Tarefa 5

Kaio Henrique de Sousa

19 de novembro de 2020

Questão 2

$$\int_{-5}^{5} xsen(x)dx = \left[-xcos(x) - \int -cos(x)dx\right]_{-5}^{5} \qquad \text{[por partes com u:=x e dv:=sen(x)]}$$
$$= [-xcos(x) + sen(x)]_{-5}^{5}$$
$$= -5cos(5) + sen(5) - (5cos(-5) + sen(-5))$$
$$= -5cos(5) + sen(5) - 5cos(-5) - sen(-5)) \qquad \text{[cos é par e sen é ímpar]}$$
$$= 2sen(5) - 10cos(x)$$
$$= -4.75447040\ldots$$

Questão 3

Entendo primeiro o que foi feito na implementação solicitada na questão 1. As regras compostas do trapezio, 1/3 de Simpson e 3/8 de Simpson, foram implementadas partindo das fórmulas das regras com apenas um intervalo, em que cada regra se aproxima do valor da integral. Para se aproximar ainda mais da solução verdadeira da integral, dividimos o intervalo original em várias partes e somamos o valor dado por uma regra em cada intervalo. Temos as seguintes regras compostas:

$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n)$ n intervalos

$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$ n subintervalos

$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + 2y_3 + 3y_4 + 3y_5 + 2y_6 \cdots + 2y_{n-3} + 3y_{n-2} + 3y_{n-1} + y_n)$ n subintervalos

que são as regras do trapézio, 1/3 de Simpson e 3/8 de Simpson, respectivamente. Note que há um padrão nas parcelas de cada soma, esses padrões foram utilizados para implementar a regras de forma simples.

Abaixo, observamos que para 7 pontos a regra 3/8 de Simpson foi a que menos se aproximou do valor real para a integral dada na questão 1, mas conforme aumentamos a quantidade de pontos, as regras 1/3 de Simpson e 3/8 de Simpson se aproximam mais rápido do valor verdadeiro.

```
7 pontos
        trapezio:  -4.578413222188408
        simpson 1/3:  -4.46389002127735
        simpson 3/8:  -2.1540765166396514
13 pontos
        trapezio:  -4.703331264825169
        simpson 1/3:  -4.744970612370755
        simpson 3/8:  -4.728041218929594
19 pontos
        trapezio:  -4.731231973599932
        simpson 1/3:  -4.752788427885975
        simpson 3/8:  -4.750334317526373
25 pontos
        trapezio:  -4.741301251562068
        simpson 1/3:  -4.7539579138077
        simpson 3/8:  -4.753259377542555
31 pontos
        trapezio:  -4.7460135672149235
        simpson 1/3:  -4.754264100541456
        simpson 3/8:  -4.7539915618041135
37 pontos
        trapezio:  -4.748586876983226
        simpson 1/3:  -4.754371844777659
        simpson 3/8:  -4.754243828502986
```

