Analysis3-Outline

YangKai

2022 年 9 月 14 日

目录

1 复习: 多元函数的可积性

1.1 外测度和测度

定义 (外测度) $\mu^*: 2^X \mapsto [0, +\infty]$ 满足:

1. $\mu^*() = 0$
2. $A \subseteq B, \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$
3. $\mu^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(E_j)$

则称 μ^* 为 X 上的外测度, 由此可引出:

定义 (Lebesgue 外测度) $m^*(E) = \inf\{\sum_{k\geq 1} |I_k| \big| E \subseteq \bigcup_{k\geq 1} I_k \text{且} I_k \text{是有界开区间}\}$

定义 (CY 条件) 假设 $\mu^* x$ 是 X 上的外测度, $E \subseteq X$, 若:

$$\forall T \subseteq X, \mu * (T) = \mu^*(T \cap E) + \mu^*(T \cap E^c) \tag{1}$$

则称 E 满足 CY 条件

定理 (CY 定理) μ^* 是 X 上的外测度,定义 $\mathcal{M} = \{E \subseteq X \big| E \text{满足} \mu^* \text{的 CY 条件}\}$, 则:

1. $\mathcal{M}$ 是 $\sigma-$ 代数
2. μ^* 在 $\mathcal{M}$ 上满足可数可加性 (不交)
3. $\forall E \subseteq X, \mu^*(E) = 0$ 则 $E \in \mathcal{M}$

定义 (测度空间) $(X, \mathcal{M}, \mu), \mu = \mu^*\big|_{\mathcal{M}}$

1.2 Lebesgue 测度的性质

定理 ($\mathcal{L}-$ 可测集的特征)(结构性定理) $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, m)$ 为 Lebesgue 测度空间

1. (内外正则性) $\forall \varepsilon > 0, E \subseteq \mathcal{M}, \exists \text{开} G, \text{闭} F$ 满足 $E \subseteq E \subseteq G$ 且 $m(E \backslash F), m(G \backslash E) < \varepsilon$
2. (紧集逼近) $\forall E \subseteq \mathcal{M}, \exists$ 紧集列 $\{K_j\}_{j=1}$ 以及 $A \subseteq \mathbb{R}^n$ 满足:

- $K_j \subseteq K_{j+1}$
- $E = (\bigcup_{j\geq 1} K_j) \bigcup A$
- $m(Z) = 0$

且 $m(E) = \lim_{j\to\infty} m(K_j)$

定理 (Lebesgue 测度的平移伸缩性)

$$\begin{aligned} m(\lambda E + h) &= |\lambda|^n m(E) \\ m(A(E)) &= |\det A| m(E) \end{aligned} \tag{2}$$

注：约定 $0 \cdot \infty = 0$

注 2：第二条的证明需要用到结构性定理 (复习!)

1.3 可测函数

定义 (可测函数) $(X, \mathcal{J}_X), (Y, \mathcal{J}_Y)$，则：

$$\begin{aligned} &f \in L(X, Y) \\ \Leftrightarrow &\forall B \in \mathcal{J}_Y, f^{-1}(B) \in \mathcal{J}_X \\ \Leftrightarrow &\forall B \in \mathcal{B}(Y), f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(X) \end{aligned} \tag{3}$$

定义 (广义可测函数) 把值域扩展到 $[-\infty, +\infty]$

定理 (简单函数逼近定理) $(X, \mathcal{M})$ 可测空间，$E \in \mathcal{M}, f \in \mathcal{L}^+(E)$ 则：

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k 1_{E_k}(x), \{c_k\} \geq 0, \{E_k\} \in \mathcal{M} \tag{4}$$

1.4 可测函数的积分

- f 为简单函数
- f 为其他复杂函数：$\int_E f \mathrm{d}\mu =: \sup\{\int_E \phi \mathrm{d}\mu \big| 0 \leq \phi \leq f, \phi \in S^+(E)\}$

注：

- $f = f^+ - f^-$
- $f \in L^1(E) \Leftrightarrow |f| \in L^1(E)$

1.4.1　积分与换序

定理 (单调收敛)　$0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \cdots, f_n \to f, \mu.a.e$ 则:

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n \mathrm{d}\mu = \int_E f \mathrm{d}\mu \tag{5}$$

定理 (Fatou 引理)　$0 \leq f_n, f_n \to f, \mu.a.e$ 则:

$$\liminf_{n\to\infty}\int_E f_n \mathrm{d}\mu \geq \int_E f \mathrm{d}\mu \tag{6}$$

