ALJABAR LINEAR ELEMENTER 4 sks (3-1)

Kelas A : Edi Kurniadi,M.Si.,Ph.D
Kelas B : Dr. Sisilia SYlviani, M.Si

Program Studi S1 Matematika FMIPA Unpad

1 Desember 2022

Definition 2.1.

Misalkan A matriks persegi $n \times n$. Vektor tak nol $x \in \mathbb{R}^n$ dikatakan vektor eigen untuk A jika terdapat skalar λ sedemikian sehingga $Ax = \lambda x$. Selanjutnya, λ disebut nilai eigen yang bersesuaian dengan vektor eigen x.

Contoh Vektor Eigen

1. Buktikan bahwa $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ adalah vektor eigen untuk $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$.
2. Tentukan nilai eigen untuk contoh di atas.

Kisi-kisi UAS

1. Misalkan $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

   a. Tunjukkan bahwa $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ adalah vektor eigen bagi $\mathbf{A}$.
   Apakah nilai eigen $\mathbf{A}$ yang sesuai untuk $\mathbf{u}$.

   b. Berikan sebuah vektor eigen $\mathbf{A}$ yang bukan kelipatan $\mathbf{u}$, tetapi bersesuaian dengan nilai eigen yang sama dengan nilai eigen untuk $\mathbf{u}$.

Mencari Nilai Eigen

1. Perhatikan bahwa persamaan $Ax = \lambda x$ dapat dituliskan kembali dalam bentuk $Ax = \lambda I_n x$. Yang terakhir ekuivalen dengan

$$(A - \lambda I_n)x = 0$$

yang merupakan suatu SPL Homogen. Solusi dari SPL homogen tersebut harus non-trivial (why?).

2. Selanjutnya, diperoleh bahwa

$$\det\,(A - \lambda I_n) = 0.$$

Persamaan tersebut disebut persamaan Karakteristik.

3. Dengan kata lain diperoleh bahwa

$$\det\,(A - \lambda I_n) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n = 0.$$

yang merupakan polinom karakteristik

Contoh

1. Cari semua nilai eigen dan vektor eigen matriks
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$
2. Cari semua nilai eigen dan vektor eigen matriks
$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Definition 4.1.

Misalkan A matriks persegi $n \times n$. Ruang solusi dari $(A - \lambda I_n)x = 0$ disebut ruang eigen.

Q:::Bagaimana hubungan ruang eigen dengan vektor eigen???

1. Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.
   a. Tentukan Semua vektor eigen A.
   b. Tentukan ruang eigen A yang bersesuaian dengan nilai eigennya dan tentukan pula basisnya.

Nilai Eigen dari Pangkat Suatu matriks

Theorem 4.2.

1. *Misalkan k suatu bilangan bulat positif. Jika λ suatu nilai eigen untuk A yang bersesuaian dengan vektor eigen x, maka λ^k adalah nilai eigen untuk A^k yang berpadanan dengan vektor eigen yang sama untuk A.*
2. *Suatu matriks persegi A invertible jika dan hanya jika 0 bukan suatu nilai eigen untuk A.*

Definition 5.1.

Suatu matriks persegi A dapat didiagonalkan jika ada matriks invertible P sedemikian sehingga $D = P^{-1}AP$ dengan D suatu matriks diagonal.

Theorem 5.2.

Misalkan A matriks persegi $n \times n$. Matriks A dapat didiagonalkan jika dan hanya jika A mempunyai n buah vektor eigen yang bebas linear.

1. *Misalkan k suatu bilangan bulat positif. Jika λ suatu nilai eigen untuk A yang bersesuaian dengan vektor eigen x, maka λ^k adalah nilai eigen untuk A^k yang berpadanan dengan vektor eigen yang sama untuk A.*
2. *Suatu matriks persegi A invertible jika dan hanya jika 0 bukan suatu nilai eigen untuk A.*

cara mendiagonalkan matriks Persegi A

1. Cari semua nilai eigen dan vektor eigen A yang bebas linear.
2. Susun matriks P yang kolomnya semua vektor eigen A. Matriks diagonal memuat nilai eigen A pada diagonal utamanya bersesuaian dengan vektor eigen di P.

