

Pertemuan XV : Transformasi Linear

Kelas A : Edi Kurniadi,M.Si.,Ph.D

Kelas B : Dr. Sisilia Sylviani,S.Si., M.Si

Program Studi S1 Matematika FMIPA Unpad

8 Desember 2022

1 Definisi Transformasi Linear (TL)

2 Komposisi TL

3 Kernel dan Peta

4 Latihan Soal

Definition 2.1.

Misalkan $T : V \rightarrow W$ suatu transformasi linear (TL) dari ruang vektor V ke ruang vektor W , maka T disebut pemetaan linear apabila untuk semua $u, v \in V$ dan skalar c berlaku

- ① $T(u + v) = T(u) + T(v),$
- ② $T(cu) = cT(u).$

Jika $V = W$, maka transformasi linear $T : V \rightarrow V$ disebut operator linear.

- ① Apakah pemetaan $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ yang diberikan oleh $T(x, y) = x + y$ suatu TL?.
- ② Bagaimana dengan pemetaan $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ yang diberikan oleh $T(x, y) = x + y + 1$ apakah suatu TL?.
- ③ Apakah $T : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ yang didefinisikan oleh $T(A) = \det A$ suatu TL?.

Theorem 2.2 (Sifat TL).

Misalkan $T : V \rightarrow W$ suatu TL dari ruang vektor V ke ruang vektor W , maka

- ① $T(0) = 0$
- ② $T(-v) = -T(v)$, untuk setiap $v \in V$
- ③ $T(u - v) = T(u) - T(v)$ untuk semua $u, v \in V$.

Mencari TL dari Peta vektor basis

- ① Misalkan $T : V \rightarrow W$ suatu TL. Misalkan $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ basis untuk V .
- ② Untuk sembarang $v \in V$, kita bisa menghitung $T(v)$ dari peta $T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)$. Why?

Contoh

- Anggap $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ basis untuk \mathbb{R}^3 dengan $v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, 1, 0), v_3 = (1, 0, 0)$. Anggap pula $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ suatu TL dengan $T(v_1) = (1, 0), T(v_3) = (2, -1)$ dan $T(v_3) = (4, 3)$. Tentukan rumus umum untuk TL T , kemudian hitung $T(1, -1, 2)$.

Definition 3.1.

Jika $T_1 : U \rightarrow V$ dan $T_2 : V \rightarrow W$ adalah TL, komposisi T_2 dan T_1 dinyatakan dengan $T_2 \circ T_1$ dan diberikan oleh

$$(T_2 \circ T_1)(u) = T_2(T_1(u))$$

untuk semua $u \in U$.

Remark 3.2.

Jika $T_1 : U \rightarrow V$ dan $T_2 : V \rightarrow W$ adalah TL, apakah $T_2 \circ T_1$ suatu TL ???

Definition 4.1.

Misalkan $T : U \rightarrow V$ suatu TL.

- ① $\text{Ker } T = \{u \in U ; T(u) = 0\}$.
- ② $R(T) = \{v \in V ; \exists u \in U, v = T(u)\}$

Theorem 4.2.

Misalkan $T : U \rightarrow V$ suatu TL. $\text{Ker } T$ subruang dari U dan $R(T)$ subruang dari V .

- ① Misalkan T suatu operator linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dengan rumus

$$T(x, y) = (2x, 4y).$$

Manakah yang terletak di $R(T)$

- a. $(4, 8)$.
- b. $(5, 0)$.
- c. $(6, 12)$.

Manakah yang terletak di $\text{Ker } T$

- a. $(3, 2)$.
- b. $(0, 0)$.
- c. $(1, -1)$.

Kerjakan soal-soal berikut dengan benar dan berikan argumentasi yang sahih.

- ① Misalkan T suatu operator linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dengan rumus

$$T(x, y) = (2x - y, -8x + 4y).$$

Manakah yang terletak di $R(T)$

- a. $(-3, 12)$.
- b. $(5, 0)$.
- c. $(1, -4)$.

Manakah yang terletak di $\text{Ker } T$

- a. $(3, 2)$.
- b. $(5, 10)$.
- c. $(1, -1)$.

- ② Diberikan transformasi linear $T : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_3$ dengan rumus $T(p(x)) = xp(x)$. Manakah yang terletak di $\text{Ker } T$

- a. x^2
- b. $1 + x$
- c. $1 - x - 2x^2$

Manakah yang terletak di $R(T)$

- a. $x + x^2$
- b. $1 + x$
- c. $3 - x^2$

- ③ Misalkan V suatu ruang vektor dan $T : V \rightarrow V$ suatu TL yang didefinisikan oleh $T(v) = 3v$.

- a. Cari $\text{Ker } T$.
- b. Cari $R(T)$.

- ④ Diberikan transformasi linear $T : \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{P}_2$ sebagai transformasi turunan $T(p(x)) = p'(x)$. Tentukan $\text{Ker } T$.

- 5 Diberikan transformasi linear $T : \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{R}$ sebagai transformasi pengintegralan $T(p(x)) = \int_{-1}^1 p(x) dx$. Tentukan $\text{Ker } T$.