ALJABAR LINEAR ELEMENTER (4 sks : (3-1)

Kelas A : Edi Kurniadi,M.Si.,Ph.D
Kelas B : Dr. Sisilia Sylviani M.Si

Program Studi S1 Matematika FMIPA Unpad

17 November 2022

Definisi Ruang vektor

Misalkan V himpunan yang tak hampa yang di dalamnya didefinisikan "penjumlahan" dan "perkalian" dengan skalar. Misalkan $u, v, w \in V$ dan k, l sembarang skalar. V dikatakan ruang vektor jika memenuhi

1. Untuk setiap $u, v \in V$, maka $u + v \in V$(Tertutup terhadap operasi penjumlahan)
2. $u + v = v + u$ (Komutatif).
3. $u + (v + w) = (u + v) + w$ (asosiatif).
4. Terdapat unsur $0 \in V$ sedemikian sehingga $0 + v = v = v + 0$ untuk setiap $v \in V$.
5. Untuk setiap $v \in V$, terdapat $-v \in V$ sedemikian sehingga $v + (-v) = 0 = (-v) + v$.

6. Untuk skalar k dan $v \in V$, $kv \in V$.
7. $k(u + v) = ku + kv$.
8. $(k + l)u = ku + lu$.
9. $k(lu) = (kl)u$.
10. $1u = u$.

Contoh ruang vekror

1. Himpunan $V = \mathbb{R}^2$ dengan operasi standar penjumlahan dan perkalian skalar.
2. Secara umum, himpunan $V = \mathbb{R}^n$ dengan operasi standar penjumlahan dan perkalian skalar.
3. Himpunan V dari semua matriks 2×2 dengan operasi penjumlahan matriks dan perkalian skalar dengan matriks.

4. Dari contoh 2, secara umum himpunan V dari semua matriks $m \times n$ dengan operasi penjumlahan matriks dan perkalian skalar dengan matriks adalah contoh ruan vektor.
5. Anggap V himpunan fungsi bernilai riil yang didefinisikan di $(-\infty, \infty)$. Operasi penjumlahannya didefinisikan oleh

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),$$

dan perkalian skalar k diberikan oleh

$$(kf)(x) = kf(x)$$

maka V adalah ruang vektor.

Latihan Soal

- Misalkan $V = \mathbb{R}^2$ dengan operasi penjumlahan dan perkalian skalarnya didefinisikan berturut-turut sbb:

$$(u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2), k(u_1, v_1) = (ku_1, 0)$$

Apakah V ruang vektor?

Theorem 2.1.

Misalkan V ruang vektor dan misalkan $u \in V$ dan k skalar. Maka:

1. $0u = 0.$
2. $k0 = 0.$
3. $(-1)u = -u$
4. *Jika* $ku = 0$, *maka* $k = 0$ *atau* $u = 0.$

Latihan Soal

1. Anggap $V = \mathbb{R}^3$ dengan operasi penjumlahan dan perkalian skalar diberikan oleh

$$(x, y, z)+(a, b, c) = (x+a, y+b, z+c), \quad \text{dan} \quad k(x, y, z) = (0, 0, 0).$$

   Apakah V ruang vektor?

2. Misalkan V himpunan semua bilangan riil positif dengan operasi diberikan oleh

$$x + y = xy, \quad \text{dan} \quad kx = x^k.$$

   Periksa apakah V ruang vektor?

3. Misalkan V himpunan matriks 2×2 yang berbentuk

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

Terhadap operasi penjumlah dan perkalian skalar matriks, apakah V ruang vektor?

Definition 3.1.

Misalkan W himpunan bagian dari V yang memuat setidaknya satu vektor. W dikatakan subruang dari V jika W sendiri adalah ruang vektor di bawah penjumlahan dan perkalian skalar yang didefinisikan di V.

Contoh

Diketahui bahwa $V = \mathbb{R}^2$ adalah ruang vektor terhadap operasi penjumlahan dan perkalian skalar biasa. Sekarang misalkan $W = \{(a, 0) \in \mathbb{R}^2; a, b \in \mathbb{R}\}$ himpunan bagian $\mathbb{R}^2$. Periksa apakah W subruang V.

