde équation sous la forme :

$$b = \frac{6}{a},$$

et dans ce cas, la première équation peut s'écrire :

$$a^2 + 5 \left(\frac{6}{a}\right)^2 = 29,$$

ou encore :

$$a^2 + 5 \times \frac{36}{a^2} = 29.$$

En multipliant tout par a^2 , on obtient :

$$a^4 + 180 = 29a^2,$$

ou encore :

$$a^4 - 29a^2 + 180 = 0.$$

Mais nous ne savons pas résoudre cette équation ; donc il n'est pas facile de trouver une autre écriture de A avec cette méthode.

2 Seconde approche.

$$\begin{aligned} a. \quad (3 + 2\sqrt{5})^2 &= 3^2 + 2 \times 3 \times 2\sqrt{5} + (2\sqrt{5})^2 \\ &= 9 + 12\sqrt{5} + 4 \times 5 \\ &= 29 + 12\sqrt{5}. \end{aligned}$$

b. On constate que :

$$(3 + 2\sqrt{5})^2 = A^2$$

donc :

$$\sqrt{(3 + 2\sqrt{5})^2} = \sqrt{A^2},$$

soit :

$$A = 3 + 2\sqrt{5}.$$

(car $3 + 2\sqrt{5} \geq 0$ et $A \geq 0$)

3 Revenons sur la première méthode.

$$\begin{aligned} a. \quad f(3) &= 3^4 - 29 \times 3^2 + 180 \\ &= 81 - 261 + 180 \\ &= -180 + 180 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc $x = 3$ est une solution de l'équation $f(x) = 0$.

b. Nous avons vu dans la question 1.c. que le système pouvait aboutir à l'équation $f(a) = 0$.

Donc $a = 3$ et donc, $b = \frac{6}{3} = 2$.

On retrouve bien $A = 3 + 2\sqrt{5}$.

■ Corrigé de l'exercice 3.

$$1 \quad A = \sqrt{4 - \sqrt{7}} + \sqrt{4 + \sqrt{7}}.$$

$$\begin{aligned} a. \quad A^2 &= \left(\sqrt{4 - \sqrt{7}} + \sqrt{4 + \sqrt{7}} \right)^2 \\ &= \left(\sqrt{4 - \sqrt{7}} \right)^2 + 2 \times \sqrt{4 - \sqrt{7}} \times \sqrt{4 + \sqrt{7}} + \left(\sqrt{4 + \sqrt{7}} \right)^2 \\ &= 4 - \sqrt{7} + 2\sqrt{(4 - \sqrt{7})(4 + \sqrt{7})} + 4 + \sqrt{7} \\ &= 8 + 2\sqrt{4^2 - \sqrt{7}^2} \\ &= 8 + 2\sqrt{16 - 7} \\ &= 8 + 2\sqrt{9} \\ &= 8 + 2 \times 3 \end{aligned}$$

$$\boxed{A^2 = 14}$$

b. Si $A^2 = 14$, alors $\sqrt{A^2} = \sqrt{14}$, ce qui voudrait dire que $A = -\sqrt{14}$ ou $A = \sqrt{14}$. Or, $A > 0$ car c'est une somme de deux racines carrées, donc $\boxed{A = \sqrt{14}}$.

2 a. $B = \sqrt{11 - \sqrt{21}} + \sqrt{11 + \sqrt{21}}$

$$\begin{aligned}
B^2 &= \left(\sqrt{11 - \sqrt{21}} + \sqrt{11 + \sqrt{21}} \right)^2 \\
&= \left(\sqrt{11 - \sqrt{21}} \right)^2 + 2\sqrt{(11 - \sqrt{21})(11 + \sqrt{21})} + \left(\sqrt{11 + \sqrt{21}} \right)^2 \\
&= 11 - \sqrt{21} + 2\sqrt{11^2 - \sqrt{21}^2} + 11\sqrt{21} \\
&= 22 + 2\sqrt{121 - 21} \\
&= 22 + 2\sqrt{100} \\
&= 22 + 2 \times 10 \\
&= 22 + 20 \\
B^2 &= 42
\end{aligned}$$

$$\boxed{B = \sqrt{42}} \text{ car } B > 0$$

b. $C = \sqrt{8 - \sqrt{15}} - \sqrt{8 + \sqrt{15}} < 0$

$$\begin{aligned}
C^2 &= \left(\sqrt{8 - \sqrt{15}} - \sqrt{8 + \sqrt{15}} \right)^2 \\
&= 8 - \sqrt{15} + 2\sqrt{(8 - \sqrt{15})(8 + \sqrt{15})} + 8 + \sqrt{15} \\
&= 16 + 2\sqrt{8^2 - 15} \\
&= 16 + 2\sqrt{49} \\
&= 16 + 2 \times 7 \\
C^2 &= 30
\end{aligned}$$

$$\boxed{C = -\sqrt{30}} \text{ car } C < 0$$

c. $D = \sqrt{6 + \sqrt{11}} - \sqrt{6 - \sqrt{11}}$

$$\begin{aligned}
D^2 &= \left(\sqrt{6 + \sqrt{11}} - \sqrt{6 - \sqrt{11}} \right)^2 \\
&= 6 + \sqrt{11} - 2\sqrt{(6 + \sqrt{11})(6 - \sqrt{11})} + 6 - \sqrt{11} \\
&= 12 - 2\sqrt{6^2 - 11} \\
&= 12 - 2\sqrt{25} \\
D^2 &= 2
\end{aligned}$$

$$\boxed{D = \sqrt{2}} \text{ car } D > 0$$

3 a. $X^2 = (7 + 3\sqrt{3})^2$

$$\begin{aligned}
&= 7^2 + 2 \times 7 \times 3\sqrt{3} + (3\sqrt{3})^2 \\
&= 49 + 42\sqrt{3} + 3^2 (\sqrt{3})^2 \\
&= 49 + 42\sqrt{3} + 9 \times 3 \\
&= 49 + 42\sqrt{3} + 27
\end{aligned}$$

$$\boxed{X^2 = 76 + 42\sqrt{3}}$$

On constate que $X^2 = Z^2$; comme $X > 0$ et $Z > 0$, on en déduit que $X = Z$.
Ainsi, $\sqrt{76 + 42\sqrt{3}} = 7 + 3\sqrt{3}$.

$$\begin{aligned}
b. \quad X^2 &= (2 - 5\sqrt{7})^2 \\
&= 2^2 - 2 \times 2 \times 5\sqrt{7} + (5\sqrt{7})^2 \\
&= 4 - 20\sqrt{7} + 5^2 (\sqrt{7})^2 \\
&= 4 - 20\sqrt{7} + 25 \times 7 \\
&= 4 - 20\sqrt{7} + 175
\end{aligned}$$

$$\boxed{X^2 = 179 - 20\sqrt{7}}$$

On constate alors que $X^2 = Z^2$; or, $X < 0$ et $Z > 0$ donc $X = -Z$.

Ainsi, $\sqrt{179 - 20\sqrt{7}} = 2 - 5\sqrt{7}$.

$$\begin{aligned}
c. \quad X^2 &= (1 + 2\sqrt{3})^2 \\
&= 1^2 + 2 \times 1 \times 2\sqrt{3} + (2\sqrt{3})^2 \\
&= 1 + 4\sqrt{3} + 2^2 (\sqrt{3})^2 \\
&= 1 + 4\sqrt{3} + 4 \times 3 \\
&= 1 + 4\sqrt{3} + 12
\end{aligned}$$

$$\boxed{X^2 = 13 + 4\sqrt{3}}$$

On constate alors que $X^2 = Z^2$; or, $X < 0$ et $Z > 0$ donc $X = -Z$.

Ainsi, $\sqrt{13 + 4\sqrt{3}} = 1 + 2\sqrt{3}$.

■ Corrigé de l'exercice 4.

$$\begin{aligned}
1 \quad A &= \frac{2}{\sqrt{7} - \sqrt{5}} \\
&= \frac{2(\sqrt{7} + \sqrt{5})}{(\sqrt{7} + \sqrt{5})(\sqrt{7} - \sqrt{5})} \\
&= \frac{2(\sqrt{7} + \sqrt{5})}{(\sqrt{7})^2 - (\sqrt{5})^2} \\
&= \frac{2(\sqrt{7} - \sqrt{5})}{7 - 5} \\
&= \frac{2(\sqrt{7} - \sqrt{5})}{2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{A = \sqrt{7} - \sqrt{5}}$$

$$\begin{aligned}
2 \quad B &= \frac{3 - 2\sqrt{5}}{3 + 2\sqrt{5}} \\
&= \frac{(3 - 2\sqrt{5})(3 - 2\sqrt{5})}{(3 + 2\sqrt{5})(3 - 2\sqrt{5})} \\
&= \frac{3^2 - 2 \times 3 \times 2\sqrt{5} + (2\sqrt{5})^2}{3^2 - (2\sqrt{5})^2} \\
&= \frac{9 - 12\sqrt{5} + 20}{9 - 20} \\
&= \frac{29 - 12\sqrt{5}}{-11}
\end{aligned}$$

$$\boxed{B = -\frac{29 - 12\sqrt{5}}{11}}$$

$$\begin{aligned}
\text{3} \quad C &= \frac{1+2\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} \\
&= \frac{(1+2\sqrt{2})(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})} \\
&= \frac{3+\sqrt{2}+6\sqrt{2}+2\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{3^2-\sqrt{2}^2} \\
&= \frac{7+7\sqrt{2}}{7} \\
\boxed{C &= 1+\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{5} \quad E &= \frac{8-\sqrt{11}}{7-2\sqrt{11}} \\
&= \frac{(8-\sqrt{11})(7+2\sqrt{11})}{(7-2\sqrt{11})(7+2\sqrt{11})} \\
&= \frac{42+16\sqrt{11}-7\sqrt{11}-22}{7^2-(2\sqrt{11})^2} \\
&= \frac{20+9\sqrt{11}}{49-44} \\
\boxed{E &= \frac{20+9\sqrt{11}}{5}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{4} \quad D &= \frac{5-7\sqrt{5}}{3+2\sqrt{5}} \\
&= \frac{(5-7\sqrt{5})(3-2\sqrt{5})}{(3+2\sqrt{5})(3-2\sqrt{5})} \\
&= \frac{15-10\sqrt{5}-21\sqrt{5}+14\times 5}{3^2-(2\sqrt{5})^2} \\
&= \frac{85-31\sqrt{5}}{9-20} \\
\boxed{D &= -\frac{85-31\sqrt{5}}{11}}
\end{aligned}$$

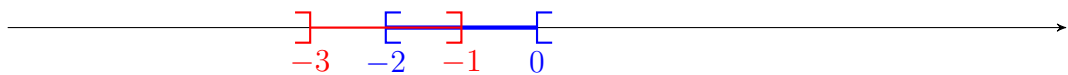
■ Corrigé de l'exercice 5.

$$\text{1} \quad I = [-3; 5] \text{ et } J = [-4; 2].$$



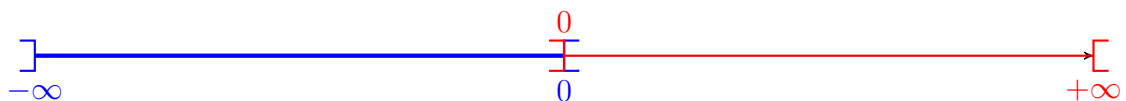
$$I \cap J = [-3; 2] \text{ (en rouge ET en bleu)} \quad ; \quad I \cup J = [-4; 5] \text{ (en rouge OU en bleu)}.$$

$$\text{2} \quad I = [-2; 0[\text{ et } J =]-3; -1].$$



$$I \cap J = [-2; -1] \text{ (en rouge ET en bleu)} \quad ; \quad I \cup J =]-3; 0[\text{ (en rouge OU en bleu)}.$$

$$\text{3} \quad I =]-\infty; 0[\text{ et } J =]0; +\infty[$$



$$I \cap J = \emptyset \text{ (aucun point en commun)} \quad ; \quad I \cup J = \mathbb{R}^* \text{ (tous les nombres réels sauf 0)}.$$

4 $I = [-4; 5[$ et $J =]-5; 6[$



$I \cap J = [-4; 5[$ (en rouge ET en bleu) ; $I \cup J =]-5; 6[$ (en rouge OU en bleu).

■ Corrigé de l'exercice 6.

1
$$\begin{aligned} \frac{(a^2b^{-3})^{-2}c^5}{a^{-1}b^6c^{-2}} &= \frac{a^{2 \times (-2)}b^{(-3) \times (-2)}c^5}{a^{-1}b^6c^{-2}} \\ &= \frac{a^{-4}b^6c^5}{a^{-1}b^6c^{-2}} \\ &= a^{-4}b^6c^5 \times a^{+1}b^{-6}c^{+2} \\ &= a^{-4+1}b^{6-6}c^{5+2} \\ &= a^{-3}b^0c^7 \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{(a^2b^{-3})^{-2}c^5}{a^{-1}b^6c^{-2}} = a^{-3}c^7}$$

2
$$\begin{aligned} \frac{(a^8b^{-2}c^{-1})^2}{a^3b^5c^{-3}} &= a^{16}b^{-4}c^{-2} \times a^{-3}b^{-5}c^{+3} \\ &= a^{13}b^{-9}c^1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{(a^8b^{-2}c^{-1})^2}{a^3b^5c^{-3}} = a^{13}b^{-9}c}$$

3
$$\begin{aligned} \frac{a^5}{b^2} \div \frac{[(a^{-1}b^5)^{-2}c^{-3}]^{-2}}{[a^2(b^{-1}c^{-3})^2]^2} &= \frac{a^5}{b^2} \div \frac{[a^2b^{-10}c^{-3}]^{-2}}{[a^2b^{-2}c^{-6}]^2} \\ &= \frac{a^5}{b^2} \div \frac{a^{-4}b^{20}c^6}{a^4b^{-4}c^{-12}} \\ &= \frac{a^5}{b^2} \times \frac{a^4b^{-4}c^{-12}}{a^{-4}b^{20}c^6} \\ &= a^5b^{-2}a^4b^{-4}c^{-12}a^4b^{-20}c^{-6} \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{a^5}{b^2} \div \frac{[(a^{-1}b^5)^{-2}c^{-3}]^{-2}}{[a^2(b^{-1}c^{-3})^2]^2} = a^{13}b^{-26}c^{-18}}$$

■ Corrigé de l'exercice 7.

1 $A = -\frac{25}{12}$

4 $D = 125 \times 10^6$

8 $H = -\frac{1}{27}$

2 $B = \frac{1}{2000}$

5 $E = \frac{13}{32}$

9 $I = -\frac{93}{47}$

3 $C = \frac{161}{130}$

6 $F = \frac{5\pi^2}{2}$

10 $J = -\frac{9}{25}$

7 $G = 408$

Coordonnées de points

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

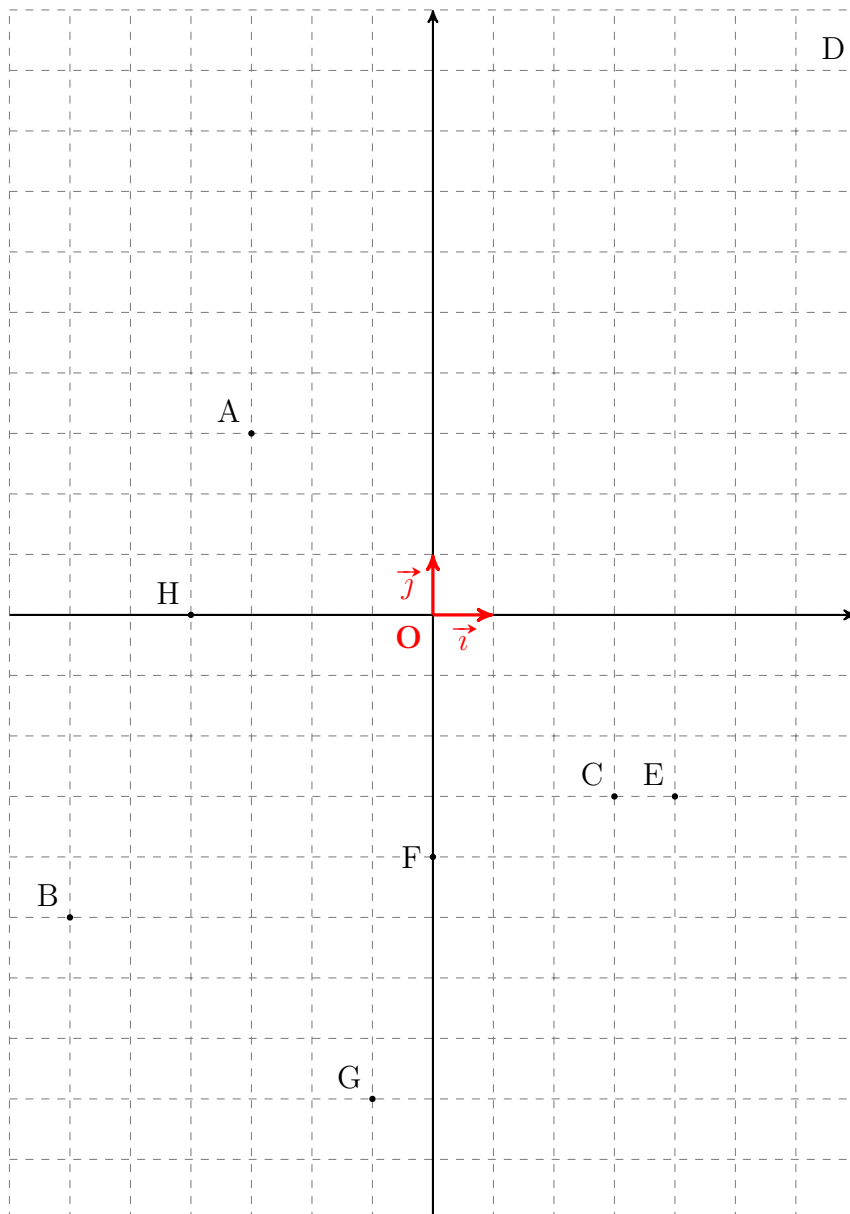
- A Exercices d'application du cours
- R Exercices de réflexion

4 octobre 2015

■ Exercice 1. Lecture de coordonnées de points

☆☆☆☆☆ A
 Corrigé page 13

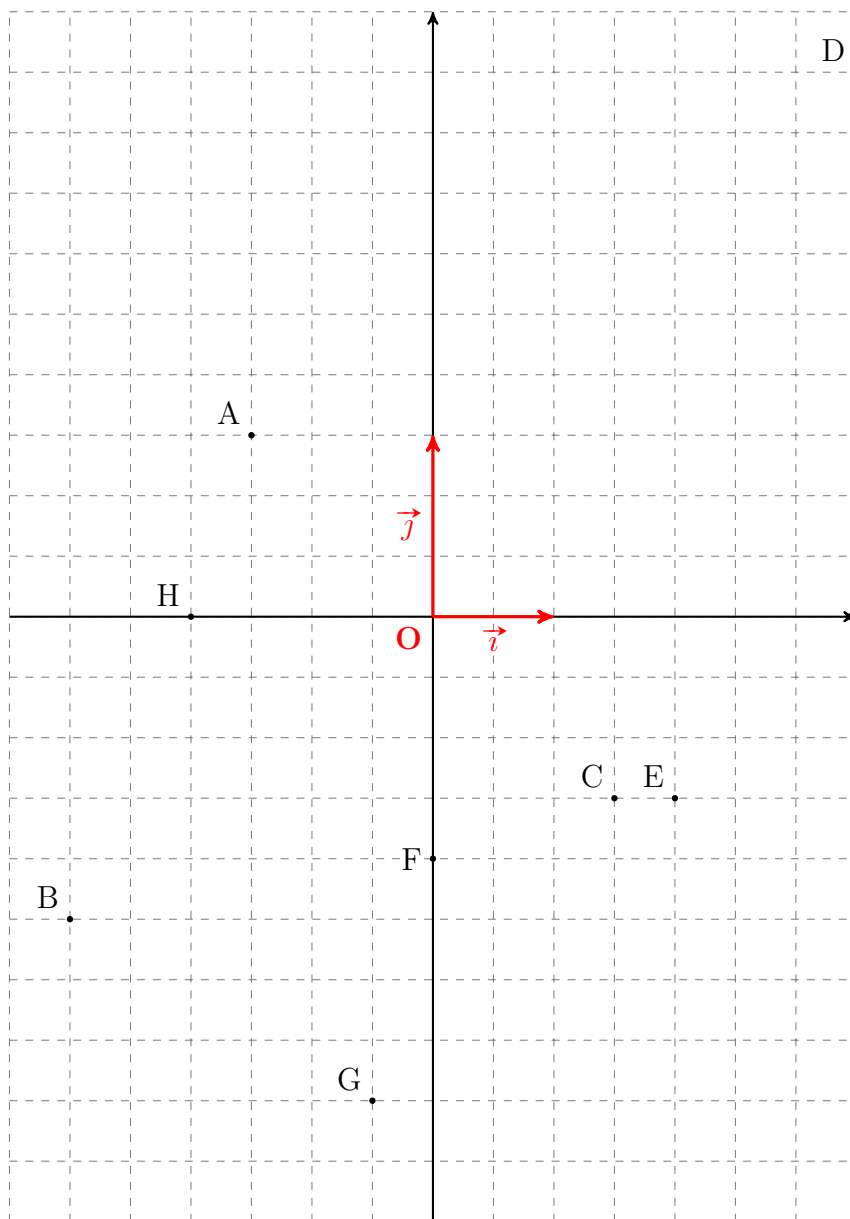
Dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ suivant, donner les coordonnées de tous les points.



■ Exercice 2. Lecture de coordonnées

★★★★★ A
Corrigé page 13

Dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ suivant, donner les coordonnées de tous les points.



■ Exercice 3. Calcul de longueurs

★★★★★ A
Corrigé page 13

Pour chaque question, déterminer la longueur AB.

1 $A(-2; 3)$ et $B(-3; 5)$

4 $A(3; -2)$ et $B(-2; 7)$

2 $A(3; 2)$ et $B(8; 1)$

5 $A(1; -2)$ et $B(7; -5)$

3 $A(-1; -3)$ et $B(-4; -6)$

6 $A(1; 4)$ et $B(-2; -1)$

■ Corrigé de l'exercice 1.

- $A(-3; 3)$ • $C(3; -3)$ • $E(4; -3)$ • $G(-1; -8)$
- $B(-6; -5)$ • $D(7; 9)$ • $F(0; -4)$ • $H(-4; 0)$

■ Corrigé de l'exercice 2.

- $A\left(-\frac{3}{2}; 1\right)$ • $C\left(\frac{3}{2}; -1\right)$ • $F\left(0; -\frac{4}{3}\right)$
- $B\left(-3; -\frac{5}{3}\right)$ • $D\left(\frac{7}{2}; 3\right)$ • $G\left(-\frac{1}{2}; -\frac{8}{3}\right)$
- $E(2; -1)$ • $H(-2; 0)$

■ Corrigé de l'exercice 3.

1 $A(-2; 3)$ et $B(-3; 5)$.

$$\begin{aligned}
 AB &= \sqrt{(-3 - (-2))^2 + (5 - 3)^2} \\
 &= \sqrt{(-3 + 2)^2 + 2^2} \\
 &= \sqrt{(-1)^2 + 2^2} \\
 &= \sqrt{1 + 4}
 \end{aligned}$$

$$AB = \sqrt{5}$$

2 $A(3; 2)$ et $B(8; 1)$.

$$\begin{aligned}
 AB &= \sqrt{(8 - 3)^2 + (1 - 2)^2} \\
 &= \sqrt{5^2 + (-1)^2} \\
 &= \sqrt{25 + 1}
 \end{aligned}$$

$$AB = \sqrt{26}$$

3 A(-1; -3) et B(-4; -6).

$$\begin{aligned}AB &= \sqrt{(-4 - (-1))^2 + (-6 - (-3))^2} \\&= \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} \\&= \sqrt{9 + 9} \\&= \sqrt{18}\end{aligned}$$

$$\boxed{AB = 3\sqrt{2}}$$

4 A(3; -2) et B(-2; 7).

$$\begin{aligned}AB &= \sqrt{(-2 - 3)^2 + (7 - (-2))^2} \\&= \sqrt{1^2 + 9^2}\end{aligned}$$

$$\boxed{AB = \sqrt{82}}$$

5 A(1; -2) et B(7; -5).

$$\begin{aligned}AB &= \sqrt{(7 - 1)^2 + (-5 - (-2))^2} \\&= \sqrt{6^2 + (-3)^2} \\&= \sqrt{36 + 9} \\&= \sqrt{45}\end{aligned}$$

$$\boxed{AB = 3\sqrt{5}}$$

6 A(1; 4) et B(-2; -1).

$$\begin{aligned}AB &= \sqrt{(-2 - 1)^2 + (-1 - 4)^2} \\&= \sqrt{9 + 25} \\&= \sqrt{36}\end{aligned}$$

$$\boxed{AB = 6}$$

Factorisations

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

A Exercices d'application du cours

R Exercices de réflexion

4 octobre 2015

■ Exercice 1. Avec facteur commun évident

★★★★☆ **A**
Corrigé page 17

Factoriser chacune des expressions suivantes sachant qu'elles sont toutes de **type 1**, à savoir que le facteur commun est explicite dans chaque terme.

1 $A = (2x + 1)(x + 3) - 2(x + 3)(5x + 6)$

2 $B = (x - 4)(2x + 9) + 3(x - 4)(7x + 3)$

3 $C = (3x - 1)(5x + 2) - (5x + 2)(9x + 8)$

■ Exercice 2. En faisant apparaître le facteur commun

★★★★☆ **A**
Corrigé page 17

Factoriser chacune des expressions suivantes sachant qu'elles sont toutes de **type 2**, à savoir que le facteur commun n'est pas explicite dans chaque terme mais que l'on peut le faire apparaître sans l'aide d'une identité remarquable.

1 $D = (9x + 6)(4x + 1) + (3x + 2)(1 - 4x)$

2 $E = (2x + 3)(5x - 10) - 3(x - 2)(5x + 9)$

3 $F = (3x - 1)(2x + 7) - 4(1 - 3x)(7 - 2x)$

■ Exercice 3. À l'aide des identités remarquables

★★★★☆ **A**
Corrigé page 18

Factoriser chacune des expressions suivantes sachant qu'elles sont toutes de **type 3**, à savoir que le facteur commun n'est pas explicite dans chaque terme mais que l'on peut le faire apparaître à l'aide d'une identité remarquable.

1 $G = 9x^2 + 6x + 1 - (3x + 1)(4x - 1)$

2 $H = 4x^2 - 12x + 9 + (2x - 3)(7x + 1)$

3 $I = 25x^2 - 4 + 3(5x - 2)(x + 3)$

■ Exercice 4. À l'aide d'une identité remarquable

★★★★★ A

Corrigé page 18

Factoriser chacune des expressions suivantes sachant qu'elles sont toutes de **type 4**, à savoir que le facteur commun n'est pas explicite dans chaque terme mais que l'on peut faire apparaître une identité remarquable de la forme $a^2 - b^2$ pour factoriser.

