

ALJABAR LINEAR ELEMENTER 4(3-1)

Kelas A : Edi Kurniadi, M.Si., Ph.D

Kelas B : Dr. Sisilia Sylviani, M.Si.

Program Studi S1 Matematika FMIPA Unpad

7 September 2023

1 Matriks (Lanjutan)

- Operasi Baris Elementer
- Matriks Bentuk Eselon dan Tereduksi
- Invers Matriks
- Jenis-Jenis matriks

Operasi Baris Dasar atau Elementer

Terdapat 3 jenis Operasi Baris Elementer (OBE) sbb :

- 1 Kalikan sebuah baris dengan suatu konstanta tak nol.
- 2 Pertukarkan dua baris.
- 3 Tambahkan kelipatan suatu baris ke baris lainnya.

Operasi-operasi tersebut disebut **OPERASI BARIS ELEMENTER** yang selanjutnya akan disingkat **OBE**.

Contoh Penerapan OBE Berikut adalah OBE yang dikenakan pada sebuah matriks.

➊ Diberikan matriks A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 5 & 5 \end{bmatrix}.$$

Mengalikan baris pertama dari A dengan 2 untuk memperoleh matriks A' yaitu:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 5 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{2b_1} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 5 & 5 \end{bmatrix} \\ =: A'$$

adalah suatu OBE pada A .

- 2 Diberikan matriks B sebagai berikut :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 5 \end{bmatrix}.$$

Menambahkan -2 kali baris pertama ke baris ke dua pada matriks B untuk memperoleh B' yaitu:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2b_1 + b_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & 5 \end{bmatrix} \\ =: B'.$$

adalah suatu OBE pada matriks B .

3 Diberikan matriks C

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 9 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Mempertukarkan baris pertama dan ke tiga pada matriks C untuk memperoleh matriks C' yaitu

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 9 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad b_1 \leftrightarrow b_3 \\ =: C'.$$

adalah suatu OBE pada C .

Remark

OBE berguna untuk menyelesaikan suatu sistem persamaan linear, menghitung determinan, invers matriks, dan menentukan rank suatu matriks.

Trace Matriks

Definition

Misalkan A matriks persegi berukuran $n \times n$, maka trace A dinyatakan dengan $\text{tr}(A)$, didefinisikan sebagai jumlah semua entri pada diagonal utama A .

$$\text{tr} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11} + a_{22}.$$

Matriks Eselon Baris dan Matriks Eselon Baris Tereduksi

- 1 Jika suatu baris tidak semuanya nol, maka angka tak nol pertama dalam baris tersebut adalah angka 1 (**utama 1**).
- 2 Jika ada baris yang semuanya nol, maka baris tersebut dikelompokkan bersama di bagian bawah baris-baris matriks tersebut.
- 3 Jika ada dua baris yang berurutan yang tidak semuanya nol, utama 1 dalam baris yang lebih bawah terletak di sebelah kanan utama 1 dalam baris yang lebih atas,
- 4 Masing-masing kolom yang berisi sebuah utama 1 mempunyai nol di tempat lainnya.

Definition

Matriks yang memenuhi 1-3 disebut matriks **eselon baris**, dan matriks yang memenuhi 1-4 disebut matriks **matriks eselon baris tereduksi**.

Perhatikan contoh cara memperoleh matriks eselon baris (EB) dan matriks eselon baris tereduksi (EBT) berikut ini:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Tambahkan -2 kali baris pertama ke baris ke dua untuk memperoleh :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Tambahkan -3 kali baris pertama ke baris ke tiga untuk memperoleh :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

Kalikan baris ke dua dengan $\frac{1}{2}$ untuk memperoleh :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & \frac{-7}{2} & \frac{-17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

Tambahkan -3 kali baris ke dua ke baris ke tiga untuk memperoleh :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & \frac{-7}{2} & \frac{-17}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-3}{2} \end{bmatrix}$$

Kalikan baris ke tiga dengan -2 untuk memperoleh :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & \frac{-7}{2} & \frac{-17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Tambahkan -1 kali baris ke tiga ke baris pertama untuk memperoleh:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{35}{2} \\ 0 & 1 & \frac{-7}{2} & \frac{-17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Kalikan $\frac{-11}{2}$ baris ke tiga ke baris pertama dan $\frac{7}{2}$ baris ke tiga ke baris ke dua untuk memperoleh :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Tentukan bentuk baris eselon dan eselon tereduksi dari matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Definition

Misalkan A matriks persegi. A dikatakan invertible (atau dapat dibalik) jika ada matriks B sedemikian sehingga $AB = BA = I$ dengan I matriks identitas. Dalam hal ini, B dikatakan invers dari A .

Remark

Matriks persegi I dikatakan matriks identitas apabila semua entri pada diagonal utamanya 1 dan 0 selainnya.

Matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ invertible (atau dapat dibalik) karena terdapat matriks $B = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ sedemikian sehingga

$AB = BA = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Tetapi matriks $G = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ tidak invertible (atau tidak dapat dibalik) karena tidak ada matriks H sedemikian sehingga $GH = HG = I_2$.

Khusus matriks 2×2 , teorema berikut ini mempermudah untuk mendapatkan invers suatu matriks.

Theorem

Matriks $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ invertible jika dan hanya jika $ad - bc \neq 0$ dan inversnya diberikan oleh

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Berikut ini beberapa sifat tentang invers matriks

Theorem

Misalkan A dan B matriks-matriks invertible yang berukuran $n \times n$ maka AB invertible dan $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Perhatikan bahwa

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n.$$

Demikian juga untuk kasus

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = I_n.$$

Oleh karena itu, AB invertible. Selanjutnya dengan ketunggalan invers matriks maka $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Misalkan diberikan matriks

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Invers matriks tersebut adalah

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Diperoleh bahwa $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$.

Jika inversnya dihitung dari perkalian A dan B yaitu

$AB = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ maka $(AB)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$. Hasil ini sesuai dengan $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Selanjutnya diperkenalkan juga pangkat suatu matriks oleh bilangan bulat. Misalkan A matriks berukuran $n \times n$ dan k bilangan bulat nonnegatif.

Definition

Misalkan $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Pangkat bilangan bulat nonnegatif diberikan oleh

$$A^0 = I_n \text{ dan } A^n = AAA \cdots A \dots \text{ sebanyak } n \text{ kali.}$$

Selanjutnya pangkat bilangan bulat negatif diberikan oleh

$$A^{-n} = (A^{-1})^n = A^{-1}A^{-1}A^{-1} \cdots A^{-1} \dots \text{ sebanyak } n \text{ kali.}$$

Selanjutnya sifat-sifat invers matriks diberikan sebagai berikut:

Theorem

Misalkan A matriks berukuran $n \times n$ invertible dan k bilangan bulat nonnegatif, maka

- A^T invertible dan $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
- A^k invertible dan $(A^k)^{-1} = A^{-k} = (A^{-1})^k$.
- untuk sembarang skalar $\alpha \neq 0$, matriks αA invertible dan $(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1} A^{-1}$.
- $(A^{-1})^{-1} = A$.

Teorema ini akan dibuktikan pada bagian (a) saja, sisanya dikerjakan sebagai latihan. Menggunakan sifat-sifat transpos, diperoleh

$$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I_n^T = I_n,$$

demikian juga diperoleh bahwa

$$(A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = I_n^T = I_n.$$

Hal ini menunjukkan bahwa A^T invertible. Karena invers suatu matriks tunggal maka $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Berikut akan dibahas matriks elementer yang berguna untuk menentukan invers suatu matriks.

Definition

Matriks persegi E berukuran $n \times n$ dikatakan matriks elementer atau matriks dasar jika matriks ini bisa diperoleh dari matriks identitas I_n berukuran $n \times n$ dengan melakukan suatu OBE tunggal.

Matriks

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

adalah matriks elementer yang diperoleh dengan mengalikan baris ke dua dari matriks identitas I_2 dengan -2. Demikian juga matriks,

$$E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

adalah matriks elementer dengan mempertukarkan baris ke 1 dan ke 2 matriks identitas I_2 .

Theorem

Misalkan matriks elementer E dihasilkan dengan OBE terhadap I_n dan misalkan A suatu matriks $n \times m$, maka hasil kali EA adalah matriks yang dihasilkan jika OBE yang sama dikenakan terhadap A .

Perhatikan contoh-contoh berikut ini :

- 1 Diberikan matriks elementer E dan matriks A sebagai berikut:

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Matriks elementer E diperoleh dengan mempertukarkan baris ke satu dan ke dua dari matriks identitas

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \text{ Perhatikan bahwa matriks}$$

$$A' = EA = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

sama dengan mempertukarkan baris ke satu dan ke dua pada matriks A .

2 Misalkan matriks

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

dan matriks elementer

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

yang dihasilkan dengan cara menjumlahkan 2 kali baris pertama pada baris ke tiga pada matriks identitas I_3 . Maka hasil kali

$$EB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 3 & 4 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

yang merupakan matriks yang tepat sama dengan matriks yang diperoleh dengan menambahkan 3 kali baris pertama ke baris ke tiga pada B .

Theorem

Setiap matriks elementer bisa dibalik dan inversnya juga merupakan matriks elementer.

Invers suatu matriks persegi (jika ada) bisa ditentukan dengan menggunakan Teorema ini. Misalkan A matriks persegi berukuran $n \times n$ invertible dan E_1, E_2, \dots, E_k matriks-matriks dasar sedemikian sehingga

$$E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 A = I_n. \quad (1)$$

Dengan membalik (1), kita peroleh

$$A^{-1} = E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 I_n. \quad (2)$$

Secara sederhana kita reduksi $[A : I]$ menjadi $[I : A^{-1}]$.

