ALJABAR LINEAR ELEMENTER
(4 sks(3-1))

Kelas A : Edi Kurniadi,M.Si.,Ph.D
Kelas B : Dr. Sisilia Sylviani, S.Si., M.Si.

Program Studi S1 Matematika FMIPA Unpad

15 September 2022

Determinan Matriks 2×2.

Untuk matriks $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, matriks A invertible jika $ad - bc \neq 0$ dan inversnya diberikan oleh

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Ekspresi $ad - bc$ disebut determinan matriks A dan dinotasikan dengan $\det(A)$ atau $|A|$.

Definisi Determinan

Untuk mendefinisikan determinan tersebut, kita memerlukan beberapa persiapan sebagai berikut

1. Permutasi himpunan bilangan bulat $\{1, 2, \ldots, n\}$ yaitu susunan bilangan dalam suatu urutan tanpa pengilangan. Tentukan semua permutasi $\{1, 2, 3\}$.
2. Pembalikan dalam suatu permutasi $\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$ dengan $n_1, n_2, \ldots, n_k$ bilangan bulat yang memenuhi $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$, yaitu jika bilangan bulat yang lebih besar mendahului bilangan bulat yang lebih kecil. Tentukan banyaknya pembalikan pada permutasi dari himunan $\{1, 2, 3\}$.

3. Pengelompokan permutasi ganjil(jika total pembalikan suatu permutasi bilangan adalah bilangan ganjil) atau genap(jika total pembalikan suatu permutasi bilangan adalah bilangan genap). Tentukan permutasi ganjil atau genap permutasi dari himpunan $\{1, 2, 3\}$.
4. Hasil kali dasar dan hasil kali dasar bertanda pada matriks $n \times n$.Tentukan semua hasil kali dasar dan hasil kali dasar bertanda pada matriks 3×3 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$.

Theorem

Misalkan A matriks persegi. Fungsi determinan $\det(A)$ *didefinisikan sebagai jumlah semua hasil kali dasar bertanda A.*

Ada 2 cara untuk menghitung determinan :

1. Menggunakan OBE
2. Perluasan Kofaktor

Sifat-sifat Determinan I

Misalkan A matriks persegi. Beberapa sifat determinan sebagai berikut :

1. Jika A mempunyai baris atau kolom nol maka $\det(A) = 0$.
2. Jika A mempunyai dua baris atau kolom yang proporsional (baris atau kolom satu kelipatan yang lainnya) maka $\det(A) = 0$.

3. $\det(A) = \det(A^T)$.
4. Jika A matriks segitiga atau matriks diagonal, maka $\det(A)$ adalah hasil kali semua entri pada diagonal utamanya.

Menghitung determinan dengan Pengaruh OBE

Theorem

Misalkan A matriks persegi berukuran $n \times n$.

1. *Jika matriks B diperoleh dengan mengalikan baris atau kolom tunggal dari A dengan skalar k, maka* $\det(B) = k\det(A)$.
2. *Jika B diperoleh dengan mempertukarkan baris atau kolom A, maka* $\det(B) = -\det(A)$.
3. *Jika B diperoleh dengan menambahkan kelipatan suatu baris atau kolom ke baris atau kolom yang lain dari A, maka* $\det(B) = \det(A)$.

Perhatikan Contoh-contoh berikut ini

1. Gunakan OBE untuk menghitung
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}.$$
2. Hitung $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & 6 & -4 & 8 \\ 3 & 9 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 8 \end{vmatrix}.$
3. Hitung $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ -8 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 7 & 0 & -1 & 0 \\ 9 & 5 & 6 & 1 \end{vmatrix}$

Hitung Determinan matriks Berikut ini

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 4 & 6 & 7 \\ 0 & 3 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

Sifat-sifat determinan tersebut kita rangkum sebagai berikut:

1. Jika A dan B matriks-matriks persegi berukuran sama maka $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
2. Umumnya tidak benar bahwa $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.

Theorem

Misalkan $A, B,$ dan C matriks berukuran $n \times n$ yang berbeda hanya pada salah satu barisnya, katakan baris ke r, dan baris r pada matriks C diperoleh dengan menambahkan anggota yang berpadanan dari baris ke r pada matriks A dan B, maka $\det(C) = \det(A) + \det(B)$.

3. Misalkan A berukuran $n \times n$, $\det(kA) = k^n \det(A)$.

4. Matriks A invertible jika dan hanya jika $\det(A) \neq 0$. Selanjutnya, jika A invertible maka

$$\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Periksa apakah matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ invertible ?.

Definition

Misalkan $A = [a_{ij}]$ matriks persegi. Minor anggota a_{ij} adalah M_{ij} yang didefinisikan sebagai determinan submatriks setelah baris ke i dan kolom ke j dari matriks A dihilangkan. Bilangan $(-1)^{i+j}M_{ij}$ disebut kofaktor a_{ij} dan dinyatakan oleh C_{ij}.