- Cari suatu matriks P (jika ada) yang mendiagonalkan $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ dan tentukan pula matriks diaonalnya.

- Cari suatu matriks P (jika ada) yang mendiagonalkan $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ dan tentukan pula matriks diaonalnya.

Theorem 5.3.

Jika matriks persegi A $n \times n$ mempunyai n buah nilai eigen yang berbeda maka A dapat didiagonalkan.

Definition 6.1.

Mialkan A matriks persegi dan λ_0 adalah nilai eigen A. Banyaknya $\lambda - \lambda_0$ dalam faktorisasi polinom karakteristik disebut multiplisitas aljabar m_a, sedangkan dimensi ruang eigen disebut multiplisitas geometri m_g.

Theorem 6.2.

Matriks A dapat didiagonalkan jika dan hanya jika $m_a = m_g$.

Contoh

1. Tentukan m_a dan m_g dari $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Apakah A dapat didiagonalkan?

1. Hitung A^{13} dengan $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Apakah A dapat didiagonalkan?

Hint: Untuk kasus A dapat didiagonalkan, gunakan formula $D = P^{-1}AP$. Tentukan D^k.

Definition 8.1.

Misalkan A matriks persegi. Matriks A dikatakan ortogonal jika $A^{-1} = A^T$.

Theorem 8.2.

Misalkan A matriks persegi berukuran $n \times n$. Pernyataan berikut ini ekuivalen

1. *A ortogonal*
2. *Vektor-vektor baris A membentuk himpunan ortonormal pada $\mathbb{R}^n$ dengan HKD Euclid.*
3. *Vektor-vektor baris A membentuk himpunan ortonormal pada $\mathbb{R}^n$ dengan HKD Euclid.*

Definition 8.3.

Suatu matriks persegi A dapat didiagonalkan secara ortogonal jika ada matriks ortoonal P sedemikian sehingga $D = P^{-1}DP = P^{T}DP$.

Theorem 8.4.

Misalkan A matriks persegi $n \times n$. Pernyataan berikut ekuivalen

1. *A dapat didiagonalkan secara ortogonal.*
2. *A mempunyai n buah vektor eigen yang ortonormal.*
3. *A simetris.*

Contoh

Apakah matriks $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ dapat didiagonalkan secara ortogonal?.

Tuliskan jawaban Anda lengkap dengan argumen dan penjelasannya.

1 .Diberikan matriks $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Carilah matriks real tak singular $\mathbf{P}$ yang membuat $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ matriks diagonal dan tentukan pula matriks diagonal tersebut.

2. Diberikan suatu matriks $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.
   a. Cari semua nilai eigen dari $\mathbf{A}$.
   b. Untuk setiap nilai eigen λ cari semua vektor eigennya.

c. Apakah **A** dapat didiagonalkan secara ortogonal? Jelaskan.
d. Jika Jawaban Anda **YA**, carilah suatu matriks ortogonal **P** yang mendiagonalkan **A**.

3. Anggap ruang vektor $\mathbf{P}_2$ mempunyai hasil kali dalam

$$< \mathbf{p}, \mathbf{q} >= \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\, d\, x$$

Terapkan proses Gram-Schmidt untuk mengubah basis standar $S = \{1, x, x^2\}$ menjadi suatu basis ortonormal.

4. (**SOAL BONUS**). Diberikan matriks $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & c \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.
   Carilah nilai c agar matriks $\mathbf{D}$ mempunyai nilai karakteristik real dan tidak dapat didiagonalkan.
5. Buktikan : jika A suatu matriks $n \times n$ dan n ganjil maka paling tidak A mempunyai satu nilai eigen real.
6. Cari suatu matriks A, 3×3 yang mempunyai nilai eigen $\lambda = 0, 1$, dan -1 masing-masing dengan vektor eigen yang berpadanan

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{dan} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

7. Cari suatu matriks dengan polinom karakteristik $p(\lambda) = 1 - 2\lambda + \lambda^2 + 3\lambda^3 + \lambda^4$
8. Carilah nilai eigen dari

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ k^3 & -3k^2 & 3k \end{bmatrix}$$

9. Hitunglah $\mathbf{A}^3$ dan $\mathbf{A}^4$ untuk

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

10. a. Tunjukkan bahwa jika D suatu matriks diagonal dengan anggota-anggota tak negatif pada diagonal utamanya, maka ada suatu matriks S sedemikian sehingga $S^2 = D$.