Theorem 3.2.

Misalkan $W \subseteq V$ yang tak kosong. W subruang V jika dan hanya jika

1. *Tertutup operasi penjumlahan, dan*
2. *Tertutup terhadap operasi perkalian skalar.*

- Tinjau Sistem-sistem persamaan linear berikut

a. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 3 & -6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$

b. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 7 & -8 \\ -2 & 4 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$

c. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 7 & -8 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$

d. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

apakah ruang penyelesain SPL homogen tersebut adalah subruang dari $\mathbb{R}^3$?.

Secara umum diperoleh bahwa

Theorem 3.3.

Jika $Ax = 0$ suatu SPL homogen dari m persamaan dan n variable maka himpunan penyelesaiannya adalah sub ruang dari $\mathbb{R}^n$.

Misalkan W merupakan subhimpunan dari sebuah ruang vektor V

W dinamakan **subruang** (*subspace*) V jika W juga merupakan ruang vektor yang tertutup terhadap operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar.

Syarat W disebut subruang dari V adalah :

1. $W \neq \{\}$
2. $W \subseteq V$
3. Jika $\bar{u}, \bar{v} \in W$ maka $\bar{u} + \bar{v} \in W$
4. Jika $\bar{u} \in W$ dan $k \in$ Riil maka $k\bar{u} \in W$

Contoh :

Tunjukan bahwa himpunan W yang berisi semua matriks orde 2x2 dimana setiap unsur diagonalnya adalah nol merupakan subruang dari ruang vektor matriks 2x2

Jawab :

1. $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W$ maka $W \neq \{\ \}$
2. Jelas bahwa $W \subset M2x2$
3. Ambil sembarang matriks $A, B \in W$

   Tulis

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix} \text{ dan } B = \begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Perhatikan bahwa :

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ini menunjukan bahwa $A + B \in W$

4. Ambil sembarang matriks $A \in$ W dan $k \in$ Riil maka

$$kA = \begin{pmatrix} 0 & ka_1 \\ ka_2 & 0 \end{pmatrix} \in W$$

Ini menunjukan bahwa $kA \in W$

Jadi, W merupakan Subruang dari M2x2.

Contoh :

Periksa apakah himpunan D yang berisi semua matriks orde 2x2 yang determinannya nol merupakan subruang dari ruang vektor M2x2

Jawab :

Ambil sembarang matriks A, B $\in$ W

Pilih $a \neq b$:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$, jelas bahwa *det* (A) = 0

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & a \end{pmatrix}$$, jelas bahwa *det* (B) = 0

Perhatikan bahwa :

$$A + B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Karena $a \neq b$

Maka *det* $(A + B) = a^2 - b^2 \neq 0$

Jadi *D* bukan merupakan subruang
karena tidak tertutup terhadap operasi penjumlahan

Kombinasi Linear

Definition 4.1.

Suatu vektor w disebut kombinasi linear dari vektor-vektor $v_1, v_2, \ldots, v_n$ jika ada skalar $k_1, k_2, \ldots, k_n$ sehingga

$$w = k_1v_1 + k_2v_2 + \cdots + k_nv_n$$

Contoh

- Apakah $w = (9, 2, 7)$ kombinasi linear dari $u = (1, 2, -1)$ dan $v = (6, 4, 2)$.

PEMBANGUN

Definition 4.2.

Diketahui V ruang vektor riil. Misalkan $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$. Jika setiap vektor di V dapat ditulis sebagai kombinasi linear vektor-vektor di S yaitu untuk setiap v di V ada skalar $k_1, k_2, \ldots, k_n$ sehingga $v = k_1v_1 + k_2v_2 + \cdots + k_nv_n$ maka S dikatakan membangun V dan ditulis $V = \text{Span}\, S$.

