

# ALJABAR LINEAR ELEMENTER

## (sks : 4(3-1) )

Kelas A : Edi Kurniadi,M.Si.,Ph.D

Kelas B : Dr. Sisilia Sylviani, M.Si

Program Studi S1 Matematika FMIPA Unpad

13 Oktober 2022

## 1 Vektor Geometris

- Notasi dan Operasi
- Vektor dalam sistem koordinat  $\mathbb{R}^2$  dan  $\mathbb{R}^3$

## 2 Latihan Soal

## 3 Aritmetika Vector

- Operasi Vektor
- Norm Suatu vektor

## 4 Latihan Soal

## 5 Hasil kali titik

- Rumus Komponen untuk hasil kali titik
- Vektor-vektor Ortogonal
- Proyeksi Ortogonal

## 6 Hasil Kali Silang

- Interpretasi Geometris Hasil kali silang

## Contents

- Vektor Geometris
  - Latihan Soal
- Aritmetika Vector
  - Latihan Soal
  - Hasil kali titik
  - Hasil Kali Silang

- Garis dan Bidang di  $\mathbb{R}^3$
- Garis dalam  $\mathbb{R}^3$

- Secara geometris, dalam  $\mathbb{R}^2$  dan  $\mathbb{R}^3$  vektor dapat direpresentasikan sebagai ruang garis berarah atau panah yang mempunyai arah dan panjang. vektor yang bermula dari suatu titik pangkal  $A$  dan berakhir di titik ujung  $B$  dan dinotasikan dengan  $\vec{v} = \vec{AB}$ .
- Notasinya menggunakan huruf kecil bergaris seperti  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ , dan lain-lain.
- Dua vektor  $\vec{a}$  dan  $\vec{b}$  dikatakan sama jika  $\vec{a} = \vec{b}$ .

## Definition

Jika  $\vec{a}$  dan  $\vec{b}$  dua vektor sembarang, maka

- Jumlah  $\vec{a} + \vec{b}$  diperoleh dengan meletakkan pangkal vektor  $\vec{b}$  di ujung vektor  $\vec{a}$ . Hasil  $\vec{a} + \vec{b}$  adalah ruas garis dari pangkal  $\vec{a}$  ke ujung  $\vec{b}$ . Gambarkan!
- Selisih  $\vec{b}$  dari  $\vec{a}$  didefinisikan sebagai

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

- Jika  $\vec{a}$  vektor tak nol dan  $k$  skalar riil tak nol, maka vektor  $k\vec{a}$  didefinisikan sebagai vektor yang panjangnya  $|k|$  kali panjang  $\vec{a}$  dan arahnya searah  $\vec{a}$  jika  $k$  positif dan berlawanan arah jika  $k$  negatif. Untuk  $k = 0$  atau  $\vec{a} = 0$ , maka  $k\vec{a} = 0$ .

di  $\mathbb{R}^2$

- a. Misalkan  $\vec{v}$  suatu vektor di bidang yang titik pangkalnya adalah titik asal koordinat. Koordinat  $(v_1, v_2)$  dari titik ujung  $\vec{v}$  disebut komponen  $\vec{v}$  dan ditulis dengan  $\vec{v} = (v_1, v_2)$ .
- b. Vektor  $\vec{v} = (v_1, v_2)$  dan  $\vec{w} = (w_1, w_2)$  dikatakan ekuivalen jika dan hanya jika  $v_1 = w_1$  dan  $v_2 = w_2$ .  
Operasi lainnya bisa tuliskan sebagai berikut
  - ①  $\vec{v} \pm \vec{w} = (v_1 \pm w_1, v_2 \pm w_2)$ .
  - ②  $k\vec{v} = (kv_1, kv_2)$ .

di  $\mathbb{R}^3$

Dengan menggunakan notasi di  $\mathbb{R}^2$ , kita peroleh hal yang sama untuk  $\mathbb{R}^3$ .

