ALJABAR LINEAR ELEMENTER 4 sks (3-1)

Kelas A : Edi Kurniadi,M.Si.,Ph.D
Kelas B : Dr. Sisilia Sylviani, M.Si

Program Studi S1 Matematika FMIPA Unpad

24 November 2022

Definition 2.1.

Misalkan V suatu ruang vektor. Diberikan $\langle,\rangle : X \times V \ni (u,v) \mapsto \langle u,v\rangle \in \mathbb{R}$ fungsi bernilai riil. $\langle,\rangle$ dikatakan hasil kali dalam (HKD) jika memenuhi

1. $\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle$.
2. $\langle u+v,w\rangle = \langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle$.
3. $\langle ku,v\rangle = k\langle u,v\rangle$.
4. $\langle v,v\rangle \geq 0$ dan $\langle v,v\rangle = 0$ jika dan hanya jika $v = 0$.

Ruang vektor V yang dilengkapi dengan HKD disebut ruang hasil kali dalam(RKHD).

Contoh HKD

1. Misalkan vektor-vektor $u, v \in V$ dengan $V = \mathbb{R}^n$. Diberikan HKD $\langle u, v\rangle$ sebagi hasil kali titik. Maka V disebut RHKD.
2. Misalkan $u = (a_1, b_1), v = (a_2, b_2$ vektor di $\mathbb{R}^2$. $\langle u, v\rangle = 3a_1a_2 + 2b_1b_2$ adalah HKD di $\mathbb{R}^2$.
3. Misalkan $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)^T$ dan $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)^T$ vektor di $\mathbb{R}^n$ dan misalkan A matriks $n \times n$ yang invertible. Jika $\langle u, v\rangle = u.v$ adalah HKD Euclid maka $\langle u, v\rangle = Au.Av$ juga suatu HKD.
4. Misalkan $\mathbb{P}_2$ suatu ruang polinom. Misalkan $\mathbf{p} = a_0 + a_1x + a_2x^2$ dan $\mathbf{q} = b_0 + b_1x + b_2x^2$ di $\mathbb{P}_2$. Maka $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q}\rangle = a_0 + b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$ adalah suatu HKD.

5. Misalkan $C[a,b]$ ruang fungsi kontinu di $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Misalkan $f, g \in C[a,b]$. maka

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\ dx$$

suatu HKD.

Definition 3.1.

Misalkan V suatu RHKD dan misalkan $v \in V$. Norm dari v dinyatakan dengan $||u||$ dan didefinisikan sebagai $||u|| = \langle v, v\rangle^{1/2}$. Jarak antara dua vektor u dan v dinyatakan dengan $d(u, v) = ||u - v||$.

Contoh

1. Misalkan $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ dan $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ vektor di $\mathbb{R}^n$ dengan HKD Euclid. Maka

$$||u|| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$$

dan

$$d(u, v) = ||u - v|| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \cdots + (u_n - v_n)^2}.$$

Theorem 4.1.

Misalkan u, v, w vektor-vektor dalam suatu RHKD, dan k skalar. Maka:

1. $\langle 0, v\rangle = \langle v, 0\rangle = 0.$
2. $\langle u, v + w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle.$
3. $\langle u, kv\rangle = k\langle u, v\rangle.$
4. $\langle u - v, w\rangle = \langle u, w\rangle - \langle v, w\rangle.$

Theorem 5.1.

Jika u, v adalah vektor-vektor dalam suatu RHKD riil, maka

$$|\langle u, v\rangle| \leq ||u||||v||.$$

Theorem 5.2.

Misalkan u, v, w vektor-vektor dalam suatu RHKD, dan k skalar. Maka:

1. $||u|| \geq 0$.
2. $||u|| = 0$ *jika dan hanya jika* $u = 0$.
3. $||ku|| = |k||u||$.
4. $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$.

Keortogonalan di RHKD

Definition 5.3.

Dua vektor u dan v dalam suatu RHKD dikatakan ortogonal jika $\langle u, v \rangle = 0$.