定理 (LDC 控制收敛定理)　若满足:

1. $f_n \to f, \mu.a.e$
2. $\exists g \in L^1(E), |f_n| \leq g$

   则:

- $\lim_{n\to\infty \|f_n - f\|_{L^1(E)}} = 0$
- $\lim_{n\to\infty}\int_R f_n \mathrm{d}\mu = \int_E f \mathrm{d}\mu$

1.5　$\mathbb{R}^n$ 上的 Lebgesgue 积分的计算

定理 (Lebesgue 积分下的 Newton-Leibnitz)　Newton-Leibnitz 公式, $\forall x \in [a, b]$:

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\mathrm{d}t \tag{7}$$

成立条件:

- f 绝对连续
- $f \in C[a, b]$ 且可微, $f' \in L^1[a, b]$

定义 (绝对连续函数)

$$\sum_{i=1}^{n}(\beta_i - \alpha_i) < \delta \Rightarrow \int_{\bigcup_{i=1}^{n}(\alpha_i, \beta_i)} |f'|\mathrm{d}x < \epsilon \tag{8}$$

1.5.1 Fubini 定理

定理 (形式 1)

$$\begin{aligned}&\iint_{\mathbb{R}^{p+q}} 1_E(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\=&\int_{\mathbb{R}^q}(\int_{\mathbb{R}^p} 1_E(x,y)\mathrm{d}x)\mathrm{d}y\\=&\int_{\mathbb{R}^p}(\int_{\mathbb{R}^q} 1_E(x,y)\mathrm{d}y)\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{9}$$

定理 (形式 2) 若 $f \in \mathcal{L}^+(X\times Y)$ *or* $f \in L'(X\times Y)$

$$\begin{aligned}&\iint_{X\times Y} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\=&\int_{Y}(\int_{X} f(x,y)\mathrm{d}x)\mathrm{d}y\\=&\int_{X}(\int_{Y} f(x,y)\mathrm{d}y)\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{10}$$

定理 ($f(x,y)$ 的可测性判别) $f: X\times Y \mapsto \mathbb{R}$ 满足:

1. $X \in \mathcal{M}_p, Y \in \mathcal{M}_q$
2. $\forall x \in X, y \mapsto f(x,y)$ 连续
3. $\forall y \in Y, x \mapsto f(x,y)$ 可测

则 f 在 $X\times Y$ 上可测

例子 $E = \{(x,y)\big|\varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$, φ, ψ 是 $\mathbb{R}^{n-1}$ 上的可测函数, 则 $\forall f \in L'(E)$ *or* $f \in \mathcal{L}^+(E)$ 有:

$$\iint_E f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_X(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\mathrm{d}y)\mathrm{d}x \tag{11}$$

1.5.2 积分换元公式

定理 (积分换元公式) 开集 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n, \varphi: \Omega \mapsto \mathbb{R}^n$ 是 C' 单射, $E \subseteq \Omega$ 可测, 则 $\forall f \in L'(E)$ *or* $f \in \mathcal{L}^+(E)$ 有:

$$\int_{\varphi(E)} f(y)\mathrm{d}y = \int_E (f\circ\varphi)(x)|\det \mathrm{D}\varphi(x)|\mathrm{d}x \tag{12}$$

证明 (复习!)

定理 (闭区域上的积分换元公式) $\bar{\Omega} \subseteq V \subseteq \mathbb{R}^n$ 其中 V 为开集满足:

1. $m(\partial\Omega) = 0$
2. $\varphi : \Omega \mapsto \mathbb{R}^n$ 是 C' 单射
3. $\varphi : V \mapsto \mathbb{R}^n$ 是 C' 函数

证明:

$$\begin{aligned} &\int_{\varphi(\bar{\Omega})} f(y)\mathrm{d}y \\ =&\int_{\varphi(\Omega)} f(y)\mathrm{d}y \\ =&\int_{\Omega} (f \circ \varphi)(x)|\det \mathrm{D}\varphi(x)|\mathrm{d}x \\ =&\int_{\bar{\Omega}} (f \circ \varphi)(x)|\det \mathrm{D}\varphi(x)|\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{13}$$