- Perhatikan bahwa $\text{Span}\, S$ ini adalah subruang dari ruang vektor V. Kita berikan buktinya sebagai berikut :
  a. Karena ada skalar $k_1 = 0, k_2 = 0, \ldots, k_n = 0$ sehingga vektor nol dapat ditulis menjadi $0 = 0v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_n$ maka $0 \in \text{span } S$. Jadi, span S bukan himpunan kosong.

b. Menggunakan sifat ketertutupan penjumlahan dan hasil kali skalar di V maka span $S \subseteq V$.
c. Ambil u, v di span S dan skalar β maka ada skalar-skalar $k_1, k_2, \ldots, k_n$ dan $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sehingga $u = k_1v_1 + k_2v_2 + \cdots + k_nv_n$ dan $u = c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n$. Perhatikan bahwa $u + v$ dan βu dapat ditulis sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Hal ini menunjukkan bahwa $u + v$ dan βu anggota span S. Jadi, span S subruang V

Sebuah vektor $\bar{u}$

dinamakan **kombinasi linear** dari vektor – vektor

$\bar{v}_1, \ \bar{v}_2, \ \dots, \ \bar{v}_n$

jika vektor – vektor tersebut

dapat dinyatakan dalam bentuk :

$$\bar{u} = k_1\bar{v}_1 + k_2\bar{v}_2 + \ \dots \ + k_n\bar{v}_n$$

dimana $k_1, k_2, \dots, k_n$ adalah skalar Riil.

Contoh

Misal $\bar{u} = (2, 4, 0)$, dan $\bar{v} = (1, -1, 3)$

adalah vektor-vektor di R^3.

Apakah vektor berikut merupakan kombinasi linear dari vektor – vektor di atas

a. $\bar{a} = (4, 2, 6)$

b. $\bar{b} = (1, 5, 6)$

c. $\bar{c} = (0, 0, 0)$

Jawab :

a. Tulis $k_1\bar{u} + k_2\bar{v} = \bar{a}$

akan diperiksa apakah ada k_1, k_2,
sehingga kesamaan tersebut dipenuhi.

$$k_1\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Ini dapat ditulis menjadi:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

dengan OBE, diperoleh:

$$\left(\begin{array}{cc:c} 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 1 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc:c} 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Dengan demikian,

$\bar{a}$ merupakan kombinasi linear dari vektor $\bar{u}$ dan $\bar{v}$

atau

$$\vec{a} = \vec{u} + 2\vec{v}$$

b. Tulis :

$$k_1\vec{u} + k_2\vec{v} = \vec{b}$$

$$k_1\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

ini dapat ditulis menjadi:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

dengan OBE dapat kita peroleh :

$$\left(\begin{array}{cc:c} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc:c} 1 & \tfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc:c} 1 & \tfrac{1}{2} & \tfrac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

Baris terakhir pada matriks ini menunjukkan bahwa

SPL tersebut adalah tidak konsisten

(tidak mempunyai solusi).

Jadi, tidak ada nilai k_1 dan k_2 yang memenuhi

➔ **b** tidak dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear

dari **u** dan **v**

c. Dengan memilih $k_1 = 0$ dan $k_2 = 0$,

maka dapat ditulis

$$k_1\vec{u} + k_2\vec{v} = \vec{c}$$

artinya vektor nol merupakan kombinasi linear

dari vektor apapun.

Definisi membangun dan bebas linear

Himpunan vektor

$$S = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n\}$$

dikatakan **membangun** suatu ruang vektor *V*

jika setiap vektor pada *V* selalu dapat dinyatakan

sebagai kombinasi linear dari vektor – vektor di *S*.

