Tarefa 4

Kaio Henrique de Sousa

11 de outubro de 2020

Questão 1

Considere os pontos (0, 1), (2, 3), (4, -1) e (7, 4).

a) Interpolação polinomial de Newton

Primeiramente, faremos os cálculos das diferenças divididas:

xi	yi	f[a, b]	f[a, b, c]	f[a, b, c, d]
0	1			
		1		
2	3		$\frac{-3}{4}$	
		-2		$\frac{89}{420}$
4	-1		$\frac{11}{15}$	
		$\frac{5}{3}$		
7	4			

Agora, calculamos utilizando a interpolação de Newton,

$$
\begin{aligned}
P_3(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\
&\quad + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\
&= 1 + x + (\frac{-3}{4})(x - 0)(x - 2) + \frac{89}{420}(x - 0)(x - 2)(x - 4) \\
&= 1 + x + \frac{-3x^2 + 6x}{4} + \frac{89}{420}(x^3 - 6x^2 + 8x) \\
&= \frac{89x^3 - 849x^2 + 1762x + 420}{420}
\end{aligned}
$$

b) Interpolação polinomial de Lagrange

Para utilizar a interpolação de Lagrange, precisamos calcular os $l_0(x), l_1(x), l_2(x), l_3(x)$, calculamos:

$$\begin{aligned}
l_0(x) &= \frac{x-2}{0-2}\frac{x-4}{0-4}\frac{x-7}{0-7} = -\frac{x^3-13x^2+50x-56}{56} \\
l_1(x) &= \frac{x-0}{2-0}\frac{x-4}{2-4}\frac{x-7}{2-7} = \frac{x^3-11x^2+28x}{20} \\
l_2(x) &= \frac{x-0}{4-0}\frac{x-2}{4-2}\frac{x-7}{4-7} = -\frac{x^3-9x^2+14x}{24} \\
l_3(x) &= \frac{x-0}{7-0}\frac{x-2}{7-2}\frac{x-4}{7-4} = \frac{x^3-6x^2+8x}{105}
\end{aligned}$$

Substituindo agora na fórmula do polinômio, temos

$$\begin{aligned}
P_3(x) &= f(x_0)l_0(x) + f(x_1)l_1(x) + f(x_2)l_2(x) + f(x_3)l_3(x) \\
&= \frac{-x^3+13x^2-50x+56}{56} + \frac{3x^3-33x^2+84x}{20} + \frac{x^3-9x^2+14x}{24} + \frac{4x^3-24x^2+32x}{105} \\
&= \frac{178x^3-1698x^2+3524x+840}{840} \\
&= \frac{89x^3-849x^2+1762x+420}{420}
\end{aligned}$$

c) Interpolação linear por partes

Como a interpolação entre dois pontos é uma reta, podemos utilizar a equação geral da reta para calcular a função para cada intervalo de pontos

$$y = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0) + y_0.$$

Façamos o cálculo da interpolação para os pontos $(0,1),(2,3)$,

$$\begin{aligned}
y &= \frac{3-1}{2-0}(x-0) + 1 \\
&= x + 1
\end{aligned}$$

Agora para os pontos $(2,3),(4,-1)$,

$$\begin{aligned}
y &= \frac{-1-3}{4-2}(x-2) + 4 \\
&= -2x + 7
\end{aligned}$$

E para os pontos $(4,-1),(7,4)$

$$\begin{aligned} y &= \frac{4+1}{7-4}(x-4)-1 \\ &= \frac{5}{3}x-\frac{23}{3} \end{aligned}$$

Obtemos a função p(x), definida por

$$\text{p(x)} = \begin{cases} x+1, & 0 \le x < 2 \\ -2x+7, & 2 \le x < 4 \\ \frac{5}{3}x-\frac{23}{3}, & 4 \le x \le 7 \end{cases}$$