条件 3: $m(\partial\Omega) = m(\varphi(\partial\Omega)) = 0$

1.5.3 Fubini 定理的应用

球极变换 记 $E_o = [0, +\infty[\times [0, \pi]^{n-2} \times [0, 2\pi]$

$$\Psi : E_o \mapsto \mathbb{R}^n \tag{14}$$

特例:

$$\Psi(r, \theta_1, \cdots, \theta_{n-1}) = x \begin{cases} x_1 = r\sin(\theta_1)\cdots\sin(\theta_{n-1}) \\ x_2 = r\sin(\theta_1)\cdots\cos(\theta_{n-1}) \\ \cdots \\ x_{n-1} = r\sin(\theta_1)\cos(\theta_2) \\ x_n = r\cos(\theta_1) \end{cases} \tag{15}$$

注意到:

$$|\det \mathrm{D}\Psi| = r^{n-1}\sin^{n-1}(\theta_1)\sin^{n-2}(\theta_2)\cdots\sin(\theta_{n-1}) \tag{16}$$

命题 (球面换元公式) $f \in \mathcal{L}^+(\mathbb{R}^n)$ *or* $f \in L'(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}x = \int_{E_o} (f \circ \Psi)(r, \theta_1, \cdots, \theta_{n-1}) r^{n-1}\sin^{n-1}(\theta_1)\sin^{n-2}(\theta_2)\cdots\sin(\theta_{n-1})\mathrm{d}\theta_1\cdots\mathrm{d}\theta_{n-1} \tag{17}$$

证明:考虑使用闭区域积分换元公式,开集 $E_\epsilon =]-\epsilon, +\infty[\times]-\epsilon, \pi+\epsilon[^{n-2}\times]-\epsilon, 2\pi+\epsilon[$, Ψ 在 E_ϵ 上是 C' 函数,从而有 $m_n(\partial E_o) = m_n(\Psi(\partial E_o)) = 0$

命题 (球面测度与球面积分) 记 $\Phi(\theta_1, \cdots, \theta_{n-1}) = \Psi(1, \theta_1, \cdots, \theta_{n-1}), E'_o = [0, \pi]^{n-2} \times [0, 2\pi]$ 则:考虑应该存在的诱导关系:

$$E \in \mathcal{M}(\mathbb{S}^{n-1}) \Leftrightarrow \Phi^{-1}(E) \in \mathcal{M}(E'_o) \tag{18}$$

则可以定义:

$$\begin{aligned} &\mathcal{M}(\mathbb{S}^{n-1}) := \{E \subseteq \mathbb{S}^{n-1} \big| \Phi^{-1}(E) \in \mathcal{M}(E'_o)\} \\ &\sigma(E) = \int_{\Phi^{-1}(E)} \sin^{n-1}(\theta_1)\sin^{n-2}(\theta_2)\cdots\sin(\theta_{n-1})\mathrm{d}\theta_1\cdots\mathrm{d}\theta_{n-1} \end{aligned} \tag{19}$$

则有结论:

1. $(\mathcal{M}(\mathbb{S}^{n-1}), \sigma)$ 是一个完备的测度空间
2. $\sigma(\mathbb{S}^{n-1}) = \int_{E'_o} \sin^{n-1}(\theta_1)\sin^{n-2}(\theta_2)\cdots\sin(\theta_{n-1})\mathrm{d}\theta_1\cdots\mathrm{d}\theta_{n-1}$
3. f 在 $(\mathcal{M}(\mathbb{S}^{n-1}), \sigma)$ 上可测 $\Leftrightarrow f \circ \Phi$ 在 E'_o 上可测
4. $\forall f \in \mathcal{L}^+(\mathbb{S}^{n-1})$ *or* $f \in L'(\mathbb{S}^{n-1})$ 有:

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(w)\mathrm{d}\sigma(w) = \int_{E'_o} (f\circ\Phi)(\theta_1, \cdots, \theta_{n-1})\sin^{n-1}(\theta_1)\sin^{n-2}(\theta_2)\cdots\sin(\theta_{n-1})\mathrm{d}\theta_1\cdots\mathrm{d}\theta_{n-1} \tag{20}$$