- a. Misalkan  $\vec{v}$  suatu vektor di ruang yang titik pangkalnya adalah titik asal koordinat. Koordinat  $(v_1, v_2, v_3)$  dari titik ujung  $\vec{v}$  disebut komponen  $\vec{v}$  dan ditulis dengan  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ .
- b. Vektor  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$  dan  $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$  dikatakan ekuivalen jika dan hanya jika  $v_1 = w_1$ ,  $v_2 = w_2$ , dan  $v_3 = w_3$ .

Operasi lainnya bisa kita tuliskan sebagai berikut

- ①  $\vec{v} \pm \vec{w} = (v_1 \pm w_1, v_2 \pm w_2, v_3 \pm w_3)$ .
- ②  $k\vec{v} = (kv_1, kv_2, kv_3)$ .

## Contoh

- ① Jika  $\vec{v} = (1, -3, 2)$  dan  $\vec{w} = (4, 2, 1)$ , tentukan  $\vec{v} \pm \vec{w}$ ,  $2\vec{v}$ .
- ② Komponen vektor  $\vec{v}$  dengan titik pangkal  $P_1(2, -1, 4)$  dan titik ujung  $P_2(7, 5, -8)$ . Tentukan  $\vec{v}$ .

## Pergeseran Sumbu

Misalkan di  $\mathbb{R}^2$  kita lakukan pergeseran sistem koordinat  $xy$  menjadi sistem koordinat  $x'y'$ .

Perhatikan gambar berikut ini :

Dari gambar di atas diperoleh bahwa  $O'\vec{P}$  pada sistem  $xy$  mempunyai titik pangkal  $(k, l)$  dengan titik ujung  $(x, y)$ , sedangkan pada sistem  $x'y'$  mempunyai titik pangkal  $(0, 0)$  dan

titik ujungnya  $(x', y')$ . Sehingga diperoleh hubungan bahwa  $x' = x - k$  dan  $y' = y - l$ .

- ➊ Cari suatu vektor tak nol  $\vec{u}$  dengan titik pangkal  $P(-1, 3, -5)$  sedemikian sehingga
  - a.  $\vec{u}$  mempunyai arah yang sama dengan  $\vec{v} = (6, 7, -3)$ .
  - b.  $\vec{u}$  berlawanan arah dengan  $\vec{v} = (6, 7, -3)$ .
- ➋ Tentukan skalar  $\alpha_1, \alpha_2$ , dan  $\alpha_3$  (jika ada) yang memenuhi
$$\alpha_1(-2, 9, 6) + \alpha_2(-3, 2, 1) + \alpha_3(1, 7, 5) = (0, 5, 4)$$
- ➌ Anggap  $P$  adalah titik  $(2, 3, -2)$  dan  $Q$  titik  $(7, -4, 1)$ .
  - a. Cari titik tengah ruas garis yang menghubungkan  $P$  dan  $Q$ .
  - b. Cari titik ruas garis yang menghubungkan  $P$  dan  $Q$  yang berada di  $\frac{3}{4}$  jarak dari  $P$  ke  $Q$ .

## Sifat Operasi Vektor di $\mathbb{R}^{2(3)}$

### Theorem

Misalkan  $\vec{u}, \vec{v}$ , dan  $\vec{w}$  vektor-vektor di bidang dan ruang dengan  $k, l$  skalar. Kita peroleh

- a.  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ .
- b.  $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$ .
- c.  $k(l\vec{u}) = (kl)\vec{u}$ .
- d.  $(k + l)\vec{u} = k\vec{u} + l\vec{u}$ .
- e.  $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ .
- f.  $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$ .
- g.  $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$ .
- h.  $1\vec{u} = \vec{u}$ .



- ① Misalkan  $\vec{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$  dan  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ . Norm vektor tersebut didefinisikan sbb:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}, \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}.$$

- ② Jika  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  dan  $P_2(x_2, y_2, z_2)$  adalah titik di  $\mathbb{R}^3$  maka jarak antara kedua titik tersebut adalah norm  $\vec{P_1 P_2}$
- ③ Vektor dengan norm 1 disebut dengan vektor satuan.