b. Tunjukkan bahwa jika A suatu matriks yang dapat didiagonalkan dengan nilai eigen tak negatif maka ada suatu matriks S sedemikian sehingga $S^2 = A$.

c. Cari suatu matriks S sedemikian sehingga $S^2 = A$, jika

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

11. Anggap

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

a. Cari nilai dan vektor eigen dari A.
b. Cari nilai dan vektor eigen dari A^{10}.
c. Untuk setiap nilai eigen λ cari rank dari matriks $\lambda I - A$.
c. Apakah A dapat didiagonalkan ? Jelaskan jawaban Anda.

Tuliskan jawaban Anda lengkap dengan argumen dan penjelasannya.

1. Misalkan V suatu ruang vektor real dan $W = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subseteq V$. Buktikan bahwa span W subruang dari V.
2. Diketahui $M_2(\mathbb{R})$ himpunan semua matriks berordo 2×2 adalah ruang vektor real dan $Y = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \text{rank}(A) = 1\}$. Apakah Y subruang dari $M_n(\mathbb{R})$.
3. Tentukan apakah $v_1 = (1, 1, 2), v_2 = (1, 0, 1), v_3 = (2, 1, 3)$ membangun ruang vektor $\mathbb{R}^3$. Jelaskan

4. Carilah basis $R = \{(a, 0, 0) : a \in \mathbb{R}\}$ yang merupakan subruang $\mathbb{R}^3$. Kemudian buktikan jawaban Anda.
5. Carilah basis $W = \{(a, a + c, c) : a, c \in \mathbb{R}\}$ yang merupakan subruang $\mathbb{R}^3$. Kemudian jelaskan Jawaban Anda.
6. Tentukan basis dan dimensi dari subruang $\mathbb{R}^4$ berikut ini.
   a. $W_1 = \{(a, b, c, 0) | a, b, c \in \mathbb{R}\}$
   b. $W_2 = \{(a, b, a - b, a + b) | a, b \in \mathbb{R}\}$
   c. $W_3 = \{(a, a, a, a) | a \in \mathbb{R}\}$
7. Tentukan basis dan dimensi subruang dari P_3 yang terdiri dari semua polinom berbentuk $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ di mana $a_0 = 0$

8. Misalkan V suatu ruang vektor real.Misalkan $\overline{v} \in V$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
   Apakah berlaku jika $\overline{v} \neq 0$ dan $\alpha\overline{v} = \beta\overline{v}$, maka $\alpha = \beta$?
9. Misalkan V suatu ruang vektor real. Diketahui vektor-vektor berikut :

$$\overline{u} = (1, 0, 1), \overline{v} = (1, 2, 3), \overline{w} = (3, 2, 1), \overline{a} = (1, 4, 1)$$

   Himpunan $S = \{\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}\}$ merupakan basis bagi V.
   a. Apakah $\overline{a} \in V$? Jelaskan.
   b. Apakah $S' = \{\overline{a} + \overline{u}, \overline{a} + \overline{v}, \overline{a} + \overline{w}\}$ juga merupakan basis untuk V?Jelaskan.

10. Diketahui $V = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$.Definisikan

$$x \oplus y = xy, \qquad \alpha \odot x = x^{\alpha}.$$

Buktikan bahwa V ruang vektor real.

11. Selidiki apakah Himpunan semua pasangan *triple* terurut bilangan real dengan operasi $(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$ dan $\beta(x, y, z) = (0, 0, 0)$ merupakan ruang vektor real?Kalau bukan, Anda tuliskan sifat mana yang gagal untuk dipenuhi.

12. Selidiki apakah Himpunan semua matriks 2x2 dengan entri real berbentuk
$$\begin{bmatrix} a & a+b \\ a+b & b \end{bmatrix}$$
dengan penjumlahan dan perkalian skalar biasa merupakan ruang vektor?Jika bukan tuliskan sifat yang tidak terpenuhinya.

