

实验一 多维连续信源与信道的信息量和多维连续信源的信道容量

一. 实验目的

1. 掌握信息的概念和信息量的计算方法;
2. 掌握信道容量的概念和信道容量的计算方法。

二. 实验原理

1. 自信息量

$$I(x) = -\log_2 p(x)$$

概率越小，信息量越大；概率越大，信息量越小

2. 熵

$$H(x) = -\sum_x p(x) \log_2 p(x)$$

平均自信息量，随机事件不确定度的度量

3. 信道容量：信道能够传输的最大信息量

$$C = \max_{p(x_i)} I(X; Y)$$

$$I(X; Y) = \sum_i \sum_j p(x_i) p(y_j | x_i) \log \frac{p(y_j | x_i)}{p(y_j)}$$

$$p(y_j) = \sum_{i=1}^n p(x_i) p(y_j | x_i)$$

使 $I(X; Y)$ 最大的信源概率分布 $P(X)$ 称为信道的最佳输入分布。

三. 实验内容与要求

- 多维连续信源信息量和信道容量的计算

四. 实验操作步骤

1. 研究特殊 N 维连续信号源的熵，包括均匀分布和无记忆高斯分布的情况。
2. 探讨 N 维连续信道的平均互信息量分析。
3. 对于无记忆高斯连续信道，研究其容量（香农公式），并利用 MATLAB 进行仿真验证。

五. 实验结果记录与分析

特殊 N 维连续信源的熵

1. 均匀分布的连续信源

1. 一维：

$$H_{c(X)} = \log_2(b - a)$$

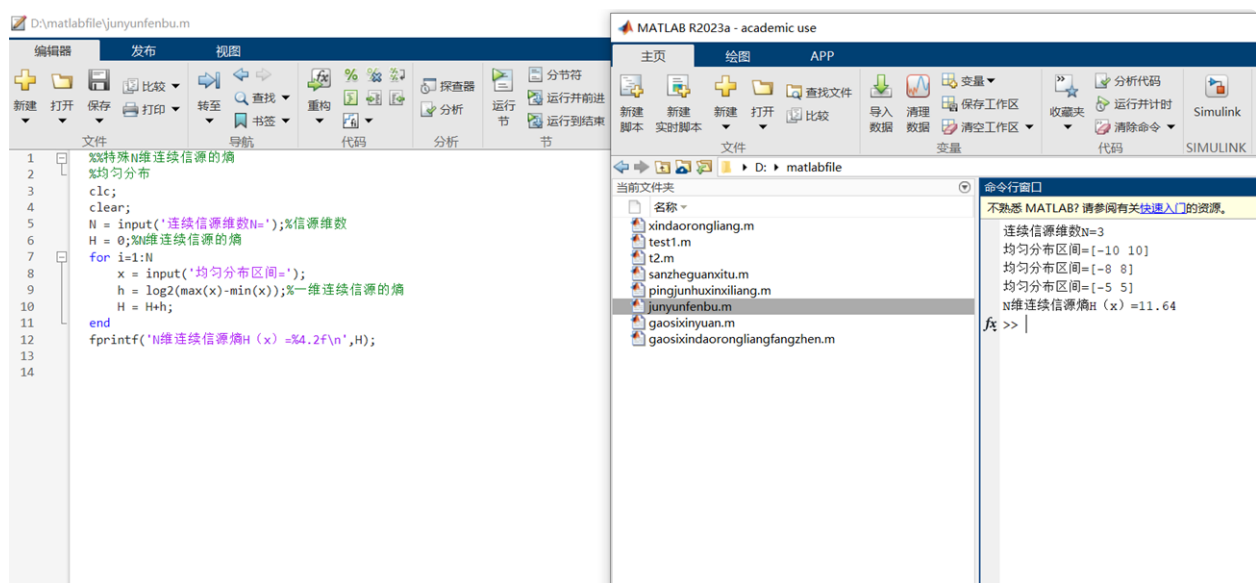
2. N 维：

若 N 维随机变量 $X = (X_1, X_2, \dots, X_N)$ 中各分量彼此统计独立，且分别在 $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_N, b_N]$ 的区域内均匀分布，则信源熵为：

$$H_{c(X)} = \sum_{i=1}^N \log_2(b_i - a_i)$$

因此，只要知道了每个随机变量可能取值范围（即各维度体积），我们就可以分别计算出这些在各自范围内均匀分布时的相对熵，并将它们相加求和。这样就能得到多维连续信源的相对熵。