1 $J = (9x + 18)(x + 2) - (4x + 20)(x + 5)$

2 $K = 2(2x + 3)(4x + 6) - 3(3x + 2)(9x + 6)$

3 $L = 7(7x + 1)(49x + 7) + (1 - 4x)(16x - 4)$

■ Corrigé de l'exercice 1.

$$\begin{aligned}
 A &= (2x+1)(x+3) - 2(x+3)(5x+6) \\
 &= (x+3)[(2x+1) - 2(5x+6)] \\
 &= (x+3)(2x+1-10x-12) \\
 &= (x+3)(-8x-11) \\
 &= \underline{\underline{-(x+3)(8x+11)}}
 \end{aligned}$$

le facteur commun est $(x+3)$
 on enlève les parenthèses dans les crochets en multipliant par -2 le $5x$ et le 6
 on réduit l'expression dans la deuxième paire de parenthèses
 on met en facteur « -1 » pour la lisibilité

$$\begin{aligned}
 B &= (x-4)(2x+9) + 3(x-4)(7x+3) \\
 &= (x-4)[(2x+9) + 3(7x+3)] \\
 &= (x-4)(2x+9+21x+9) \\
 &= \underline{\underline{(x-4)(23x+18)}}
 \end{aligned}$$

le facteur commun est $(x-4)$
 on enlève les parenthèses dans les crochets en multipliant par 3 le $7x$ et le 3
 on réduit l'expression dans la deuxième paire de parenthèses

$$\begin{aligned}
 C &= (3x-1)(5x+2) - (5x+2)(9x+8) \\
 &= (5x+2)[(3x-1) - (9x+8)] \\
 &= (5x+2)(3x-1-9x-8) \\
 &= (5x+2)(-6x-10) \\
 &= \underline{\underline{-2(5x+2)(3x+5)}}
 \end{aligned}$$

le facteur commun est $(5x+2)$
 on enlève les parenthèses dans les crochets en multipliant par -1 le $9x$ et le 8
 on réduit l'expression dans la deuxième paire de parenthèses
 on factorise par -2 ce qu'il y a dans la deuxième paire de parenthèses

■ Corrigé de l'exercice 2.

$$\begin{aligned}
 D &= (9x+6)(4x+1) + (3x+2)(1-4x) \\
 &= \underline{3(3x+2)}(4x+1) + \underline{(3x+2)}(1-4x) \\
 &= (3x+2)[3(4x+1) + (1-4x)] \\
 &= (3x+2)(12x+3+1-4x) \\
 &= (3x+2)(8x+4) \\
 &= \underline{\underline{4(3x+2)(2x+1)}}
 \end{aligned}$$

on factorise $(9x+6)$ par 3 pour faire apparaître $(3x+2)$, qui est dans le deuxième membre
 on factorise par $(3x+2)$
 on enlève les parenthèses dans les crochets
 on réduit l'expression dans la seconde paire de parenthèses
 on factorise par 4 dans le deuxième facteur

$$\begin{aligned}
E &= (2x+3)(5x-10) - 3(x-2)(5x+9) && \text{on factorise } (5x-10) \text{ par } 5 \text{ pour faire apparaître } (x-2), \text{ qui est dans le deuxième membre} \\
&= \underline{5(x-2)(2x+3)} - \underline{3(x-2)(5x+9)} && \text{on factorise par } (x-2) \\
&= (x-2)[5(2x+3) - 3(5x+9)] && \text{on enlève les parenthèses dans les crochets} \\
&= (x-2)(10x+15-15x-27) && \text{on réduit l'expression dans le second facteur} \\
&= (x-2)(-5x-12) && \text{on factorise par } -1 \text{ dans le deuxième facteur} \\
&= \underline{-(x-2)(5x+12)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F &= (3x-1)(2x+7) - 4(1-3x)(7-2x) && \text{on factorise } (1-3x) \text{ par } (-1) \text{ pour faire apparaître } (3x-1), \text{ qui est dans le premier membre} \\
&= (3x-1)(2x+7) + \underline{4(3x-1)(7-2x)} && \text{on factorise par } (3x-1) \\
&= (3x-1)[(2x+7) + 4(7-2x)] && \text{on enlève les parenthèses dans les crochets} \\
&= (3x-1)(2x+7+28-8x) && \text{on réduit l'expression dans le second facteur} \\
&= \underline{(3x-1)(-6x+35)}
\end{aligned}$$

■ Corrigé de l'exercice 3.

$$\begin{aligned}
G &= \underline{9x^2 + 6x + 1} - (3x+1)(4x-1) && \text{on veut que } 9x^2 + 6x + 1 \text{ soit une identité remarquable de la forme } (a+b)^2, \text{ donc il faut que } 9x^2 = a^2 \text{ et que } 1 = b^2 \\
&= (3x+1)^2 - (3x+1)(4x-1) && \text{donc } a = 3x \text{ et } b = 1 \\
&= (3x+1)[(3x+1) - (4x-1)] && \text{on factorise par } (3x+1) \\
&= (3x+1)(3x+1-4x+1) && \text{on enlève les parenthèses dans les crochets} \\
&= \underline{(3x+1)(-x+2)} && \text{on réduit l'expression dans le second facteur}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H &= \underline{4x^2 - 12x + 9} + (2x-3)(7x+1) && \text{il faut que } 4x^2 = a^2 \text{ et } 9 = b^2, \text{ donc } a = 2x \text{ et } b = 3 \\
&= (2x-3)^2 + (2x-3)(7x+1) \\
&= (2x-3)(2x-3+7x+1) \\
&= \underline{(2x-3)(9x+2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I &= \underline{25x^2 - 4} + 3(5x-2)(x+3) && \text{on fait apparaître une expression de la forme } a^2 - b^2 \\
&= (5x)^2 - 2^2 + 3(5x-2)(x+3) && \text{on factorise } a^2 - b^2 \text{ en } (a-b)(a+b) \\
&= (5x-2)(5x+2) + 3(5x-2)(x+3) \\
&= (5x-2)[5x+2+3(x+3)] \\
&= (5x-2)(5x+2+3x+9) \\
&= \underline{(5x-2)(8x+11)}
\end{aligned}$$

■ Corrigé de l'exercice 4.

$$\begin{aligned}
J &= \underline{(9x+18)(x+2)} - \underline{(4x+20)(x+5)} \\
&= \underline{9(x+2)(x+2)} - \underline{4(x+5)(x+5)} \\
&= [3(x+2)]^2 - [2(x+5)]^2 && \text{on fait apparaître } a^2 - b^2, \text{ avec } a = 3(x+2) \text{ et } b = 2(x+5) \\
&= [3(x+2) - 2(x+5)][3(x+2) + 2(x+5)] \\
&= (3x+6-2x-10)(3x+6+2x+10) && \text{on développe dans les crochets} \\
&= \underline{(x-4)(5x+16)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K &= 2(2x+3)(4x+6) - 3(3x+2)(9x+6) \\
&= 2(2x+3) \times 2(2x+3) - 3(3x+2) \times 3(3x+2) && \text{on fait apparaître } a^2 - b^2 \\
&= [2(2x+3)]^2 - [3(3x+2)]^2 \\
&= [2(2x+3) - 3(3x+2)][2(2x+3) + 3(3x+2)] \\
&= (4x+6-9x-6)(4x+6+9x+6) && \text{on développe dans les crochets} \\
&= \underline{-5x(13x+12)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L &= 7(7x+1)(49x+7) + (1-4x)(16x-4) \\
&= 7(7x+1) \times 7(7x+1) - (4x-1) \times 4(4x-1) && \text{on fait apparaître } a^2 - b^2 \\
&= [7(7x+1)]^2 - [2(4x-1)]^2 \\
&= [7(7x+1) - 2(4x-1)][7(7x+1) + 2(4x-1)] \\
&= (49x+7-8x+2)(49x+7+8x-2) && \text{on développe dans les crochets} \\
&= \underline{(41x+9)(57x+5)}
\end{aligned}$$

Équations & inéquations

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

A Exercices d'application du cours

R Exercices de réflexion

4 octobre 2015

■ Exercice 1. Équations diverses

★★★★☆ **A**

Corrigé page 23

Résoudre les équations suivantes :

1 $-3x + 7 = 0$

2 $\frac{3}{5}x - 6 = 0$

3 $-\frac{2}{7}x + \frac{1}{2} = \frac{2}{21}x + 2$

4 $(-3x + 1)(5x - 7) = 0$

5 $\left(-\frac{1}{2}x - 5\right)\left(\frac{3}{4}x + 2\right) = 0$

6 $2x(5x - 1)(2x + 3) = 0$

7 $\frac{1}{x+2} = \frac{1}{x^2-4}$

8 $\frac{x^2+1}{x-1} = \frac{2x}{x-1}$

9 $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = 2$

10 $\frac{2}{x-1} = 1 - \frac{x}{x+1}$

■ Exercice 2. Équations avec carrés

★★★★☆ **A**

Corrigé page 25

Résoudre les équations suivantes :

1 $(3x - 5)^2 = 16$

2 $(x^2 - 4)^2 = 81$

3 $(3x^2 - 4)^2 = 9$

4 $\left(\frac{2x-1}{x-7}\right)^2 = 25$

■ Exercice 3. Équations avec racines carrées

★★★★☆ **A**

Corrigé page 27

Résoudre les équations suivantes :

1 $\sqrt{3x-2} = 7.$

2 $\sqrt{\frac{5x-4}{3x+1}} = 3.$

3 $\sqrt{x^2+x+1} = x+1.$

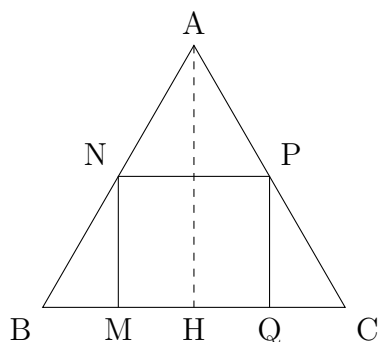
4 $x\sqrt{7} + \sqrt{2} = \sqrt{7} - x\sqrt{2}.$

5 $\sqrt{(x-2)(3x+4)} = 2(3x+4).$

■ Exercice 4. Dans un triangle équilatéral

★★★★☆ R

Corrigé page 30



Soit ABC un triangle équilatéral tel que $AB = 6$ et soit H le milieu de $[BC]$.

M est un point de $[BH]$. On construit MNPQ de sorte à ce qu'il soit un rectangle d'axe de symétrie (AH).

On pose $BM = x$.

1 a. Exprimer MN en fonction de x .

b. Justifier que $MQ = 6 - 2x$.

2 On veut que MNPQ soit un carré.

a. Montrer alors que $x\sqrt{3} = 6 - 2x$.

b. Calculer x .

■ Exercice 5. Inéquations diverses

★★★★☆ A

Corrigé page 31

Résoudre les inéquations suivantes :

1 $(x - 1)(x + 2) \leq 0$

2 $(3x - 2)(5x - 7) \geq 0$

3 $(5x - 1)(-x + 9)(2x + 1) > 0$

4 $\frac{2x + 1}{2x - 1} - \frac{2x - 1}{2x + 1} < \frac{2x + 6}{4x^2 - 1}$

5 $\frac{5x + 4}{2x - 3} + \frac{(8 - x)(10x + 8)}{(2x - 3)^2} \leq 0$

6 $\frac{(4 - 3x)(9x^2 - 10x - 3)}{2x - 7} < 4 - 3x$

7 $\frac{1}{x + 1} - \frac{1}{x - 1} \leq \frac{1}{x}$

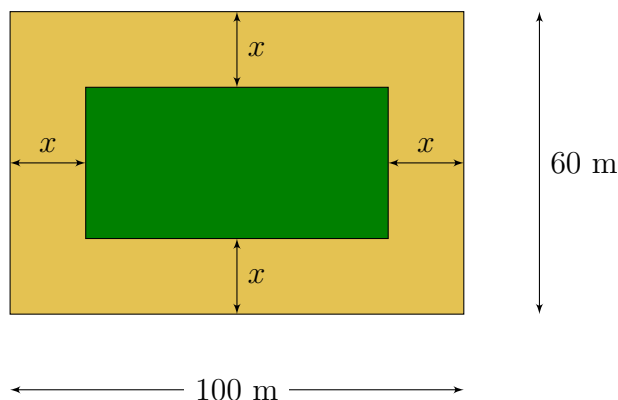
8 $\frac{1 - 2x}{16x^2 - 9} \geq \frac{1 - 2x}{4x + 3}$

■ Exercice 6. Dans le jardin

★★★★★ R

Corrigé page 34

Un jardin à forme rectangulaire est représenté ci-dessous :



On note $f(x)$ l'aire (en m^2) de la partie extérieure à l'espace vert.

1 Montrer que $f(x) = -4x(x - 80)$.

2 Montrer que $f(x) = -4(x - 40)^2 + 6\,400$.

On souhaite savoir pour quelles valeurs de x cette aire est inférieure ou égale à $1\,500 \text{ m}^2$.

3 Montrer alors que $(780 - 2x)(620 + 2x) \leq 0$.

4 Résoudre cette dernière inéquation et conclure.

■ Corrigé de l'exercice 1.

$$1 \quad -3x + 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow -3x = -7$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-7}{-3}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = \frac{7}{3}}$$

$$2 \quad \frac{3}{5}x - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{5}x = 6$$

$$\Leftrightarrow x = 6 \times \frac{5}{3}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = 10}$$

$$3 \quad -\frac{2}{7}x + \frac{1}{2} = \frac{2}{21}x + 2$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{7}x - \frac{2}{21}x = 2 - \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{8}{21}x = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \times \left(-\frac{21}{8}\right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = -\frac{63}{16}}$$

$$4 \quad (-3x + 1)(5x - 7) = 0$$

$$\Leftrightarrow -3x + 1 = 0 \text{ ou } 5x - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \text{ ou } x = \frac{7}{5}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{S = \left\{\frac{1}{3}; \frac{7}{5}\right\}}$$

$$\begin{aligned}
5 \quad & \left(-\frac{1}{2}x - 5\right) \left(\frac{3}{4}x + 2\right) = 0 \\
& \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x - 5 = 0 \text{ ou } \frac{3}{4}x = 0 \\
& \Leftrightarrow x = -10 \text{ ou } x = -\frac{8}{3} \\
& \Leftrightarrow S = \left\{-10 ; -\frac{8}{3}\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
6 \quad & 2x(5x - 1)(2x + 3) = 0 \\
& \Leftrightarrow 2x = 0 \text{ ou } 5x - 1 = 0 \text{ ou } 2x + 3 = 0 \\
& \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{1}{5} \text{ ou } x = -\frac{3}{2} \\
& \Leftrightarrow S = \left\{0 ; \frac{1}{5} ; -\frac{3}{2}\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
7 \quad & \frac{1}{x+2} = \frac{1}{x^2-4}, \quad x \neq -2 \text{ et } x \neq 2 \\
& \Leftrightarrow \frac{x-2}{(x+2)(x-2)} = \frac{1}{x^2-4}, \quad x \neq -2 \text{ et } x \neq 2 \\
& \Leftrightarrow \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{1}{x^2-4}, \quad x \neq -2 \text{ et } x \neq 2 \\
& \Leftrightarrow x-2 = 1, \quad x \neq 2 \text{ et } x \neq -2 \\
& \Leftrightarrow x = 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
8 \quad & \frac{x^2+1}{x-1} = \frac{2x}{x-1}, \quad x \neq 1 \\
& \Leftrightarrow x^2+1 = 2x, \quad x \neq 1 \\
& \Leftrightarrow x^2-2x+1 = 0, \quad x \neq 1 \\
& \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0, \quad x \neq 1 \\
& \Leftrightarrow x = 1, \quad x \neq 1 \\
& \Leftrightarrow S = \emptyset
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
9 \quad & \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = 2, \quad x \neq 0 \text{ et } x \neq -1 \\
& \Leftrightarrow \frac{x+1}{x(x+1)} + \frac{x}{x(x+1)} = \frac{2x(x+1)}{x(x+1)}, \quad x \neq 0 \text{ et } x \neq -1 \\
& \Leftrightarrow x+1+x = 2x(x+1), \quad x \neq 0 \text{ et } x \neq -1 \\
& \Leftrightarrow 2x+1 = 2x^2+2x, \quad x \neq 0 \text{ et } x \neq -1 \\
& \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2}, \quad x \neq 0 \text{ et } x \neq -1 \\
& \Leftrightarrow x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ou } x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
& \Leftrightarrow S = \left\{-\frac{1}{\sqrt{2}} ; \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
10 \quad & \frac{2}{x-1} = 1 - \frac{x}{x+1} \\
& \Leftrightarrow \frac{2(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} - \frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)} \\
& \Leftrightarrow 2(x+1) = x^2 - 1 - x(x-1), \quad x \neq 1 \text{ et } x \neq -1 \\
& \Leftrightarrow 2x + 2 - x^2 + 1 + x^2 + x = 0, \quad x \neq 1 \text{ et } x \neq -1 \\
& \Leftrightarrow 3x + 3 = 0, \quad x \neq 1 \text{ et } x \neq -1 \\
& \Leftrightarrow x = -1, \quad x \neq 1 \text{ et } x \neq -1 \\
& \Leftrightarrow \boxed{S = \emptyset}
\end{aligned}$$

■ Corrigé de l'exercice 2.

$$\begin{aligned}
1 \quad & (3x - 5)^2 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 5 = 4 \\ \text{ou} \\ 3x - 5 = -4 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 9 \\ \text{ou} \\ 3x = 1 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ \text{ou} \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}
\end{aligned}$$

On a alors : $\boxed{\mathcal{S} = \left\{3; \frac{1}{3}\right\}}$.

$$\begin{aligned}
2 \quad & (x^2 - 4)^2 = 81 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 = 9 \\ \text{ou} \\ x^2 - 4 = -9 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 13 \\ \text{ou} \\ x^2 = -5 \end{cases} \leftarrow \text{impossible car } x^2 \geq 0 \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{13} \\ \text{ou} \\ x = -\sqrt{13} \end{cases}
\end{aligned}$$

On a alors : $\boxed{\mathcal{S} = \{-\sqrt{13}; \sqrt{13}\}}$.

$$\begin{aligned}
\text{3 } (3x^2 - 4)^2 = 9 &\iff \left(\begin{array}{l} 3x^2 - 4 = 3 \\ \text{ou} \\ 3x^2 - 4 = -3 \end{array} \right) \\
&\iff \left(\begin{array}{l} 3x^2 = 7 \\ \text{ou} \\ 3x^2 = 1 \end{array} \right) \\
&\iff \left(\begin{array}{l} x^2 = \frac{7}{3} \\ \text{ou} \\ x^2 = \frac{1}{3} \end{array} \right) \\
&\iff \left(\begin{array}{l} x = \sqrt{\frac{7}{3}} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{\frac{7}{3}} \\ \text{ou} \\ x = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{array} \right)
\end{aligned}$$

On a alors : $\mathcal{S} = \left\{ \sqrt{\frac{7}{3}} ; -\sqrt{\frac{7}{3}} ; \frac{1}{\sqrt{3}} ; -\frac{1}{\sqrt{3}} \right\}.$

$$\begin{aligned}
\text{4 } \left(\frac{2x-1}{x-7} \right)^2 = 25 &\iff \left\{ \begin{array}{l} \frac{2x-1}{x-7} = 5 \\ \text{ou} \\ \frac{2x-1}{x-7} = -5 \\ x-7 \neq 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{l} \frac{2x-1}{x-7} - 5 = 0 \\ \text{ou} \\ \frac{2x-1}{x-7} + 5 = 0 \\ x \neq 7 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{l} \frac{2x-1}{x-7} - \frac{5(x-7)}{x-7} = 0 \\ \text{ou} \\ \frac{2x-1}{x-7} + \frac{5(x-7)}{x-7} = 0 \\ x \neq 7 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{l} \frac{2x-1}{x-7} - \frac{5x-35}{x-7} = 0 \\ \text{ou} \\ \frac{2x-1}{x-7} + \frac{5x-35}{x-7} = 0 \\ x \neq 7 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{l} \frac{2x-1-5x+35}{x-7} = 0 \\ \text{ou} \\ \frac{2x-1+5x-35}{x-7} = 0 \\ x \neq 7 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{2x-1}{x-7}\right)^2 = 25 &\iff \left\{ \begin{array}{l} 2x-1-5x+35=0 \\ \text{ou} \\ 2x-1+5x-35=0 \\ x \neq 7 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{l} -3x+34=0 \\ \text{ou} \\ 7x-36=0 \\ x \neq 7 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{34}{3} \\ \text{ou} \\ x = \frac{36}{7} \\ x \neq 7 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{S} = \left\{ \frac{36}{7} ; \frac{34}{3} \right\}$.

■ Corrigé de l'exercice 3.

$$\begin{aligned}
\text{1 } \sqrt{3x-2} = 7 &\iff \left\{ \begin{array}{l} 3x-2 \geq 0 \\ 3x-2 = 7^2 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{l} 3x \geq 2 \\ 3x = 49+2 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{l} x \geq \frac{2}{3} \\ x = \frac{51}{3} \end{array} \right.
\end{aligned}$$

$\frac{51}{3} \geq \frac{2}{3}$ donc l'ensemble solution de l'équation est : $\mathcal{S} = \left\{ \frac{51}{3} \right\}$.

$$\begin{aligned}
\text{2 } \sqrt{\frac{5x-4}{3x+1}} = 3 &\iff \left\{ \begin{array}{l} \frac{5x-4}{3x+1} \geq 0 \\ 3x+1 \neq 0 \\ \frac{5x-4}{3x+1} = 9 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{l} \frac{5x-4}{3x+1} \geq 0 \\ x \neq -\frac{1}{3} \\ \frac{5x-4}{3x+1} - 9 = 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{l} \frac{5x-4}{3x+1} \geq 0 \\ x \neq -\frac{1}{3} \\ \frac{5x-4}{3x+1} - \frac{9(3x+1)}{3x+1} = 0 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{5x-4}{3x+1}} = 3 &\iff \begin{cases} \frac{5x-4}{3x+1} \geq 0 \\ x \neq -\frac{1}{3} \\ \frac{5x-4-27x-9}{3x+1} = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \frac{5x-4}{3x+1} \geq 0 \\ x \neq -\frac{1}{3} \\ \frac{-22x-13}{3x+1} = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \frac{5x-4}{3x+1} \geq 0 \\ x \neq -\frac{1}{3} \\ -22x-13 = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \frac{5x-4}{3x+1} \geq 0 \\ x \neq -\frac{1}{3} \\ x = \frac{13}{22} \end{cases}
\end{aligned}$$

On calcule maintenant $\frac{5x-4}{3x+1}$ pour $x = \frac{13}{22}$ afin de voir si cette solution est valable :

$$\frac{5x-4}{3x+1} = -\frac{23}{61} < 0.$$

Ainsi, $\boxed{\mathcal{S} = \emptyset}$.

$$\begin{aligned}
\textbf{3} \quad \sqrt{x^2+x+1} = x+1 &\iff \begin{cases} x^2+x+1 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \\ x^2+x+1 = (x+1)^2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x^2+x+1 \geq 0 \\ x \geq -1 \\ x^2+x+1 = x^2+2x+1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x^2+x+1 \geq 0 \\ x \geq -1 \\ x = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

On vérifie que $x^2+x+1 \geq 0$ pour $x = 0$ (assez facilement) donc $\boxed{\mathcal{S} = \{0\}}$.

$$\begin{aligned}
4 \quad x\sqrt{7} + \sqrt{2} = \sqrt{7} - x\sqrt{2} &\iff x\sqrt{7} + x\sqrt{2} = \sqrt{7} - \sqrt{2} \\
&\iff x(\sqrt{7} + \sqrt{2}) = \sqrt{7} - \sqrt{2} \\
&\iff x = \frac{\sqrt{7} - \sqrt{2}}{\sqrt{7} + \sqrt{2}} \\
&\iff x = \frac{(\sqrt{7} - \sqrt{2})(\sqrt{7} - \sqrt{2})}{(\sqrt{7} + \sqrt{2})(\sqrt{7} - \sqrt{2})} \\
&\iff x = \frac{(\sqrt{7})^2 - 2\sqrt{7} \times \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2}{(\sqrt{7})^2 - (\sqrt{2})^2} \\
&\iff \frac{9 - 2\sqrt{14}}{5}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{S} = \left\{ \frac{9 - 2\sqrt{14}}{5} \right\}.$

$$\begin{aligned}
5 \quad \sqrt{(x-2)(3x+4)} = 2(3x+4) &\iff \begin{cases} (x-2)(3x+4) \geq 0 \\ (x-2)(3x+4) = [2(3x+4)]^2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} (x-2)(3x+4) \geq 0 \\ (x-2)(3x+4) = 4(3x+4)^2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} (x-2)(3x+4) \geq 0 \\ (x-2)(3x+4) - 4(3x+4)^2 = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} (x-2)(3x+4) \geq 0 \\ (3x+4)[(x+2) - 4(3x+4)] = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} (x-2)(3x+4) \geq 0 \\ (3x+4)(x+2-12x-16) = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} (x-2)(3x+4) \geq 0 \\ (3x+4)(-11x-14) = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} (x-2)(3x+4) \geq 0 \\ \left(\begin{array}{l} 3x+4=0 \\ \text{ou} \\ -11x-14=0 \end{array} \right) \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} (x-2)(3x+4) \geq 0 \\ \left(\begin{array}{l} x = -\frac{4}{3} \\ \text{ou} \\ x = -\frac{14}{11} \end{array} \right) \end{cases}
\end{aligned}$$

On regarde maintenant si $(x-2)(3x+4) \geq 0$ pour $x = -\frac{4}{3}$ et pour $x = -\frac{14}{11}$.

Pour $x = -\frac{4}{3}$, on obtient 0, donc cette valeur convient.

Pour $x = -\frac{14}{11}$, on obtient $-\frac{72}{121} < 0$ donc cette valeur ne convient pas.

Ainsi, $\boxed{\mathcal{S} = \left\{-\frac{4}{3}\right\}}$.

■ Corrigé de l'exercice 4.

1 *a.* Dans le triangle équilatéral ABC, $\widehat{ABC} = 60^\circ$.

Dans le triangle NBM rectangle en M,

$$\tan \widehat{NBM} = \frac{NM}{BM}$$

donc :

$$\tan 60^\circ = \frac{NM}{x}.$$

On a donc :

$$\boxed{MN = x \tan 60^\circ = x\sqrt{3}}$$

b. Par symétrie, $BM = QC = x$ et $MH = HQ = 3 - x$.

Donc, $MQ = 2 \times (3 - x)$, soit $\boxed{MQ = 6 - 2x}$.

2 On veut que MNPQ soit un carré.

a. La condition mène à l'égalité :

$$MQ = MN$$

c'est-à-dire, d'après la question 1 :

$$\boxed{x\sqrt{3} = 6 - 2x}$$

b. Si $x\sqrt{3} = 6 - 2x$, alors $x\sqrt{3} + 2x = 6$.

Ainsi, $x(\sqrt{3} + 2) = 6$, soit :

$$\boxed{x = \frac{6}{2 + \sqrt{3}}}$$

N.B. On aurait pu mettre le résultat de sorte que le dénominateur ne comporte pas de radical, comme il est de coutume de faire :

$$\begin{aligned} \frac{6}{2 + \sqrt{3}} &= \frac{6(2 - \sqrt{3})}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} \\ &= \frac{12 - 6\sqrt{3}}{4 - 3} \\ &= 12 - 6\sqrt{3}, \end{aligned}$$

et on peut aussi s'assurer que $x < 3$ en trouvant une valeur approchée :

$$x \approx 1,6.$$

■ Corrigé de l'exercice 5.