13. Diketahui bahwa M_n himpunan semua matriks berukuran nxn dengan entri semuanya real. Manakah yang berikut yang merupakan ruang bagian dari M_n
    a. $W_1 = \{A \in M_n | trace(A) = 0\}$.
    b. $W_2 = \{A \in M_n | A^T = -A\}$

14. Manakah yang merupakan ruang bagian dari P_3
    1. $U_1 = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 | a_0 = 0\}$
    2. $U_2 = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 | a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0\}$
    3. $U_3 = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 | a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Z}\}$.
15. Untuk nilai real λ berapakah vektor-vektor berikut membentuk suatu himpunan yang bergantung linier di $\mathbb{R}^3$?

$$\overline{v}_1 = (\lambda, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}), \quad \overline{v}_2 = (\frac{-1}{2}, \lambda, \frac{-1}{2}), \quad \overline{v}_1 = (\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, \lambda)$$

16. Buktikan bahwa jika $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2\}$ bebas linier dan $\overline{v}_3 \notin span\{\overline{v}_1, \overline{v}_2\}$, maka $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\}$ bebas linier

17. Buktikan bahwa jika $\overline{y}$ kombinasi linier dari $\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_n$, maka
$$span\{\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_n\} = span\{\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_n,\overline{y}\}$$
18. Apakah polinom $t^3+2t+1, t^2-t+2, t^3+2, -t^3+t^2-5t+2$ membangun P_3?
19. Diketahui $V=\mathbb{R}^3$ dan $S=\{\overline{x}_1,\overline{x}_2,\overline{x}_3,\overline{x}_4,\overline{x}_5\}$ dimana $\overline{x}_1=[1,0,1], \overline{x}_2=[0,1,1], \overline{x}_3=[1,1,2], \overline{x}_4=[1,2,1]$ dan $\overline{x}_5=[-1,1,-2]$.Apakah S membangun V? Carilah basis untuk V yang merupakan himpunan bagian dari S.

20. Temukan nilai a sehingga $\{[a^2, 0, 1], [0, a, 2], [1, 0, 1]\}$ merupakan basis bagi $\mathbb{R}^3$.
21. Buktikan bahwa $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ basis untuk M_2.
22. Mana dari yang berikut ini merupakan basis bagi $\mathbb{R}^3$.
    a. $\{t^3 + 2t^2 + 3t, 2t^3 + 1, 6t^3 + 8t^2 + 6t + 4, t^3 + 2t^2 + t + 1\}$
    b. $\{t^3 + t^2 + 1, t^3 - 1, t^3 + t^2 + t\}$
23. Apakah ruang vektor real V merupakan basis bagi dirinya sendiri?jelaskan.

24. Misalkan W ruang bagian dari P_3 yang dibangun oleh

$$X = \{t^3 + t^2 - 2t + 1, t^2 + 1, t^3 - 2t, 2t^3 + 3t^2 - 4t + 3\}$$

Carilah suatu basis untuk W dan temukan dimensi dari W.

25. Pandang $V = span \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}$.

Tentukan suatu basis untuk V.

26. Perluaslah $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ menjadi basis untuk M_2.

27. Perluas $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ menjadi basis bagi $\mathbb{R}^4$.

28. Untuk setiap matriks berikut temukan (1) basis untuk ruang baris, (2) basis untuk ruang kolom, (3) Basis untuk ruang kosong (4) rank dan nullitasnya.

    a. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

    b. $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

c. $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

29. Misalkan

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a. Cari bentuk eselon tereduksi dari $\mathbf{A}$
b. Temukan basis dan dimensi subruang dari $\mathbb{R}^4$ yang dibangun oleh kolom ke satu, ke dua, ke tiga, dan ke lima dari $\mathbf{A}$.
c. Temukan suatu basis row $\mathbf{A}$.

d. Temukan suatu basis col **A**.
e. Temukan basis ruang kosong dari **A**.
f. Carilah rank dan nullitas dari **A**.

30. Definisikan suatu matriks "papan catur" sebagai suatu matriks persegi $A = [a_{ij}]$ sedemikian sehinggga

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jika} \quad i+j \quad \text{genap} \\ 0 & \text{jika} \quad i+j \quad \text{ganjil} \end{cases}$$

Cari rank dan nullitas dari matriks-matriks papan catur berikut :

a. matriks papan catur 3×3.
b. matriks papan catur 4×4.
c. matriks papan catur $n \times n$.