

作業二（第一部分）

繳交期限：4/12 中午 12 點

1. (5%) 假設 $v_1 = [1, 2, 3]$, $v_2 = [1, 1, -1]$, $v_3 = [5, -4, 1]$ 。請問這三個向量是否彼此正交？請說明你的答案。
2. (5%) 承上題，假設 $s = [12, -5, 4]$ ，且 $s = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3$ 。請問 a_1, a_2, a_3 為何？答案是否有唯一解？請利用內積計算答案（不得解聯立方程式）。
※DFT 的基本原理。
3. (5%) 承題 1，假設 $a_1 = -2, a_2 = 3, a_3 = 4$ ，且 $s = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3$ 。請問 s 為何？
※IDFT 的基本原理。
4. (5%) 令 $\omega = e^{\frac{i \cdot 2\pi}{4}}$ 。假設 $u_3(t) = e^{i \cdot 2\pi \cdot 3t}$ 。若 $b_3 = [u_3(\frac{0}{4}), u_3(\frac{1}{4}), u_3(\frac{2}{4}), u_3(\frac{3}{4})]$ ，請將 b_3 中的每一項用 $a + bi$ 的型式表示。Hint: 先找出每一項與 ω 的關係。
※我們會說 b_3 是 $u_3(t)$ 的 sample 結果（ b_3 是 u_3 對應的向量）。
5. (10%) 令 $u_j(t) = e^{i \cdot 2\pi j t}$ ，且 $b_j = [u_j(\frac{0}{4}), u_j(\frac{1}{4}), u_j(\frac{2}{4}), u_j(\frac{3}{4})]$ ，其中 $j = 0, 1, 2, 3$ 。
若 $a_0 = -2, a_1 = -3, a_2 = 2, a_3 = -1$ ，且 $s = a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ 。
請問 s 的每一項分別為何？請用 $a + bi$ 的型式表示你的答案。
※我們會說 s 是 $[a_0, a_1, a_2, a_3]$ 做完 IDFT 的結果。
6. (10%) 承題 5，假設 $s = [1, i, -5, -i]$ ，且 $s = a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ 。請問 a_0, a_1, a_2, a_3 為何？答案是否有唯一解？請利用內積計算答案（不得解聯立方程式）。
※我們會說 $[a_0, a_1, a_2, a_3]$ 是 s 做完 DFT 的結果。
7. (10%) 請觀看 [Differential equations - YouTube](#) 中的前五個影片，並寫心得。撰寫心得時可考慮以下方向：
 - a) Joseph Fourier 發明 Fourier transform 的動機。
 - b) (Continuous) Fourier transform 與 discrete Fourier transform 的相同之處。
 - c) (Continuous) Fourier transform 與 discrete Fourier transform 的相異之處。
 - d) 在這門課中，我們提過計算 discrete Fourier transform 的關鍵在於計算 s 與 c_j 的內積。在 (Continuous) Fourier transform 中，計算內積的相對應運算為何？