1 $(x-1)(x+2) \leq 0$

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$x - 1$		$-$	$-$	0 $+$
$x + 2$		$-$	0 $+$	$+$
$(x - 1)(x + 2)$		$+$ 0	$-$ 0	$+$

Donc $S = [-2; 1]$

2 $(3x-2)(5x-7) \geq 0$

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{5}$	$+\infty$	
$3x - 2$	$-$	0	$+$	$+$	
$5x - 7$	$-$	$-$	0	$+$	
$(3x-2)(5x-7)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Donc $S =]-\infty; \frac{2}{3}] \cup [\frac{7}{5}; +\infty[$

3 $(5x-1)(-x+9)(2x+1) > 0$

x	$-\infty$	-9	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$+\infty$		
$5x - 1$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$-x + 9$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$2x + 1$		$-$	$-$	0	$+$	$+$	
Produit		$+$	0	$-$	0	$+$	$-$

Donc $S =]-\infty; -9[\cup]-\frac{1}{2}; \frac{1}{5}[$

4
$$\begin{aligned} \frac{2x+1}{2x-1} - \frac{2x-1}{2x+1} &< \frac{2x+6}{4x^2-1} \\ \Leftrightarrow \frac{(2x+1)^2 - (2x-1)^2}{(2x+1)(2x-1)} &< \frac{2x+6}{4x^2-1} \\ \Leftrightarrow \frac{(2x+1-2x+1)(2x+1+2x-1) - 2x-6}{4x^2-1} &< 0 \\ \Leftrightarrow \frac{8x-2x-6}{(2x-1)(2x+1)} &< 0 \\ \Leftrightarrow \frac{6(x-1)}{(2x+1)(2x-1)} &< 0 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$x - 1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$2x + 1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$2x - 1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
Fraction	$-$	$+$	$-$	0	$+$

Donc $S = \left] -\infty ; -\frac{1}{2} \cup \right] \frac{1}{2} ; 1 \left[\left[\left[\right.$

5 $\frac{5x+4}{2x-3} + \frac{(8-x)(10x+8)}{(2x-3)^2} \leq 0$
 $\Leftrightarrow \frac{(5x+4)(2x-3) + 2(8-x)(5x+4)}{(2x-3)^2} \leq 0$
 $\Leftrightarrow \frac{(5x+4)(2x-3+16-2x)}{(2x-3)^2} \leq 0$
 $\Leftrightarrow \frac{13(5x+4)}{(2x-3)^2} \leq 0$

x	$-\infty$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$5x + 4$	$-$	0	$+$	$+$
$(2x - 3)^2$	$+$	$+$	0	$+$
Fraction	$-$	0	$+$	$+$

Donc $S = \left] -\infty ; -\frac{4}{5} \cup \right] \frac{3}{2} ; \infty \left[\left[\right.$

6 $\frac{(4-3x)(9x^2-10x-3)}{2x-7} < 4-3x$
 $\Leftrightarrow \frac{(4-3x)(9x^2-10x-3) - (4-3x)(2x-7)}{2x-7} < 0$
 $\Leftrightarrow \frac{(4-3x)(9x^2-10x-3-2x+7)}{2x-7} < 0$
 $\Leftrightarrow \frac{(4-3x)(9x^2-12x+4)}{2x-7} < 0$
 $\Leftrightarrow \frac{(4-3x)(3x-2)^2}{2x-7} < 0$

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{7}{2}$	$+\infty$
$4 - 3x$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$(3x - 2)^2$	$+$	0	$+$	$+$	$+$
$2x - 7$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
Fraction	$-$	0	$-$	0	$+$

Donc $S =]-\infty; \frac{4}{3} \cup]\frac{7}{2}; +\infty[[$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} \leq \frac{1}{x} \\
 \Leftrightarrow & \frac{x(x-1) - x(x+1) - (x+1)(x-1)}{x(x-1)(x+1)} \leq 0 \\
 \Leftrightarrow & \frac{-2x - x^2 + 1}{x(x+1)(x-1)} \leq 0 \\
 \Leftrightarrow & -\frac{x^2 + 2x - 1}{x(x+1)(x-1)} \leq 0 \\
 \Leftrightarrow & -\frac{(x+1)^2}{x(x+1)(x-1)} \leq 0 \\
 \Leftrightarrow & \frac{x+1}{x(x-1)} \geq 0, \text{ si } x \neq -1
 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
x	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
Fraction	$-$	$+$	$-$	$+$	

Donc $S =]-1; 0[\cup]1; +\infty[$

$$\begin{aligned} 8 \quad & \frac{1-2x}{16x^2-9} \geq \frac{1-2x}{4x+3} \\ \Leftrightarrow & \frac{(1-2x) - (1-2x)(4x-3)}{16x^2-9} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{(1-2x)(1-4x+3)}{16x^2-9} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{4(1-2x)(1-x)}{(4x-3)(4x+3)} \geq 0 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$+\infty$	
$1 - 2x$	+	+	0	-	-	-	
$1 - x$	-	-	-	-	0	+	
$4x - 3$	-	-	-	0	+	+	
$4x + 3$	-	0	+	+	+	+	
Fraction	-	+	0	-	+	0	-

Donc $S = \left] -\frac{3}{4}; \frac{1}{2} \right] \cup \left] \frac{3}{4}; 1 \right]$

■ **Corrigé de l'exercice 6.**

$$\begin{aligned}
 \text{1} \quad f(x) &= 100 \times 60 - (100 - 2x)(60 - 2x) \\
 &= 6\,000 - 6\,000 + 200x + 120x - 4x^2 \\
 &= -4x^2 + 320x
 \end{aligned}$$

$$f(x) = -4x(x - 80)$$

$$\begin{aligned}
 \text{2} \quad \text{On a : } -4(x - 40)^2 + 6\,400 &= -4(x^2 - 80x + 160) + 6\,400 \\
 &= -4x^2 + 320x - 6\,400 + 6\,400 \\
 &= -4x^2 + 320x \\
 &= f(x).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{3} \quad f(x) \leq 1\,500 &\iff -4(x - 40)^2 + 6\,400 \leq 1\,500 \\
 &\iff -4(x - 40)^2 + 6\,400 - 1\,500 \leq 0 \\
 &\iff 4\,900 - 4(x - 40)^2 \leq 0 \\
 &\iff 70^2 - [2(x - 40)]^2 \leq 0 \\
 &\iff [70 - 2(x - 40)][70 + 2(x - 40)] \leq 0 \\
 &\iff (150 - 2x)(2x - 10) \leq 0.
 \end{aligned}$$

4 Dressons le tableau de signes du produit $(150 - 2x)(2x - 10)$:

x	0	5	30
$150 - 2x$	+		+
$2x - 10$	-	0	+
$(150 - 2x)(2x - 10)$	-	0	+

Notons ici que $x \in [0 ; 50]$. En effet, x ne peut pas être négatif et ne peut pas être supérieur à la moitié de la largeur, à savoir 30.

Ainsi, l'aire jaune est inférieure à $1\,500 \text{ m}^2$ pour $x \in [0 ; 5]$.

Fonctions : généralités

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

- A Exercices d'application du cours
- R Exercices de réflexion

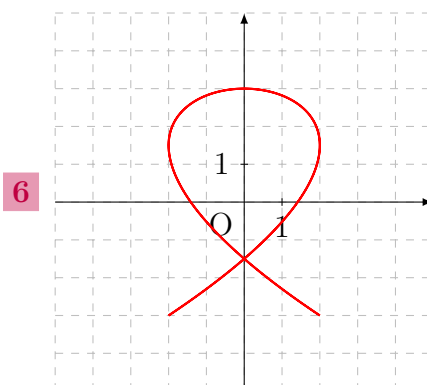
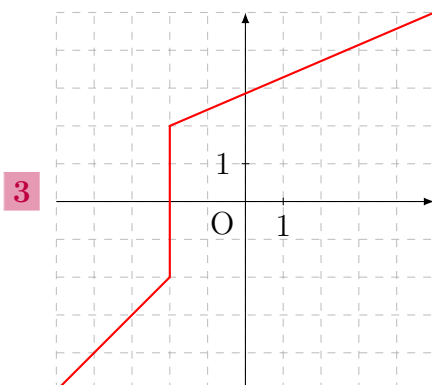
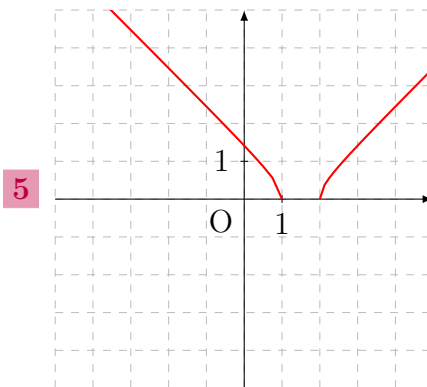
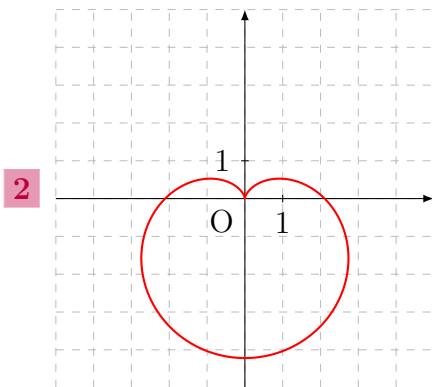
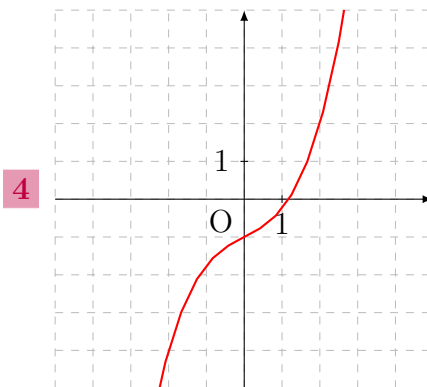
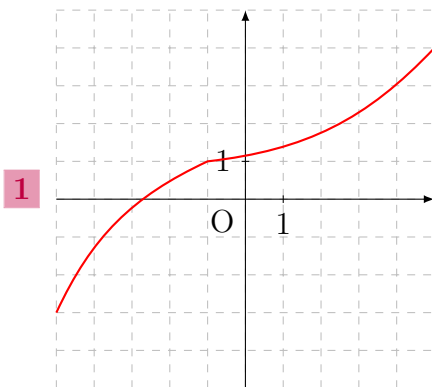
4 octobre 2015

■ Exercice 1. Reconnaître la courbe représentative d'une fonction

☆☆☆☆☆ A

Corrigé page 41

Pour chaque courbe dessinée ci-dessous, dire si elle représente une fonction en justifiant.



■ Exercice 2. Tableau de valeurs à la calculatrice

★★★★★ A
Corrigé page 41

À l'aide de votre calculatrice, compléter le tableau de valeurs donné pour chaque fonction.

1 $f(x) = x^2 - 3x + 6$.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$											

2 $g(x) = \frac{1}{x-3}$.

x	-1	0	1	2	2,25	2,5	2,75	3,25	3,5	3,75	4	5	6
$g(x)$													

3 $h(x) = \sqrt{4-x^2}$.

x	-2	1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
$h(x)$									

■ Exercice 3. Appartenance de points à une courbe

★★★★★ A
Corrigé page 42

Soit f une fonction et soit \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère.

Pour chacune des fonctions suivantes, dire si le point A (dont les coordonnées sont données à chaque fois) appartient ou non à \mathcal{C}_f .

1 $f(x) = -5x + 2$, A(-1; 7).

2 $f(x) = x^2 + x + 1$, A(-2; 3).

3 $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$, A(2; 0,25).

4 $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, A($\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$).

■ Exercice 4. Images et antécédents

★★★★★ A
Corrigé page 43

1 Soit $f(x) = -3x + 2$.

- Donner l'image des nombres -1, 0 et $\sqrt{2}$ par la fonction f .
- 1 est-il un antécédent de 1 par la fonction f ?
- Trouver tous les antécédents de -3 par la fonction f .

2 Soit $g(x) = x^2 - 5x + 2$.

- Donner l'image des nombres -1, 1 et $\sqrt{2}$ par la fonction g .
- 2 est-il un antécédent de 1 par la fonction g ?
- Donner tous les antécédents de 2 par la fonction g .

■ Exercice 5. Établir une expression d'une fonction

★★★★★ R

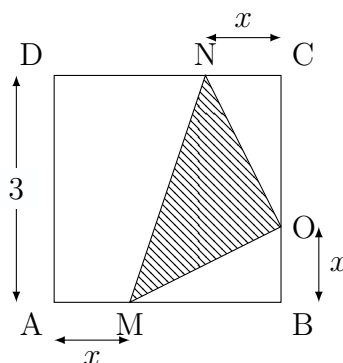
Corrigé page 43

Pour chacune des questions suivantes, exprimer $f(x)$ sous sa forme la plus simple, puis donner son domaine de définition.

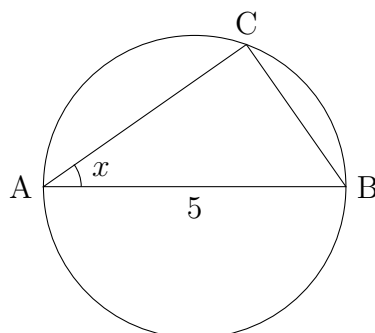
- 1** Un complexe sportif est composé de plusieurs activités. Pour pouvoir y avoir accès, on doit payer un droit d'entrée de 5 € puis payer 2 € par heure.

$f(x)$ représente le prix à payer pour x heures.

- 2** $f(x)$ représente l'aire hachurée dans le carré ABCD suivant :

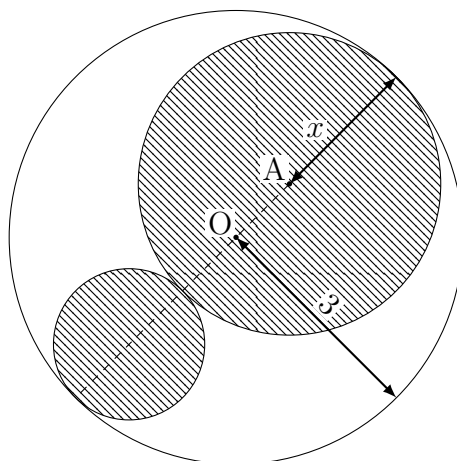


- 3** $f(x)$ représente l'aire du triangle ABC inscrit dans le cercle de diamètre [AB] :



- 4** On choisit un nombre x . On considère alors la différence entre le carré de son précédent et celui de son suivant. $f(x)$ représente le résultat final.

- 5** $f(x)$ représente l'aire du domaine blanc de la figure suivante, où O est le centre du cercle de rayon 3 et A le centre du cercle de rayon x :

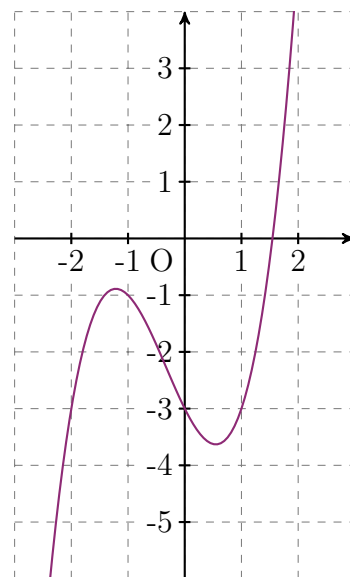


■ Exercice 6. Lectures graphiques

★★★★★ A

Corrigé page 44

On considère la fonction f définie sur $[-3; 3]$ représentée par la courbe ci-dessous :



À l'aide du graphique, répondre aux questions suivantes.

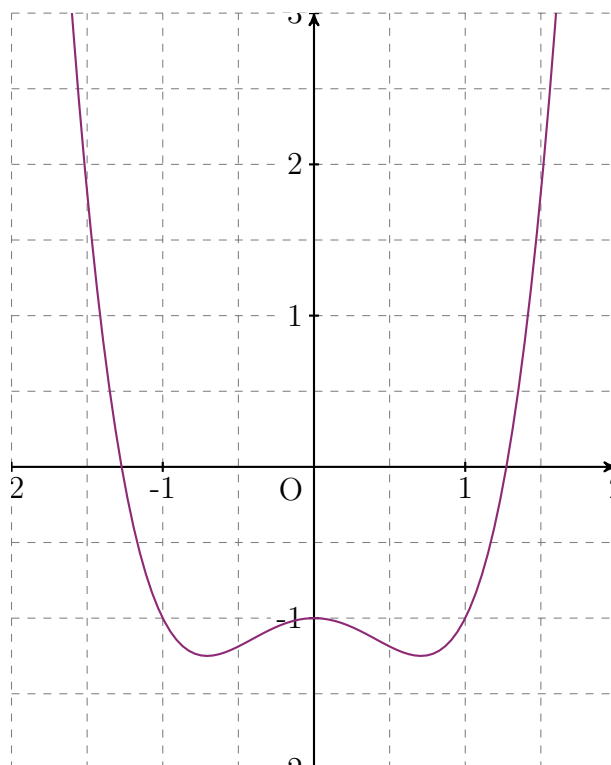
- 1 Résoudre l'équation : $f(x) = 0$ sur $[-3; 3]$.
- 2 Résoudre l'inéquation : $f(x) \leq -3$ sur $[-3; 3]$.
- 3 Résoudre l'inéquation : $f(x) > 0$ sur $[-3; 3]$.

■ Exercice 7. Lectures graphiques

★★★★★ A

Corrigé page 45

On considère la fonction f définie sur $[-2; 2]$ représentée par la courbe ci-dessous :



À l'aide du graphique, répondre aux questions suivantes.

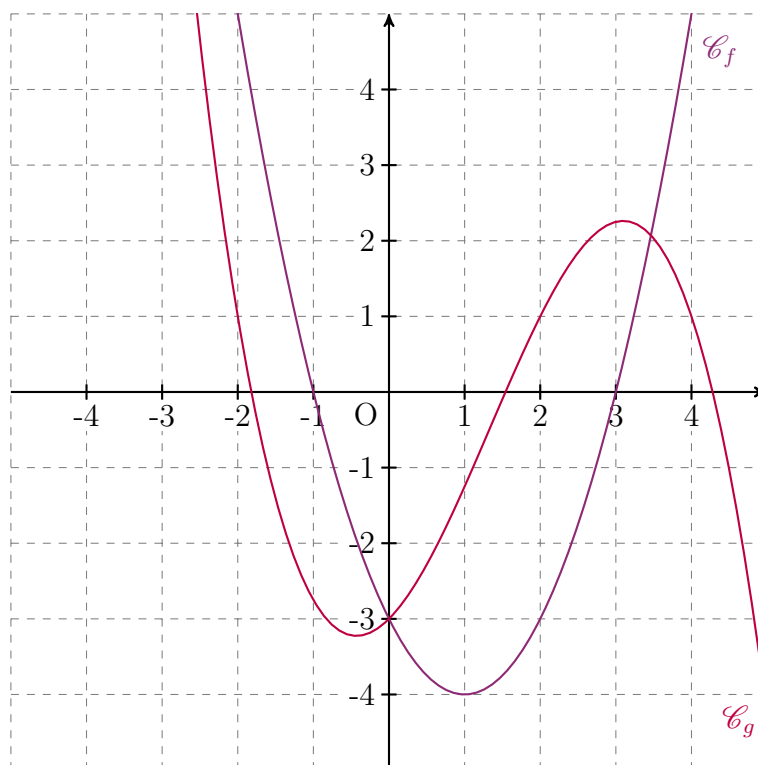
- 1 Résoudre l'équation : $f(x) = -1$ sur $[-2; 2]$.
- 2 Résoudre l'inéquation : $f(x) \geq -1$ sur $[-2; 2]$.
- 3 Résoudre l'inéquation : $f(x) < -2$ sur $[-2; 2]$.

■ Exercice 8. Lectures graphiques

★★★★☆ A

Corrigé page 46

On considère deux fonctions f et g définies sur $[-5; 5]$ dont les courbes représentatives sont dessinées ci-dessous :



À l'aide du graphique, répondre aux questions suivantes.

- 1 Résoudre l'équation : $f(x) = g(x)$ sur $[-5; 5]$.
- 2 Résoudre l'inéquation : $f(x) \leq g(x)$ sur $[-5; 5]$.
- 3 Combien l'équation $g(x) = 3$ possède-t-elle de solution(s) ?
- 4 Dresser le tableau de variation de la fonction g sur $[-5; 5]$.
- 5 Dresser un tableau de signes de la fonction g sur $[-5; 5]$.

■ Exercice 9. Triangle équilatéral

★★★★★ R

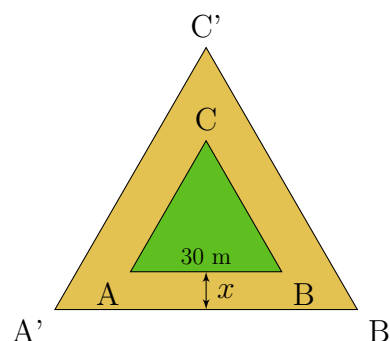
Corrigé page 48

Le jardin ABC est un triangle équilatéral de côté 30 mètres, entouré d'une allée de largeur x mètres (représentée en jaune ci-dessous). Le triangle A'B'C' est lui aussi équilatéral.

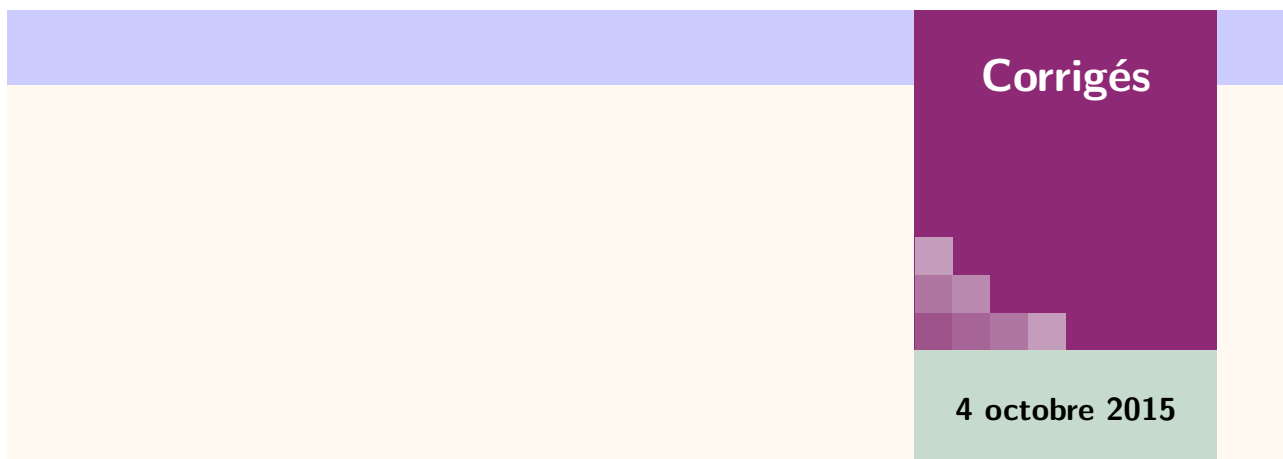
On cherche à déterminer la valeur de x pour laquelle l'aire de l'allée est égale à celle du jardin.

On admettra les valeurs suivantes :

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$



- 1** *a.* On note h la hauteur de ABC. Montrer que $h = 15\sqrt{3}$ mètres.
b. Montrer alors que l'aire de ABC est : $\mathcal{A} = 225\sqrt{3} \text{ m}^2$.
- 2** *a.* En considérant le point P de $[A'B']$ de sorte que $A'AP$ soit un triangle rectangle d'hypoténuse AA' , montrer que $A'B' = 30 + 2x\sqrt{3}$.
b. En déduire que l'aire de $A'B'C'$ est : $\mathcal{A}' = (15 + x\sqrt{3})^2 \sqrt{3}$.
- 3** *a.* Montrer que chercher x pour que l'aire de l'allée soit égale à celle du jardin revient à résoudre l'équation $\mathcal{A}' = 2\mathcal{A}$.
b. Trouver alors la valeur exacte, puis approchée, de x .



■ Corrigé de l'exercice 1.

- 1 La courbe représente bien une fonction malgré la singularité au point d'abscisse -1 . En effet, chaque valeur de x dans $[-5; 5]$ n'admet qu'une image $f(x)$: si on prend une valeur de x quelconque dans $[-5; 5]$, on ne peut trouver qu'un seul point de la courbe qui a pour abscisse x .
- 2 La courbe ne représente pas une fonction car il existe au moins un x pour lequel deux images par f existent. Par exemple, pour $x = 1$, les points de coordonnées $(1; 0,5)$ et $(1; -4)$ sont sur cette courbe.
- 3 Cette courbe ne représente pas une fonction car on voit qu'il existe plusieurs points de cette courbe dont l'abscisse vaut -2 .
- 4 La courbe représente bien une fonction car sur $[-5; 5]$, chaque valeur de x admet une unique image.
- 5 Cette courbe représente bien une fonction malgré le fait qu'elle possède un « trou » sur $[1; 2]$. En effet, chaque valeur de x dans $[-5; 1]$ possède une unique image et il en est de même pour chaque valeur de x dans $[2; 5]$.
- 6 Cette courbe n'est pas représentative d'une fonction car il existe au moins une valeur de x qui possède deux images. Par exemple, pour $x = 0$, il y a deux images : 3 et $-1,5$.

■ Corrigé de l'exercice 2.

Sur CASIO, appuyer sur la touche [MENU], puis appuyer sur la touche [7] (ou sélectionner [TABLE]).

Ensuite, entrer l'expression de chaque fonction en Y1, Y2 et Y3. Noter que la touche $[X, t, \theta, n]$ est à utiliser pour la variable X. Valider en appuyant sur la touche [EXE].

Pour construire le tableau de valeurs d'une fonction, positionnez-vous sur la ligne correspondant à la fonction souhaitée, puis appuyer sur la touche [F5] (SET) pour paramétrer la valeur initiale et la valeur finale de x , en précisant le pas (Step).

Sur TI, appuyer sur la touche $[f(x)]$ pour rentrer l'expression des fonctions en Y1, Y2 et Y3. Noter que la touche $[X, t, \theta, n]$ est à utiliser pour la variable X. Valider en appuyant sur la touche [ENTRER].

Pour paramétrer le tableau de valeurs, appuyer sur [2nd]+[F4] (afin de sélectionner "TblSet").

1 Ici, pour la **CASIO**, on entrera :

- Start : -5
- End : 5
- Step : 1

Pour la **T.I.**, on entrera :

- TblStart : -5
- Δtbl : 1

On obtient :

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	46	34	24	16	10	6	4	4	6	10	16

2 Ici, pour la **CASIO**, on entrera :

- Start : -1
- End : 6
- Step : 0.25

Pour la **T.I.**, on entrera :

- TblStart : -1
- Δtbl : 0.25

On obtient :

x	-1	0	1	2	$2,25$	$2,5$	$2,75$	$3,25$	$3,5$	$3,75$	4	5	6
$g(x)$	$-0,25$	$-0,333$	$-0,5$	-1	$-1,333$	-2	-4	4	2	$1,333$	1	$0,5$	$0,333$

3 Ici, pour la **CASIO**, on entrera :

- Start : -2
- End : 2
- Step : 0.5

Pour la **T.I.**, on entrera :

- TblStart : -2
- Δtbl : 0.5

On obtient :

x	-2	$1,5$	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	$1,5$	2
$h(x)$	0	$1,323$	$1,732$	$1,936$	2	$1,936$	$1,732$	$1,323$	0

■ Corrigé de l'exercice 3.

1 $f(x) = -5x + 2$, $A(-1; 7)$.

$$f(-1) = -5 \times (-1) + 2 = 5 + 2 = 7 = y_A. \text{ Donc } A \in \mathcal{C}_f.$$

2 $f(x) = x^2 + x + 1$, $A(-2; 3)$.

$$f(-2) = (-2)^2 + (-2) + 1 = 4 - 2 + 1 = 2 + 1 = 3 = y_A \text{ donc } A \in \mathcal{C}_f.$$

3 $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$, $A(2; 0,25)$.

$$f(2) = \frac{1}{2^2 + 1} = \frac{1}{4 + 1} = \frac{1}{5} = 0,2 \neq y_A. \text{ Donc } A \notin \mathcal{C}_f.$$

4 $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $A(\sqrt{2}; \sqrt{3})$.

$$f(\sqrt{2}) = \sqrt{\sqrt{2}^2 + 1} = \sqrt{2 + 1} = \sqrt{3} = y_A \text{ donc } A \in \mathcal{C}_f.$$

■ Corrigé de l'exercice 4.

1 Soit $f(x) = -3x + 2$.

a. Donner l'image des nombres -1 , 0 et $\sqrt{2}$ par la fonction f .

$$\begin{aligned}f(-1) &= -3 \times (-1) + 2 = 5 & ; & & f(0) &= -3 \times 0 + 2 = 2 & ; \\f(\sqrt{2}) &= -3\sqrt{2} + 2.\end{aligned}$$

b. -1 est-il un antécédent de 1 par la fonction f ?

$f(-1) = -3 \times (-1) + 2 = 3 + 2 = 5 \neq 1$ donc -1 n'est pas un antécédent de 1 par la fonction f .

c. Trouver tous les antécédents de -3 par la fonction f .

Rechercher les antécédents de -3 par f revient à trouver toutes les valeurs de x telles que $f(x) = -3$. Il faut donc résoudre cette équation.

$$\begin{aligned}f(x) = -3 &\iff -3x + 2 = -3 \\&\iff -3x = -5 \\&\iff x = \frac{5}{3}.\end{aligned}$$

Ainsi, le seul antécédent de -3 par f est $\frac{5}{3}$.

2 $g(x) = x^2 - 5x + 2$.

a. Donner l'image des nombres -1 , 1 et $\sqrt{2}$ par la fonction g .

$$\begin{aligned}g(-1) &= (-1)^2 - 5(-1) + 2 = 8 & ; & & g(1) &= 1^2 - 5 \times 1 + 2 = -1 & ; \\g(\sqrt{2}) &= \sqrt{2}^2 - 5\sqrt{2} + 2 = 4 - 5\sqrt{2}.\end{aligned}$$

b. -2 est-il un antécédent de 1 par la fonction g ?

$g(-2) = (-2)^2 - 5(-2) + 2 = 4 + 10 + 2 = 16 \neq 1$ donc -2 n'est pas un antécédent de 1 par g .

c. Donner tous les antécédents de 2 par la fonction g .

$$\begin{aligned}g(x) = 2 &\iff x^2 - 5x + 2 = 2 \\&\iff x^2 - 5x = 0 \\&\iff x(x - 5) = 0 \\&\iff x = 0 \text{ ou } x = 5.\end{aligned}$$

Les antécédents de 2 par g sont donc 0 et 5 .

■ Corrigé de l'exercice 5.

1 $f(x) = 5 + 2x$. Son domaine de définition est $[0; +\infty[$.

2 • L'aire du carré ABCD est : 9 .

- L'aire des triangles MBO et NCO est : $\frac{x(3-x)}{2}$.
- L'aire du trapèze AMND est la moitié de celle du carré ABCD donc est égale à $\frac{9}{2}$.

L'aire du triangle MON est donc :

$$f(x) = 9 - \frac{9}{2} - 2 \times \frac{x(3-x)}{2} = \frac{9}{2} - x(3-x) = x^2 - 3x + \frac{9}{2}.$$

Son domaine de définition est $[0; 3]$ car x ne peut pas être négatif ni plus grand que la mesure d'un côté de ABCD.