- ① Anggap  $\vec{v} = (-1, 2, 5)$ . Cari semua skalar sedemikian sehingga  $||k\vec{v}|| = 4$ .
- ② Tunjukkan bahwa jika  $\vec{v}$  adalah sembarang vektor tak nol, maka  $\frac{1}{||\vec{v}||}\vec{v}$  adalah suatu vektor satuan.
- ③ Cari vektor satuan yang mempunyai arah yang sama dengan  $v = (3, 4)$ .
- ④ Cari vektor satuan yang mempunyai arah yang berlawanan dengan  $v = (-2, 3, -6)$ .

- Misalkan  $\vec{u}$  dan  $\vec{v}$  vektor tak nol di  $\mathbb{R}^{2(3)}$ .
- Sudut antara  $\vec{u}$  dan  $\vec{v}$  adalah sudut  $\theta$  yang memenuhi  $0 \leq \theta \leq \pi$ .

Perhatikan gambar berikut :

## Definition

Jika  $\vec{u}$  dan  $\vec{v}$  vektor di  $\mathbb{R}^{2(3)}$  dengan  $0 \leq \theta < \pi/2$  sudut antara  $\vec{u}$  dan  $\vec{v}$ , maka hasil kali titik atau hasil kali dalam Euclidean  $\vec{u} \bullet \vec{v}$  didefinisikan sebagai

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = \begin{cases} ||\vec{u}|| ||\vec{v}|| \cos \theta & \text{jika } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ dan } \vec{v} \neq \vec{0} \\ 0 & \text{jika } \vec{u} = \vec{0} \text{ atau } \vec{v} = \vec{0} \end{cases}$$

Sebagai contoh, tentukan hasil kali titik  $\vec{u} = (0, 0, 1)$  dan  $\vec{v} = (0, 2, 2)$  dengan sudut  $45^\circ$ .

Perhatikan gambar berikut ini :

Gunakan gambar di atas untuk membuktikan bahwa

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.$$

- Diketahui  $\vec{u} = (2, -1, 1)$  dan  $\vec{v} = (1, 1, 2)$ . Cari  $\vec{u} \bullet \vec{v}$  dan sudut antara keduanya.

Selanjutnya hasil kali titik bisa digunakan untuk memperoleh informasi sudut antara dua vektor sbb:

### Theorem

Misalkan  $\vec{u}$  dan  $\vec{v}$  vektor di  $\mathbb{R}^{2(3)}$ .

- ①  $\vec{u} \bullet \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$ .
- ② Jika  $\vec{u}$  dan  $\vec{v}$  vektor tak nol di  $\mathbb{R}^{2(3)}$  dan  $\theta$  sudut antara keduanya, maka
  - ①  $\theta$  lancip jika dan hanya jika  $\vec{u} \bullet \vec{v} > 0$ .
  - ②  $\theta$  tumpul jika dan hanya jika  $\vec{u} \bullet \vec{v} < 0$ .
  - ③  $\theta = \pi/2$  jika dan hanya jika  $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$ .

- ① Tentukan jenis sudut yang terbentuk antara vektor  $\vec{u}$  dan  $\vec{v}$ , antara vektor  $\vec{v}$  dan  $\vec{w}$ , antara vektor  $\vec{u}$  dan  $\vec{w}$  jika  $\vec{u} = (1, -2, 3)$ ,  $\vec{v} = (-3, 4, 1)$  dan  $\vec{w} = (3, 6, 3)$ .

- Vektor-vektor yang tegak lurus disebut juga vektor-vektor ortogonal.
- Dua vektor  $\vec{u}$  dan  $\vec{v}$  dikatakan ortogonal jika hasil kali titiknya sama dengan nol dan dinotasikan  $\vec{u} \perp \vec{v}$ .
- Buktikan bahwa di  $\mathbb{R}^2$  vektor tak nol  $\vec{n} = (a, b)$  tegak lurus dengan garis  $ax + by + c = 0$ .