Contoh

1. Anggap HKD di $\mathbb{P}_2$ diberikan oleh

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx$$

dengan $p = x$ dan $q = x^2$.

Definition 6.1.

Misalkan W subruang dari suatu RHKD V. Vektor $u \in V$ disebut ortogonal terhadap W jika u ortogonal terhadap semua vektor di W, dan himpunan semua vektor di V yang ortogonal dengan W disebut komplemen ortogonal dari W dan dinotasikan dengan $W^{\perp}$.

Theorem 6.2.

Jika W adalah subruang dari suatu RHKD V berdimensi hingga, maka :

1. *$W^{\perp}$ adalah subruang dari V.*
2. *Satu-satunya vektor di W dan $W^{\perp}$ adalah 0.*
3. $(W^{\perp})^{\perp} = W$.

Untuk kasus berikut ini tentukan ruang komplemen ortogonalnya.

1. Ruang bagian $W := \{(x, y) \ ; \ y = 2x\} \subset \mathbb{R}^2$. Dari definisi ruang komplemen ortogonal diperoleh

$$W^\perp := \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ \langle (a, b), (x, 2x) \rangle = 0, \ \forall (x, 2x) \in W\}$$
$$W^\perp := \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x(a + 2b) = 0\}$$
$$W^\perp := \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ a = 2t, b = -t, t \in \mathbb{R}\}.$$

2. Ruang bagian $W := \{(x, y, z)\ ;\ x - 2y = 3z\} \subset \mathbb{R}^3$. Dari definisi ruang komplemen ortogonal diperoleh

$$
\begin{aligned}
W^{\perp} &:= \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3\ ;\ \langle (a, b, c), (2y + 3z, y, z)\rangle = 0\} \\
&\quad \forall (2y + 3z, y, z) \in W \\
W^{\perp} &:= \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3\ ;\ (2a + b)y + (3a + c)z = 0\} \\
W^{\perp} &:= \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3\ ;\ a = -t, b = 2t, c = 2t, t \in \mathbb{R}\}.
\end{aligned}
$$

Berkaitan dengan proyeksi, diperoleh

Theorem 6.3.

Misalkan V suatu RHKD dan W ruang bagian dari V dengan dimensi W hingga. Sembarang vektor $v \in V$ dapat dinyatakan secara tunggal dalam

$$v = w_1 + w_2, \quad (w_1 \in W, w_2 \in W^{\perp}). \tag{1}$$

Dalam hal ini

$$w_1 := \text{Proy}_W v, \qquad w_2 := \text{Proy}_{W^{\perp}} v. \tag{2}$$

Proyeksi ortogonal vektor v pada ruang W dan $W^{\perp}$ dapat dihitung menggunakan formula dalam teorema berikut ini

Theorem 6.4.

Misalkan V suatu RHKD dan W subruang dari V dengan dimensi W hingga. Misalkan $v \in V$.

1. *Jika $S := \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ basis ortogonal untuk V maka proyeksi ortogonal v pada ruang W adalah*

$$\text{Proy}_W v = \frac{\langle v, v_1 \rangle}{||v_1||^2} v_1 + \frac{\langle v, v_2 \rangle}{||v_2||^2} v_2 + \cdots + \frac{\langle v, v_n \rangle}{||v_n||^2} v_n. \quad (3)$$

2. *Jika $S := \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ basis ortonormal untuk V maka proyeksi ortogonal v pada ruang W adalah*

$$\text{Proy}_W v = \langle v, v_1 \rangle v_1 + \langle v, v_2 \rangle v_2 + \cdots + \langle v, v_n \rangle v_n. \quad (4)$$

Eksistensi basis ortogonal dan ortonormal suatu RHKD tak nol dijamin oleh teorema berikut ini

Theorem 6.5.

Setiap ruang hasil kali dalam tak nol berdimensi hingga mempunyai suatu basis ortonormal.