总结：当所有变量的取值区间被限制为N维区域体积的情况下，均匀分布在N维连续信源上的相对熵达到最大值。这个最大值仅取决于每个随机变量可能取值范围（即各维度体积）。



2. 无记忆 N 维高斯连续信源的熵

设 N 维高斯连续信源是无记忆信源，即随机变量之间不相关，此时协方差矩阵 M 的行列式为 0，因此信源的相对熵为：

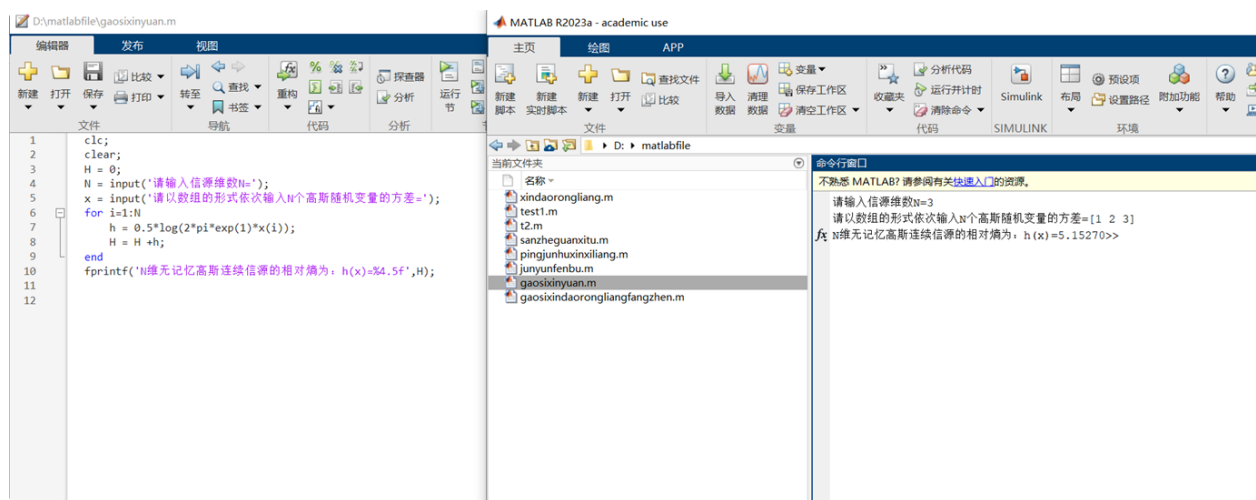
$$h(X) = h(X_1 X_2 X_3 \dots X_n) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \ln[2\pi e \sigma_i^2]$$

上式表明，N 维高斯信源是由 N 个相互统计独立的、方差为 σ_i^2 的高斯连续随机变量组成的 N 维无记忆高斯信源。

单维连续信源的最大相对熵定理表明，在一定限制条件下，相对熵存在最大值。对于 N 维连续信源，最大相对熵定理同样成立。

结论：

1. 当受限于协方差矩阵时，在N维连续高斯分布中，信息熵达到了最大化。这个最大值只依赖于协方差矩阵。
2. 在随机变量的方差限制下，无记忆的高斯信源的信息熵达到最大值。这个最大值仅取决于该变量的方差。