Contoh :

Tentukan apakah

$\bar{v}_1 = (1, 1, 2)$,

$\bar{v}_2 = (1, 0, 1)$, dan

$\bar{v}_3 = (2, 1, 3)$

membangun R^3

Jawab :

Ambil sembarang vektor di R^3

misalkan

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

Tulis :

$$\bar{u} = k_1\bar{v}_1 + k_2\bar{v}_2 + k_3\bar{v}_3$$

Sehingga dapat ditulis dalam bentuk :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

Syarat agar dapat dikatakan kombinasi linear

SPL tersebut harus mempunyai solusi (konsisten)

Dengan OBE diperoleh :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & u1 \\ 0 & -1 & -1 & u2 - u1 \\ 0 & 0 & 0 & u3 - u1 - u2 \end{bmatrix}$$

Agar SPL itu konsisten **haruslah** $u_3 - u_2 - u_1 = 0$

Ini kontradiksi dengan pengambilan vektor sembarang (unsur – unsurnya bebas, tak bersyarat)

Dengan demikian vektor – vektor tersebut **tidak membangun** R^3

Misalkan $S = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n\}$

adalah himpunan vektor diruang vektor *V*

S dikatakan **bebas linear** (*linearly independent*)

Jika kombinasi linear :

$$k_1\bar{u}_1 + k_2\bar{u}_1 + \ldots + k_n\bar{u}_n = \bar{0}$$

hanya dipenuhi oleh

$$k_1 = 0 \;,\; k_2 = 0 \;,\ldots,\; k_n = 0$$

Contoh :

Diketahui $\bar{u} = (-1,\ 3,\ 2)$ dan $\bar{a} = (1,\ 1,\ -1)$

Apakah saling bebas linear di R^3

Jawab :

Tulis

$$k_1\vec{u} + k_2\vec{a} = \vec{0}$$

atau

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dengan OBE dapat diperoleh :

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

dengan demikian diperoleh :

$k_1 = 0$ dan $k_2 = 0$.

Ini berarti $\bar{u}$ dan $\bar{a}$ saling bebas linear.

Contoh :

Misalkan

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \bar{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Apakah ketiga vektor diatas saling bebas linear

Jawab :

Tulis :

$$\bar{0} = k_1\bar{a} + k_2\bar{b} + k_3\bar{c}$$

atau

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -6 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k1 \\ k2 \\ k3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dengan OBE diperoleh :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ini menunjukan bahwa

k_1, k_2, k_3 solusi tidak trivial (k_1,k_2,k_3 tdk selalu 0)

Jadi

$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ adalah vektor-vektor yang bergantung linear.

Basis dan Dimensi

Jika V adalah sembarang ruang vektor

dan $S = \{ \bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots , \bar{u}_n \}$ merupakan

himpunan berhingga dari vektor – vektor di V,

maka ***S* dinamakan basis bagi *V***

Jika kedua syarat berikut dipenuhi :

- S membangun V
- S bebas linear

Contoh :

Tunjukan bahwa himpunan matriks berikut :

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \right\}$$

merupakan basis bagi matriks berukuran 2 x 2

Jawab :

Tulis kombinasi linear :

$$k_1 \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{bmatrix} + k_4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

atau

$$\begin{pmatrix} 3k_1 + k_4 & 6k_1 - k_2 - 8k_3 \\ 3k_1 - k_2 - 12k_3 - k_4 & -6k_1 - 4k_3 + 2k_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

dengan menyamakan setiap unsur pada kedua matriks, diperoleh SPL :

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -8 & 0 \\ 3 & -1 & -12 & -1 \\ -6 & 0 & -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

Determinan matriks koefisiennya (MK) = 48

- $det(\text{MK}) \neq 0$ ➔ SPL memiliki solusi untuk setiap a,b,c,d

  Jadi, M membangun M2 x 2

- Ketika $a = 0, b = 0, c = 0, d = 0,$

Karena M bebas linear dan membangun $M_{2 \times 2}$
maka M merupakan basis bagi $M_{2 \times 2}$.
Ingat...
Basis untuk setiap ruang vektor adalah tidak tunggal.

Contoh :

Untuk ruang vektor dari $M_{2 \times 2}$, himpunan matriks :

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

juga merupakan basisnya.