Untuk mencari basis ortogonal dapat digunakan Metode Gram-Schmidt dalam subbab berikutnya.

Definition 7.1.

Suatu himpunan vektor dalam suatu RHKD disebut himpunan ortogonal jika semua pasangan vektor yang berbeda dalam himpunan tersebut ortogonal. Suatu himpunan ortogonal yang semua norm vektornya 1 disebut himpunan ortonormal.

Theorem 7.2.

1. *Jika* $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *suatu himpunan ortonormal dalam suatu RHKD* V *dan* $u \in V$ *maka*

$$u = \langle u, v_1 \rangle v_1 + \langle u, v_2 \rangle v_2 + \cdots + \langle u, v_n \rangle v_n.$$

2. *Jika* $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *suatu himpunan ortogonal yang tak nol dalam suatu RHKD* V*, maka* S *bebas linear.*

Proses Gram-Schmidt

Theorem 7.3.

Setiap RHKD tak nol berdimensi hingga mempunyai basis ortonormal.

Berikut contoh mencari basis ortogonal/ortonormal dengan proses Gram-Schmidt (Klarifikasi dan buktikan)

1. Misalkan V ruang bagian dari $\mathbb{R}^4$ dengan basisnya $\{v_1 = (2,1,0,2), v_2 = (0,1,1,4), v_3 = (3,3,3,0)\}$. Misalkan akan ditentukan basis ortonormal untuk V. Dengan menggunakan Proses Gramn-Schmidt diperoleh langkah-langkah sebagai berikut:
   1. Tetapkan $w_1 = v_1 = (2,1,0,2)$. Kemudian w_1 dinormalkan untuk mendapatkan $u_1 = \frac{w_1}{|||w_1||} = \frac{1}{3}(2,1,0,2) = (2/3, 1/3, 0, 2/3)$.
   2. $w_2 = v_2 - \text{proy}_{u_1} v_1 = (-2,0,1,2)$. Sehingga $u_2 = \frac{w_2}{|||w_2||} = (-2/3, 0, 1/3, 2/3)$.
   3. $w_2 = v_3 - \text{proy}_{\text{span}\,\{w_1,w_2\}} v_3 = (1/3, 2, 10/3, -4/3)$. Sehingga $u_3 = \frac{w_3}{|||w_3||} = \sqrt{17}(1/51, 2/17, 10/51, -4/51)$.

Diperoleh himpunan $S = \{u_1, u_2, u_3\}$ merupakan basis ortonormal untuk V.

2. Misalkan $S := \{1, x, x^2\}$ basis untuk RHKD $\mathbb{P}_2$ dengan HKD
$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\, dx.$$
Himpunan basis S dapat diubah menjadi basis ortogonal sebagai berikut:
    1. $w_1 = 1$,
    2. $w_2 = x - 1/2$,
    3. $w_3 = x^2 - x + 1/6$.

Sehingga himpunan $S' := \{w_1, w_2, w_3\}$ adalah basis ortonormal untuk $\mathbb{P}_2$.

Himpunan Ortonormal

Sebuah himpunan vektor pada ruang hasil kali dalam dinamakan himpunan **ortogonal**

jika semua pasangan vektor yang berbeda dalam himpunan tersebut adalah ortogonal (saling tegak lurus).

Himpunan **ortonormal** ➔ himpunan ortogonal yang setiap vektornya memiliki panjang (normnya) satu.

Secara Operasional

Misalkan, $T = \{\bar{c}_1, \bar{c}_2, ..., \bar{c}_n\}$ pada suatuRHD

T dikatakan himpunan vektor *ortogonal* jika

$< \bar{c}_i, \bar{c}_j > = 0$ untuk setiap $i \neq j$

Sedangkan, T dikatakan himpunan vektor *ortonormal*

jika untuk setiap i berlaku $\| \bar{c}_i \| = 1$

1. $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Pada RHD Euclides, A bukan himpunan ortogonal.