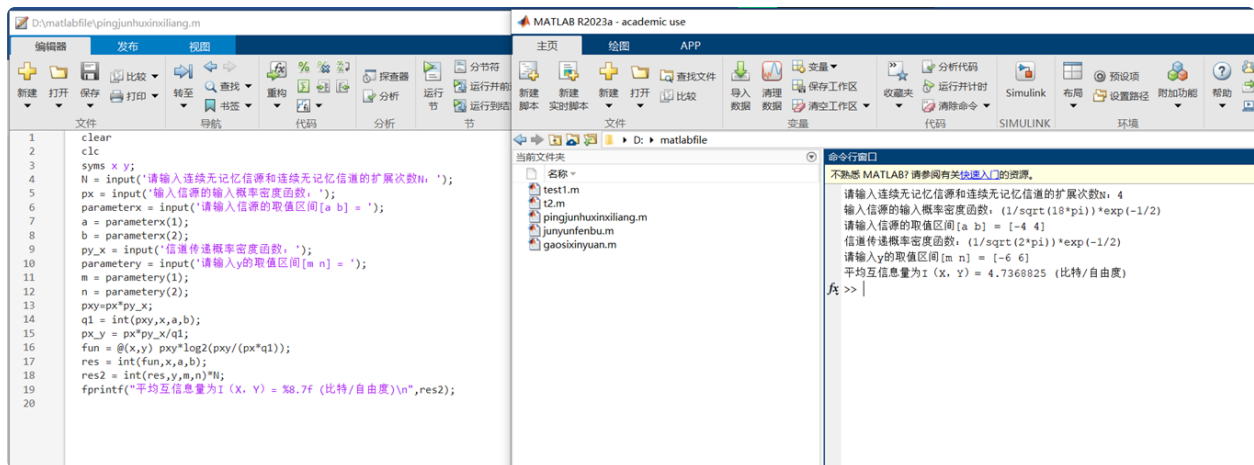


N 维连续信道的平均互信息量

X 与 Y 的平均互信息量定义为

$$I(X; Y) = N * \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P_{xy}(XY) \frac{P_{x|y}(x|y)}{P_x(x)} dx dy$$

实验结果：例如，已知 4 维无记忆连续信道的输入随机变量 X 的概率密度函数为 $p(x)$ 及其输入区间。信道的传递概率密度函数及信道输出随机变量 Y 的输出区间都给出。



信道容量

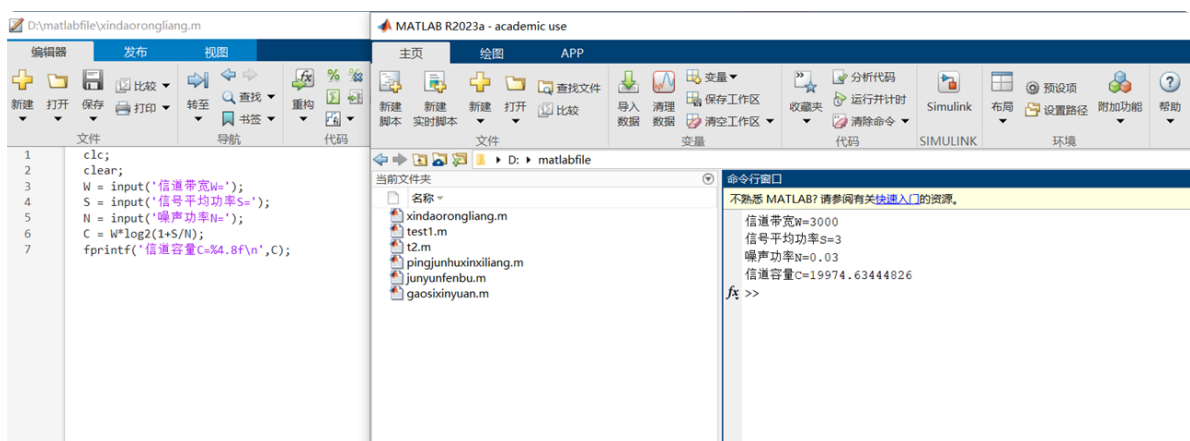
1. 信道容量公式

$$C = W * \log_2(1 + \frac{S}{N})$$

香农公式是计算多维连续信道及波形信道的信道容量的最重要、最简洁的公式。对于限带高斯加性白噪声加性信道而言，只要知道带宽 F 、输入信号的平均功率及噪声的平均功率或平均功率谱密度（或信噪比）就能利用香农公式计算出此信道的最大信息传输率即信道容量。对于有色高斯加性信道，原则上只要知道输入信号的平均功率和有色噪声的平均功率谱密度，就能计算出信道容量，但一般情况下其计算十分复杂。因此在同样限带、限平均功率的条件下，可以用香农公式计算的信道容量来作为真实信道容量的下限值。