CONTOH

- Apakah $v_1 = \{1, 1, 2\}, v_2 = \{1, 0, 1\}$ dan $\{2, 1, 3\}$ membangun $\mathbb{R}^3$.
  JAWAB
  Kita ambil sebarang vektor di $\mathbb{R}^3$, katakanlah $v = (a, b, c)$. Untuk membuktikan bahwa $\{v_1, v_2, v_3\}$ membangun $\mathbb{R}^3$ kita harus mencari skalar k_1, k_2, k_3 sedemikian sehingga $v = k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3$. Anda buktikan bahwa akhirnya Anda akan memperoleh SPL sebagai berikut :

$$\begin{array}{ccccc} k_1 + k_2 & + & 2k_3 & = & a \\ k_1 & + & k_3 & = & b \\ 2k_1 + k_2 & + & 3k_3 & = & c \end{array}$$

Anda Tunjukkan bahwa ada nilai b_1, b_2, b_3 yang menyebabkan SPL tidak konsisten. Jadi, ada vektor di $\mathbb{R}^3$ yang bukan merupakan kombinasi linear vektor-vektor v_1, v_2, v_3. Kita peroleh,$\{v_1, v_2, v_3\}$ tidak memangun $\mathbb{R}^3$.

Lemma 4.3.

Misalkan $RX = 0$ bentuk eselon tereduksi dari SPL homogen dengan s variabel bebas. Notasikan w_i solusi dari $RX = 0$ untuk variabel bebas yang berpadanan dengan utama 1 dan variabel bebas lainnya nol. maka koleksi $\{w_1, w_2, \ldots, w_s\}$ membangun ruang solusi dan koleksi tersebut adalah ***PEMBANGUN MINIMAL***

- Langkah mencari pembangun minimal adalah
  1. Nyatakan komlin $k_1v_1 + k_2v_2 + \cdots + k_nv_n = 0$

2. Buat SPL homogennya hingga diperoleh matriks lengkap/diperbanyaknya.
3. Lakukan OBE hingga diperoleh matriks dalam bentuk eselon tereduksi.
4. Kolom-kolom yang memuat utama 1 adalah vektor-vektor pembangun minimal sedangkan yang tidak memuat utama 1 dapat dibuang

Perhatikan contoh berikut

- Misalkan $V = span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$. Carilah pembangun minimalnya.

JAWAB

Ikuti prosedur di atas sehingga Anda akan memperoleh

pembangun minimalnya $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Definition 4.4.

Misalkan $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ suatu himpunan vektor-vektor dari V. Himpunan S dikatakan bebas linear jika $k_1 = 0, k_2 = 0, \ldots, k_n = 0$ satu-satunya solusi untuk kombinasi linear

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_n v_n = 0.$$

Jika ada solusi lain maka S disebut *Bergantung linear.*

- Apakah vektor-vektor berikut

$$v_1 = (1, -2, 3), \qquad v_2 = (5, 6, -1), \qquad v_3 = (3, 2, 1)$$

bebas linear di $\mathbb{R}^3$?.
JAWAB
Perhatikan kombinasi linear $k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 = 0$ sehingga diperoleh SPL homogen sebagai berikut :

$$\begin{aligned} k_1 + 5k_2 + 3k_2 &= 0 \\ -2k_1 + 6k_2 + k_3 &= 0 \\ 3k_1 - k_2 + k_3 &= 0 \end{aligned}$$

Anda buktikan dengan mereduksi matriks lengkapnya sehingga diperoleh matriks eselon tereduksi. SPL homogen tersebut ternyata mempunyai solusi tak trivial. Jadi ada solusi lain selain nol dan hal ini menunjukkan $\{v_1, v_2, v_3\}$ himpunan yang bergantung linear.

BASIS

Definition 4.5.

Jika V sebarang ruang vektor dan $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subseteq V$, maka S disebut BASIS untuk V jika dipenuhi dua syarat berikut:

1. S himpunan yang bebas linear.
2. V =span S.

Definition 4.6.

Banyaknya vektor-vektor dalam basis disebut dimensi.