Figura 1: Resultados das regras para a mesma quantidade de pontos

Questão 4

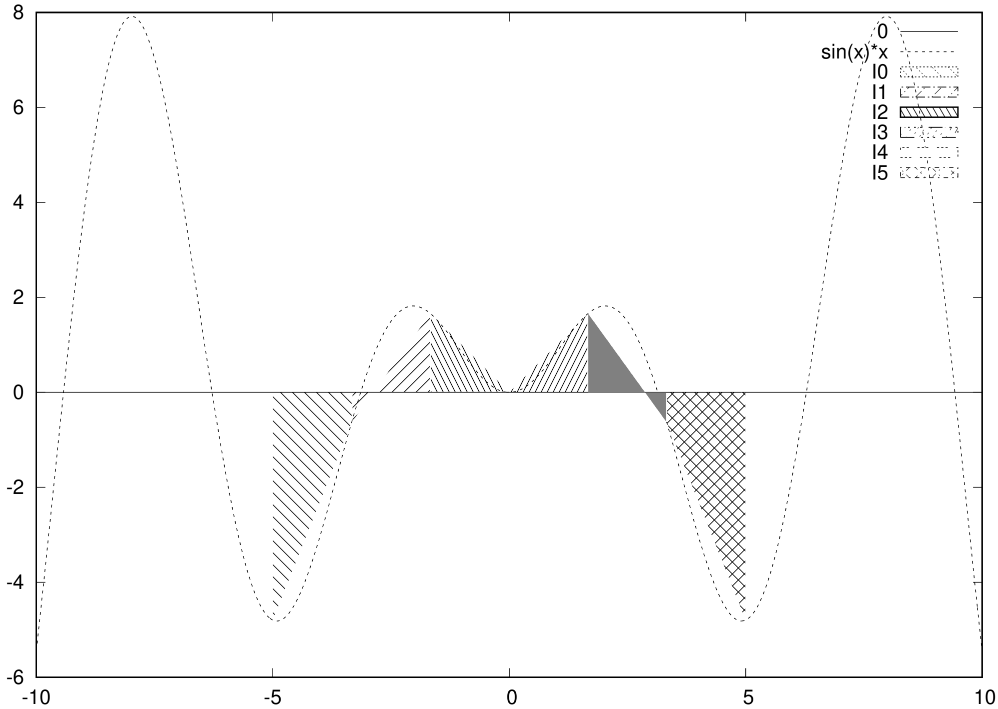

Figura 2: Regra composta do trapézio com 6 intervalos

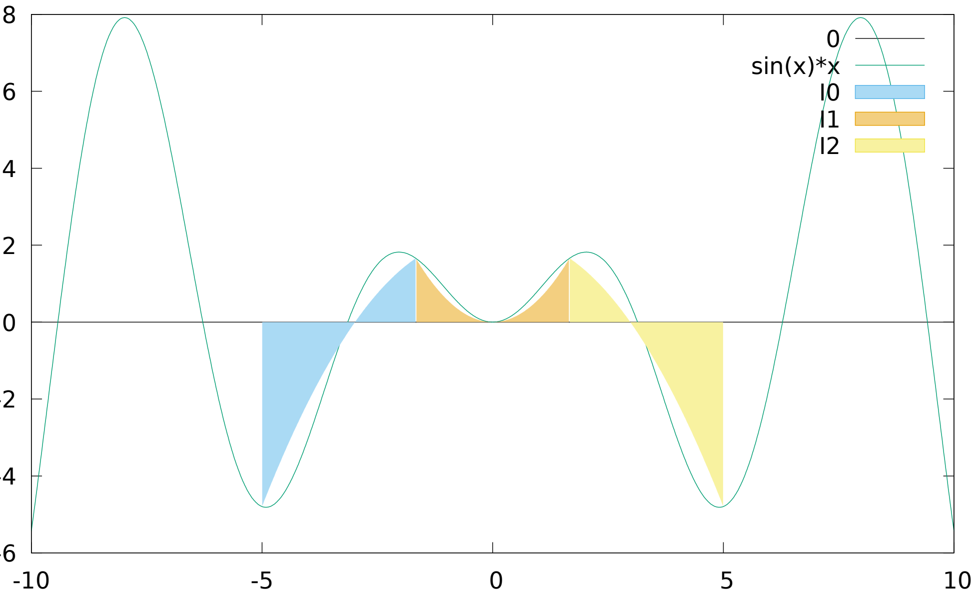

Figura 3: Regra composta 1/3 de Simpson com 3 intervalos

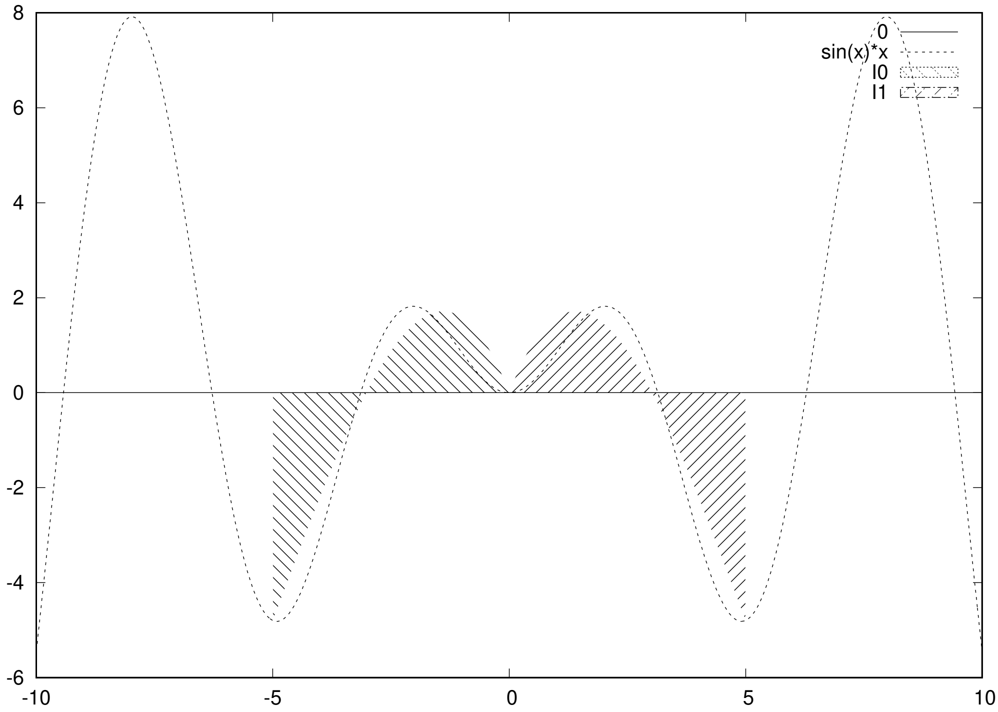

Figura 4: Regra composta 3/8 de Simpson com 2 intervalos

Questão 5

Usarei a regra do trapézio para calcular todas as integrais a seguir, pois nesse caso a integral será exata usando a regra do trapézio.

$$\begin{aligned}\int_0^c v(t)dt &= \frac{c(v+2v)}{2} \\ &= \frac{3vc}{2} \end{aligned} \tag{1}$$

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t v(t)dt = \frac{3vc}{4} \\
&\implies \frac{t(v(0)+v(t))}{2} = \frac{3vc}{4} \\
&\implies \frac{tv + tv(t)}{2} = \frac{3vc}{4} \\
&\implies tv + tv(t) = \frac{3vc}{2} \\