## Theorem

Misalkan  $\vec{u}$  dan  $\vec{v}$  vektor-vektor di  $\mathbb{R}^{2(3)}$  dan  $k$  skalar. Kita peroleh bahwa

- a.  $\vec{u} \bullet \vec{v} = \vec{v} \bullet \vec{u}$ .
- b.  $\vec{u} \bullet (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{u} \bullet \vec{w}$ .
- c.  $k(\vec{u} \bullet \vec{v}) = (k\vec{u}) \bullet \vec{v} = \vec{u} \bullet (k\vec{v})$
- d.  $\vec{v} \bullet \vec{v} > 0$  jika  $\vec{v} \neq \vec{0}$  dan  $\vec{v} \bullet \vec{v} = 0$  jika  $\vec{v} = \vec{0}$ .

- Suatu vektor tak nol  $\vec{u}$  dapat didekomposisi menjadi jumlah dua vektor, yaitu satu sejajar dengan  $\vec{u}$  dan yang lainnya tegak lurus dengan  $\vec{u}$ .

Perhatikan gambar berikut ini : Kita peroleh bahwa

$$\vec{w}_1 + \vec{w}_2 = \vec{w}_1 + (\vec{u} - \vec{w}_1) = \vec{u}.$$

- a. Vektor  $\vec{w}_1$  disebut proyeksi ortogonal dari  $\vec{u}$  pada  $\vec{a}$  atau komponen vektor  $\vec{u}$  yang sejajar dengan  $\vec{a}$  dan dinotasikan dengan  $\text{Proy}_{\vec{a}}\vec{u}$ .

- b. Vektor  $\vec{w}_2$  disebut komponen vektor  $\vec{u}$  yang ortogonal terhadap  $\vec{a}$ . Kita peroleh bahwa

$$\vec{w}_2 = \vec{u} - \text{Proy}_{\vec{a}}\vec{u}.$$

### Theorem

Jika  $\vec{u}$  dan  $\vec{a}$  vektor-vektor di  $\mathbb{R}^{2(3)}$  dan  $\vec{a} \neq \vec{0}$ , maka

- a.  $\text{Proy}_{\vec{a}}\vec{u} = \frac{\vec{u} \bullet \vec{a}}{\|\vec{a}\|^2} \vec{a}$ . (Komponen vektor  $\vec{u}$  yang sejajar  $\vec{a}$ ).  
b.  $\vec{u} - \text{Proy}_{\vec{a}}\vec{u} = \vec{u} - \frac{\vec{u} \bullet \vec{a}}{\|\vec{a}\|^2} \vec{a}$ . (Komponen vektor  $\vec{u}$  yang ortogonal  $\vec{a}$ ).

## Remark

Norm  $\|\text{Proy}_{\vec{a}} \vec{u}\| = \frac{|\vec{u} \bullet \vec{a}|}{\|\vec{a}\|}$  atau  $\|\text{Proy}_{\vec{a}} \vec{u}\| = \|\vec{u}\| |\cos \theta|$  dengan  $\theta$  sudut antara  $\vec{u}$  dan  $\vec{a}$ .

- ① Misalkan  $\vec{u} = (2, -1, 3)$  dan  $\vec{v} = (4, -1, 2)$ . Cari komponen vektor  $\vec{u}$  yang sejajar  $\vec{a}$  dan komponen vektor  $\vec{u}$  yang tegak lurus  $\vec{a}$ .
- ② Cari suatu rumus untuk jarak  $D$  antara titik  $P_0(x_0, y_0)$  dan garis  $ax + by + c = 0$ .

## Definition

Misalkan  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$  dan  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$  vektor-vektor di  $\mathbb{R}^3$ , maka hasil kali silang  $\vec{u} \times \vec{v}$  adalah vektor yang didefinisikan oleh

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left( \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right).$$

- Tentukan hasil kali silang  $\vec{u} \times \vec{v}$  dengan  $\vec{u} = (1, 2, -2)$  dan  $\vec{v} = (3, 0, 1)$ .