2. $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

Pada RHD Euclides, B merupakan himpunan ortonormal.

3. $C = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\}$

Pada RHD Euclides, C merupakan himpunan ortonormal.

Proses *Gramm-Schmidt*

$$S = \{ \bar{c}_1, \bar{c}_2, \ \dots \ \bar{c}_n \}$$ **basis bagi suatu RHD V**

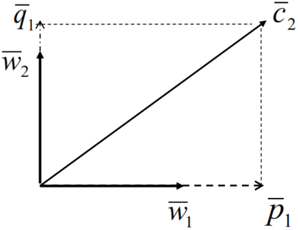
$$\Downarrow$$

$$B = \{ \overline{w}_1, \ \overline{w}_2, \dots, \overline{w}_n \}$$ **basis ortonormal bagi V**

Langkah yang dilakukan

1. $\overline{w}_1 = \dfrac{\bar{c}_1}{\|\bar{c}_1\|}$

2. Langkah kedua $\bar{c}_2 \longrightarrow \bar{w}_2$



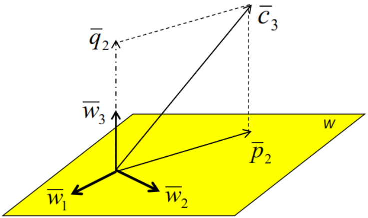
$$\bar{p}_1 = proy_{\bar{w}_1}\bar{c}_2 = <\bar{c}_2, \bar{w}_1>\bar{w}_1$$

$$\bar{q}_1 = \bar{c}_2 - \bar{p}_1$$

$$\bar{w}_2 = \frac{\bar{c}_2 - <\bar{c}_2, \bar{w}_1>\bar{w}_1}{\left\| \bar{c}_2 - <\bar{c}_2, \bar{w}_1>\bar{w}_1 \right\|} \Longrightarrow$$

Vektor satuan searah $\bar{q}_1$

3. Langkah ketiga $\bar{c}_3 \longrightarrow \bar{w}_3$



$$\bar{p}_2 = proy_W \bar{c}_3 = <\bar{c}_3, \bar{w}_1> \bar{w}_1 + <\bar{c}_3, \bar{w}_2> \bar{w}_2 \qquad \bar{q}_2 = \bar{c}_3 - \bar{p}_2$$

$$\bar{w}_3 = \frac{\bar{c}_3 - <\bar{c}_3, \bar{w}_1> \bar{w}_1 - <\bar{c}_3, \bar{w}_2> \bar{w}_2}{\| \bar{c}_3 - <\bar{c}_3, \bar{w}_1> \bar{w}_1 - <\bar{c}_3, \bar{w}_2> \bar{w}_2 \|} \Longrightarrow$$

Vektor satuan
Yang tegak lurus
Bidang W

Contoh :

Diketahui :

$$B = \left\{ \bar{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \bar{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \bar{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

B merupakan basis pada RHD Euclides di R^3.

Transformasikan basis tersebut menjadi basis Ortonormal

Jawab :

Langkah 1.

$$\bar{v}_1 = \frac{\bar{u}_1}{\|\bar{u}_1\|} = \frac{(1, 1, 1)}{\sqrt{3}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Langkah 2

$$\bar{v}_2 = \frac{\bar{u}_2 - proy_{\bar{v}_1}\bar{u}_2}{\left\|\bar{u}_2 - proy_{\bar{v}_1}\bar{u}_2\right\|}$$

Sementara itu, $\bar{u}_2 - proy_{\bar{v}_1}\bar{u}_2 = \bar{u}_2 - \langle \bar{u}_2 , \bar{v}_1 \rangle \, \bar{v}_1$

$$= (0, 1, 1) - \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Karena itu,

$$\left\|\bar{u}_2 - proy_{\bar{v}_1}\bar{u}_2\right\| = \sqrt{\tfrac{4}{9} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{9}} = \tfrac{\sqrt{6}}{3}$$

sehingga :

$$\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Langkah 3

$$\bar{v}_3 = \frac{\bar{u}_3 - proy_W \bar{u}_3}{\left\| \bar{u}_3 - proy_W \bar{u}_3 \right\|}$$