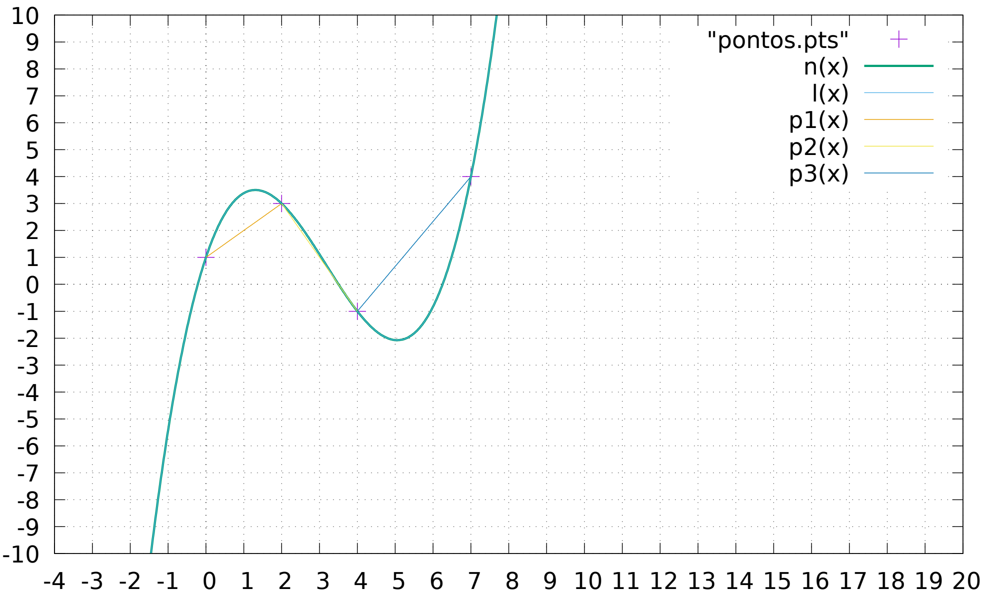

Figura 1: Gráfico das interpolações

Questão 2

Considere l_1 e l_2, o lados do primeiro e segundo quadrados, respectivamente. Podem ser definidas funções para alterar os tamanhos do quadrado, de acordo com o enunciado para o primeiro quadrado teriámos os pontos $(0, l_1)$ e $(1, 2l_1)$ e para o segundo quadrado teríamos $(0,\ l_2) e (1,\ \frac{1}{2}l_2)$.

Logo, ao interpolar os pontos, a função para o primeiro quadrado é

$$\begin{aligned} f_1(k) &= \frac{2l_1 - l_1}{1-0}(k-0) + l_1 \\ &= l_1 k + l_1 \end{aligned}$$

E para o segundo quadrado

$$\begin{aligned} f_2(k) &= \frac{\frac{l_2}{2} - l_2}{1-0}(k-0) + l_2 \\ &= \frac{-l_2}{2}k + l_2 \end{aligned}$$

Queremos o momento k em que o lado do primeiro quadrado seja igual a diagonal($d_2 = l_2\sqrt{2}$) do segundo quadrado, ou seja, $f_1(k) = f_2(k)\sqrt{2}$, calculamos:

$$\begin{aligned} & f_1(k) = f_2(k)\sqrt{2} \\ & l_1 k + l_1 = \frac{-l_2}{2}\sqrt{2}k + l_2\sqrt{2} \\ & (l_1 + \frac{l_2}{2}\sqrt{2})k = l_2\sqrt{2} - l_1 \\ & k = \frac{2l_2\sqrt{2} - 2l_1}{2l_1 + l_2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Como l_1 e l_2 são os lados dos quadrados no momento $k = 0$ e segundo o enunciado os lados dos quadrados no início da animação são iguais, então tome $l = l_1 = l_2$, temos

$$\begin{aligned} k &= \frac{2l\sqrt{2} - 2l}{2l + l\sqrt{2}} \\ k &= \frac{(2\sqrt{2} - 2)l}{(2 + \sqrt{2})l} \\ k &= \frac{2\sqrt{2} - 2}{2 + \sqrt{2}} \\ k &= 0,242640687 \end{aligned}$$

Questão 3

Usemos a interpolação de Newton nos seguintes pontos $(0,0), (\frac{L}{2}, 1), (L, 0)$:

xi	yi	f[a, b]	f[a, b, c]
0	0		
		$\frac{2}{L}$	
$\frac{L}{2}$	1		$\frac{-4}{L^2}$
		$\frac{-2}{L}$	
L	0		

Substituindo, temos

$$
\begin{aligned}
m(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\
&= \frac{2}{L}(x - 0) + (\frac{-4}{L^2})(x - 0)(x - \frac{L}{2}) \\
&= \frac{2}{L}x + \frac{-4}{L^2}x^2 + \frac{2}{L}x \\
&= \frac{-4}{L^2}x^2 + \frac{4}{L}x
\end{aligned}
$$