3 Le triangle ABC est rectangle en C donc :

$$\cos x = \frac{AC}{5} \quad ; \quad \sin x = \frac{BC}{5}$$

donc $AC = 5 \cos x$ et $BC = 5 \sin x$.

L'aire de ABC est donc $f(x) = AC \times BC = 25 \sin x \cos x$.

4 Le carré du précédent de x est $(x-1)^2$.

Le carré du suivant de x est $(x+1)^2$.

Ainsi, $f(x) = (x-1)^2 - (x+1)^2 = -4x$. C'est une fonction linéaire dont le domaine de définition est \mathbb{R} .

5 L'aire du disque de rayon 3 est : 9π .

L'aire du disque de rayon x est : πx^2 .

L'aire du « petit disque » est : $(3-x)^2\pi$.

Ainsi, l'aire blanche est :

$$\begin{aligned} 9\pi - \pi x^2 - (3-x)^2\pi &= [9 - x^2 - (9 - 6x + x^2)]\pi \\ &= (6x - 2x^2)\pi \end{aligned}$$

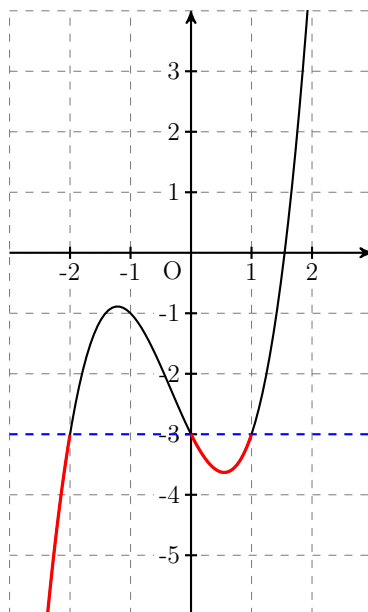
$$\boxed{f(x) = 2x(3-x)\pi}$$

Le domaine de définition de f est $[0; 3]$.

■ Corrigé de l'exercice 6.

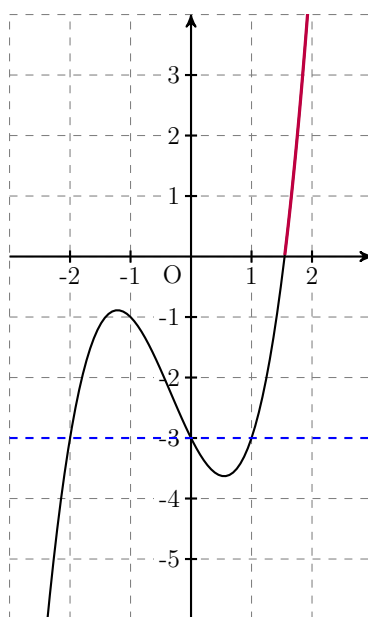
1 $f(x) = 0$ admet pour ensemble solution : $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$ car la courbe semble couper l'axe des abscisses en $x = 1,5 = \frac{3}{2}$.

2 Les solutions de l'inéquation $f(x) \leq -3$ sont les valeurs de x pour lesquelles les points de la courbe d'abscisse x sont sous la droite horizontale passant par $y = -3$, donc sur les parties en rouge ci-dessous :



Ces parties sont sur les intervalles $[-3; -2]$ et $[0; 1]$ donc l'ensemble solution de l'inéquation $f(x) \leq -3$ est : $S = [-3; -2] \cup [0; 1]$.

- 3** Les solutions de l'inéquation $f(x) > 0$ sont les valeurs de x pour lesquelles les points de la courbe d'abscisse x sont au-dessus de l'axe des abscisses, donc sur la branche violette ci-dessous :



Donc l'ensemble solution de l'inéquation $f(x) > 0$ sur $[-3; 3]$ est : $S = \left] \frac{3}{2}; 3 \right]$.

■ Corrigé de l'exercice 7.

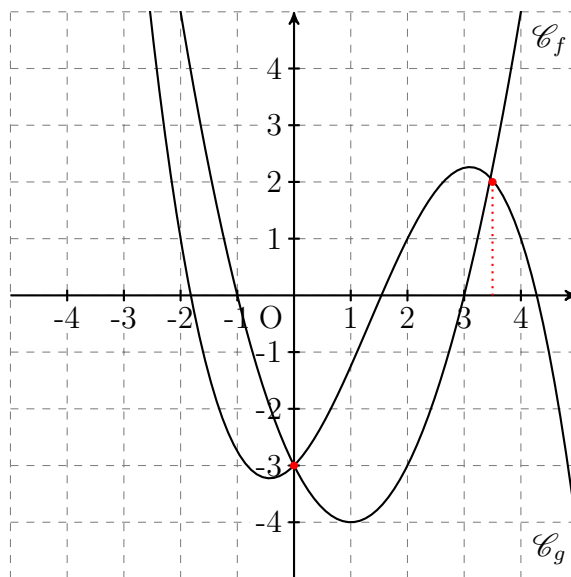
- 1** L'équation $f(x) = -1$ admet pour ensemble solution : $S = \{-1; 0; 1\}$ car la droite horizontale passant par $y = -1$ coupe la courbe en 3 points d'abscisses respectives -1 , 0 et 1 .

2 L'inéquation : $f(x) \geq -1$ admet pour ensemble solution : $S = [-2; -1] \cup \{0\} \cup [1; 2]$ car les parties de la courbe se trouvant au-dessus de la droite horizontale passant par $y = -1$ (ou sur cette droite) se trouve respectivement sur $[-2; -1]$, $[1; 2]$ et au point d'abscisse 0.

3 L'inéquation $f(x) < -2$ admet pour ensemble solution $S = \emptyset$ car la courbe n'est jamais au-dessous de la droite horizontale passant par $y = -2$.

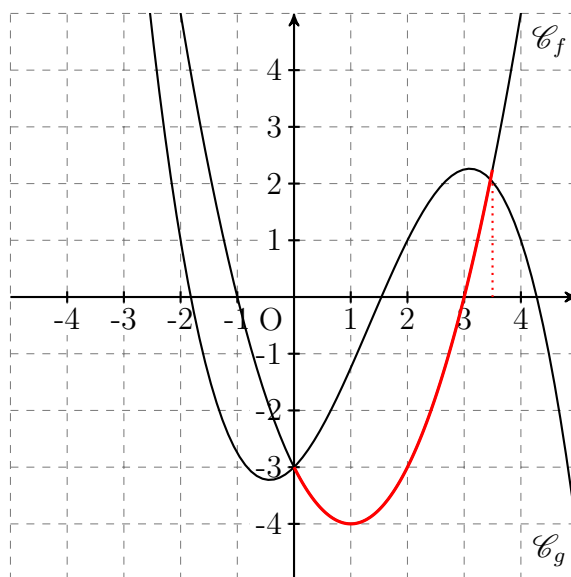
■ Corrigé de l'exercice 8.

1 Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection de \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g . Il y a deux points d'intersection (en rouge ci-dessous) :



Les solutions à l'équation $f(x) = g(x)$ sont donc $x = 0$ et $x = 3, 5$.

2 Repassons en rouge la partie de la courbe \mathcal{C}_f au-dessous de \mathcal{C}_g :

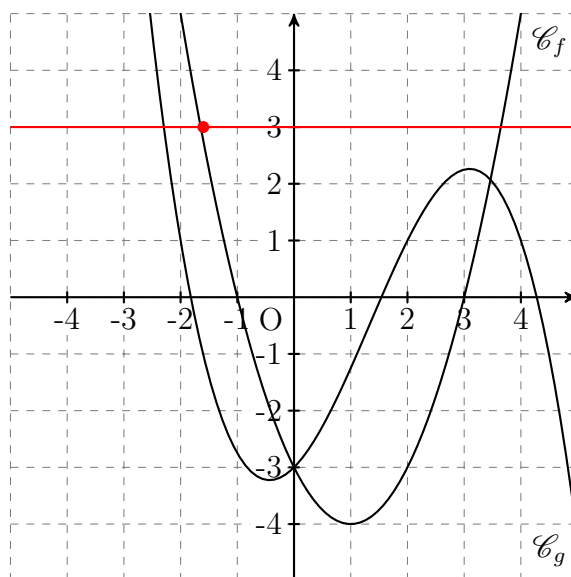


La partie repassée en rouge correspond aux images des x compris entre 0 à 3,5.

Donc, l'inéquation a pour solution l'intervalle $[0; 3, 5]$.

Remarque : les crochets sont vers l'intérieur car l'inégalité est large (\leq) ; on permet donc à 0 et 3,5 d'appartenir à l'ensemble solution.

- 3 Pour savoir combien l'équation $f(x) = 3$ admet de solution, on regarde combien il y a de points d'intersection entre la droite d'équation $y = 3$ et \mathcal{C}_f :



Il n'y a qu'un seul point d'intersection donc il n'y a qu'une solution à l'équation $f(x) = 3$.

- 4 Le tableau de variations de la fonction g est :

x	-5	-0,5	3,1	5
$g(x)$		↘ -3,2	↗ 2,2	↘ -4,2

Remarque : les valeurs mises sont approximatives ; il n'est donc pas grave d'avoir mis d'autres valeurs qui les approchent.

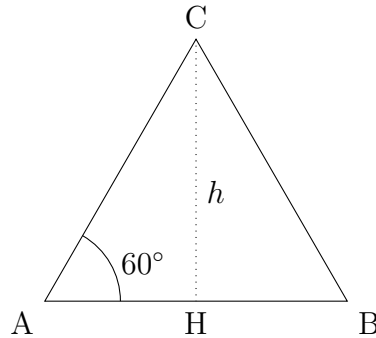
- 5 Le tableau de signes de la fonction g est :

x	-5	-1,9	1,5	4,4	5
$g(x)$	+	0	-	0	+

Remarque : les valeurs sont approximatives. « -1,9 » et « 4,4 » sont des valeurs approximatives car la précision du graphique ne nous permet pas d'être certains de ces valeurs.

■ **Corrigé de l'exercice 9.**

- 1 a. Nous avons le schéma suivant :



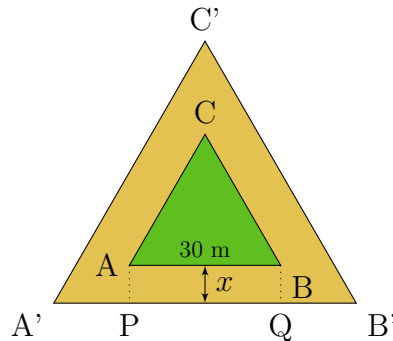
Dans le triangle ACH rectangle en H :

$$\sin 60^\circ = \frac{h}{AC} \quad \text{donc} \quad h = AC \sin 60^\circ = 30 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3}.$$

- b. L'aire d'un triangle est donnée par la formule : $\frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$ donc l'aire de ABC est :

$$\mathcal{A} = \frac{AB \times h}{2} = \frac{30 \times 15\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{\mathcal{A} = 225\sqrt{3} \text{ m}^2}$$

- 2 a. Considérons les points P et Q comme indiqués ci-dessous, de sorte que AA'P et AA'Q soient rectangles respectivement en P et Q :



$$\left. \begin{array}{l} AP = AQ \\ (AP) \perp (A'B') \text{ et } (AQ) \perp (A'C') \end{array} \right\} \Rightarrow (A'A) \text{ est la bissectrice de } \widehat{B'A'C'}.$$

Ainsi, $\widehat{B'A'A} = 30^\circ$. Dans le triangle A'AP, rectangle en P, on a donc :

$$\tan \widehat{PA'A} = \frac{AP}{A'P} \Rightarrow A'P = \frac{AP}{\tan 30^\circ} \Rightarrow A'P = \frac{x}{\frac{1}{\sqrt{3}}} \Rightarrow A'P = x\sqrt{3}.$$

De plus, $QB' = A'P$ pour des raisons de symétrie de la figure.

Ainsi, $A'B' = A'P + PQ + QB'$, soit $A'B' = x\sqrt{3} + 30 + x\sqrt{3}$, ou encore $\underline{A'B' = 30 + 2x\sqrt{30}}$.

- b.* D'après ce qui a été fait dans la question **1** *b.*, l'aire d'un triangle équilatéral de côté a est égale à $a^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}' &= A'B'^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \\ &= (30 + 2x\sqrt{3})^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \\ &= [2(15 + x\sqrt{3})]^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \boxed{\mathcal{A}' &= (15 + x\sqrt{3})^2 \sqrt{3}}\end{aligned}$$

- 3** *a.* L'aire de l'allée ($\mathcal{A}' - \mathcal{A}$) est égale à celle du jardin (\mathcal{A}) donc $\mathcal{A}' - \mathcal{A} = \mathcal{A}$.

En ajoutant \mathcal{A} à droite et à gauche du signe « = », on arrive à l'équation : $\mathcal{A}' = 2\mathcal{A}$.

$$\begin{aligned}\textcolor{red}{b.} \quad \mathcal{A}' = 2\mathcal{A} &\iff (15 + x\sqrt{3})^2 \sqrt{3} = 450\sqrt{3} \\ &\iff (15 + x\sqrt{3})^2 = 450 \\ &\iff 15 + x\sqrt{3} = \sqrt{450} \quad (\text{car } 15 + x\sqrt{3} > 0) \\ &\iff x\sqrt{3} = \sqrt{450} - 15 \\ &\iff x = \frac{\sqrt{450} - 15}{\sqrt{3}} \\ &\iff x = \frac{15\sqrt{2} - 15}{\sqrt{3}} \\ &\iff x = \frac{15(\sqrt{2} - 1)\sqrt{3}}{3} \\ &\iff \boxed{x = 5\sqrt{3}(\sqrt{2} - 1)}\end{aligned}$$

Équation de droites

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

A Exercices d'application du cours

R Exercices de réflexion

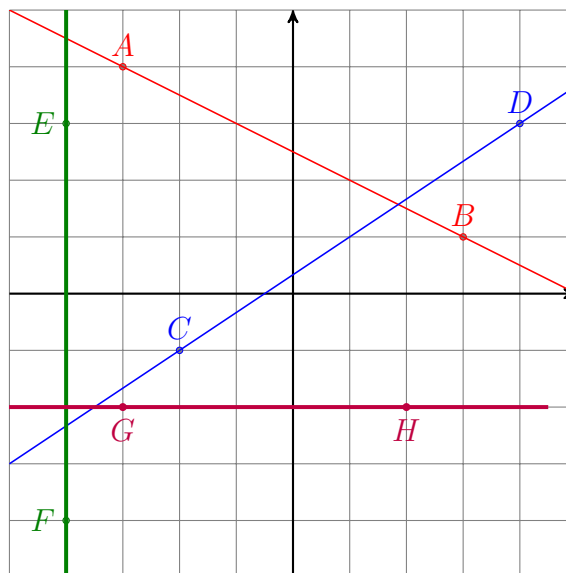
4 octobre 2015

■ Exercice 1. À partir d'un graphique

★★★★★ **A**

Corrigé page 53

Donner l'équation réduite de chacune des droites représentées dans le repère suivant en lisant directement sur le graphique le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine.



■ Exercice 2. À partir des coordonnées de points

★★★★★ **A**

Corrigé page 53

Pour chaque question, déterminer l'équation de la droite (AB).

1 A(-1; 2) et B(3; -1)

2 A(2; -2) et B(-3; 4)

3 A(-1; -2) et B(3; -1)

■ Exercice 3. Appartenance de points à une droite

★★★★★ **A**

Corrigé page 54

Soit \mathcal{D} la droite d'équation $y = -2x + 3$. Vérifier si chacun des points suivants appartient à \mathcal{D} .

1 A(1; -1)

2 B(-1; 5)

3 C($\frac{1}{2}$; 2)

4 D($-\frac{1}{3}$; $\frac{7}{3}$)

■ Exercice 4. Intersection de deux droites – Vecteur directeur

★★★★☆ A
Corrigé page 55

1 Résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 3x - 2y + 7 = 0 \\ -x + 5y - 11 = 0 \end{cases}$$

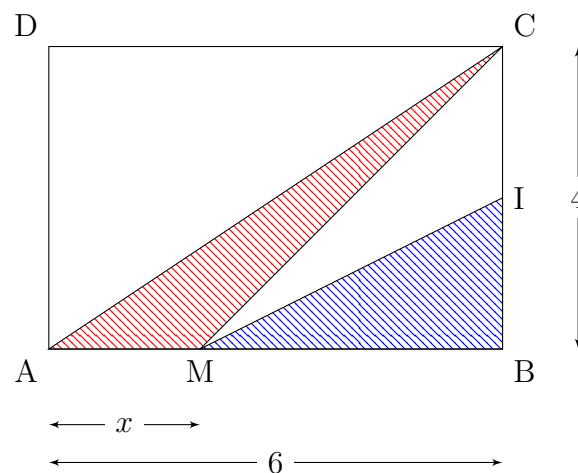
2 Soient (\mathcal{D}_1) d'équation $y = \frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$ et (\mathcal{D}_2) d'équation $y = \frac{1}{5}x + \frac{11}{5}$, deux droites du plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- a. Donner un vecteur directeur de ces deux droites.
Ces deux droites sont-elles parallèles ? Justifier.
- b. Donner les coordonnées de leur point d'intersection.

■ Exercice 5. Une histoire d'aire

★★★★☆ R
Corrigé page 55

On considère la figure suivante :



ABCD est un rectangle. I est le milieu de $[BC]$ et M est un point mobile sur $[AB]$. On note $AM = x$.

- 1 Exprimer en fonction de x l'aire $f(x)$ du triangle AMC.
La fonction f est-elle affine ? Linéaire ?
- 2 Exprimer en fonction de x l'aire $g(x)$ du triangle MIB.
La fonction g est-elle affine ? Linéaire ?
- 3 Représenter sur un graphique les fonctions f et g . Pour quelle position de M les deux aires sont-elles égales ?

■ Exercice 6. Les taxis



Hugo et Noémie doivent se retrouver au zoo.

Hugo part de chez lui en taxi qui prend 5 € de prise en charge et 0,40 € par kilomètres parcourus.

Noémie part de chez elle en taxi qui prend 0,60 € par kilomètres parcourus.

En se retrouvant devant le zoo, ils constatent qu'ils ont payé la même somme d'argent pour le taxi.

L'objectif de cet exercice est de trouver la distance qui sépare leurs domiciles du zoo.

- 1** On note $f(x)$ la somme versée au taxi par Hugo, où x est le nombre de kilomètres parcourus.

Donner une expression de $f(x)$.

- 2** On note $g(x)$ la somme versée au taxi par Noémie, où x est le nombre de kilomètres parcourus.

Donner une expression de $g(x)$.

- 3** Quelle est alors la distance cherchée ?

■ Corrigé de l'exercice 1.

1 Le coefficient directeur de (AB) est $\frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$.

L'ordonnée à l'origine est $2,5 = \frac{5}{2}$.

Donc (AB) : $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.

2 Le coefficient directeur de (CD) est $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

L'ordonnée à l'origine est $\frac{1}{3}$.

Donc (CD) : $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$.

3 La droite (EF) est verticale donc son équation est $x = -4$ (car l'abscisse de E et F est -4).

4 La droite (GH) est horizontale donc son coefficient directeur est égal à 0. Donc son équation est $y = -2$ (car l'ordonnée de G et H est -2).

■ Corrigé de l'exercice 2.

1 Le coefficient directeur de (AB) est :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-1 - 2}{3 - (-1)} = \frac{-3}{4}$$

Donc (AB) : $y = -\frac{3}{4}x + b$.

De plus, $A \in (AB)$ donc :

$$y_A = \frac{3}{4}x_A + b$$

$$\Leftrightarrow 2 = \frac{3}{4} \times (-1) + b$$

$$\Leftrightarrow 2 + \frac{3}{4} = b$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{8}{4} + \frac{3}{4} = \frac{11}{4}$$

Donc :

$$(AB) : y = \frac{3}{4}x + \frac{11}{4}$$

2 Le coefficient directeur de (AB) est :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4 - (-2)}{-3 - 2} = \frac{6}{-5}$$

Donc (AB) : $y = -\frac{6}{5}x + b$.

De plus, $A \in (AB)$ donc :

$$\begin{aligned}y_A &= -\frac{6}{5}x_A + b \\ \Leftrightarrow -2 &= -\frac{6}{5} \times 2 + b \\ \Leftrightarrow -2 + \frac{12}{5} &= b \\ \Leftrightarrow b &= -\frac{10}{5} + \frac{12}{5} = \frac{2}{5}\end{aligned}$$

Donc :

$$(AB) : y = -\frac{6}{5}x + \frac{2}{5}$$

3 Le coefficient directeur de (AB) est :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-1 - (-2)}{3 - (-1)} = \frac{1}{4}$$

Donc (AB) : $y = \frac{1}{4}x + b$.

De plus, $A \in (AB)$ donc :

$$\begin{aligned}y_A &= \frac{1}{4}x_A + b \\ \Leftrightarrow -2 &= \frac{1}{4} \times (-1) + b \\ \Leftrightarrow -2 + \frac{1}{4} &= b \\ \Leftrightarrow b &= -\frac{8}{4} + \frac{1}{4} = -\frac{7}{4}\end{aligned}$$

Donc :

$$(AB) : y = \frac{1}{4}x - \frac{7}{4}$$

■ Corrigé de l'exercice 3.

1 $\mathcal{D} : y = -2x + 3$ donc $A \in \mathcal{D}$ si $y_A = -2x_A + 3$.
Or, $-2x_A + 3 = -2 \times 1 + 3 = -2 + 3 = 1 \neq y_A$.
Donc $A \notin \mathcal{D}$.

2 $\mathcal{D} : y = -2x + 3$ donc $B \in \mathcal{D}$ si $y_B = -2x_B + 3$.
Or, $-2x_B + 3 = -2 \times (-1) + 3 = 2 + 3 = 5 = y_B$.
Donc $B \in \mathcal{D}$.

3 $\mathcal{D} : y = -2x + 3$ donc $C \in \mathcal{D}$ si $y_C = -2x_C + 3$.
Or, $-2x_C + 3 = -2 \times \frac{1}{2} + 3 = -1 + 3 = 2 = y_C$.
Donc $C \in \mathcal{D}$.

4 $\mathcal{D} : y = -2x + 3$ donc $D \in \mathcal{D}$ si $y_D = -2x_D + 3$.
Or, $-2x_D + 3 = -2 \times \left(-\frac{1}{3}\right) + 3 = \frac{2}{3} + \frac{9}{3} = \frac{11}{3} \neq y_D$.
Donc $D \notin \mathcal{D}$.

■ Corrigé de l'exercice 4.

1 $\begin{cases} 3x - 2y + 7 = 0 \\ -x + 5y - 11 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x - 2y + 7 = 0 \\ -3x + 15y - 33 = 0 \end{cases}$ en multipliant par 3

En ajoutant les deux équations, on a :

$$13y - 26 \quad \text{d'où :} \quad y = 2.$$

Ainsi, en remplaçant y par 2 dans la 2^e équation, on a :

$$-x + 5 \times 2 - 11 = 0,$$

soit :

$$x = -1.$$

Le système admet donc pour solution le couple $(-1; 2)$.

2 *a.* Un vecteur directeur de la droite d'équation $y = ax + b$ est $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$.

Donc, un vecteur directeur de (\mathcal{D}_1) est $\vec{u}' \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, ou encore $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Un vecteur directeur de (\mathcal{D}_2) est $\vec{v} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires car $2 \times 1 \neq 5 \times 3$. Donc les droites ne sont pas parallèles.

b. Les coordonnées du point d'intersection est $(-1; 2)$ car les équations réduites des droites sont équivalentes aux équations du système que la question **1**.

■ Corrigé de l'exercice 5.

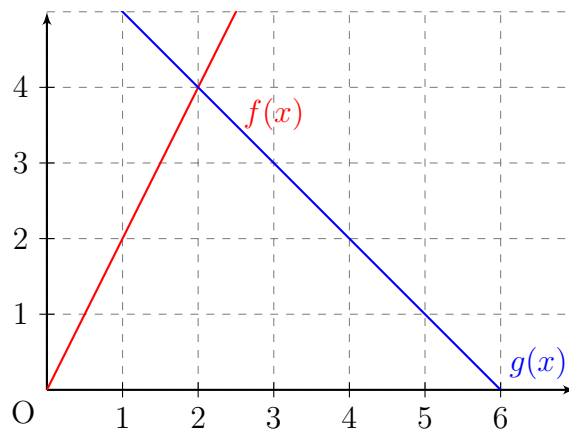
1 $f(x) = \frac{B \times h}{2} = \frac{AM \times BC}{2} = \frac{4 \times x}{2} = 2x.$

f est une fonction linéaire.

2 $g(x) = \frac{MB \times BI}{2} = \frac{(6 - x) \times 2}{2} = 6 - x.$

g est une fonction affine.

3 On a :



Les deux droites se coupent en un point dont l'abscisse est 2. Donc pour $x = 2$, les deux aires sont égales.

■ Corrigé de l'exercice 6.

- 1** $f(x) = 5 + 0,4x$. En effet, il doit payer 5 € quelle que soit la distance parcourue et ajouter 0,40 € pour chaque kilomètre, soit au final $0,4x$ €.
- 2** $g(x) = 0,6x$ car Noémie ne paie que pour la distance parcourue. Donc en parcourant x kilomètres et en payant 0,60 € par kilomètre, le tarif total est $0,60 \times x = 0,6x$.
- 3** Noémie et Hugo paient la même somme, donc $f(x) = g(x)$, où x est le nombre de kilomètres parcourus.

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\iff 5 + 0,4x = 0,6x \\ &\iff 5 = 0,6x - 0,4x \\ &\iff 5 = 0,2x \\ &\iff x = \frac{5}{0,2} \\ &\iff x = 25. \end{aligned}$$

Ainsi, Hugo et Noémie ont parcouru 25 kilomètres depuis leur domicile.

Fonctions du second degré

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

- A** Exercices d'application du cours
- R** Exercices de réflexion

4 octobre 2015

■ Exercice 1. Forme canonique & factorisation

★★★★☆ **A**

Corrigé page 58

Pour chacune des fonctions suivantes, donner sa forme canonique et en déduire sa factorisation :

- 1** $f(x) = x^2 + 2x - 15$
- 2** $g(x) = -4x^2 + 2x + 6$
- 3** $h(x) = -3x^2 - 6x + 24$

■ Exercice 2. Sens de variation

★★★★☆ **A**

Corrigé page 59

Pour chacune des fonctions de l'exercice précédent, donner son sens de variation sur \mathbb{R} .

■ Exercice 3. Aire d'un triangle dans un triangle équilatéral

★★★★☆ **A**

Corrigé page 61

Soit ABC un triangle équilatéral tel que $AB = 10$ cm.

Sur $[AC]$, on place un point M tel que $AM = x$ cm.

La perpendiculaire à (AC) passant par M coupe $[BC]$ en N.

La perpendiculaire à (MN) passant par N coupe $[AB]$ en P.

- 1** Faire une figure.
- 2** Montrer que les valeurs que peut prendre x sont sur l'intervalle $[5 ; 10]$.
- 3** Montrer que $MN = \sqrt{3}(10 - x)$.
- 4** Montrer que $NC = 2(10 - x)$.
- 5** Montrer que PNB est un triangle équilatéral.
En déduire que $PN = 2(x - 5)$.
- 6** En déduire que l'aire du triangle MNP est :

$$\mathcal{A}(x) = \sqrt{3}(x - 5)(10 - x).$$

- 7** Pour quelle valeur de x cette aire est-elle maximale ?
- 8** Représenter la fonction \mathcal{A} dans un repère orthonormé.

■ Corrigé de l'exercice 1.

1 On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x^2 + 2x - 15 \\
 &= \underbrace{x^2 + 2x + 1 - 1}_{=(x+1)^2} - 15 \\
 &= (x+1)^2 - 16 \quad \leftarrow \text{Forme canonique} \\
 &= (x+1)^2 - 4^2 \\
 &= (x+1-4)(x+1+4) \\
 &= (x-3)(x+5) \quad \leftarrow \text{Forme factorisée}
 \end{aligned}$$

2 On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
 g(x) &= -4x^2 + 2x + 6 \\
 &= -4 \left(x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \right) \\
 &= -4 \left[\underbrace{x^2 - 2 \times \frac{1}{4}x + \left(\frac{1}{4}\right)^2}_{=(x-\frac{1}{4})^2} - \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{3}{2} \right] \\
 &= -4 \left[\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{25}{16} \right] \quad \leftarrow \text{Forme canonique} \\
 &= -4 \left[\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2 \right] \\
 &= -4 \left(x - \frac{1}{4} - \frac{5}{4} \right) \left(x - \frac{1}{4} + \frac{5}{4} \right) \\
 &= -4 \left(x - \frac{3}{2} \right) (x+1) \quad \leftarrow \text{Forme factorisée} \\
 &= \underline{-2(2x-3)(x+1)} \quad (\text{autre possibilité d'écriture})
 \end{aligned}$$

3 On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}h(x) &= -3x^2 - 6x + 24 \\&= -3(x^2 + 2x - 8) \\&= -3(\underbrace{x^2 + 2x + 1 - 1}_{=(x+1)^2} - 8) \\&= -3[(x+1)^2 - 9] \leftarrow \text{Forme canonique} \\&= -3[(x+1)^2 - 3^2] \\&= -3(x+1-3)(x+1+3) \\&= \underline{-3(x-2)(x+4)} \leftarrow \text{Forme factorisée}\end{aligned}$$

■ Corrigé de l'exercice 2.