Berikut adalah sifat-sifat dari hasil kali silang

### Theorem

Jika  $\vec{u}$  dan  $\vec{v}$  vektor-vektor di  $\mathbb{R}^3$  maka

- ①  $\vec{u} \bullet (\vec{u} \times \vec{v}) = 0.$
- ②  $\vec{v} \bullet (\vec{u} \times \vec{v}) = 0.$
- ③  $||\vec{u} \times \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 ||\vec{v}||^2 - (\vec{u} \bullet \vec{v})^2,$
- ④  $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \bullet \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \bullet \vec{v})\vec{w}.$
- ⑤  $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \bullet \vec{w})\vec{v} - (\vec{v} \bullet \vec{w})\vec{u}.$

Sifat lainnya dari hasil kali silang adalah

## Theorem

Misalkan  $\vec{u}, \vec{v}$  dan  $\vec{w}$  vektor-vektor di  $\mathbb{R}^3$  dan  $k$  suatu skalar, maka

- ①  $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u}).$
- ②  $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w}).$
- ③  $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \times \vec{w}) + (\vec{v} \times \vec{w}).$
- ④  $k(\vec{u} \times \vec{v}) = (k\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (k\vec{v}).$
- ⑤  $\vec{u} \times \vec{0} = \vec{0} \times \vec{v} = \vec{0}.$
- ⑥  $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}.$

## Remark

Misalkan  $\vec{u} = (a, b, c)$  vektor di  $\mathbb{R}^3$ , kita bisa menuliskan vektor  $\vec{u}$  sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor satuan  $\vec{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{j} = (0, 1, 0)$  dan  $\vec{k} = (0, 0, 1)$ , yaitu

$$\vec{u} = (a, b, c) = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1) = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}.$$

Tentukan  $\vec{u} \times \vec{v}$  dan nyatakan hasilnya dalam vektor satuan jika  $\vec{u} = (1, 2, -1)$  dan  $\vec{v} = (3, 0, 1)$ .

- ① Misalkan  $\vec{u}$  dan  $\vec{v}$  vektor-vektor dalam  $\mathbb{R}^3$ , maka  $||\vec{u} \times \vec{v}||$  sama dengan luas jajar genjang yang ditentukan oleh  $\vec{u}$  dan  $\vec{v}$ .

Tentukan luas segitiga yang dibentuk oleh titik-titik  $P_1(2, 2, 0)$ ,  $P_2(-1, 0, 2)$  dan  $P_3(0, 4, 3)$ .

- ② Hasil kali skalar ganda tiga  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ , dan  $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$  adalah

$$\vec{u} \bullet (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Hitung  $\vec{u} \bullet (\vec{v} \times \vec{w})$  jika  $\vec{u} = (3, -2, -5)$ ,  $\vec{v} = (1, 4, -4)$  dan  $\vec{w} = (0, 3, 2)$ .

- ❸ Nilai mutlak dari  $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$  sama dengan luas jajar genjang di  $\mathbb{R}^2$  yang dibentuk  $\vec{u} = (u_1, u_2)$  dan  $\vec{v} = (v_1, v_2)$ .
- ❹ Nilai mutlak dari determinan  $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$  sama dengan volume parallelepiped yang dibentuk oleh vektor-vektor  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ , dan  $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ . Kita peroleh bahwa

$$\vec{u} \bullet (\vec{v} \times \vec{w}) = \pm V \quad (1)$$

dengan  $V$  volume parallelepiped dengan tanda  $\pm$  tergantung pada sudut yang dibentuk oleh  $\vec{u}$  dan  $\vec{v} \times \vec{w}$ .

Rumus (1) dapat digunakan untuk menguji apakah ketiga vektor  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ , dan  $\vec{w}$  terletak pada bidang yang sama.

