

ALJABAR LINEAR ELEMENTER

(4 sks : (3-1))

Kelas A : Edi Kurniadi,M.Si.,Ph.D

Kelas B : Dr. Sisilia Sylviani, M.Si.

Program Studi S1 Matematika FMIPA Unpad

3 November 2022

1 Ruang Baris dan Ruang Kolom

- Eksistensi Solusi SPL $Ax = b$

2 Rank dan Nullitas

3 SIFAT-SIFAT RANK DAN NULITAS

Ruang Baris dan Ruang Kolom

- Perhatikan matriks A yang berukuran 3×4 berikut ini

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 8 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

- Vektor-vektor

$$r_1 = [1 \ 2 \ 3 \ 4],$$

$$r_2 = [5 \ 6 \ 7 \ 8],$$

$$r_3 = [0 \ 8 \ 5 \ 2].$$

yang merupakan vektor-vektor di \mathbb{R}^4 disebut vektor-vektor baris matriks A .

- Sedangkan vektor-vektor

$$c_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}, c_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}, c_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}, c_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$$

yang merupakan vektor-vektor di \mathbb{R}^3 disebut vektor-vektor kolom.

- Bagaimana dengan vektor-vektor baris dan kolom dari matriks $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ yang berukuran $m \times n$?

Definition

Misalkan \mathbf{A} matriks yang berukuran $m \times n$

- ① Ruang yang dibangun oleh vektor-vektor baris dari A disebut ruang baris. Notasi $\text{row}(A)$
- ② Ruang yang dibangun oleh vektor-vektor kolom dari A disebut ruang kolom. Notasi $\text{col}(A)$
- ③ Ruang solusi dari SPL homogen $AX = b$ disebut ruang nol atau ruang kosong.

Theorem

SPL $Ax = b$ konsisten jika dan hanya jika b berada dalam ruang kolom A .

Misalkan diberikan SPL

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Buktikan bahwa solusi SPL tersebut termuat dalam ruang kolom A .

Latihan Soal

- ① Tuliskan $\text{row}(A)$ dan $\text{col}(A)$ dalam bentuk himpunan
- ② Buktikan bahwa $\text{row}(A)$ subruang dari \mathbb{R}^n dan $\text{col}(A)$ subruang dari \mathbb{R}^m

Berikut adalah pengaruh OBE pada ruang baris dan ruang kosong

Theorem

OBE tidak mengubah ruang baris dan ruang kosong dari suatu matriks

Theorem

Jika A dan B matriks-matriks yang ekuivalen baris maka :

- (a) *Suatu himpunan vektor kolom dari A bebas linear jika dan hanya jika vektor-vektor kolom yang berpadanan dari B bebas linear.*
- (b) *Suatu himpunan vektor kolom dari A membentuk suatu basis untuk ruang kolom dari A jika dan hanya jika vektor-vektor kolom yang berpadanan dari B membentuk suatu basis untuk ruang kolom dari B*

Theorem

Jika suatu matriks R berada dalam bentuk baris eselon maka vektor-vektor baris dengan utama 1 (yaitu baris-baris yang tak nol) membentuk suatu basis untuk ruang baris dari R , dan vektor-vektor kolom dengan utama 1 dari vektor-vektor baris membentuk suatu basis untuk ruang kolom dari R .

Perhatikan Contoh berikut ini. Diberikan matriks eselon baris

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Tuliskan basis untuk ruang baris dan ruang kolom dari A .

Remark

Dimensi ruang baris = dimensi ruang kolom = rank dan dimensi ruang kosong/nol = nullitas. Jika \mathbf{A} matriks yang berukuran $m \times n$ maka kita punya rank (\mathbf{A}) + nullitas (\mathbf{A}) = n .

- Cari basis untuk ruang baris dan ruang kolom dari

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{bmatrix}$$

Jawab :

- Bentuk baris eselon dari A adalah

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- baris yang tak nol dari R membentuk basis untuk row A yaitu

$$[1 \ -3 \ 4 \ -2 \ 5 \ 4], [0 \ 0 \ 1 \ 3 \ -2 \ -6],$$

dan

$$[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 5]$$

- sedangkan kolom A yang berpadanan dengan kolom yang memuat utama 1 dari R membentuk basis untuk A yaitu :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 9 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 9 \\ -5 \end{bmatrix}$$

- Diberikan matriks

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Tentukan basis untuk ruang baris, ruang kolom, dan ruang kosong untuk A . Tentukan juga rank dan nullitasnya.

Misalkan A sebarang matriks berukuran $m \times n$, maka

- ① $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T)$.
- ② $\text{rank}(A)$ jumlah peubah/variabel bebas dalam penyelesaian SPL $Ax = 0$.
- ③ Kekosongan $A =$ jumlah parameter dalam penyelesaian $Ax = 0$.
- ④ Suatu matriks persegi berukuran $n \times n$ invertibel jika dan hanya jika $\text{rank}(A) = n$.

Perhatikan contoh berikut ini :

- ① Tentukan jumlah parameter dalam himpunan penyelsaian $Ax = 0$ jika A adalah matriks berukuran 5×7 dengan $\text{rank}(A) = 3$.