1 Posons $a < b$ sur \mathbb{R} . Alors :

$$\begin{aligned}f(b) - f(a) &= b^2 + 2b - 15 - a^2 - 2a + 15 \\&= b^2 - a^2 + 2(b - a) \\&= (b - a)(b + a) + 2(b - a) \\&= (b - a)(a + b + 2)\end{aligned}$$

$a < b$ donc $(b - a) > 0$. Ainsi, $f(a) - f(b)$ est du signe de $(a + b + 2)$.
Nous devons chercher le nombre x_0 tel que $a < b < x_0$ (par exemple).

Si $a < b < x_0$, alors $a < x_0$ et $b < x_0$, donc $a + b < 2x_0$ et donc $a + b + 2 < 2x_0 + 2$, soit $a + b + 2 < 2(1 + x_0)$. Ainsi, il faut que $1 + x_0 = 0$. Donc $x_0 = -1$.

Ainsi, si $a < b < -1$, $f(b) - f(a) < 0$ donc f est décroissante sur $] -\infty; -1[$.
Donc f est croissante sur $] -1; +\infty[$.

2 $g(x) = -4x^2 + 2x + 6$. Posons $a < b$ sur \mathbb{R} . Alors :

$$\begin{aligned}g(b) - g(a) &= -4b^2 + 2b + 6 + 4a^2 - 2a - 6 \\&= 4(a^2 - b^2) + 2(b - a) \\&= -4(b^2 - a^2) + 2(b - a) \\&= (b - a)[-4(b + a) + 2] \\&= (b - a)(2 - 4b - 4a)\end{aligned}$$

$a < b$ donc $(b - a) > 0$. Ainsi, $g(b) - g(a)$ est du signe de $(2 - 4b - 4a)$.
On cherche alors x_0 tel que $a < b < x_0$ (par exemple).

Si $a < b < x_0$, alors $a < x_0$ et $b < x_0$, donc $-4a > -4x_0$ et $-4b > -4x_0$. Ainsi, $-4a - 4b > -8x_0$ et donc $2 - 4a - 4b > 2 - 8x_0$.
il faut donc trouver x_0 tel que $2 - 8x_0 = 0$, ce qui donne $x_0 = \frac{1}{4}$.

Donc, si $a < b < \frac{1}{4}$, $g(b) - g(a) > 0$, ce qui signifie que sur $] -\infty; \frac{1}{4}[$, g est croissante.
Donc sur $] \frac{1}{4}; +\infty[$, g est décroissante.

3 $h(x) = -3x^2 - 6x + 24$. Posons $a < b$ sur \mathbb{R} . Alors :

$$\begin{aligned}h(b) - h(a) &= -3b^2 - 6b + 24 + 3a^2 + 6a - 24 \\&= 3(a^2 - b^2) - 6(b - a) \\&= -3(b^2 - a^2) - 6(b - a) \\&= (b - a)[-3(b + a) - 6] \\&= (b - a)(-3b - 3a - 6)\end{aligned}$$

$a < b$ donc $(b - a) > 0$. Ainsi, $h(b) - h(a)$ est du signe de $(-3b - 3a - 6)$.
On cherche alors x_0 tel que $a < b < x_0$ (par exemple).

Si $a < b < x_0$, alors $a < x_0$ et $b < x_0$, donc $-3a > -3x_0$ et $-3b > -3x_0$. Ainsi, $-3a - 3b > -6x_0$ et donc $-3a - 3b - 6 > -6x_0 - 6$.
il faut donc trouver x_0 tel que $-6x_0 - 6 = 0$, ce qui donne $x_0 = -1$.

Donc, si $a < b < -1$, $h(b) - h(a) > 0$, ce qui signifie que sur $]-\infty; -1[$, g est croissante.
Donc sur $]-1; +\infty[$, h est décroissante.

Autre possibilité

Nous pouvons aussi utiliser la première forme des fonctions.

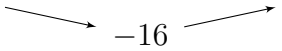
1 $f(x) = x^2 + 2x - 15$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 1$, $b = 2$ et $c = -15$.

L'abscisse du sommet S de la parabole est $x_S = -\frac{b}{2a}$, soit $x_S = -1$.

Son ordonnée est :

$$y_S = f(-1) = (-1)^2 + 2 \times (-1) - 15 = 1 - 2 - 15 = -16$$

$a > 0$ d'où le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f			

2 $g(x) = -4x^2 + 2x + 6$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -4$, $b = 2$ et $c = 6$.

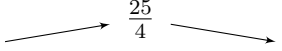
L'abscisse du sommet S de la parabole est :

$$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2 \times (-4)} = \frac{1}{4}$$

Donc son ordonnée est :

$$y_S = g\left(\frac{1}{4}\right) = -4\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 2 \times \left(\frac{1}{4}\right) + 6 = -\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{24}{4} = \frac{25}{4}$$

$a < 0$ d'où le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
g			

3 $h(x) = -3x^2 - 6x + 24$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -3$, $b = -6$ et $c = 24$.

L'abscisse du sommet S de la parabole est :

$$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2 \times (-3)} = -1$$

Donc son ordonnée est :

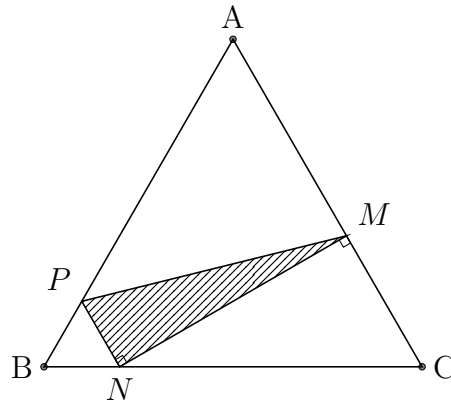
$$y_S = h(-1) = -3(-1)^2 - 6 \times (-1) + 24 = -3 + 6 + 24 = 27$$

$a < 0$ d'où le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
h	$\swarrow \quad -27 \quad \searrow$		

■ Corrigé de l'exercice 3.

1 La figure est :



2 M est sur $[AC]$ donc a priori, $x \in [0; 10]$. Or, si $x < 5$, $N \notin [BC]$ et donc le triangle MNP n'est pas défini.

Donc, $x \in [5; 10]$.

3 On sait que $\widehat{ACN} = 60^\circ$ (car ABC est équilatéral). Donc, dans le triangle MNC rectangle en M :

$$\tan \widehat{NCM} = \frac{MN}{MC}$$

soit :

$$\tan 60^\circ = \frac{MN}{10 - x}.$$

On a alors :

$$MN = \tan 60^\circ \times (10 - x)$$

soit :

$$\underline{MN = \sqrt{3}(10 - x)}.$$

4 Dans le triangle MNC rectangle en M :

$$\cos 60^\circ = \frac{MC}{NC}$$

d'où :

$$NC = \frac{MC}{\cos 60^\circ} = \frac{10 - x}{\frac{1}{2}}$$

donc :

$$\underline{NC = 2(10 - x)}.$$

- 5** On sait que $(MN) \perp (AC)$ et $(MN) \perp (PN)$. Donc $(PN) \parallel (AC)$ et par conséquent, $\widehat{PNB} = \widehat{ACB} = 60^\circ$ et $\widehat{NPB} = \widehat{CAB} = 60^\circ$.

Donc PNB est équilatéral.

On en déduit que :

$$\begin{aligned} PN &= BN \\ &= 10 - NC \\ &= 10 - 2(10 - x) \\ &= 10 - 20 + 2x \\ &= -10 + 2x \end{aligned}$$

$$\boxed{PN = 2(x - 5)}$$

- 6** Le triangle PNM est rectangle en N donc son aire est :

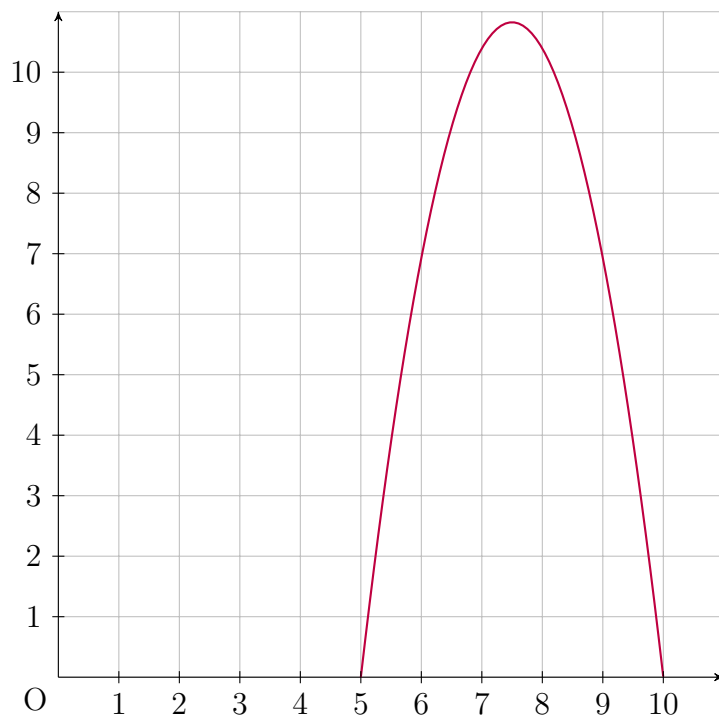
$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x) &= \frac{1}{2} \times MN \times PN \\ &= \frac{1}{2} \times \sqrt{3}(10 - x) \times 2(x - 5) \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{A}(x) = \sqrt{3}(10 - x)(x - 5)}$$

- 7** La fonction \mathcal{A} est une fonction du second degré qui s'annule en $x = 5$ et $x = 10$; par conséquent, son maximum est atteint pour $x = \frac{5 + 10}{2} = 7,5$.

- 8** Pour représenter la fonction \mathcal{A} , on commence par faire un tableau de valeurs :

x	5	6	7	7,5	8	9	10
$\mathcal{A}(x)$	0	6,928	10,392	10,825	10,392	6,928	0



Vecteurs

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

- A** Exercices d'application du cours
- R** Exercices de réflexion

Énoncés

4 octobre 2015

■ Exercice 1. Placement de points

★★★★★ **R**
Corrigé page 68

Soit ABC un triangle quelconque.

- 1** Placer le point E tel que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.
- 2** Placer le point F tel que $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AC}$.
- 3** Démontrer que (CE) et (FB) sont parallèles.

■ Exercice 2. Placement de points & alignement de points

★★★★★ **R**
Corrigé page 68

ABCD est un parallélogramme.

- 1** Placer les points E et F tels que :
$$\overrightarrow{DE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{DF} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{DB}$$
- 2** Placer les points G et H tels que BAEG et BAFH sont des parallélogrammes.
- 3** Démontrer que $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{DE}$.
- 4** En déduire que les points C, G et H sont alignés.

■ Exercice 3. Relation de Chasles

★★★★★ **A**
Corrigé page 69

Simplifier au maximum les écritures suivantes :

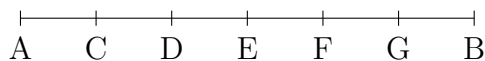
- 1** $\vec{u} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB}$
- 2** $\vec{v} = \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{ED}$
- 3** $\vec{w} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}$

■ Exercice 4. Égalités de vecteurs

★★★★☆ A

Corrigé page 69

Le segment suivant est partagé en 6 parties de même longueur.



Compléter les relations suivantes :

1 $\overrightarrow{E\dots} = -2\overrightarrow{EF}$

3 $\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{A\dots}$

5 $\overrightarrow{AD} = \dots\overrightarrow{BF}$

2 $\overrightarrow{C\dots} + \dots\overrightarrow{G} = \vec{0}$

4 $\overrightarrow{CE} = \dots\overrightarrow{AB}$

6 $\overrightarrow{DE} = \dots\overrightarrow{BF}$

■ Exercice 5. Exprimer un vecteur en fonction d'un autre

★★★★☆ R

Corrigé page 69

Soient A et B deux points tels que $AB = 5$ cm.

Soit M le point défini par :

$$-5\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}.$$

Exprimer le vecteur \overrightarrow{AM} en fonction de \overrightarrow{AB} et construire le point M.

■ Exercice 6. Construction de points, égalité vectorielle

★★★★☆ R

Corrigé page 70

Soit ABCD un parallélogramme de centre I.

1 Construire le point M tel que :

$$\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{ID}$$

et le point N tel que :

$$\overrightarrow{IN} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}$$

2 Démontrer que $\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN} = \vec{0}$. Que peut-on en déduire ?

3 Justifier que $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{IC}$ et que $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{AI}$.
En déduire la nature de ABNI.

■ Exercice 7. Alignement de points

★★★★☆ R

Corrigé page 70

ABC est un triangle quelconque. Soient D, E et F les points tels que :

$$\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{CB} \quad ; \quad \overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} \quad ; \quad \overrightarrow{BF} = -2\overrightarrow{BA}$$

Démontrer que D, E et F sont alignés.

■ Exercice 8. Dans un repère, trouver des coordonnées

★★★★☆ A

Corrigé page 71

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(-2; -3)$, $B(4; -1)$ et $C(-7; 2)$.

- 1 a. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
b. En déduire les coordonnées du point D tel que ABDC soit un parallélogramme.
- 2 Déterminer les coordonnées du milieu I de [AD].

■ Exercice 9. Alignement de points & nature d'un triangle

★★★★☆ R

Corrigé page 71

On considère les points $A(2; -1)$, $B(1; 1)$, $C(-\frac{1}{2}; 2)$ et $D(3; 0)$ dans un repère orthonormé.

- 1 Les points A, B et C sont-ils alignés ?
- 2 Quelle est la nature du triangle ABD ?

■ Exercice 10. Milieu, centre de gravité, points alignés

★★★★☆ R

Corrigé page 72

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(1; 2)$, $B(3; -4)$ et $C(5; 0)$.

- 1 Calculer les coordonnées du point I, milieu de [AB].
- 2 Montrer que C appartient au cercle \mathcal{C} de diamètre [AB].
- 3 Quelle est la nature du triangle ABC ?
- 4 On considère le point $D(-4; -3)$.
Montrer que D, I et C sont alignés.
- 5 Calculer les coordonnées du centre de gravité G du triangle BAD.
On considère le point M défini par : $\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}$.
- 6 Montrer que D, G, I, M et C sont alignés.

■ Exercice 11. Distance & milieu

★★★★☆ A

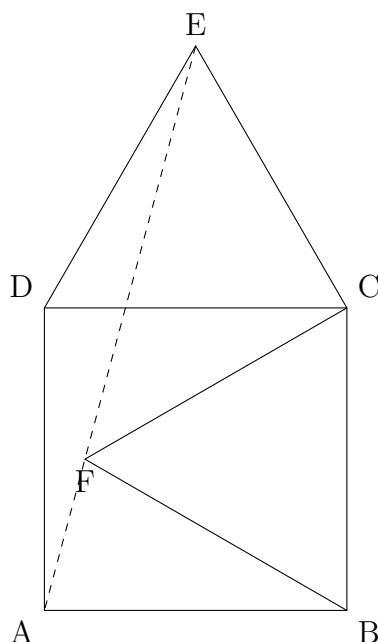
Corrigé page 74

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé avec $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ cm.

- 1 Placer les points $A(-2; 1)$, $B(1; -2)$ et $C(4; 2)$.
- 2 Déterminer les coordonnées des vecteurs \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} et \overrightarrow{BC} .
- 3 Calculer AB, AC et BC. Le triangle ABC est-il rectangle en B ?
- 4 Calculer les coordonnées du point I, milieu de [BC].

■ Exercice 12. Triangles équilatéraux et points alignés

★★★★☆ **R**
Corrigé page 74



Soit ABCD un carré. Les triangles DEC et BCF sont équilatéraux.
La figure est reportée dans repère $(A; \vec{i}, \vec{j})$ où $\vec{i} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{AD}$.

- 1** Déterminer les coordonnées des points E et F.
- 2** Montrer que E, F et A sont alignés.

■ Exercice 13. Dans un repère, trouver des coordonnées

★★★☆☆ **A**
Corrigé page 75

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(-2; -3)$, $B(4; -1)$ et $C(-7; 2)$.

- 1** *a.* Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
b. En déduire les coordonnées du point D tel que ABDC soit un parallélogramme.
- 2** Déterminer les coordonnées du milieu I de [AD].

■ Exercice 14. Exercice récapitulatif

★★★★☆ **R**
Corrigé page 76

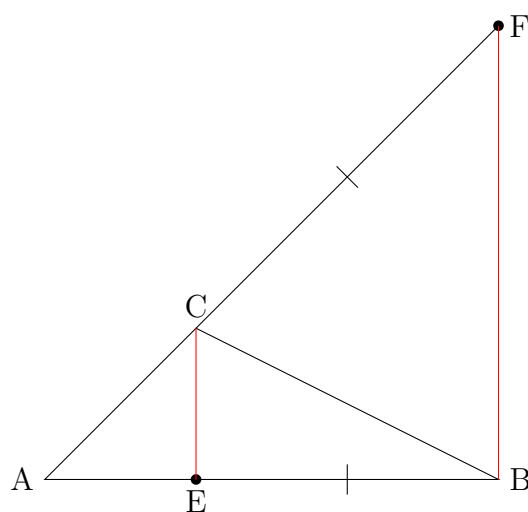
On considère trois points quelconques du plan A, B et C.
On définit alors les points E, F et G tels que :

- $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$;
- $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$;
- $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BG} + k\overrightarrow{AC}$ où k est un nombre réel.

- 1 Déterminer la valeur de k telle que les points A, E et F soient alignés.
- 2 Construire alors la figure.
- 3 Exprimer \overrightarrow{CF} et \overrightarrow{CG} en fonction de \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} .
Les points C, F et G sont-ils alignés ?
- 4 Dans le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, déterminer les coordonnées du point M tel que :

$$\overrightarrow{MF} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{ME} = \vec{0}.$$

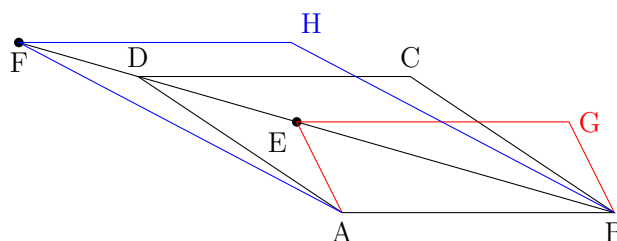
■ Corrigé de l'exercice 1.



On sait que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et que $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AF}$ par construction. Ainsi, $\frac{AC}{AF} = \frac{AE}{AB}$.

Donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, (CE) et (BF) sont parallèles.

■ Corrigé de l'exercice 2.



- 3** On sait que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{FH}$ car BADC et BAFH sont des parallélogrammes. Donc CDFH est un parallélogramme. Ainsi, $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{CH}$.

De même, BAEG et BADC sont des parallélogrammes, donc $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{DC}$, ce qui implique que GEDC est un parallélogramme. Donc $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CG}$.

4 On sait que $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$ et que $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CG}$ (d'après la question précédente). Donc,
 $\frac{1}{3}\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{CG}$.

De même, $\overrightarrow{DF} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{CH}$. Donc $-\frac{1}{4}\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{CH}$.

Ainsi, \overrightarrow{CH} et \overrightarrow{CG} sont colinéaires. De plus, ils ont un point en commun donc C, H et G sont alignés.

■ Corrigé de l'exercice 3.

$$\begin{aligned} 1 \quad \vec{u} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} \\ \vec{u} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} \\ \vec{u} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} \\ \vec{u} &= \overrightarrow{AA} \\ \vec{u} &= \vec{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \quad \vec{v} &= \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{ED} \\ \vec{v} &= \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{DE} \\ \vec{v} &= \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DE} \\ \vec{v} &= \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FE} \\ \vec{v} &= \overrightarrow{DE} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 \quad \vec{w} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} \\ \vec{w} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM} \\ \vec{w} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA} \\ \vec{w} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA} \\ \vec{w} &= 2\overrightarrow{BA} \end{aligned}$$

■ Corrigé de l'exercice 4.

$$1 \quad \overrightarrow{EC} = -2\overrightarrow{EF}$$

$$3 \quad \overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AF}$$

$$5 \quad \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{BF}$$

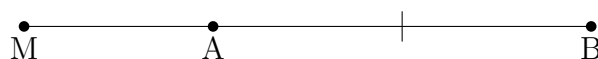
$$2 \quad \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{FG} = \vec{0}$$

$$4 \quad \overrightarrow{CE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$

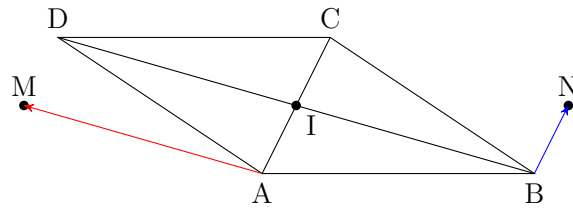
$$6 \quad \overrightarrow{DE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BF}$$

■ Corrigé de l'exercice 5.

$$\begin{aligned} -5\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} &= \vec{0} \\ -5\overrightarrow{MA} + 3(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) &= \vec{0} \\ -5\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{AB} &= \vec{0} \\ -2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{AB} &= \vec{0} \\ 2\overrightarrow{AM} &= -3\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AM} &= -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} \end{aligned}$$



■ Corrigé de l'exercice 6.



2 $\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}.$

Or, $\overrightarrow{ID} = -\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{IC} = -\overrightarrow{IA}.$

Donc, $\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN} = \vec{0}.$

On en déduit alors que I est le milieu de [MN].

3 On sait que $\overrightarrow{IN} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}$ (par construction) et que $\overrightarrow{IN} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BN}$ (d'après la relation de Chasles).

Ainsi, $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}$ et donc $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{IC}.$

I étant le milieu de [AC], $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{AI}.$

Ainsi, $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BN}$ donc ABNI est un parallélogramme.

■ Corrigé de l'exercice 7.

D'une part, nous avons :

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF}$$

$$\overrightarrow{EF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AF}$$

$$\overrightarrow{EF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}$$

$$\overrightarrow{EF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BA}$$

$$\overrightarrow{EF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{AB}$$

$$2\overrightarrow{EF} = 3\overrightarrow{CA} + 6\overrightarrow{AB}.$$

D'autre part, nous avons :

$$\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF}$$

$$= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BF}$$

$$= 2\overrightarrow{CB} - 2\overrightarrow{BA}$$

$$= 2(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) + 2\overrightarrow{AB}$$

$$= 2\overrightarrow{CA} + 4\overrightarrow{AB}$$

$$= \frac{2}{3}(3\overrightarrow{CA} + 6\overrightarrow{AB})$$

$$= \frac{2}{3} \times 2\overrightarrow{EF}$$

$$\boxed{\overrightarrow{DF} = \frac{4}{3}\overrightarrow{EF}}$$

Les vecteurs \overrightarrow{DF} et \overrightarrow{EF} sont donc colinéaires. Ils ont un point en commun, donc D, E et F sont alignés.

■ Corrigé de l'exercice 8.

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(-2; -3)$, $B(4; -1)$ et $C(-7; 2)$.

$$1 \quad a. \quad \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 - (-2) \\ -1 - (-3) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -7 - (-2) \\ 2 - (-3) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ainsi, } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 6 + (-5) \\ 2 + 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}}.$$

$$\begin{aligned} b. \quad \text{ABDC est un parallélogramme} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_D - (-2) \\ y_D - (-3) \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_D + 2 \\ y_D + 3 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = x_D + 2 \\ 7 = y_D + 3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 1 - 2 = -1 \\ y_D = 7 - 3 = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, $D(-1; 4)$.

$$\begin{aligned} 2 \quad \text{I milieu de } [AD] &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AI} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_I - (-2) \\ y_I - (-3) \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_I + 2 \\ y_I + 3 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2} \\ y_I = \frac{7}{2} - 3 = \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, $I(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2})$.

■ Corrigé de l'exercice 9.

$$1 \quad \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 - 2 \\ 1 - (-1) \end{pmatrix}, \text{ soit } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - 2 \\ 2 - (-1) \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$x_{\overrightarrow{AC}} = \frac{5}{2} x_{\overrightarrow{AB}} \text{ et } y_{\overrightarrow{AC}} = \frac{3}{2} y_{\overrightarrow{AB}}.$$

Donc \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} ne sont pas colinéaires.

Par conséquent, les points A, B et C ne sont pas alignés.

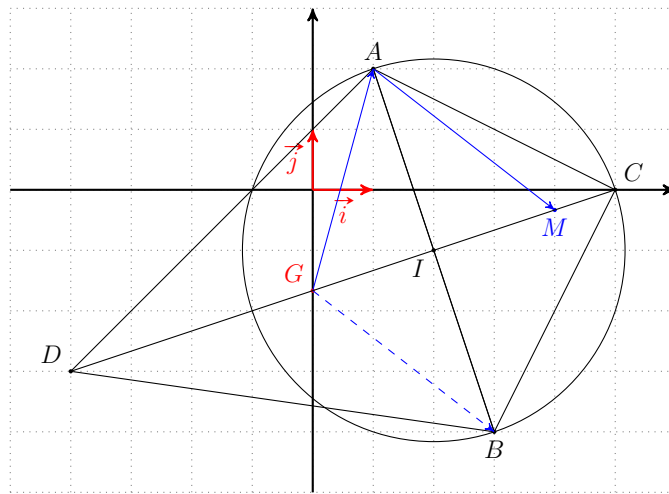
2 $AB^2 = x_{AB}^2 + y_{AB}^2 = 1 + 4 = 5.$

$$AD^2 = (x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2 = 1 + 1 = 2.$$

$$BD^2 = (x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2 = 4 + 1 = 5.$$

Donc le triangle ABD est isocèle en B sans être rectangle.

■ Corrigé de l'exercice 10.



1 I est le milieu de $[AB]$ donc :

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = 2$$

$$y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = -1$$

Donc $I(2; -1)$.

2 $IC = \sqrt{(x_C - x_I)^2 + (y_C - y_I)^2}$

$$IC = \sqrt{(5 - 2)^2 + (0 - (-1))^2}$$

$$IC = \sqrt{9 + 1}$$

$$IC = \sqrt{10}$$

$$IB = \sqrt{(x_B - x_I)^2 + (y_B - y_I)^2}$$

$$IB = \sqrt{(3 - 2)^2 + (-4 - (-1))^2}$$

$$IB = \sqrt{1 + 9}$$

$$IB = \sqrt{10}$$

$$IA = \sqrt{(x_A - x_I)^2 + (y_A - y_I)^2}$$

$$IA = \sqrt{(1 - 2)^2 + (-2 - (-1))^2}$$

$$IA = \sqrt{1 + 9}$$

$$IA = \sqrt{10}$$

Ainsi, $IA = IB = IC$ donc A, B et C sont sur le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{10}$.

- 3** ABC est inscrit dans \mathcal{C} , qui a pour diamètre $[AC]$. Donc ABC est rectangle en C .
De plus :

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} \\ BC &= \sqrt{(5 - 3)^2 + (0 - (-4))^2} \\ BC &= \sqrt{4 + 16} \\ BC &= 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} \\ AC &= \sqrt{(5 - 1)^2 + (0 - 2)^2} \\ AC &= \sqrt{16 + 4} \\ AC &= 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

Donc $AC = BC$. Ainsi, ABC est un triangle rectangle isocèle en C .

- 4** $\overrightarrow{DI}(x_I - x_D; y_I - y_D)$ donc $\overrightarrow{DI}(6; 2)$.
De plus, $\overrightarrow{IC}(x_C - x_I; y_C - y_I)$ donc $\overrightarrow{IC}(3; 1)$.

Ainsi, $\overrightarrow{IC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DI}$. Les deux vecteurs sont donc colinéaires. Ils ont un point en commun (I), donc D , I et C sont alignés.

- 5** G est le centre de gravité du triangle BAD donc :

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{x_B + x_A + x_D}{3} &= \frac{3 + 1 + (-4)}{3} = 0 \\ y_G &= \frac{y_B + y_A + y_D}{3} &= \frac{-4 + 2 + (-3)}{3} = \frac{-5}{3} \end{aligned}$$

Ainsi, $G(0; -\frac{5}{3})$.

- 6** Par définition, $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

Donc, $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = -\overrightarrow{GD}$.