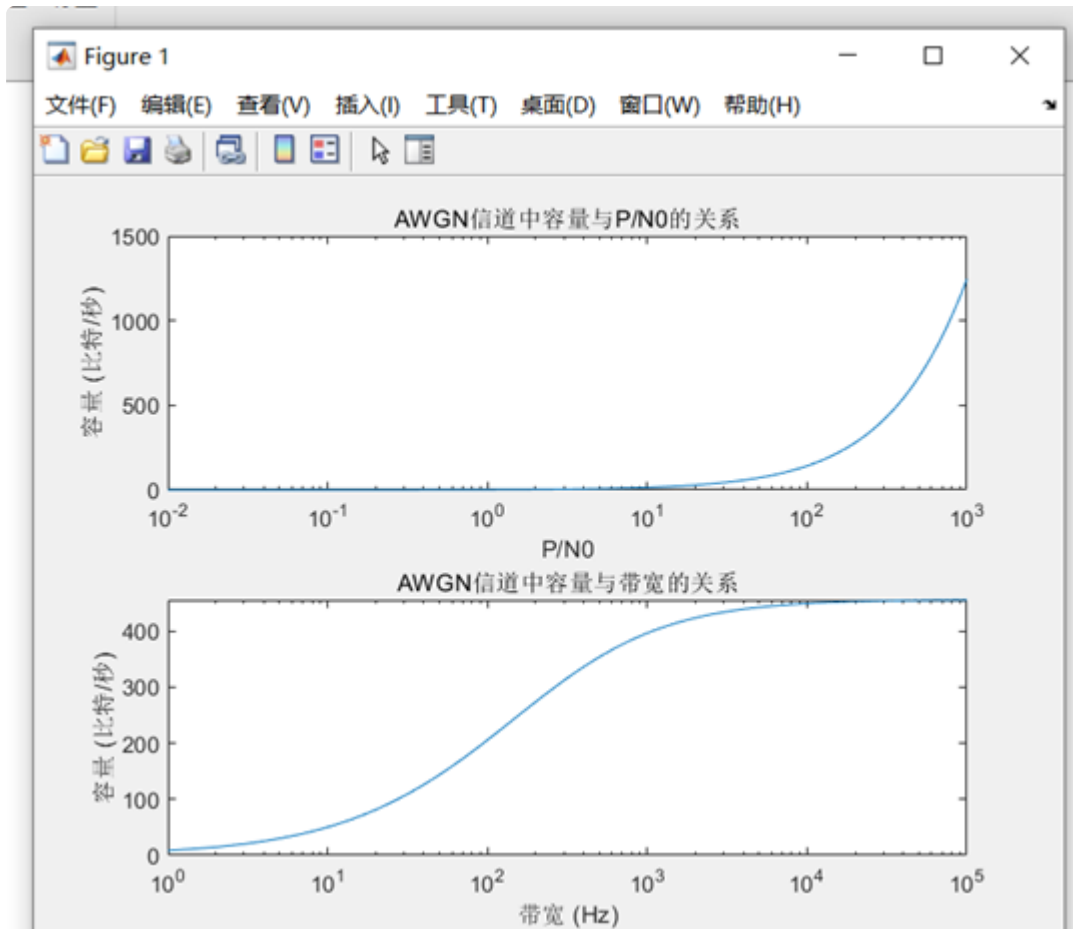
2. 仿真

设高斯白噪声加性信道(AWGN 信道)的通频带宽度为 $3000Hz$ ，输入信号的平均功率为 $3w$ ，噪声平均功率为 $0.03W$ ，此时的信噪功率比为 100 即 $20dB$ 则该信道的最大信息传输率即信道容量的计算结果如图所示。



从下图可看出提高信噪比能增加信道的信道容量，当噪声功率趋于 0 时信道容量趋于无穷，这意味着无干扰连续信道的信道容量为无穷大。从中可看出增加带宽可增加

信道容量，但并不能无限制地使信道容量增大。



把这三者结合起来，可以得到如下图所示的带宽、信噪比、信道容量三者的关系图。从图中可以看出，当信道容量一定时带宽与信噪比之间可以互换。