&\implies v(t) = \frac{3vc - 2tv}{2t} \qquad (2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t v(t)dt = \int_t^c v(t)dt \\
&\implies \frac{t(v(0)+v(t))}{2} = \frac{(c-t)(v(c)+v(t))}{2} \\
&\implies t(v+v(t)) = (c-t)(2v+v(t)) \\
&\implies tv + tv(t) = 2vc + v(t)c - 2tv - tv(t) \\
&\implies 3tv + 2tv(t) = 2vc + v(t)c \\
&\implies 3tv + 3vc - 2tv = 2vc \cdot \frac{3vc^2 - 2tvc}{2t} \qquad \text{Pela equação (2)} \\
&\implies tv = -vc \cdot \frac{3vc^2 - 2tvc}{2t} \\
&\implies tv = \frac{-2tvc + 3vc^2 - 2tvc}{2t} \\
&\implies 2vt^2 = -4tvc + 3vc^2 \\
&\implies 2vt^2 + 4tvc - 3vc^2 = 0 \\
&\implies 2t^2 + 4tc - 3c^2 = 0 \\
&\implies t = \frac{-4c \pm \sqrt{16c - 4 \cdot 2(-3c^2)}}{4} \\
&\implies t = \frac{-4c \pm \sqrt{40c^2}}{4} \\
&\implies t = \frac{-4c + \sqrt{40c^2}}{4} \qquad \text{t é positivo pelo contexto.} \qquad (3)
\end{aligned}
$$