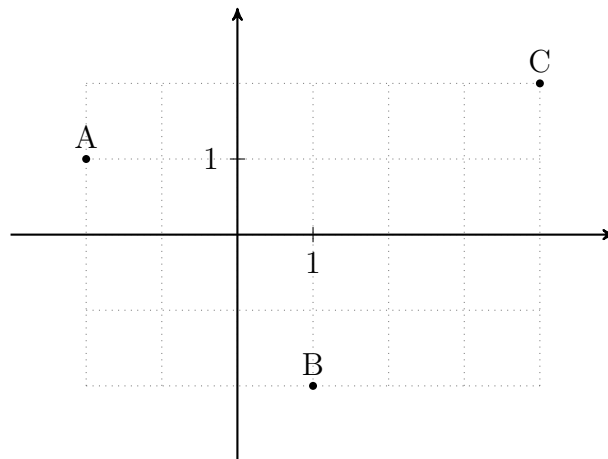
Ainsi, $\overrightarrow{GM} = -\overrightarrow{GD}$. Les deux vecteurs sont donc colinéaires et ont un point en commun (G). Par conséquent, D , G et M sont alignés.

Or, I appartient à (DG) car I est le milieu de $[AB]$ et (DG) est la médiane issue de D dans le triangle BAD .

De plus, D , I et C sont alignés. Donc D , G , I , M et C sont alignés.

■ Corrigé de l'exercice 11.

1 Placement des points A, B et C :



2 $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 - (-2) \\ -2 - 1 \end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 4 - (-2) \\ 2 - 1 \end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 4 - 1 \\ 2 - (-2) \end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

3 $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

$AC = \sqrt{6^2 + 1^2} = \sqrt{37}$.

$BC = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$.

Le triangle ABC n'est manifestement pas rectangle car $37 \neq 18 + 25$.

4 $I \left(\frac{1+4}{2}; \frac{-2+2}{2} \right)$, soit $I \left(\frac{5}{2}; 0 \right)$.

■ Corrigé de l'exercice 12.

1 Dans le triangle équilatéral DEC, La hauteur issue de E coupe [DC] en son milieu, donc coupe [AB] en son milieu. Ainsi, l'abscisse de E est $\frac{1}{2}$.

Pour trouver l'ordonnée de E, on doit calculer la hauteur de DEC, que l'on ajoutera à 1 (l'ordonnée de D).

Posons H le pied de la hauteur issue de E dans DEC. Alors, DEH est rectangle en H et, d'après le théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned} EH^2 &= DE^2 - DH^2 \\ &= 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= 1 - \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{4} \\ EH &= \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{E\left(\frac{1}{2}; 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$.

Des calculs précédents, on peut déduire que $\boxed{F\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)}$.

2 D'après la question précédente, $\overrightarrow{AF}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$ et $\overrightarrow{AE}\left(\frac{1}{2}; 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si $xy' = yx'$.

Dans notre cas, nous avons d'une part :

$$\begin{aligned} xy' &= \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= 1^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \\ &= 1 - \frac{3}{4} \\ xy' &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} yx' &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\ yx' &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Ainsi, $xy' = yx'$ donc \overrightarrow{AE} et \overrightarrow{AF} sont colinéaires. Ils ont de plus un point en commun, donc les points A, E et F sont alignés.

■ Corrigé de l'exercice 13.

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(-2; -3)$, $B(4; -1)$ et $C(-7; 2)$.

1 a. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 - (-2) \\ -1 - (-3) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -7 - (-2) \\ 2 - (-3) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 6 + (-5) \\ 2 + 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}}$.

$$\begin{aligned}
b. \text{ ABDC est un parallélogramme} &\iff \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} \\
&\iff \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_D - (-2) \\ y_D - (-3) \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_D + 2 \\ y_D + 3 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} 1 = x_D + 2 \\ 7 = y_D + 3 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x_D = 1 - 2 = -1 \\ y_D = 7 - 3 = 4 \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi, $D(-1; 4)$.

$$\begin{aligned}
2 \text{ I milieu de } [AD] &\iff \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AI} \\
&\iff \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_I - (-2) \\ y_I - (-3) \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_I + 2 \\ y_I + 3 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} x_I = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2} \\ y_I = \frac{7}{2} - 3 = \frac{1}{2} \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi, $I\left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

■ Corrigé de l'exercice 14.

$$1 \quad \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BG} + k\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}.$$

Ainsi, en prenant $k = \frac{2}{3}$, on a :

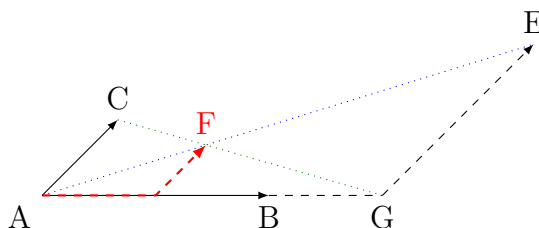
$$\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC}\right)$$

$$\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}.$$

Dans ce cas, \overrightarrow{AF} et \overrightarrow{AE} sont colinéaires et donc, A, E et F sont alignés.

2 On a la figure suivante :



$$\begin{aligned}
\bullet \quad \overrightarrow{CF} &= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AF} \\
&= \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \quad \overrightarrow{CG} &= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} \\
&= -\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{CG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}}$$

On constate alors que :

$$3\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CG}.$$

Par conséquent, \overrightarrow{CF} et \overrightarrow{CG} sont colinéaires, ce qui implique que C, F et G sont alignés.

4 Dans le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, posons $M(x; y)$.

On a :

$$\begin{aligned}
\bullet \quad \overrightarrow{AF} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \text{ donc } F\left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right); \\
\bullet \quad \overrightarrow{AG} &= \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} \text{ donc } G\left(\frac{3}{2}; 0\right); \\
\bullet \quad \overrightarrow{AE} &= \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} \text{ donc } E\left(\frac{3}{2}; 2\right).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MF} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{ME} = \vec{0} &\iff \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - x \\ \frac{2}{3} - y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - x \\ 0 - y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - x \\ 2 - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} \frac{1}{2} - x + \frac{3}{2} - x + \frac{3}{2} - x = 0 \\ \frac{2}{3} - y - y + 2 - y = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 3x = \frac{7}{2} \\ 3y = \frac{8}{3} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = \frac{7}{6} \\ y = \frac{8}{9} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } \boxed{M\left(\frac{7}{6}; \frac{8}{9}\right)}.$$

Géométrie dans l'espace

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

- A** Exercices d'application du cours
- R** Exercices de réflexion

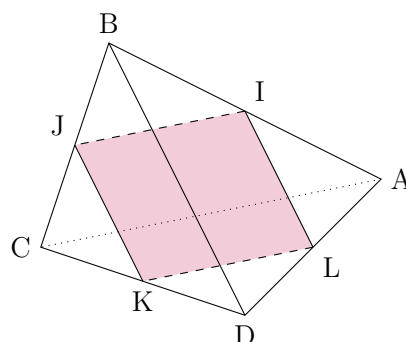
4 octobre 2015

■ Exercice 1. Tétraèdre & parallélogramme

★★★★☆ **R**
Corrigé page 83

Soit un tétraèdre quelconque $ABCD$. I , J , K et L sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[AD]$.

Prouver que le quadrilatère $IJKL$ est un parallélogramme



■ Exercice 2. Cube & section

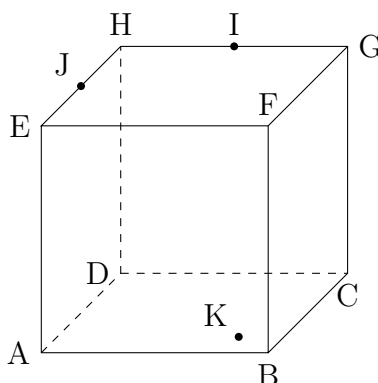
★★★★☆ **R**
Corrigé page 83

$ABCDEFGH$ est un cube.

I et J sont respectivement le milieu de $[GH]$ et $[EH]$.

K est dans le plan (BCD) .

Tracer la section du cube par le plan (IJK) .

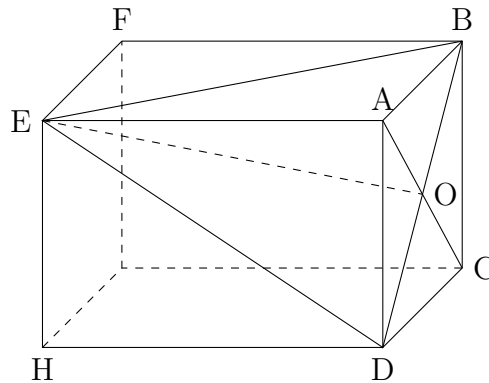


■ Exercice 3. Parallélépipède, distance & volume

★★★★☆ **A**
Corrigé page 83

Voici le dessin, en perspective cavalière, d'un parallélépipède rectangle de 8 cm de longueur. La face $ABCD$ est un carré de 4 cm de côté et de centre O .

- 1 Calculer les distances BD, DE et EB.
- 2 Que dire du triangle EBD ?
- 3 Pourquoi la droite (EO) est-elle perpendiculaire à la droite (BD) ? Calculer EO.
- 4 On considère la pyramide de sommet E et de base le carré ABCD. Calculer le volume de cette pyramide.

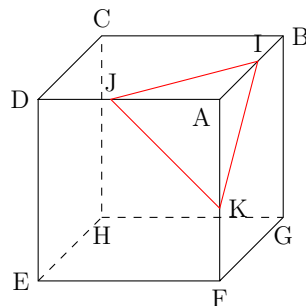


■ Exercice 4. Cube, distance, volume & aire

★★★★☆ R
Corrigé page 84

Sur les arêtes d'un cube, on marque les points I,J,K tels que : $AI = AJ = AK = x$, où x est un réel donné strictement positif et strictement inférieur à la longueur a de l'arête du cube.

- 1 Pourquoi le triangle IJK est-il équilatéral ?
Calculer son aire.
- 2 Comment appelle-t-on le solide AIJK ?
Calculer son volume.
- 3 La perpendiculaire menée par A au plan (IJK) coupe ce plan en H. Calculer AH en fonction de x .



■ Exercice 5. Droites & plans parallèles et sécants

★★★★☆ A
Corrigé page 85

On considère le cube de l'exercice 2.

- 1 Citer toutes les arêtes

- a. qui sont parallèles à (AB)
- b. qui coupent (AB)
- c. qui ne sont pas coplanaires avec (AB)

2 Citer toutes les faces du cube

- a. qui sont parallèles à (AB)
- b. qui coupent (AB)

3 Citer toutes les faces du cube

- a. qui sont parallèles à (ABCD)
- b. qui coupent (ABCD)

4 Soit I le milieu de [EF] et J celui de [FG]. Les droites (DF) et (IJ) sont-elles coplanaires ?

5 Représenter la droite d'intersection des plans (ACH) et (BDF).

6 Soient P et Q les centres des faces EFGH et ABFE.

- a. Montrer que la droite (QP) est parallèle au plan (ADHE).
- b. Montrer que les plans (QEP) et (ADHE) sont sécants suivant une droite Δ parallèle à (IJ).
- c. Représenter Δ dans le plan (ADHE) en précisant son intersection M avec (AD), puis la représenter dans l'espace.

7 Le côté du cube mesure 4 cm. On considère les points U et V tels que $\overrightarrow{BU} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BV} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$, ainsi que les points W et Z tels que $\overrightarrow{EW} = \frac{1}{4}\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GZ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{GF}$.

- a. Montrer que les droites (UV) et (AC) sont parallèles.
- b. Montrer que les droites (WZ) et (EG) sont parallèles.
- c. En déduire que les droites (UV) et (WZ) sont parallèles.

8 Soit K le milieu de [BF]. Montrer que le plan (IJK) est parallèle au plan (BEG).

■ Exercice 6. Cube et angle au centre

★★★★☆ **R**
Corrigé page 86

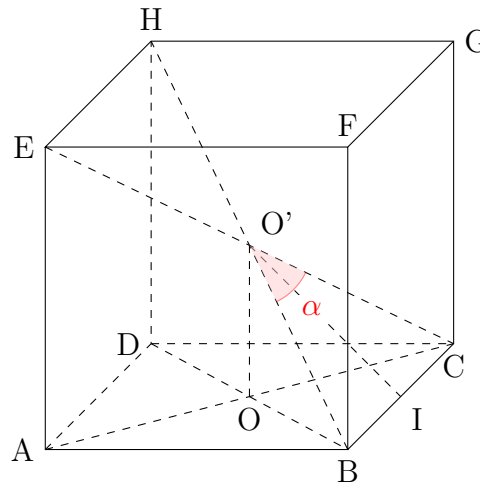
Soit ABCDEFGH un cube d'arêtes de longueur a . Soit O le centre du carré ABCD. Soit I le milieu du segment [BC].

- 1**
 - a. Démontrer que la droite (EH) est orthogonale au plan (ABF).
 - b. Montrer que EBCH est un rectangle. Ses diagonales se coupent en O'.

2 On appelle α la mesure de l'angle $\widehat{BO'C}$.

- a. Démontrer que les droites (O'I) et (EB) sont parallèles.
- b. En déduire que $\widehat{CEB} = \frac{\alpha}{2}$.

- c. Déterminer une valeur approchée de α .

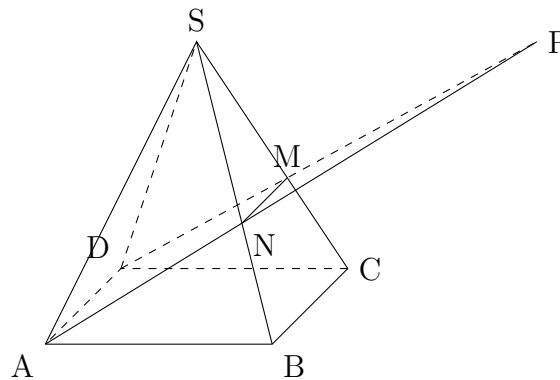


■ Exercice 7. Pyramide et intersection

★★★★☆ **R**
Corrigé page 86

On considère la pyramide SABCD, de sommet S et telle que ABCD est un parallélogramme. Soit M un point de [SC] et N un point de [SB] tels que (MN) est parallèle à (BC).

- 1 Montrer que (AD) et (MN) sont parallèles.
- 2 Dans le plan (ADM), (AN) et (DM) se coupent en P.
 - a. Démontrer que P appartient aux plans (SAB) et (SCD).
 - b. Pourquoi la droite d'intersection de (SAB) et (SCD) est-elle (SP) ?
 - c. En déduire que (SP) est parallèle à (AB) et à (CD).



■ Exercice 8. Construction d'un cube et d'une pyramide

★★★★☆ **A**
Corrigé page 87

On considère un cube ABCDEFGH, d'arête 1, tel que les faces ABCD et EFGH d'une part, EHAD et FGBC d'autre part, soient parallèles.

On construit alors le point S de sorte que EFGHS soit une pyramide dont les faces latérales sont des triangles équilatéraux. On appelle O le pied de sa hauteur issue du sommet S.

- 1 Représenter la figure ; situer le point O.

- 2** Calculer la diagonale du cube AF .
- 3** Le point S appartient-il au plan (HFA) ? Justifier.
- 4** Calculer OS , puis le volume de la pyramide.

■ Corrigé de l'exercice 1.

Dans le triangle BCD :

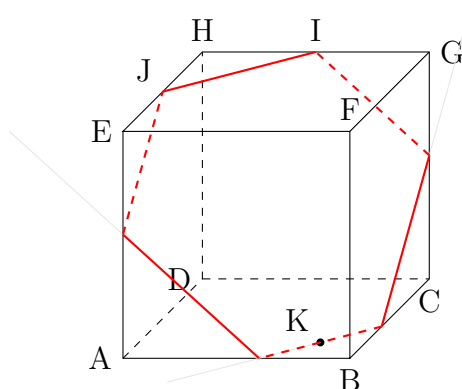
- K est le milieu de [CD]
- J est le milieu de [BC]

Donc, d'après le théorème des milieux, (JK) et (BD) sont parallèles et $BD = 2JK$.

De même, dans le triangle BDA, (IL) et (BD) sont parallèles et $BD = 2IL$.

Ainsi, (IL) et (JK) sont parallèles et $IL = JK$. Donc IJKL est un parallélogramme.

■ Corrigé de l'exercice 2.



■ Corrigé de l'exercice 3.

- 1** Le triangle BDC est rectangle en C. Donc, d'après le théorème de Pythagore :

$$BD^2 = CD^2 + CB^2$$

$$BD^2 = 4^2 + 4^2 = 16 + 16 = 32$$

$$\underline{BD = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}}$$

Le triangle DAE est rectangle en A donc, d'après le théorème de Pythagore :

$$DE^2 = DA^2 + AE^2$$

$$DE^2 = 4^2 + 8^2 = 16 + 64 = 80$$

$$\underline{DE = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}}$$

De plus, les triangles BAE et DAE sont isométriques (ils ont les mêmes mesures) donc $BE = ED$.

2 $BE = ED$ donc le triangle BDE est isocèle en E.

De plus, $BE^2 + DE^2 \neq BD^2$ donc il n'est pas rectangle.

3 Dans un triangle isocèle, la hauteur issue du sommet principal est confondue avec la médiatrice du côté opposé à ce sommet.

Or, O est le milieu de [BD]. Donc, (EO) est la hauteur issue de E dans le triangle BDE. Ainsi, (EO) est perpendiculaire à (BD).

Dans le triangle BOE rectangle en O, on a :

$$BE^2 = BO^2 + EO^2$$

$$80 = 8 + EO^2$$

$$EO^2 = 80 - 8 = 72$$

$$\underline{OE = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}}$$

4 Le volume d'une pyramide est :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{B} \times h$$

où \mathcal{B} représente l'aire de sa base. Ainsi, le volume de la pyramide ABCDE est :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times (4 \times 4) \times 6\sqrt{2}$$

$$\mathcal{V} = 32\sqrt{2}$$

Le volume de la pyramide est donc égal à $32\sqrt{2} \text{ cm}^3$.

■ Corrigé de l'exercice 4.

1 $IJ = JK = KI$ car les triangles AIJ, AJK et AKI sont isométriques (ils ont les mêmes mesures).

$$IK^2 = AI^2 + AK^2 = 2x^2 \text{ donc } IK = x\sqrt{2}.$$

De plus, les hauteurs ont une mesure égale à $\sqrt{2x^2 - \frac{1}{2}x^2} = x\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{x}{2}\sqrt{3}$.

Donc l'aire de IJK est :

$$\mathcal{A} = \frac{\frac{x}{2}\sqrt{3} \times x\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}x^2$$

2 Le solide AIJK s'appelle un tétraèdre ou une pyramide. Son volume est donné par la formule :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{B} \times h$$

où ici, \mathcal{B} représente l'aire de la base AKJ et h la hauteur AI. Donc :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \frac{x^2}{2} \times x$$

$$\boxed{\mathcal{V} = \frac{1}{6}x^3}$$

3 Le volume du tétraèdre peut aussi se calculer à l'aide de la formule suivante :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{IJK} \times AH$$

Donc :

$$\frac{1}{6}x^3 = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{6}}{4}x^2 \times AH$$

D'où :

$$\frac{1}{6}x^3 = \frac{\sqrt{6}}{12}x^2 \times AH$$

Donc :

$$AH = \frac{1}{6}x^3 \times \frac{12}{x^2\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}}x$$

Soit :

$$AH = \frac{\sqrt{6}}{3}x$$

■ Corrigé de l'exercice 5.

1 *a.* Les arêtes qui sont parallèles à (AB) sont : (DC), (EF), (GH), (EH), (FG), (DH) et (GC).

b. Les arêtes qui coupent (AB) sont : (AD), (BC), (FB) et (EA).

c. Les arêtes qui ne sont pas coplanaires avec (AB) sont : (EA), (CG), (DH), (FB), (EF), (FG), (HG) et (EH).

2 *a.* Les faces du cube qui sont parallèles à (AB) sont : (EFGH) et (DCGH).

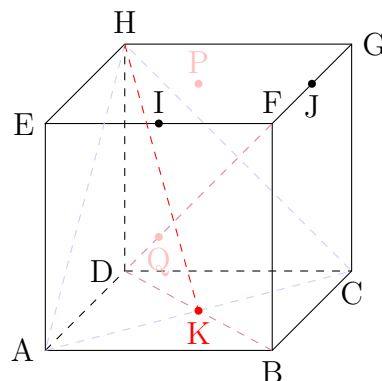
b. Les faces du cube qui coupent (AB) sont : (BCGF), (ADHE), (ABEF) et (ABCD)

3 *a.* La face du cube qui est parallèle à (ABCD) sont : (EFGH).

b. Les faces du cube qui coupent (ABCD) sont : (ABFE), (DCGH), (BCGF) et (ADHE).

4 Les points I, J et F sont coplanaires puisque appartenant au plan (EFG). Or, D n'appartient pas à ce plan, donc (DF) non plus. Ainsi, (IJ) et (DF) ne sont pas coplanaires.

5 La figure est la suivante :



H appartient au plan (DFB) et au plan (ACH). Il en est de même pour l'intersection des droites (AC) et (DB, que nous nommerons K).

Ainsi, la droite d'intersection des plans (DFB) et (ACH) est la droite (HK).

- 6** a. Dans le triangle AFH, P est le milieu de [FH] et Q celui de [AF] donc, d'après le théorème des milieux, (PQ) et (AH) sont parallèles.
Or, la droite (AH) est dans le plan (ADHE). Ainsi, comme P et Q ne sont pas dans le plan (ADHE), la droite (QP) est parallèle au plan (ADHE).
- b. L'intersection du plan (ADHE) et du plan (QPE) existe car E appartient à chacun de ces plans. Donc l'intersection est une droite dans (ADHE) passant par E. Or, (IJ) coupe (ADHE) en un point qui n'est pas E.

■ Corrigé de l'exercice 6.

- 1** a. Le plan (ABF) est aussi la face (ABFE) ; donc (EH) est bien perpendiculaire à (ABF) car ABCDEFGH est un carré.
- b. ABCDEFGH est un carré donc [EH] et [BC] sont parallèles et de même longueur. Ainsi, EBCH est un parallélogramme.
De plus, (BE) et (BC) sont perpendiculaires car (BC) est perpendiculaire au plan (BEF).
Ainsi, EBCH est un rectangle.
- 2** a. On sait que $BO' = CO'$ et que I est le milieu de [BC]. Ainsi, (IO') est perpendiculaire à (BC) comme la hauteur issue du sommet principal du triangle isocèle $BO'C$.
De plus, (BE) est aussi perpendiculaire à (BC) donc (BE) et (IO') sont parallèles.
- b. Le triangle BEC est rectangle en B donc son cercle circonscrit a pour diamètre [CE].
Les angles $\widehat{BO'C}$ et \widehat{BEC} interceptent le même arc \widehat{BC} et comme $\widehat{BO'C}$ est un angle au centre, sa mesure est le double de celle de \widehat{BEC} .
Ainsi, $\widehat{BEC} = \frac{\alpha}{2}$.
- c. Dans le triangle BEC rectangle en B,

$$\tan \widehat{BEC} = \frac{BC}{EB}.$$

Or, $EB^2 = AB^2 + AE^2 = 2a^2$, donc $EB = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$. Ainsi,

$$\tan \widehat{BEC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

d'où : $\widehat{BEC} \approx 35^\circ$, soit $\alpha \approx 2 \times 35 \approx 70^\circ$.

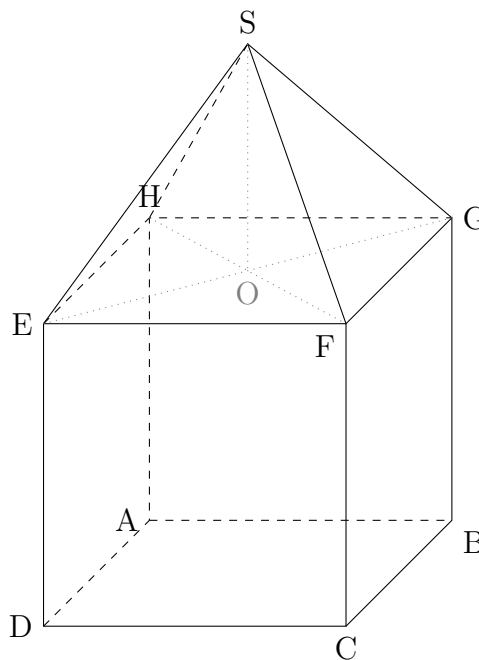
■ Corrigé de l'exercice 7.

- 1** On sait que (MN) // (BC) (par hypothèse) et (AD) // (BC) (car ABCD est un parallélogramme).
Si deux droites sont parallèles à une même autre droite, alors elles sont parallèles entre elles.
Donc (AD) // (MN).

- 2** *a.* Par définition, P est sur la droite (AN) et (AN) appartient au plan (SAB). Ainsi, P appartient au plan (SAB).
- b.* S appartient aux plans (SAB) et (SCD), donc il appartient à l'intersection de ces deux plans.
 P appartient à (SAB) (d'après la question précédente) et il appartient aussi à (SCD) car il est sur la droite (DM) qui est incluse dans le plan (SCD).
 Ainsi, P appartient aussi à l'intersection des plans (SAB) et (SCD).
 Or, l'intersection de deux plans non confondus (ce qui est le cas ici) est une droite.
 Donc l'intersection des plans (SAB) et (SCD) est donc la droite (SP).
- c.* On sait que (AB) // (CD). Or, si deux plans sont sécants et contiennent deux droites parallèles, alors l'intersection des deux plans est une droite parallèle aux deux autres droites (théorème du toit).
 Ainsi, comme (SAB) et (SCD) sont sécants suivant (SP), (SP) est parallèle à (AB) et (CD).

■ Corrigé de l'exercice 8.

- 1** Voici une figure possible :



- 2** Dans le triangle DAC rectangle en D, on a :

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 = 1^2 + 1^2 = 2.$$

Dans le triangle ACF rectangle en C, on a :

$$AF^2 = AC^2 + FC^2 = 2 + 1^2 = 3.$$

Ainsi, $AF = \sqrt{3}$.

- 3** (OS) // ((AH) car ces deux droites sont toutes les deux perpendiculaires à (HF). Le point O appartenant au plan (HFA), la droite (OS) aussi.
Donc S appartient au plan (HFA).

4 Dans le triangle FOS rectangle en O, on a :

$$OS^2 = FS^2 + OF^2 = 1^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Ainsi, $OS = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Le volume de la pyramide est donc :

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= \frac{1}{3} \times OS \times \mathcal{A}_{EFGH} \\ &= \frac{1}{3} \times \sqrt{\frac{3}{2}} \times (1 \times 1) \\ &= \frac{1}{3} \times \sqrt{\frac{3}{2}}.\end{aligned}$$

Statistiques

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

- A Exercices d'application du cours
- R Exercices de réflexion

Énoncés

4 octobre 2015

■ Exercice 1. Caractères discrets : moyenne, e.c.c. et médiane

★★★★★ A

Corrigé page 91

Le tableau ci-dessous donne la répartition des diverses notes d'une classe de 35 élèves à un contrôle.

Notes	2	4	5	6	9	11	12	14	15	16	18	Total
Effectifs	1	3	2	2	6	4	4	5	3	3	2	35

- 1 Recopier et compléter ce tableau en calculant les fréquences à 10^{-3} près, et les effectifs cumulés croissants et décroissants.
- 2 Construire le polygone des effectifs cumulés croissants et celui des effectifs cumulés décroissants.
- 3 Donner la médiane de la série statistique.
- 4 Calculer la moyenne de la série statistique et comparer à la médiane.

■ Exercice 2. Moyenne, e.c.c. & médiane avec classes

★★★★★ A

Corrigé page 92

Un relevé des durées des communications téléphoniques effectués dans un central téléphonique a fourni les informations consignées dans le tableau suivant (l'unité de durée est la minute) :

Intervalles de durée	[0 ; 2[[2 ; 4[[4 ; 6[[6 ; 8[[8 ; 10[[10 ; 12[
Effectifs	14	16	25	15	17	13

- 1 Calculer la durée moyenne d'un appel.
- 2 Construire le polygone des effectifs cumulés croissants puis celui des effectifs cumulés décroissants.
- 3 Déterminer alors une valeur approchée de la médiane de cette série par lecture graphique.
- 4 Calculer de façon précise la médiane.
- 5 Déterminer graphiquement les premier et troisième quartile.
- 6 Construire le diagramme en boîte de cette série.