Berikut beberapa ruang vektor real beserta basis standarnya

1. $\mathbb{R}^n$ himpunan semua ganda n bilangan real dimana basis standarnya.

$$\left\{ e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

   Dimensi $\mathbb{R}^n$ adalah n.

2. $\mathbf{P}_n$ adalah himpunan semua polinom berderajat paling tinggi n, basis standarnya adalah $\{1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n\}$ dengan dimensinya adalah $n+1$

- Apakah $X = \{(1,0,1),(1,1,2),(-1,1,-2)\}$ merupakan basis bagi $\mathbb{R}^3$?
  Anda harus memeriksa 2 hal yaitu (1). Buktikan bahwa $\mathbb{R}^3 = \operatorname{span} X$ dan (2)Anda tunjukkan bahwa X himpunan yang bebas linear di $\mathbb{R}^3$.

Latihan Soal

Berikan Argumen yang benar untuk setiap jawaban yang Anda berikan.

1. a. Periksa apakah

$$\mathbf{H} = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \backslash \int_0^1 (aX^2 + bX + c)\, d\, X = 0 \right\}$$

   subruang dari $\mathbb{R}^3$

   b. Misalkan $\mathbf{P}_2$ menyatakan ruang polinom atas $\mathbb{R}$ yang berderajat paling tinggi 2. Asumsikan subhimpunan $X = \{1 + x, 1 + x - x^2, x^2, 1 - x\} \subseteq \mathbf{P}_2$ membangun $\mathbf{P}_2$. Bangunlah sebuah basis $Y \subseteq X$ bagi $\mathbf{P}_2$.

2. Misalkan V suatu ruang vektor real dan $W = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subseteq V$. Buktikan bahwa span W subruang dari V.
3. Diketahui $M_2(\mathbb{R})$ himpunan semua matriks berordo 2×2 adalah ruang vektor real dan $Y = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \text{rank}(A) = 1\}$. Apakah Y subruang dari $M_n(\mathbb{R})$.
4. Tentukan apakah $v_1 = (1, 1, 2), v_2 = (1, 0, 1), v_3 = (2, 1, 3)$ membangun ruang vektor $\mathbb{R}^3$. Jelaskan
5. Carilah basis $R = \{(a, 0, 0) : a \in \mathbb{R}\}$ yang merupakan subruang $\mathbb{R}^3$. Kemudian buktikan jawaban Anda.
6. Carilah basis $W = \{(a, a + c, c) : a, c \in \mathbb{R}\}$ yang merupakan subruang $\mathbb{R}^3$. Kemudian jelaskan Jawaban Anda.
7. Tentukan basis dan dimensi dari subruang $\mathbb{R}^4$ berikut ini.

a. $W_1 = \{(a, b, c, 0) | a, b, c \in \mathbb{R}\}$
b. $W_2 = \{(a, b, a - b, a + b) | a, b \in \mathbb{R}\}$
c. $W_3 = \{(a, a, a, a) | a \in \mathbb{R}\}$

8. Tentukan basis dan dimensi subruang dari P_3 yang terdiri dari semua polinom berbentuk $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ di mana $a_0 = 0$
9. Misalkan V suatu ruang vektor real.Misalkan $\overline{v} \in V$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
   Apakah berlaku jika $\overline{v} \neq 0$ dan $\alpha\overline{v} = \beta\overline{v}$, maka $\alpha = \beta$?
10. Misalkan V suatu ruang vektor real. Diketahui vektor-vektor berikut :

$$\overline{u} = (1, 0, 1), \overline{v} = (1, 2, 3), \overline{w} = (3, 2, 1), \overline{a} = (1, 4, 1)$$

   Himpunan $S = \{\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}\}$ merupakan basis bagi V.

a. Apakah $\overline{a} \in V$? Jelaskan.

b. Apakah $S' = \{\overline{a} + \overline{u}, \overline{a} + \overline{v}, \overline{a} + \overline{w}\}$ juga merupakan basis untuk V?Jelaskan.