Misalkan akan dicari semua minor dan kofaktor matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ingat bahwa minor M_{ij} adalah determinan submatriks A setelah baris ke i dan kolom ke j dari A dihapus. Oleh karena itu, Semua minor dari A adalah:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6, M_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -12, M_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -8,$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3, M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3, M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3,$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0, M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 6, M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4.$$

Sedangkan kofaktor $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$. Oleh karena itu, Semua kofaktor dari A adalah:

$$
\begin{aligned}
C_{11} &= (-1)^{1+1} M_{11} = 1.6 = 6, \\
C_{12} &= (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)(-12) = 12, \\
C_{13} &= (-1)^{1+3} M_{13} = 1(-8) = -8, \\
C_{21} &= (-1)^{2+1} M_{21} = (-1).3 = -3, \\
C_{22} &= (-1)^{2+2} M_{22} = 1.(-3) = -3, \\
C_{23} &= (-1)^{2+3} M_{23} = (-1)(-3) = 3, \\
C_{31} &= (-1)^{3+1} M_{31} = 1.0 = 0, \\
C_{32} &= (-1)^{3+2} M_{32} = (-1)6 = -6, \\
C_{33} &= (-1)^{3+3} M_{33} = 1.4 = 4.
\end{aligned}
$$

Menghitung Determinan Dengan Perluasan Kofaktor.

Theorem

Determinan suatu matriks persegi $n \times n$ dapat dihitung dengan perluasan kofaktor

1. *Sepanjang baris ke i.*

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}. \tag{1}$$

2. *Sepanjang kolom ke j*

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}. \tag{2}$$

Determinan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ dapat dihitung dengan perluasan kofaktor sepanjang baris atau sepanjang kolom.

1. Perluasan sepanjang baris. Misalkan dipilih baris ke 1.

$$\begin{aligned} \det(A) &= 1\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1.6 - 2(-12) + 3(-8) = 6. \end{aligned}$$

2. Perluasan sepanjang kolom ke 1.

$$\det(A) = 1\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 1.6 - 0(3) + 2.0 = 6.$$

Latihan soal

a. Hitung determinan matriks $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ dengan perluasan kofaktor.

b. Hitung determinan matriks $\begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

Definition

Misalkan A matriks persegi $n \times n$ dan misalkan C matriks kofaktor dari A yaitu matriks yang memauat semua kofaktor dari A dimana entri-entri C bersesuaian dengan entri-entri A. Transpos matriks C disebut adjoint dari A dan dinotasikan dengan $\mathrm{Ad}\,(A)$.

Selanjutnya kita juga mempunyai teorema berikut ini :

Theorem

Misalkan matriks A invertible, maka

$$A^{-1} = \frac{1}{\det\,(A}\,\mathrm{Adj}\,(A).$$

Tentukan invers dari matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. Matriks kofaktor dari A adalah

$$C = \begin{bmatrix} 6 & 12 & -8 \\ -3 & -3 & 3 \\ 0 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

Sehingga matriks adjoin dari A adalah

$$\mathrm{Adj}\,(A) = C^T = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 12 & -3 & -6 \\ -8 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Karena determinan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ adalah 6 maka A invertible. Invers matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ adalah

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{Adj}(A) = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 12 & -3 & -6 \\ -8 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

- Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$. Tentukan
  1. Semua minor dan kofaktor A.
  2. Matriks kofaktor dan adjoin A.
  3. $|A|$.
  4. A^{-1}.

Latihan Soal

1. Diketahui determinan $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -6.$
   - Hitung $\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix}.$
   - Hitung $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ -d & -e & -f \\ 4g & 4h & 4i \end{vmatrix}.$
   - Hitung $\begin{vmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}.$
   - Hitung $\begin{vmatrix} -3a & -3b & -3c \\ d & e & f \\ g-4d & h-4e & i-4f \end{vmatrix}.$

2. Hitung determinan $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & -9 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & -6 & -2 \\ 2 & 8 & 6 & 1 \end{vmatrix}$.

3. Gunakan OBE untuk membuktikan
$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$

4. Hitunglah $\begin{vmatrix} -2 & 8 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 7 & 0 \\ 4 & -6 & 4 & -3 \end{vmatrix}$.

5. Misalkan $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -7$. Hitunglah $\det(3A), \det(A^{-1}), \det(2A^{-1}), \det((2A)^{-1})$, dan $\begin{vmatrix} a & g & d \\ b & h & e \\ c & i & f \end{vmatrix}$.
6. Buktikan bahwa matriks persegi A invertible jika dan hanya jika AA^T invertible.
7. apakah matriks

$$\begin{bmatrix} \sin^2\alpha & \sin^2\beta & \sin^2\gamma \\ \cos^2\alpha & \cos^2\beta & \cos^2\gamma \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

invertible?jelaskan?

8. Hitung determinan $\begin{bmatrix} b+c & c+a & b+a \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

9. Hitung invers matriks berikut jika ada dengan menggunakan rumus adjoint

$$X = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 11 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

10. Hitung invers matriks berikut jika ada dengan menggunakan rumus adjoint

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}.$$