Perhatikan contoh-contoh berikut ini

- ❶ Invers matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ dapat dihitung sebagai berikut:

- ❶ Reduksi matriks $[A : I_2]$ menjadi $[I_2 : A^{-1}]$.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Pertukarkan baris pertama dan ke dua untuk mendapatkan

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right].$$

- ➊ Tambahkan -2 kali baris pertama ke baris ke dua untuk mendapatkan

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{array} \right].$$

- ➋ Kalikan baris ke dua dengan -1 untuk mendapatkan

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right].$$

- ➌ Tambahkan -2 baris ke dua ke baris pertama untuk mendapatkan

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right].$$

- ➍ Didapat bahwa $[I_2 : A^{-1}]$. Dengan kata lain invers dari A adalah

$$A^{-1} = \left[\begin{array}{cc} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{array} \right].$$

Tentukan invers matriks

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Kita ubah dari $[X : I_3]$ menjadi $[I_3 : X^{-1}]$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] & \xrightarrow{-2b_1 + b_3} \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right] & \xrightarrow{\frac{1}{2}b_2} \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right] & \xrightarrow{3b_2 + b_3} \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & : & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 & : & -2 & 3/2 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \approx \\ \frac{2}{3}b_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & : & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & -4/3 & 1 & 2/3 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} -3b_3 + b_1 \\ (-3/2)b_3 + b_2 \\ \approx \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & : & 5 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & : & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & : & -4/3 & 1 & 2/3 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} -2b_2 + b_1 \\ \approx \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & : & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & : & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & : & -4/3 & 1 & 2/3 \end{array} \right].$$

Jadi invers matriks X adalah

$$X^{-1} = Y = \left[\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ -4/3 & 1 & 2/3 \end{array} \right].$$

Jenis-jenis matriks

- ❶ Matriks diagonal $A = [a_{ij}]$: Matriks persegi yang semua anggota di luar diagonal utama semuanya nol.
Berikut adalah contoh matriks diagonal berukuran 2×2

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \text{diag} \{-2, -3\},$$

dan juga matriks diagonal berukuran 3×3

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \text{diag} \{2, 4, 5\}.$$

Secara umum matriks diagonal D berdimensi $n \times n$ dapat dituliskan sebagai berikut:

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix} = \text{diag} \{d_1, d_2, d_3, \dots, d_n\}.$$

Matriks diagonal ini invertible (atau dapat dibalik) jika semua entri pada diagonal utamanya tak nol dan balikkannya (invers) diberikan sebagai berikut :

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{d_n} \end{bmatrix}.$$

Pangkat dari matriks diagonal diberikan sebagai berikut:

$$\mathbf{D}^k = \begin{bmatrix} d_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & d_n^k \end{bmatrix}$$

Diberikan matriks diagonal $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Invers dan pangkat 5 dari D berturut-turut adalah

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, D^5 = \begin{bmatrix} 1^5 & 0 & 0 \\ 0 & 2^5 & 0 \\ 0 & 0 & 3^5 \end{bmatrix}.$$

Lebih jauh, matriks D^{-5} dapat diperoleh dengan memangkatkan 5 matriks D^{-1} . Dalam hal ini diperoleh bahwa

$$D^{-5} = \begin{bmatrix} 1^5 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2})^5 & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{1}{3})^5 \end{bmatrix}.$$

- ② Matriks identitas. Matriks diagonal yang semua entri pada diagonal utamanya 1.

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- ③ Matriks Segitiga bawah : Matriks persegi $A = [a_{ij}]$ yang memenuhi $a_{ij} = 0$ untuk $i < j$.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 5 \end{bmatrix}.$$

- ④ Matriks Segitiga atas : matriks persegi $A = [a_{ij}]$ yang memenuhi $a_{ij} = 0$ untuk $i > j$.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

- 5 Matriks Simetris. Matriks persegi yang memenuhi $A^T = A$. Berikut adalah contoh matriks simetris

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Jika A dan B matriks-matriks simetris dengan ukuran yang sama dan jika k sebarang skalar maka :

- A^T simetris.
 - $A \pm B$ simetris.
 - kA simetris.
- 6 Matriks Skew Simetri. Matriks persegi yang memenuhi $A^T = -A$.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

- 7 Matriks Ekuivalen Baris. Matriks yang diperoleh dengan sejumlah OBE.

Matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ekuivalen baris dengan

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- 8 Matriks dasar atau elementer : matriks persegi yang diperoleh dengan melakukan suatu operasi baris elementer tunggal pada matriks identitas.
- 9 Matriks Bentuk eselon baris.
- 10 Matriks bentuk eselon baris tereduksi.

Latihan Soal

- 1 Tentukan matriks eselon tereduksi dari $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 7 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$
- 2 Tentukan matriks eselon tereduksi dari $B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & -3 & -2 \\ 6 & 6 & 3 & 5 \end{bmatrix}$
- 3 Tentukan matriks eselon dan matriks eselon tereduksi dari matriks $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$