结论 4 只证明对简单函数成立:带入 $f = 1_E$

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{S}^{n-1}} 1_E(w)\mathrm{d}\sigma(w) \\ =&\sigma(E) \\ =&\int_{\Phi^{-1}(E)} \sin^{n-1}(\theta_1)\sin^{n-2}(\theta_2)\cdots\sin(\theta_{n-1})\mathrm{d}\theta_1\cdots\mathrm{d}\theta_{n-1} \\ =&\int_{E'_o} 1_{\Phi^{-1}E}(\theta_1, \cdots, \theta_{n-1})\sin^{n-1}(\theta_1)\sin^{n-2}(\theta_2)\cdots\sin(\theta_{n-1})\mathrm{d}\theta_1\cdots\mathrm{d}\theta_{n-1} \\ =&\int_{E'_o} (1_E \circ \Phi)(\theta_1, \cdots, \theta_{n-1})\sin^{n-1}(\theta_1)\sin^{n-2}(\theta_2)\cdots\sin(\theta_{n-1})\mathrm{d}\theta_1\cdots\mathrm{d}\theta_{n-1} \end{aligned} \tag{21}$$

1.5.4 类似题目的解题技巧

验证积分换元 $\Rightarrow$ 验证简单函数
$L'(\mathbb{S}^{n-1}) \Rightarrow$ 非负可测 $\mathcal{L}^{+}(\mathbb{S}^{n-1}) \Rightarrow$ 简单函数 $1_E(w)$

定理 $\forall f \in \mathcal{L}^{+}(\mathbb{R}^n)$ *or* $f \in L'(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}x\\ =&\int_{\mathbb{S}^{n-1}}(\int_0^{+\infty} r^{n-1}f(r,w)\mathrm{d}r)\mathrm{d}\sigma(w)\\ =&\int_0^{+\infty} r^{n-1}(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(r,w)\mathrm{d}\sigma(w))\mathrm{d}r\end{aligned} \tag{22}$$

应用 1

$$\iint_{a\le|x|\le b} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b r^{n-1}(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(r,w)\mathrm{d}\sigma(w))\mathrm{d}r \tag{23}$$

特别的，当 $f(x)=f(|x|)$ 时:

$$\iint_{a\le|x|\le b} f(x)\mathrm{d}x = \sigma(\mathbb{S}^{n-1})\int_a^b r^{n-1}f(r)\mathrm{d}r \tag{24}$$

应用 2 证明 $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x=(2\pi)^{\frac{1}{2}}$:

$$\begin{aligned}&(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x)^2\\ =&\iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} e^{-\frac{x_1^2+x_2^2}{2}}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\\ =&\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{|x|^2}{2}}\mathrm{d}x\\ =&\sigma(\mathbb{S}^1)\int_0^{+\infty} re^{-\frac{r^2}{2}}\mathrm{d}r\\ =&2\pi\end{aligned} \tag{25}$$

应用 3

- $\sigma(\mathbb{S}^{n-1})=?$
- $m(B_1^n)=?, B_1^n=\{|x|\le 1, x\in\mathbb{R}^n\}$

考察 $(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x)^n$ 可以得到：

$$\begin{aligned}&(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x)^n\\ =&(2\pi)^{\frac{n}{2}}\\ =&\sigma(\mathbb{S}^{n-1})\int_0^{+\infty} r^{n-1}e^{-\frac{r^2}{2}}\mathrm{d}r\end{aligned}\tag{26}$$

令 $t=\frac{r^2}{2}$ 则：

$$\begin{aligned}(2\pi)^{\frac{n}{2}}=&\sigma(\mathbb{S}^{n-1})\int_0^{+\infty}(2t)^{\frac{n}{2}-1}e^{-t}\mathrm{d}t\\ =&\sigma(\mathbb{S}^{n-1})2^{\frac{n}{2}-1}\int_0^{+\infty} r^{\frac{n}{2}-1}e^{-r}\mathrm{d}r\end{aligned}\tag{27}$$

记 Gamma 函数 $P(s)=\int_0^{\infty} t^{s-1}e^{-t}\mathrm{d}t$，满足性质：

- $P(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}, P(1)=1$
- $P(s+1)=sP(s)$

则可以得到：

$$\sigma(\mathbb{S}^{n-1})=\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{P(\frac{n}{2})}=\frac{n\pi^{\frac{n}{2}}}{P(\frac{n}{2}+1)}\tag{28}$$

且：

$$m(B_1^n)=\int_{|x|\le 1}1dx=\sigma(\mathbb{S}^{n-1})\int_0^1 r^{n-1}\mathrm{d}r=\frac{\sigma(\mathbb{S}^{n-1})}{n},\tag{29}$$

注：需要证明边界点零测 $B(0,R)=R\cdot B(0,1)\Rightarrow m(B(0,R))=R^n m(B(0,1))$ 即 $m(\partial B(0,R))=0$

命题（等经不等式）