ALJABAR LINEAR ELEMENTER
(4 sks : (3-1))

Kelas A : Edi Kurniadi,M.Si.,Ph.D
Kelas B : Dr. Sisilia Sylviani, M.Si.

Program Studi S1 Matematika FMIPA Unpad

22 September 2022

1. Sistem Persamaaan Linear(SPL).
   - Solusi SPL

Persamaan Linear (PL)

Persamaan linier dapat dinyatakan dalam bentuk

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \tag{1}$$

dengan variabelnya $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dan skalarnya $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$. Nilai $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \ldots, x_n = \alpha_n$ yang memenuhi (1) disebut solusi persamaan linier. Selanjutnya, beberapa persamaan linier tersebut membentuk sistem persamaan linier yang dapat dituliskan dalam bentuk

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \tag{2}$$

Jika $x_1 = \beta_1, x_2 = \beta_2, \ldots, x_n = \beta_n$ memenuhi setiap PL dalam (2), $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ adalah solusi SPL tersebut. Sebagai contoh tentukan solusi untuk PL dan SPL berikut

1. Tentukan solusi untuk $x + y = 2$.
2. Tentukan solusi
$$\begin{aligned} x + y &= 2 \\ 2x + y &= 3 \end{aligned}$$
3. Tentukan solusi
$$\begin{aligned} 3x + 3y &= 12 \\ x + y &= 3 \end{aligned}$$

4. Tentukan solusi

$$x + y = 2$$
$$2x + 2y = 1$$

Berkaitan dengan solusi SPL, Sebuah SPL mempunyai kemungkinan berikut :

1. mempunyai solusi tunggal.
2. mempunyai tak hingga banyaknya solusi.
3. tidak mempunyai solusi.

- Jika suatu SPL mempunyai paling tidak satu solusi maka SPL tersebut disebut **KONSISTEN**,
- sedangkan apabila tidak mempunyai solusi, SPL tersebut disebut **INKONSISTEN**.

- Sebagai Latihan, Anda cari suatu SPL 2 variable x dan y yang mempunyai solusi tunggal, tak hingga banyak solusi, dan tidak mempunyai solusi. Jangan lupa gambarkan solusinya Sistem Koordinat Kartesius. Secara geometri, Anda simpulkan hasilnya.

SPL dalam (2) terdiri dari m PL dan n variabel, dan dapat ditulis ulang dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \tag{3}$$

Matriks (3) di atas disebut dengan **Matriks Yang diperbanyak** atau **Matriks Yang diperluas**. Perhatikan bahwa SPL berikut:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

dapat ditulis dalam matriks yang diperbanyak atau matriks yang diperluas sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Pada matriks yang diperbanyak dapat dilakukan serangkaian operasi elementer seperti yang sudah dipelajari sebelumnya.

Metode Penyelesain SPL

1. Metode OBE
   a. Metode Gauss-Jordan : Metode untuk mereduksi suatu matriks dalam bentuk eselon baris-tereduksi (EBT).
   b. Metode Gauss : Metode untuk mereduksi suatu matriks dalam bentuk eselon baris (EB).
2. Invers Matriks
3. Metode Cramer

Pada matriks yang diperbanyak (5), OBE tersebut dapat dikerjakan sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Tambahkan -2 kali baris pertama ke baris ke dua untuk memperoleh :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Tambahkan -3 kali baris pertama ke baris ke tiga untuk memperoleh :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

Kalikan baris ke dua dengan $\frac{1}{2}$ untuk memperoleh :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & \frac{-7}{2} & \frac{-17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

Tambahkan -3 kali baris ke dua ke baris ke tiga untuk memperoleh :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & \frac{-7}{2} & \frac{-17}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-3}{2} \end{bmatrix}$$

Kalikan baris ke tiga dengan -2 untuk memperoleh :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & \frac{-7}{2} & \frac{-17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Tambahkan -1 kali baris ke tiga ke baris pertama untuk memperoleh:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{35}{2} \\ 0 & 1 & \frac{-7}{2} & \frac{-17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Kalikan $\frac{-11}{2}$ baris ke tiga ke baris pertama dan $\frac{7}{2}$ baris ke tiga ke baris ke dua untuk memperoleh :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Dari matriks terakhir, diperoleh bahwa $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$, dan perhatikan bahwa nilai-nilai tersebut adalah solusi bagi SPL (4).

SPL berikut

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + 3x_3 &= -3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

dapat ditulis dalam matriks yang diperbanyak sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Untuk mendapatkan penyelesaian SPL tersebut akan digunakan Metode Gauss dan Metode Gauss-Jordan.

1. Metode Gauss. Matriks yang diperbanyak dalam (7) akan direduksi menjadi matriks eselon sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} -b_1 \\ \\ \approx \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \approx \\ -2b_1 + b_2 \\ -2b_1 + b_3 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & 7 & -4 \\ 0 & 1 & 7 & -6 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \approx \\ b_2 \leftrightarrow b_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & -6 \\ 0 & 3 & 7 & -4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \approx \\ \\ -3b_2 + b_3 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & -6 \\ 0 & 0 & -14 & 14 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \approx \\ \\ -\frac{1}{14}b_3 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Matriks eselonnya adalah

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Menuliskan kembali matriks diperbanyak dari (8), diperoleh SPL

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - 3x_3 &= 3 \\ x_2 + 7x_3 &= -6 \\ x_3 &= -1 \end{aligned}$$

Dengan substitusi balik $x_3 = -1$ ke persamaan ke dua diperoleh $x_2 = 1$. Terakhir dengan substitusi $x_3 = -1$ dan $x_2 = 1$ ke persamaan pertama diperoleh $x_1 = 1$.

2. Metode Gauss Jordan.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} b_1 + b_2 \\ \\ \approx \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 7 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \approx \\ -4b_3 + b_1 \\ -7b_3 + b_2 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Jadi diperoleh $x_1 = x_2 = 1$ dan $x_3 = -1$.

Remark

SPL (6) adalah konsisten dengan penyelesaian tunggal atau unik.

Latihan Soal

1. Gunakan Metode Gauss-Jordan untuk mencari solusi SPL :

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 \quad + 2x_5 \quad &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 &= -1 \\ 5x_3 + 10x_4 + 15x_6 &= 5 \\ 2x_1 + 6x_2 \quad + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 &= 6 \end{aligned} \tag{9}$$

2. Tentukan juga solusi SPL di atas dengan metode Gauss.