■ Exercice 3. Calcul d'effectifs, diagramme en barres

★★★★★ A
Corrigé page 94

Voici les températures moyennes du mois de mars 2006 à Larribar-Sorhapuru :

6.2 - 8.2 - 12 - 15 - 6.3 - 5.6 - 7.5 - 12.1 - 10.9 - 7.9 - 8.6 - 9 - 10 - 14.1 - 11.6 - 10.3 - 10.2 -
11.9 - 12.5 - 13.2 - 12.6 - 11.2 - 12.7 - 16.6 - 17.3 - 19.8 - 18.6 - 13.5 - 15.2 - 18.5 - 17.8

- 1 Calculer les effectifs des classes $[5 ; 8[$, $[8 ; 11[$, $[11 ; 14[$, $[14 ; 17[$ et $[17 ; 20]$.
- 2 Représenter ces classes par un diagramme en barres.

■ Exercice 4. Calculs avec classes

★★★★★ A
Corrigé page 94

On considère la série statistique suivante :

Classes	$[0 ; 3[$	$[3 ; 6[$	$[6 ; 12[$	$[12 ; 20[$	$[20 ; 25]$
Effectifs	10	15	10	20	25

- 1 Représenter cette série statistique par un histogramme.
- 2 Calculer les effectifs cumulés croissants et les représenter graphiquement. En déduire une valeur approchée de la médiane de la série statistique.
- 3 En assimilant chaque classe à son centre, calculer une valeur approchée de la moyenne de la série statistique.

■ Exercice 5. Salaires dans une entreprise

★★★★★ A
Corrigé page 95

Dans une entreprise, on relève les salaires des personnes y travaillant et on reporte les résultats dans un tableau :

Salaires (en €)	$]1\ 250 ; 1\ 350]$	$]1\ 350 ; 1\ 450]$	$]1\ 450 ; 1\ 650]$	$]1\ 650 ; 1\ 750]$	$]1\ 750 ; 1\ 950]$	$]1\ 950 ; 2\ 150]$	$]2\ 150 ; 2\ 550]$	$]2\ 550 ; 3\ 550]$
Effectifs	32	28	17	35	12	15	10	5
E.c.c.								
Fréquences (%)								

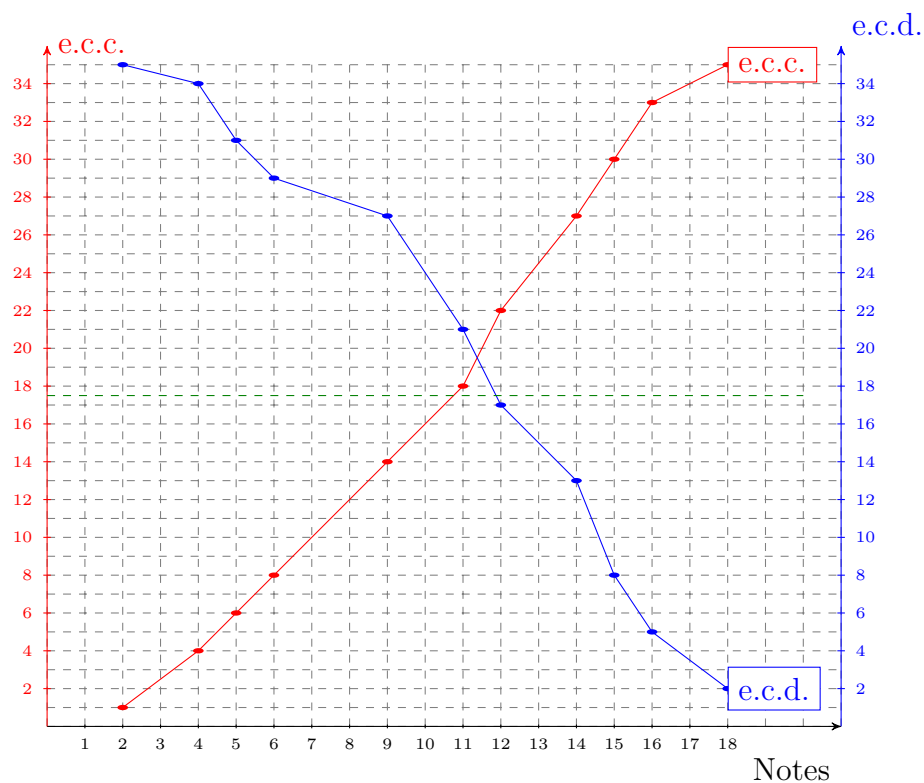
- 1 Déterminer la classe modale et l'étendue de cette série statistique.
- 2 Compléter le tableau précédent. On arrondira les fréquences au centième.
- 3 Construire l'histogramme de cette série.
- 4 Construire le polygone des effectifs cumulés croissants.
- 5 Donner la valeur de la médiane m_e et déterminer graphiquement une valeur approchée des premier et troisième quartiles Q_1 et Q_3 .
- 6 Calculer la moyenne \bar{x} de cette série statistique. On donnera une valeur approchée à l'unité.

■ Corrigé de l'exercice 1.

1 Le tableau complété est :

Notes	2	4	5	6	9	11	12	14	15	16	18	Total
Effectifs	1	3	2	2	6	4	4	5	3	3	2	35
Fréquences	0,029	0,086	0,057	0,057	0,171	0,114	0,114	0,143	0,086	0,086	0,057	1
e.c.c.	1	4	6	8	14	18	22	27	30	33	35	
e.c.d.	35	34	31	29	27	21	17	13	8	5	2	

2 Les polygones des e.c.c. et e.c.d. sont :



3 La médiane est ici égale à $m_e = 11$ car 50 % des notes sont inférieures à 11.

4 La moyenne de la série statistique est :

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{2 \times 1 + 4 \times 3 + 5 \times 2 + \cdots + 15 \times 3 + 16 \times 3 + 18 \times 2}{1 + 3 + 2 + \cdots + 3 + 3 + 2} \\ &= \frac{381}{35} \\ \boxed{\bar{x} \approx 10,9}\end{aligned}$$

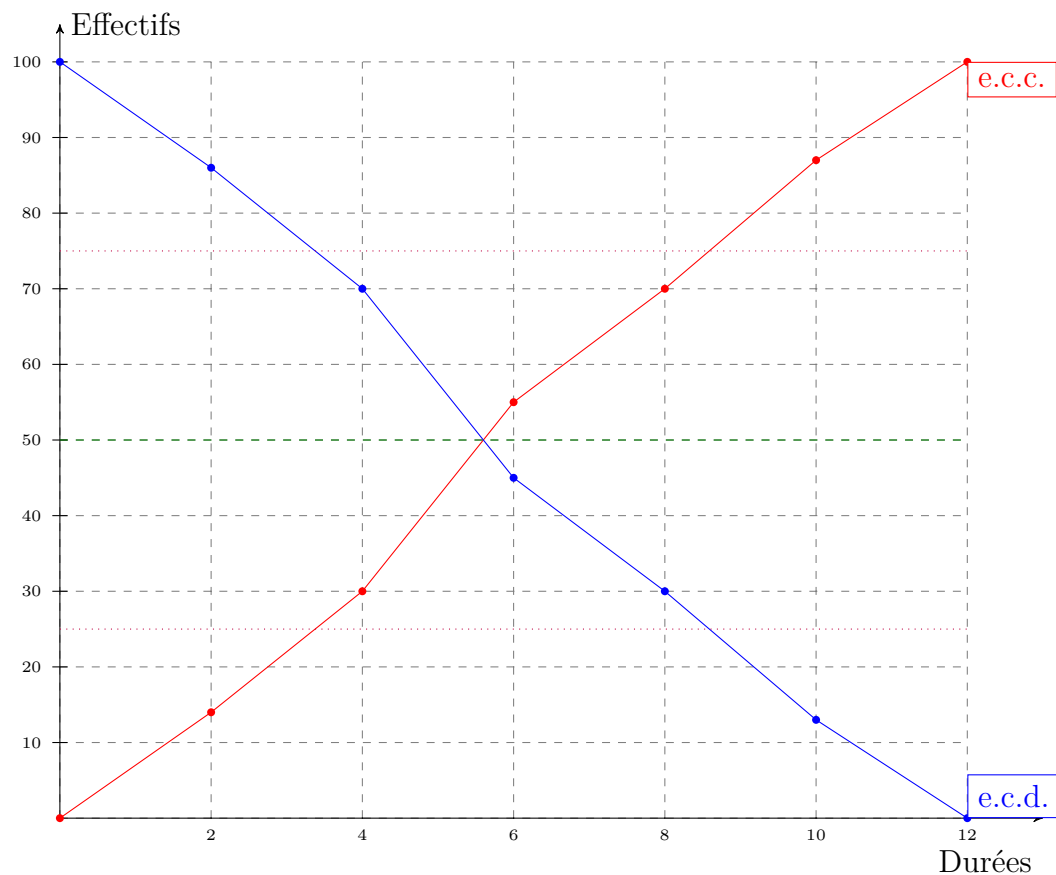
■ Corrigé de l'exercice 2.

1 La durée moyenne se calcule ainsi :

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1 \times 14 + 3 \times 16 + 5 \times 25 + 7 \times 15 + 9 \times 17 + 11 \times 13}{14 + 16 + 25 + 15 + 17 + 13} \\ \bar{x} &= \frac{588}{100} \\ \bar{x} &= 5,88\end{aligned}$$

La durée moyenne d'un appel est donc d'à peu près 6 minutes.

2 Le polygone des e.c.c. est le suivant :



3 La médiane correspond graphiquement à l'abscisse du point d'intersection des polygones. Ici, $m_e \approx 5,5$.

- 4 Considérons les points $A_1(4; 30)$ et $B_1(6; 55)$. L'équation de la droite (A_1B_1) est de la forme : $y = m_1x + p_1$.

$$m_1 = \frac{y_{B_1} - y_{A_1}}{x_{B_1} - x_{A_1}} = \frac{55 - 30}{6 - 4} = \frac{25}{2}$$

Ainsi, en remplaçant dans l'équation x et y par x_{A_1} et y_{A_1} , on a :

$$p_1 = y_{A_1} - m_1x_{A_1} = 30 - \frac{25}{2} \times 4 = -20$$

Donc $(A_1B_1) : y = \frac{15}{2}x - 20$

Considérons maintenant les points $A_2(4; 70)$ et $B_2(6; 45)$. L'équation de la droite (A_2B_2) est de la forme : $y = m_2x + p_2$.

$$m_2 = \frac{y_{B_2} - y_{A_2}}{x_{B_2} - x_{A_2}} = \frac{45 - 70}{6 - 4} = -\frac{25}{2}$$

Ainsi, en remplaçant dans l'équation x et y par x_{A_2} et y_{A_2} , on a :

$$p_2 = y_{A_2} - m_2x_{A_2} = 70 + \frac{25}{2} \times 4 = 120$$

Donc $(A_2B_2) : y = -\frac{25}{2}x + 120$

Soit $M(x_M; y_M)$ le point d'intersection de (A_1B_1) et (A_2B_2) . Alors : $M \in (A_1B_1)$ et $M \in (A_2B_2)$ d'où :

$$y_M = \frac{25}{2}x_M - 20 = -\frac{25}{2}x_M + 120$$

Donc :

$$\frac{25}{2}x_M + \frac{25}{2}x_M = 120 + 20$$

Soit :

$$25x_M = 140$$

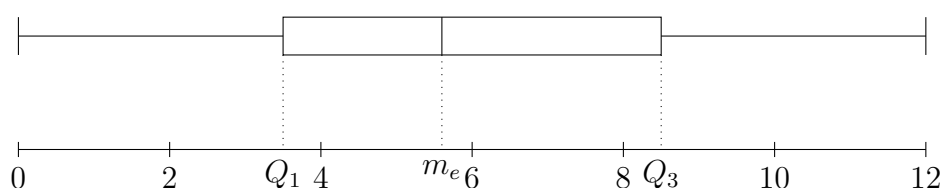
Ainsi :

$$x_M = \frac{140}{25} = 5,6$$

La médiane de la série est donc $m_e = 5,6$.

- 5 Le premier quartile Q_1 est à peu près de $Q_1 \approx 3,5$ (on regarde le polygone des e.c.c. au niveau de la droite à hauteur de 25) et $Q_3 \approx 8,5$ (on regarde le polygone des e.c.c. au niveau de la droite à hauteur de 75).

- 6 On a le diagramme en boîte suivant :

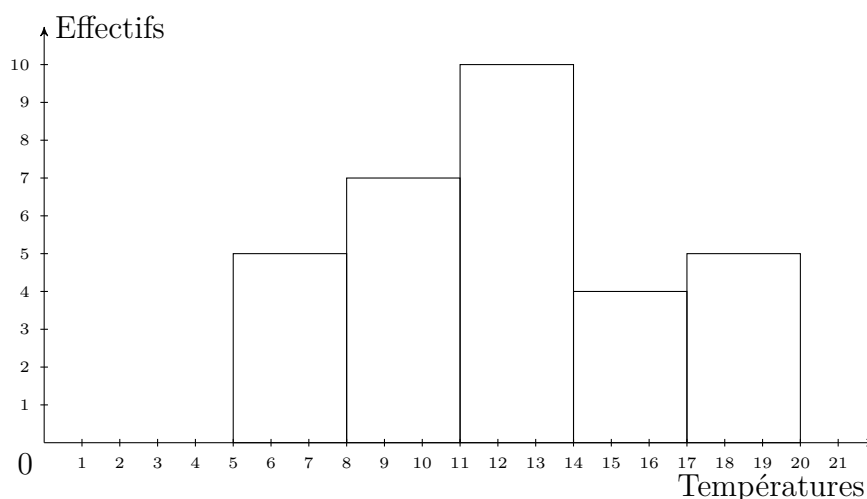


■ Corrigé de l'exercice 3.

1 On a le tableau suivant :

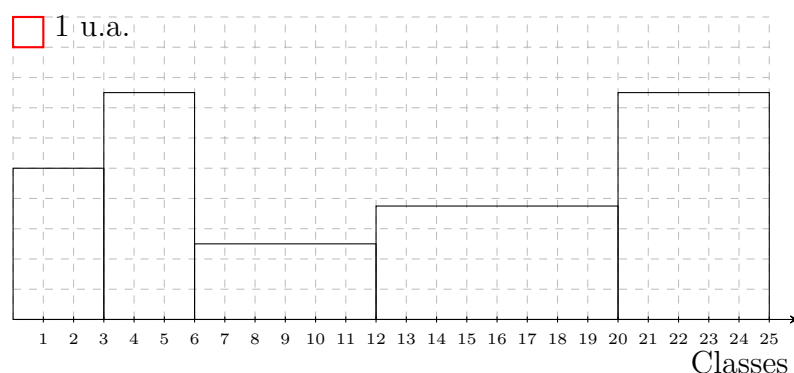
Classes	[5 ; 8[[8 ; 11[[11 ; 14[[14 ; 17[[17 ; 20[
Effectifs	5	7	10	4	5

2 Le diagramme en barres est le suivant :



■ Corrigé de l'exercice 4.

1 L'histogramme de la série statistique est le suivant :



J'ai pris ici la correspondance : 10 individus pour 15 u.a.

Exemple de calcul de hauteur d'un rectangle : le rectangle de la classe [12 ; 20[doit correspondre à 20 individus. :

x u.a.	20 individus
15 u.a.	10 individus

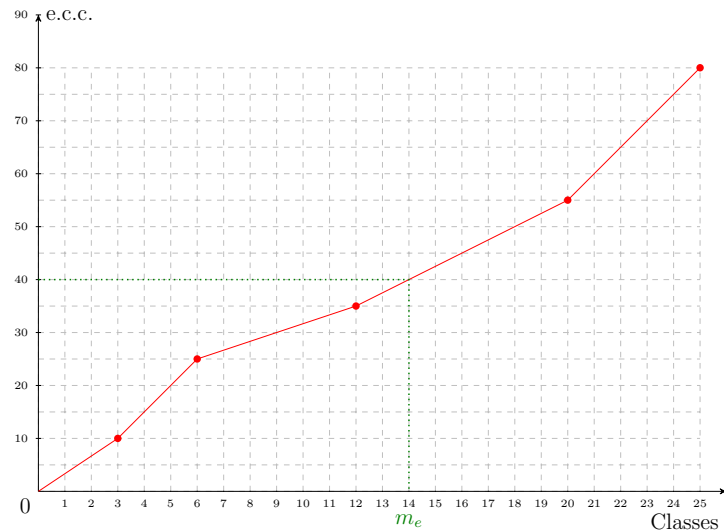
$$x = \frac{15 \times 20}{10} = 30$$

la largeur du rectangle est de 8 unités donc la hauteur h est telle que $8h = 30$, soit $h = \frac{30}{8}$, soit $h = 3,75$.

2 On a :

Classes	[0 ; 3[[3 ; 6[[6 ; 12[[12 ; 20[[20 ; 25]
Effectifs	10	15	10	20	25
e.c.c.	10	25	35	55	80

D'où le graphique suivant :



On lit alors graphiquement que $m_e \approx 14$.

3 La moyenne est :

$$\bar{x} = \frac{2 \times 10 + 4,5 \times 15 + 9 \times 10 + 16 \times 20 + 22,5 \times 25}{10 + 15 + 10 + 20 + 25}$$

$\bar{x} \approx 13,2$

■ Corrigé de l'exercice 5.

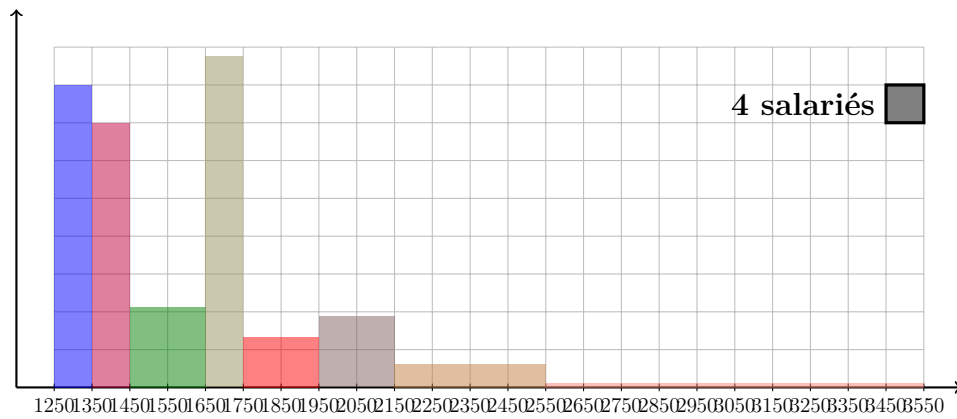
1 La classe modale est la classe pour laquelle l'effectif est le plus grand. Ainsi, la classe modale est]1 600 ; 1 750].

L'étendue est égale à : $3\,500 - 1\,250 = 2\,250$.

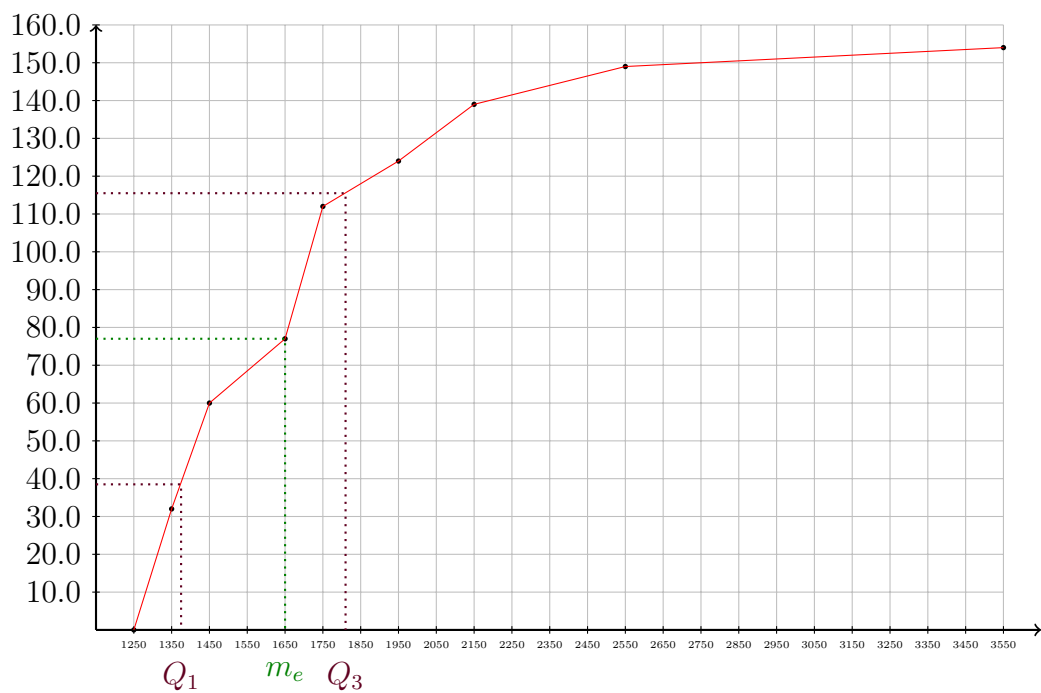
2 On a :

Salaires (en €)]1 250 ; 1 350]]1 350 ; 1 450]]1 450 ; 1 650]]1 650 ; 1 750]]1 750 ; 1 950]]1 950 ; 2 150]]2 150 ; 2 550]]2 550 ; 3 550]
Effectifs	32	28	17	35	12	15	10	5
E.c.c.	32	60	77	112	124	139	149	154
Fréquences (%)	20,78	18,18	11,04	22,73	7,79	9,74	6,49	3,25

3 L'histogramme de cette série est :



4 Le polygone des effectifs cumulés croissants est :



5 La médiane est atteinte pour un salaire de 1650 € (sur le graphique, on voit que 50% de l'effectif total est 77, et pour une ordonnée de 77, on arrive au point d'abscisse 1650). On voit graphiquement que $Q_1 \approx 1375$ et $Q_3 \approx 1800$.

6 $\bar{x} \approx 1655$. La classe modale, la médiane et la moyenne sont alors très proches.

Probabilités

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

- A** Exercices d'application du cours
- R** Exercices de réflexion

4 octobre 2015

■ Exercice 1. QCM

★★★★★ **A**
Corrigé page 102

Cet exercice est un Questionnaire à Choix Multiples (QCM). Pour chaque question, une seule des réponses proposées est correcte.

- 1** On a lancé 5 fois de suite un dé cubique équilibré, et on n'a jamais obtenu le SIX. La probabilité d'obtenir SIX au 6^e lancer est :
 - a.* inférieure à $\frac{1}{6}$
 - b.* supérieure à $\frac{1}{6}$
 - c.* égale à $\frac{1}{6}$
 - d.* inconnue
- 2** Une famille possède deux enfants. Quelle est la probabilité que ce soient deux filles ?
 - a.* $\frac{1}{8}$
 - b.* $\frac{1}{2}$
 - c.* $\frac{1}{4}$
 - d.* 1
- 3** On effectue 2 tirages aléatoires successifs et sans remise dans un jeu de 32 cartes ordinaire. Quelle est la probabilité d'obtenir deux cartes identiques ?
 - a.* 1
 - b.* $\frac{1}{16}$
 - c.* 0
 - d.* $\frac{1}{32}$
- 4** On lance deux dés cubiques non truqués. Quelle est la probabilité d'obtenir un « double », c'est-à-dire que les faces des deux dés indiquent le même chiffre ?
 - a.* $\frac{1}{6}$
 - b.* $\frac{1}{36}$
 - c.* 6
 - d.* $\frac{2}{36}$

■ Exercice 2. Lancer de deux dés équilibrés

★★★★★ **A**
Corrigé page 102

On lance un dé cubique et un dé tétraédrique (4 faces), tout deux non pipés (c'est-à-dire parfaitement équilibrés).

- 1** Quelle est la probabilité pour que la somme des faces obtenues soit un multiple de 3 ?
- 2** Avec les deux chiffres obtenus, on forme un nombre dont le chiffre des unités est celui obtenu avec le dé cubique et celui des dizaines, obtenu avec le dé tétraédrique.
 - a.* Quelle est la probabilité pour que ce nombre soit un multiple de 3 ?

b. Quelle est la probabilité pour que ce nombre soit un multiple de 2 ?

- 3 Reprendre les questions a et b de la question précédente en considérant maintenant que le chiffre des unités est donné par le dé tétraédrique et celui des dizaines par le dé cubique.

■ Exercice 3. Réunion et intersection

★★★★☆ A
Corrigé page 104

Un jeu de cartes est constitué de 52 cartes.

Il est composé de 4 « couleurs » : cœur (rouge), carreau (rouge), pique (noire) et trèfle (noire).

Pour chaque couleur, il y a 3 figures : valet, dame et roi.

On tire au hasard une carte de ce jeu.

- 1 Quelle est la probabilité d'obtenir une figure rouge ?
- 2 Quelle est la probabilité d'obtenir une figure ou une carte rouge ?
- 3 Quelle est la probabilité d'obtenir une figure rouge ou une carte noire qui ne soit pas une figure ?

■ Exercice 4. Avec un dé portant des lettres

★★★★☆ A
Corrigé page 105

Un dé cubique porte sur chaque face une lettre.

Ce dé est pipé ; le tableau suivant donne les probabilités de chaque face :

A	M	H	T	U	Y
$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{4}{15}$?

On lance une fois ce dé. On note :

- Y l'événement : « on obtient la face où figure la lettre Y » ;
- M l'événement : « on obtient une lettre du mot MATH »

- 1 Calculer $P(Y)$.
- 2 Calculer $P(M)$.
- 3 Calculer $P(Y \cap M)$.
- 4 Calculer $P(Y \cup M)$.

■ Exercice 5. Changement d'univers

★★★★☆ A
Corrigé page 105

Dans un collège, nous avons réparti les élèves selon leur genre et le moyen de locomotion qu'ils utilisaient pour venir en cours. Les résultats sont donnés dans le tableau suivants :

Moyens de locomotion	Filles	Garçons
En transport en commun	126	148
À vélo	16	10
À pieds	108	84
En voiture	42	30

1 On choisit au hasard un élève parmi les 564 élèves de ce collège.

- a. Quelle est la probabilité pour que ce soit un garçon ?
- b. Quelle est la probabilité pour qu'il vienne à vélo ?
- c. Quelle est la probabilité pour que ce soit une fille qui vienne à pieds ?

2 On choisit maintenant un garçon au hasard.

Quelle est la probabilité pour qu'il vienne en voiture ?

3 On choisit maintenant un élève qui vient en transport en commun.

Quelle est la probabilité pour que ce soit une fille ?

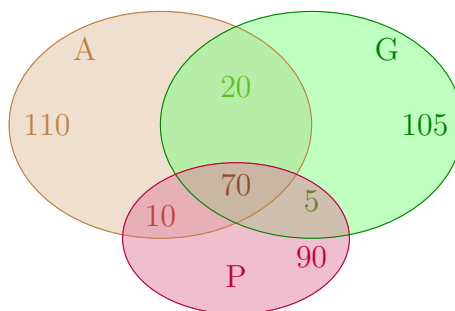
■ Exercice 6. Chez les profs de math

★★★★☆ **R**

Corrigé page 106

Chaque année, le club des profs de math d'une ville convie chacun de ses membres à une réunion secrète. Cette année, il envoie 420 invitations.

Parmi ces profs de math, il y a ceux qui adorent la géométrie, ceux qui adorent l'algèbre et ceux qui adorent les probabilités. Mais certains peuvent adorer deux des trois disciplines, voire même les trois. La répartition est donnée par le diagramme de VENN suivant :



On choisit un prof au hasard dans cette réunion. On note :

- A est l'événement : « le prof adore l'algèbre » ;
- G est l'événement : « le prof adore la géométrie » ;
- P est l'événement : « le prof adore les probabilités ».

1 Calculer la probabilité pour que le prof adore la géométrie et les probabilités.

2 Calculer la probabilité pour que le prof adore la géométrie ou les probabilités.

■ Exercice 7. Le digicode

★★★★☆ R

Corrigé page 106

Le digicode d'un immeuble possède un clavier pour saisir un code. Le code est composé de deux chiffres, parmi 1, 2 ou 3, suivis d'une lettre parmi A ou B. Par exemple : 21B est un code possible, tout comme 33A.

Un seul code permet d'accéder au hall de l'immeuble.

- 1 À l'aide d'un arbre, déterminer le nombre de codes possibles.
- 2 Calculer la probabilité des événements A, B, C, D et E suivants :
 - A = « Le code ouvrant l'immeuble est le code 33A » ;
 - B = « Le code ouvrant l'immeuble commence par le chiffre 2 » ;
 - C = « Le code ouvrant l'immeuble se termine par la lettre A » ;
 - D = « Le code ouvrant l'immeuble contient deux fois le même chiffre » ;
 - E = « Le code ouvrant l'immeuble ne contient ni le 1, ni le B ».

■ Exercice 8. Dans un magasin

★★★★☆ A

Corrigé page 107

Un petit magasin possède 2 caisses, toujours ouvertes (mais bien sûr pas toujours libres, parfois les caisses sont occupées et il faut attendre).