11. Diketahui $V = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$.Definisikan

$$x \oplus y = xy, \qquad \alpha \odot x = x^{\alpha}.$$

Buktikan bahwa V ruang vektor real.

12. Selidiki apakah Himpunan semua pasangan *triple* terurut bilangan real dengan operasi
$(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$ dan
$\beta(x, y, z) = (0, 0, 0)$ merupakan ruang vektor real?Kalau bukan, Anda tuliskan sifat mana yang gagal untuk dipenuhi.

13. Selidiki apakah Himpunan semua matriks 2x2 dengan entri real berbentuk
$$\begin{bmatrix} a & a+b \\ a+b & b \end{bmatrix}$$
dengan penjumlahan dan perkalian skalar biasa merupakan ruang vektor?Jika bukan tuliskan sifat yang tidak terpenuhinya.
14. Diketahui bahwa M_n himpunan semua matriks berukuran $n \times n$ dengan entri semuanya real. Manakah yang berikut yang merupakan ruang bagian dari M_n
    a. $W_1 = \{A \in M_n | trace(A) = 0\}$.
    b. $W_2 = \{A \in M_n | A^T = -A\}$
15. Manakah yang merupakan ruang bagian dari P_3
    a. $U_1 = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 | a_0 = 0\}$
    b. $U_2 = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 | a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0\}$

c. $U_3 = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 | a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Z}\}$.

16. Untuk nilai real λ berapakah vektor-vektor berikut membentuk suatu himpunan yang bergantung linier di $\mathbb{R}^3$?

$$\overline{v}_1 = (\lambda, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}), \quad \overline{v}_2 = (\frac{-1}{2}, \lambda, \frac{-1}{2}), \quad \overline{v}_1 = (\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, \lambda)$$

17. Buktikan bahwa jika $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2\}$ bebas linier dan $\overline{v}_3 \notin span\{\overline{v}_1, \overline{v}_2\}$, maka $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\}$ bebas linier
18. Buktikan bahwa jika $\overline{y}$ kombinasi linier dari $\overline{x}_1$,. . . ,$\overline{x}_n$, maka

$$span\{\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n\} = span\{\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n, \overline{y}\}$$

19. Apakah polinom $t^3 + 2t + 1, t^2 - t + 2, t^3 + 2, -t^3 + t^2 - 5t + 2$ membangun P_3?

20. Diketahui $V = \mathbb{R}^3$ dan $S = \{\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \overline{x}_4, \overline{x}_5\}$ dimana $\overline{x}_1 = [1, 0, 1], \overline{x}_2 = [0, 1, 1], \overline{x}_3 = [1, 1, 2], \overline{x}_4 = [1, 2, 1]$ dan $\overline{x}_5 = [-1, 1, -2]$.Apakah S membangun V? Carilah basis untuk V yang merupakan himpunan bagian dari S.
21. Temukan nilai a sehingga $\{[a^2, 0, 1], [0, a, 2], [1, 0, 1]\}$ merupakan basis bagi $\mathbb{R}^3$.
22. Buktikan bahwa $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ basis untuk M_2.
23. Mana dari yang berikut ini merupakan basis bagi $\mathbb{R}^3$.
    a. $\{t^3 + 2t^2 + 3t, 2t^3 + 1, 6t^3 + 8t^2 + 6t + 4, t^3 + 2t^2 + t + 1\}$
    b. $\{t^3 + t^2 + 1, t^3 - 1, t^3 + t^2 + t\}$

24. Apakah ruang vektor real V merupakan basis bagi dirinya sendiri?jelaskan.
25. Misalkan W ruang bagian dari P_3 yang dibangun oleh
$$X = \{t^3 + t^2 - 2t + 1, t^2 + 1, t^3 - 2t, 2t^3 + 3t^2 - 4t + 3\}$$
Carilah suatu basis untuk W dan temukan dimensi dari W.
26. Pandang $V = span \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}$.
Tentukan suatu basis untuk V.
27. Perluaslah $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ menjadi basis untuk M_2.

28. Perluas $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ menjadi basis bagi $\mathbb{R}^4$.