### Theorem

*Jika vektor-vektor  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ , dan  $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$  mempunyai titik pangkal yang sama, maka ketiganya terletak pada bidang yang sama jika dan hanya jika*

$$\vec{u} \bullet (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0.$$

## Latihan Soal

- 1** Anggap  $\vec{u} = (3, 2, -1)$ ,  $\vec{v} = (0, 2, -3)$  dan  $\vec{w} = (2, 6, 7)$ .
  - a.  $\vec{v} \times \vec{w}$ .
  - b.  $(\vec{u} \times \vec{v}) \times (\vec{v} \times \vec{w})$ .
  - c.  $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$ .
  - d.  $\vec{u} \times (\vec{v} - 2\vec{w})$ .
- 2** Apakah  $\vec{u} \times \vec{v} \times \vec{w}$  benar?.
- 3** Anggap  $\vec{u} \bullet (\vec{v} \times \vec{w}) = 3$ . cari
  - a.  $\vec{u} \bullet (\vec{w} \times \vec{v})$ .
  - b.  $(\vec{v} \times \vec{w}) \bullet \vec{u}$ .
  - c.  $\vec{w} \bullet (\vec{u} \times \vec{v})$ .

- Persamaan bidang dapat dibentuk oleh sebuah titik  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  yang dilaluinya dan sebuah vektor normal tak nol  $\vec{n} = (a, b, c)$ . Misalkan titik  $P(x, y, z)$  terletak dalam sebuah bidang. Persamaan bidang tersebut adalah

$$\vec{n} \bullet \vec{P_0 P} = 0.$$

- Perhatikan bahwa persamaan bidang melalui titik  $(3, -1, 7)$  yang tegak lurus terhadap vektor  $\vec{n} = (4, 2, -5)$  adalah

$$4(x - 3) + 2(y + 1) - 5(z - 7) = 0.$$

## Theorem

*Jika  $a, b, c$  dan  $d$  adalah konstanta dengan  $a, b, c$  tidak semuanya nol maka persamaan*

$$ax + by + cz + d = 0$$

*adalah sebuah bidang yang vektor normalnya adalah  $\vec{n} = (a, b, c)$ .*

- Tentukan persamaan bidang yang melalui titik-titik  $P_1(1, 2, -1)$ ,  $P_2(2, -3, 1)$  dan  $P_3(3, -1, 2)$ .

Kita bisa menemukan persamaan bidang tersebut dengan subsitusi ke persamaan umum bidang  $ax + by + cz + d = 0$  atau dengan menentukan terlebih dahulu vektor normalnya.

Perhatikan gambar berikut ini :

- Anggap  $l$  adalah garis dalam  $\mathbb{R}^3$  yang melalui  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  dan sejajar  $\vec{v} = (a, b, c)$ .
- Dari gambar di atas garis  $l$  terdiri dari titik-titik  $P(x, y, z)$  dan vektor  $\vec{P_0P}$  sejajar vektor  $\vec{v}$ . Artinya terdapat skalar  $t$  sedemikian sehingga  $\vec{P_0P} = t\vec{v}$ .
- Dalam bentuk komponen kita bisa menuliskan persamaan di atas menjadi  $(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = (ta, tb, tc)$  sehingga kita peroleh

$$x = x_0 + ta, \quad y = y_0 + tb, \quad z = z_0 + tc.$$

- Persamaan di atas disebut persamaan parametrik untuk garis  $l$ .

Contoh:

- ① Tentukan persamaan garis melalui  $(1, 2, -3)$  dan sejajar vektor  $\vec{v} = (4, 5, -7)$ .
- ② Cari Persamaan parametrik garis  $l$  yang melalui titik-titik  $P_1(2, 4, -1)$  dan  $P_2(5, 0, 7)$ .
- ③ Cari persamaan parametrik untuk garis potong bidang  $3x + 2y - 4z - 6 = 0$  dan  $x - 3y - 2z - 4 = 0$ .

## Jarak titik ke Bidang

### Theorem

*Jarak D antara titik  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  ke bidang  $ax + by + cz + d = 0$  adalah*

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

## Latihan Soal

- ① Tentukan jarak titik  $(1, -4, -3)$  ke bidang
$$2x - 3y + 6z = -1.$$
- ② Apakah bidang  $x + 2y - 2z = 3$  sejajar bidang
$$2x + 4y - 4z = 7$$
 sejajar? Tentukan jarak antara keduanya.