On note :

- C_1 l'événement : « La caisse n°1 est libre »
- C_2 l'événement : « La caisse n°2 est libre »

- 1 Énoncez à l'aide d'une phrase l'événement $C_1 \cap C_2$.

Une étude statistique permet d'affirmer que $P(C_1) = 0,3$, $P(C_2) = 0,4$ et $P(C_1 \cap C_2) = 0,2$.

- 2 Énoncez à l'aide d'une phrase l'événement $\overline{C_1}$ puis calculer sa probabilité.
- 3 Énoncez à l'aide d'une phrase l'événement $C_1 \cup C_2$ puis calculer sa probabilité.
- 4 Calculer la probabilité qu'il faille attendre, c'est-à-dire qu'aucune des deux caisses ne soit libre.

■ Exercice 9. Dans un sac

★★★★☆ A

Corrigé page 107

Un sac contient 4 jetons, indiscernables au toucher, portant les chiffres 1, 3, 6 et 9.

On tire au hasard un premier jeton, puis un second jeton sans remettre le premier dans le sac. On note le nombre à deux chiffres obtenu dont les dizaines sont données par le premier jeton extrait et les unités par le second.

Par exemple, le tirage 6 puis 1 conduit au nombre 61.

- 1
 - a. Construire un arbre de dénombrement représentant cette expérience aléatoire.
 - b. Déterminer le nombre d'issues possibles liées à cette expérience.

2 On considère les événements suivants :

- A : « le nombre obtenu est pair »
 - B : « le nombre obtenu est un multiple de 3 »
- a.* Déterminer les probabilités des événements A, B et \overline{B} .
- b.* Traduire par une phrase l'événement $A \cup B$ puis calculer sa probabilité.
- c.* Traduire par une phrase l'événement $A \cap B$ puis calculer sa probabilité.

■ Corrigé de l'exercice 1.

1 Réponse (c) : $\frac{1}{6}$.

En effet, le dé est équilibré donc chaque face a la même probabilité d'être obtenue, à savoir 1 chance sur 6, quelles que soient les issues obtenues précédemment du lancer.

2 Réponse (c) : $\frac{1}{4}$. En effet, il y a 1 chance sur 2 pour que le 1^{er} enfant soit une fille et autant pour le 2^e enfant, donc la probabilité que les deux enfants soient deux filles est $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

3 Réponse (c) : 0. Le tirage se fait sans remise, ce qui signifie que la carte obtenue lors du premier tirage n'est pas remise dans le jeu et donc ne peut pas être obtenue lors du second tirage.

4 Réponse (a) : $\frac{1}{6}$. Si on lance deux dés cubiques, il y a $6 \times 6 = 36$ issues possibles (11,12,13,14,15,16,21,22,23,24,25,26,31,32, ...).

Parmi ces 36 issues, 6 donnent deux chiffres identiques (11,22,33,44,55,66), donc la probabilité d'obtenir 2 chiffres identiques est $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

■ Corrigé de l'exercice 2.

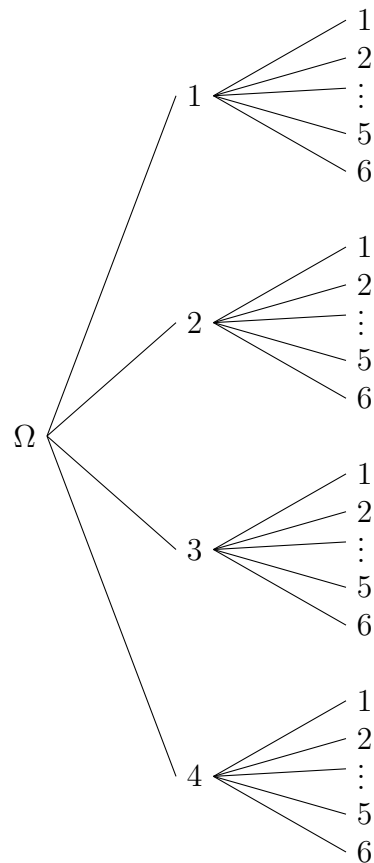
1 Représentons les sommes possibles dans un tableau :

Dé 2 \ Dé 1	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10

Nous voyons ici qu'il y a $6 \times 4 = 24$ issues possibles. De plus, il y a 8 issues correspondant à une somme qui est multiple de 3. Donc la probabilité d'obtenir une somme multiple de 3 est :

$$p_1 = \frac{8}{24} \quad \text{soit} \quad \boxed{p_1 = \frac{1}{3}}$$

2 Utilisons un arbre de probabilités pour représenter les différentes issues possibles :



- a.* Le nombre formé est un multiple de 3 si la somme des chiffres est un multiple de 3. On obtient alors les possibilités suivantes :

12 ; 15 ; 21 ; 24 ; 33 ; 36 ; 42 ; 45.

Il y a donc 8 issues favorables. La probabilité pour que le nombre formé soit un multiple de 3 est alors :

$$p_2 = \frac{8}{24} \quad \text{soit} \quad \boxed{p_2 = \frac{1}{3}}$$

- b.* Un nombre est un multiple de 2 s'il est pair. Il y a ici $3 \times 2 = 6$ nombres pairs, soit la moitié des issues possibles. La probabilité pour que le nombre formé soit un multiple de 2 est alors :

$$\boxed{p_3 = \frac{1}{2}}$$

3 *a.* Les nombres obtenus multiples de 3 sont :

12 ; 21 ; 24 ; 33 ; 42 ; 51 ; 54 ; 63.

Il y en a 8, donc la probabilité demandée est :

$$\boxed{p_4 = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}}$$

b. Les nombres pairs obtenus sont :

12 ; 14 ; 22 ; 24 ; 32 ; 34 ; 42 ; 44 ; 52 ; 54 ; 62 ; 64.

Il y en a 12, soit la moitié des cas possibles, donc la probabilité demandée est :

$$p_5 = \frac{1}{2}$$

■ Corrigé de l'exercice 3.

- 1 Il y a 6 figures rouges (en tout, $4 \times 3 = 12$ figures dont la moitié sont rouges). La probabilité est alors :

$$p_1 = \frac{6}{52} \quad \text{soit} \quad p_1 = \frac{3}{26}$$

- 2 En notant F l'événement « obtenir une figure » et R l'événement « obtenir une carte rouge », on peut écrire :

$$P(F \cup R) = P(F) + P(R) - P(F \cap R).$$

D'après la question précédente, $P(F \cap R) = \frac{3}{26}$.

De plus, $P(F) = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$ et $P(R) = \frac{1}{2}$ (car il y a autant de cartes rouges que de cartes noires).

Ainsi,

$$\begin{aligned} P(F \cup R) &= \frac{3}{13} + \frac{1}{2} - \frac{3}{26} \\ &= \frac{6}{26} + \frac{13}{26} - \frac{3}{26} \end{aligned}$$

$$P(F \cup R) = \frac{8}{13}$$

Remarque : on aurait aussi pu raisonner en passant par l'événement contraire, à savoir $\overline{F \cup R}$: « obtenir une carte qui n'est pas une figure et qui est noire ». On en compte en tout $10 \times 2 = 20$ (10 cartes ne sont pas des figures et il n'y a que 2 couleurs noires). Donc la probabilité de l'événement contraire est égale à $\frac{20}{52} = \frac{10}{26}$.

La probabilité demandée au départ est donc égale à $1 - \frac{10}{26} = \frac{26}{26} - \frac{10}{26} = \frac{16}{26} = \frac{8}{13}$.

- 3 Pour cette question, il vaut mieux compter les cartes de chaque ensemble car ces deux derniers sont disjoints (ils n'ont pas d'élément en commun).

Il y a 6 figures rouges et 20 cartes noires qui ne sont pas des figures, donc il y a en tout 26 cartes (soit la moitié du jeu).

La probabilité est donc égale à $\frac{1}{2}$.

■ **Corrigé de l'exercice 4.**

$$\begin{aligned} 1 \quad P(Y) &= 1 - \left(\frac{1}{15} + \frac{1}{3} + \frac{2}{15} + \frac{1}{15} + \frac{4}{15} \right) \\ &= 1 - \frac{13}{15} \end{aligned}$$

$$\boxed{P(Y) = \frac{2}{15}}$$

$$\begin{aligned} 2 \quad P(M) &= \frac{1}{15} + \frac{1}{3} + \frac{2}{15} + \frac{1}{15} \\ &= \frac{9}{15} \end{aligned}$$

$$\boxed{P(M) = \frac{3}{5}}$$

3 Il n'est pas possible d'avoir une lettre du mot MATH **et** le Y donc $\boxed{P(Y \cap M) = 0}$.

$$\begin{aligned} 4 \quad P(Y \cup M) &= P(Y) + P(M) - P(Y \cap M) \\ &= \frac{2}{15} + \frac{3}{5} - 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{P(Y \cup M) = \frac{11}{15}}$$

■ **Corrigé de l'exercice 5.**

1 L'univers est ici composé de tous les élèves du collège, donc il comporte 564 éléments.

a. Il y a, dans le collège, $148 + 10 + 84 + 30 = 272$ garçons.

Par conséquent, la probabilité de choisir un garçon parmi tous les élèves est :

$$p_1 = \frac{272}{564} \quad \text{soit} \quad \boxed{p_1 = \frac{68}{141}}.$$

b. Il y a $10 + 16 = 26$ élèves qui viennent à vélo.

Par conséquent, la probabilité de choisir un élève qui vient à vélo parmi les élèves du collège est :

$$p_2 = \frac{26}{564} \quad \text{soit} \quad \boxed{p_2 = \frac{13}{282}}$$

c. Il y a 108 filles qui viennent à pieds donc la probabilité de choisir une fille qui vient à pieds parmi les élèves du collège est :

$$p_3 = \frac{108}{564} \quad \text{soit} \quad \boxed{p_3 = \frac{9}{47}}$$

2 L'univers est ici composé des garçons du collège ; il est donc composé de 272 éléments.

Il y a 30 garçons qui viennent en voiture donc la probabilité de choisir un élève qui vient en voiture parmi les garçons est :

$$p_4 = \frac{30}{272} \quad \text{soit} \quad \boxed{p_4 = \frac{15}{136}}$$

- 3** L'univers est ici composé des élèves qui viennent en transport en commun ; il y a donc $126 + 148 = 274$ éléments dans l'univers.

Il y a 126 filles dans cet univers donc la probabilité de choisir une fille parmi les élèves qui viennent en transport en commun est :

$$p_5 = \frac{126}{274} \quad \text{soit} \quad \boxed{p_5 = \frac{63}{137}}$$

■ Corrigé de l'exercice 6.

- 1** D'après le diagramme, il y a 5 profs qui adorent les probabilités et la géométrie. Donc :

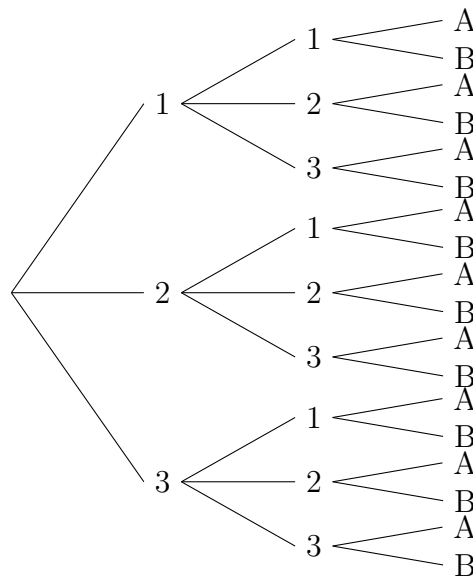
$$P(G \cap P) = \frac{5}{420} \quad \text{soit} \quad \boxed{P(G \cap P) = \frac{1}{84}}$$

- 2** Il y a 110 profs qui ne sont pas dans l'ensemble $P \cup G$ donc :

$$P(P \cup G) = 1 - \frac{110}{420} \quad \text{soit} \quad \boxed{P(P \cup G) = \frac{31}{42}}$$

■ Corrigé de l'exercice 7.

- 1** On a l'arbre suivant :



Il y a donc 18 codes possibles.

- 2**
- $P(A) = \frac{1}{18}$: il n'y a qu'un code « 33A » sur les 18 codes possibles.
 - $P(B) = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$ car il y a 6 codes commençant par 2.
 - $P(C) = \frac{1}{2}$: il y a 1 code sur 2 qui finit par A.
 - $P(D) = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$: seuls les codes 11A, 11B, 22A, 22B, 33A et 33B conviennent.

- $P(E) = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$: seuls les codes 22A, 23A, 32A et 33A ne contiennent ni le 1, ni le B.

■ Corrigé de l'exercice 8.

1 $C_1 \cap C_2$ est l'événement : « les caisses 1 et 2 sont libres en même temps ».

2 $\overline{C_1}$ est l'événement : « la caisse 1 n'est pas libre ».

$$\begin{aligned} P(\overline{C_1}) &= 1 - P(C_1) \\ &= 1 - 0,3 \end{aligned}$$

$$\boxed{P(\overline{C_1}) = 0,7}$$

3 $C_1 \cup C_2$ est l'événement : « la caisse 1 ou la caisse 2 est libre ». i

$$\begin{aligned} P(C_1 \cup C_2) &= P(C_1) + P(C_2) - P(C_1 \cap C_2) \\ &= 0,3 + 0,4 - 0,2 \end{aligned}$$

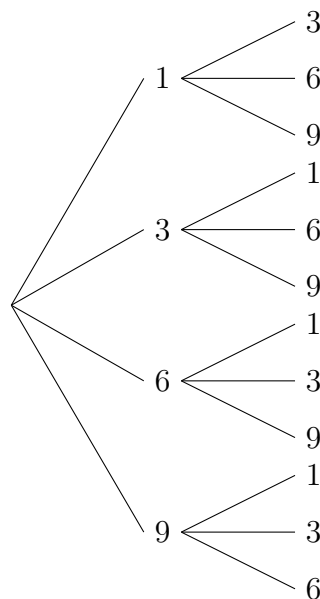
$$\boxed{P(C_1 \cup C_2) = 0,5}$$

$$\begin{aligned} \textbf{4} \quad P(\overline{C_1} \cap \overline{C_2}) &= P(\overline{C_1 \cup C_2}) \\ &= 1 - P(C_1 \cup C_2) \\ &= 1 - 0,5 \end{aligned}$$

$$\boxed{P(\overline{C_1} \cap \overline{C_2}) = 0,5}$$

■ Corrigé de l'exercice 9.

1 a. L'arbre de dénombrement est le suivant :



b. Nous voyons sur l'arbre de dénombrement qu'il y a 12 issues possibles.

2 a. • Il y a 3 issues qui représentent des nombres pairs (16, 36 et 96) donc

$$P(A) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}.$$

- Un nombre est un multiple de 3 lorsque la somme de ses chiffres est elle-même un multiple de 3. Il y a donc 6 nombres divisibles par 3 (36, 39, 63, 69, 93 et 96), donc $P(B) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.
- $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.
- b.* $A \cup B$ est l'événement : « le nombre obtenu est pair ou multiple de 3 » ; il contient donc 7 issues concernées (16, 36, 39, 63, 69, 93 et 96), donc $P(A \cup B) = \frac{7}{12}$.
- c.* $A \cap B$ est l'événement : « le nombre obtenu est pair et divisible par 3 » ; il y a donc 2 issues concernées (36 et 96), donc $P(A \cap B) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

N.B. On aurait aussi pu utiliser la formule :

$$\begin{aligned}
 P(A \cap B) &= P(A) + P(B) - P(A \cup B) \\
 &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{7}{12} \\
 &= \frac{3}{12} + \frac{6}{12} - \frac{7}{12} \\
 &= \frac{2}{12} \\
 &= \frac{1}{6}.
 \end{aligned}$$

Fluctuations et échantillonnage

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

A Exercices d'application du cours

R Exercices de réflexion

4 octobre 2015

■ Exercice 1. Le dé d'Al

★★★★★ **A**

Corrigé page 111

Al a fabriqué un dé cubique. Il le lance 50 fois et obtient 10 fois la face « 3 ».

- 1 Avec un dé équilibré, quelle est la probabilité d'obtenir la face « 3 » ?
- 2 Peut-on utiliser l'intervalle de fluctuation vu en cours pour déterminer si le dé d'Al est équilibré ?

■ Exercice 2. Le Dédale

★★★★★ **A**

Corrigé page 111

Le Dédale est un labyrinthe d'un parc de loisirs.

D'après les statistiques observées au cours de la première année d'ouverture de cette attraction, le pourcentage de visiteurs ayant mis plus de 5 minutes pour le traverser était de 69 %.

La seconde année, sur 1 000 visiteurs, le pourcentage de clients ayant mis plus de 5 minutes pour le traverser était de 66 %.

Doit-on s'inquiéter de cette baisse ?

■ Exercice 3. Influence de la taille d'un échantillon

★★★★★ **A**

Corrigé page 111

En 2014, selon l'INSEE, la France comptait 51,45 % de femmes.

À des fins de sondages, un institut souhaite constituer un échantillon représentatif de la population concernant la répartition des genres (hommes/femmes).

- 1 Un premier échantillon de 500 personnes est constitué de 55 % de femmes.
Est-il représentatif de la France de la répartition des genres ?
- 2 Un second échantillon de 1 000 est constitué de 55 % de femmes ?
Est-il représentatif de la France de la répartition des genres ?

■ Exercice 4. Recherche de la taille d'un échantillon

★★★★☆ R
Corrigé page 112

Sur la planète Vailox, on estime à 78 % la proportion de personnes circulant à deux roues. Dans un village de n habitants de cette planète, le pourcentage de personnes circulant à deux roues est égal à 85 % sans que cela soit incohérent avec les statistiques planétaires.

Donnez la valeur maximale de n .

■ Exercice 5. Effet placebo

★★★★☆ R
Corrigé page 112

1 Dans un laboratoire pharmaceutique, on souhaite tester un médicament contre la maladie M. Pour cela, on constitue deux groupes :

- le groupe A est constitué de 120 patients atteints de la maladie M ;
- le groupe B est constitué de 150 patients atteints de la maladie M.

On donne au groupe A le médicament et à B un médicament placebo.

On constate que dans le groupe B, 68 % des malades guérissent et dans le groupe A, 72 % des malades guérissent.

Pouvez-vous dire si le médicament contre la maladie M semble efficace ?

2 On constitue maintenant deux autres groupes :

- le groupe A' est constitué de 900 patients atteints de la maladie M ;
- le groupe B' est constitué de 1 000 patients atteints de la maladie M.

Après avoir donné le médicament au groupe A' et un placebo au groupe B', on s'aperçoit que 65 % du groupe B' et 70 % du groupe A' guérissent.

Que peut-on conclure quant à l'efficacité éventuelle du médicament ?

■ Exercice 6. Fourchette de sondage

★★★★☆ R
Corrigé page 112

Au second tour d'une élection locale, un candidat souhaite savoir s'il a des chances de gagner. On admettra qu'en théorie, il a une chance sur deux qu'un électeur pris au hasard vote pour lui.

Il commande alors un sondage qui rapporte que sur 800 personnes, 387 ont l'intention de voter pour lui.

1 Donner l'intervalle de fluctuation correspondant à ce sondage.

2 Ce candidat a-t-il des chances de gagner cette élection ?

■ Corrigé de l'exercice 1.

1 La probabilité d'obtenir la face « 3 » avec un dé équilibré est $p = \frac{1}{6}$.

2 L'intervalle de fluctuation correspondant à $n = 50 \geq 25$ lancers et à $p = \frac{1}{6}$ ne peut pas se trouver à l'aide de la formule du cours car $p \notin [0, 2; 0, 8]$.

On ne peut donc pas, avec cette formule, vérifier si le dé d'Al est équilibré.

■ Corrigé de l'exercice 2. Ici, $n = 1\,000$ et $p = 0,69$ (7 %).

On a bien $n \geq 25$ et $0,2 \leq p \leq 0,8$. On peut donc utiliser la formule du cours pour déterminer un intervalle de fluctuation du pourcentage de clients ayant mis plus de 10 minutes pour traverser le Dédale :

$$I_f = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] = \left[0,69 - \frac{1}{\sqrt{1\,000}}; 0,69 + \frac{1}{\sqrt{1\,000}} \right] \approx [0,6584; 0,7216]$$

$f = 0,66 \in I_f$ donc la fluctuation du pourcentage ne semble pas anormale.

■ Corrigé de l'exercice 3.

1 Ici, $n = 500$ et $p = 0,5145$. On a bien $n \geq 25$ et $0,2 \leq p \leq 0,8$ donc on peut utiliser la formule du cours pour déterminer un intervalle de fluctuation :

$$I_f = \left[0,5145 - \frac{1}{\sqrt{500}}; 0,5145 + \frac{1}{\sqrt{500}} \right] \approx [0,4678; 0,5592]$$

$f = 0,55 \in I_f$ donc l'échantillon peut être considéré comme représentatif de la France concernant la répartition des genres (au risque de se tromper de 5 %).

2 Ici, $n = 1\,000$ et $p = 0,5145$. On a bien $n \geq 25$ et $0,2 \leq p \leq 0,8$ donc on peut utiliser la formule du cours pour déterminer un intervalle de fluctuation :

$$I_f = \left[0,5145 - \frac{1}{\sqrt{1\,000}}; 0,5145 + \frac{1}{\sqrt{1\,000}} \right] \approx [0,4829; 0,5461]$$

$f = 0,55 \notin I_f$ donc l'échantillon ne peut pas être considéré comme représentatif de la France concernant la répartition des genres (au risque de se tromper de 5 %).

■ **Corrigé de l'exercice 4.** Ici, $p = 0,78$. Donc $0,2 \leq p \leq 0,8$. On peut donc utiliser la formule du cours donnant un intervalle de fluctuation :

$$I_f = \left[0,78 - \frac{1}{\sqrt{n}} ; 0,78 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right].$$

De plus, $f = 0,85 \in I_f$ car cette fréquence est dite cohérente avec les statistiques planétaires. On peut donc déduire :

$$\begin{aligned} 0,85 &\leq 0,78 + \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \Leftrightarrow 0,85 - 0,78 &\leq \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \Leftrightarrow 0,07 &\leq \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{0,07} &\geq \sqrt{n} \\ \Leftrightarrow n &\leq \left(\frac{1}{0,07} \right)^2 \\ \Leftrightarrow n &\leq 204,08 \end{aligned}$$

Ainsi, il y a au maximum 204 habitants dans ce village.

■ **Corrigé de l'exercice 5.**

- 1** Dans cet exercice, la difficulté réside dans la recherche du bon n , p et f pour appliquer la formule du cours donnant un intervalle de fluctuation.

Dans la mesure où nous voulons tester l'efficacité du médicament, nous allons prendre $p = 0,68$ et $f = 0,72$, avec $n = 120$. On a bien $n \geq 25$ et $0,2 \leq p \leq 0,8$ donc :

$$I_f = \left[0,68 - \frac{1}{\sqrt{120}} ; 0,68 + \frac{1}{\sqrt{120}} \right] \approx [0,5888 ; 0,7712].$$

On voit alors que $f \in I_f$, ce qui signifie que le vrai médicament n'a pas une influence manifeste par rapport au placebo.

On ne peut donc pas affirmer que le médicament soit efficace, au risque de se tromper de 5%.

- 2** Ici, on prend $p = 0,65$, $f = 0,7$ et $n = 900$. On a alors :

$$I'_f = \left[0,65 - \frac{1}{\sqrt{900}} ; 0,65 + \frac{1}{\sqrt{900}} \right] \approx [0,62 ; 0,68].$$

On voit alors que $f \notin I'_f$, et même que $f > 0,68$ (borne supérieure de I'_f), ce qui signifie que le médicament donné au groupe A' semble avoir plus d'impact que le placebo.

On peut donc accepter l'hypothèse selon laquelle le médicament agit comme on le souhaite, au risque de se tromper de 5%.

■ **Corrigé de l'exercice 6.**

- 1** L'intervalle de fluctuation se calcule en prenant $n = 800$ et $p = 0,5$ (probabilité théorique qu'il gagne) :

$$I_f = \left[0,5 - \frac{1}{\sqrt{800}} ; 0,5 + \frac{1}{\sqrt{800}} \right] \approx [0,4647 ; 0,5353].$$

- 2** $f = \frac{387}{800} \approx 0,48375 \in I_f$. Par conséquent, ce candidat peut espérer remporter cette élection.

Algorithmique

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

- A Exercices d'application du cours
- R Exercices de réflexion

4 octobre 2015

■ Exercice 1. Laboratoire pharmaceutique

★★★★☆ A

Corrigé page 115

Un laboratoire produisant un sirop contre la fièvre à destination de nouveaux-nés fournit le protocole médical suivant : pour une température corporelle dépassant $38,5^{\circ}\text{C}$, donner 2 cuillères de sirop. Pour une température corporelle comprise entre $37,5^{\circ}\text{C}$ et $38,5^{\circ}\text{C}$, donner 1 cuillère de sirop.

On considère l'algorithme suivant :

Algorithme 1

Entrées

N et T sont deux nombres réels

Initialisation

Saisir T

Traitement

Affecter à N la valeur 0

Si $T > 38.5$ alors

Affecter à N la valeur

sinon

Si $T \geq 37.5$ alors

Affecter à N la valeur

Fin du Si

Fin du Si

Sortie

Afficher N

- 1 Quel est le rôle de cet algorithme ? Préciser à quoi correspondent les variables T et N.
- 2 Recopier et compléter l'algorithme sur votre copie.
- 3 Le cas où le nouveau-né n'a pas de fièvre (température corporelle inférieure à $37,5^{\circ}\text{C}$) est-il prévu dans l'algorithme ? (On pourra justifier la réponse en testant l'algorithme avec le nombre 37 en entrée.)

■ Exercice 2. Le site marchand

Durant tout le week-end, un site marchand propose une promotion pour toute commande d'un montant minimum de 20 €.

Si le montant de la commande est :

- Strictement inférieur à 100 €, une remise de 10 € est offerte.
- Entre 100 € compris et 200 € non compris, une remise de 25 € est offerte.
- Supérieur ou égal à 200 €, une remise de 20 % est offerte.

1 Calculer le prix à payer pour une commande d'un montant de 130 €, de 80 € et de 300 €.

2 On a commencé un algorithme qui automatise le calcul du prix à payer pour une commande dont on saisit le montant $M \geq 20$:

Algorithme 2: Algorithme de commande

Initialisation

Saisir une valeur $M \geq 20$

Traitement

Si **alors**

Afficher : « Le prix de la commande à payer est »

sinon

.....

Fin du Si

Sur la copie, recopier et compléter cet algorithme pour qu'il fonctionne correctement.

■ Corrigé de l'exercice 1.

1 Cet algorithme permet d'afficher le nombre N de cuillères de sirop à donner en fonction de la température T saisie.

2

Algorithme 3: Algorithme complété

Entrées

N et T sont deux nombres réels

Initialisation

Saisir T

Traitement

Affecter à N la valeur 0

Si $T > 38.5$ alors

Affecter à N la valeur 2

sinon

Si $T \geq 37.5$ alors

Affecter à N la valeur 1

Fin du Si

Fin du Si

Sortie

Afficher N

3 Le cas où $T < 37,5$ n'est pas pris en compte dans cet algorithme car si $T > 38,5$, on entre dans le premier test (on affecte à N la valeur 2), mais dans le « sinon », il y a un autre test qui affecte à N la valeur 1 si $T \geq 37,5$. Il faudrait ajouter un « sinon » à cet endroit :

Algorithme 4: Algorithme complété

Entrées

N et T sont deux nombres réels

Initialisation

Saisir T

Traitement

Affecter à N la valeur 0

Si $T > 38.5$ alors

Affecter à N la valeur 2

sinon

Si $T \geq 37.5$ alors

Affecter à N la valeur 1

sinon

Affecter à N la valeur 0

Fin du Si

Fin du Si

Sortie

Afficher N

■ Corrigé de l'exercice 2.

- 1** • Pour 130 €, le prix à payer est :

$$130 - 25 = 105 \text{ €} \quad \text{car } 100 \leq 130 < 200.$$

- Pour 80 €, le prix à payer est :

$$80 - 10 = 70 \text{ €} \quad \text{car } 80 < 100.$$

- Pour 300 €, le prix à payer est :

$$\left(1 - \frac{20}{100}\right) \times 300 = 0,8 \times 300 = 240 \text{ €} \quad \text{car } 300 \geq 200.$$

2

Algorithme 5: Algorithme complété

Initialisation

Saisir une valeur $M \geq 20$

Traitement

Si $M < 100$ alors

Afficher : « Le prix de la commande à payer est $M - 10$ € »

sinon

Si $M < 200$ alors

Afficher : « Le prix de la commande à payer est $M - 25$ € »

sinon

Afficher : « Le prix de la commande à payer est $0,8 * M$ € »

Fin du Si

Fin du Si