Sementara itu,

$$\begin{aligned} \bar{u}_3 - proy_W \bar{u}_3 &= \bar{u}_3 - \langle \bar{u}_3, \bar{v}_1 \rangle \bar{v}_1 - \langle \bar{u}_3, \bar{v}_2 \rangle \bar{v}_2 \\ &= (0,0,1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) - \frac{1}{\sqrt{6}} \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right) \\ &= \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

sehingga :

$$\bar{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Jadi,

$$\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\}$$

merupakan **basis ortonormal** untuk ruang vektor R^3 dengan hasil kali dalam Euclides

Contoh Proses Gram-Schmidt

Sebagai Latihan, misalkan $\mathbb{R}^3$ mempunyai HKD Eulid. Tentukan basis ortonormal dari $\{u_1, u_2, u_3\}$ dengan $u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (0, 1, 1)$ dan $u_3 = (0, 0, 1)$.

Tuliskan jawaban Anda lengkap dengan argumen dan penjelasannya.

1. Apakah $\langle u, v\rangle = u_1v_1 - u_2v_2$ mendefinisikan HKD di $\mathbb{R}^2$.
2. Misalkan $C[a,b]$ ruang fungsi real kontinu di $[a,b]$ dan misalkan $f, g \in C[a,b]$. Buktikan bahwa

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

adalah HKD di $C[a,b]$.

3. Misalkan $\mathbb{P}_2$ RHKD polinom dengan HKD diberikan oleh

$$\langle a, b\rangle = \int_0^1 a(x)b(x)\,dx.$$

   Jika $a(x) = 1$ dan $b(x) = x^2$, hitung
   1. $\langle a, b\rangle$.
   2. $||a||$ dan $||b||$.
   3. $||a - b||$.

4. Buktikan dalam RHKD berlaku

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}||u + v||^2 - \frac{1}{2}||u - v||^2. \tag{5}$$

5. Konfirmasi menggunakan matriks

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 4 & -3 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & 15 & 17 \\ 7 & -6 & -7 & 0 \end{bmatrix}$$

bahwa ruang baris dan ruang kosong suatu matriks komplemen ortogonal terhadap HKD Euclid. Kemudian cari basis komplemen ortogonal dari ruang kolom A.

6. Diberikan $W = \{(a, b, c)\ ;\ b = a + c\}$ ruang bagian $\mathbb{R}^2$. Tentukan ruang komplemen ortogonal dari W.

7. Misalkan W garis di $\mathbb{R}^3$ yang dinyatakan secara parametrik oleh
$$x = t, \quad y = -2t, \quad z = 3t, \quad t \in \mathbb{R}.$$
Tentukan ruang komplemen ortogonalnya.

8. Misalkan $\mathbb{R}^3$ mempunyai HKD terboboti yang diberikan oleh
$$\langle u, v \rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + 2u_3v_3.$$
Gunakan Proses Gram-Schmidt untuk mengubah $\{(1,0,0),(3,7,-2),(0,4,1)\}$ menjadi basis ortonormal untuk $\mathbb{R}^3$.

9. Misalkan $\{u_1, u_2, u_3\}$ suatu basis ortonormal untuk RHKD W. Buktikan bahwa jika $w \in W$ maka

$$||w||^2 = \langle w, u_1\rangle^2 + \langle w, u_2\rangle^2 + \langle w, u_3\rangle^2.$$

10. Generalisasi dari soal sebelumnya. Misalkan $\{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n\}$ suatu basis ortonormal untuk RHKD W. Buktikan bahwa jika $w \in W$ maka

$$||w||^2 = \langle w, u_1\rangle^2 + \langle w, u_2\rangle^2 + \langle w, u_3\rangle^2 + \cdots + \langle w, u_n\rangle^2.$$