ALJABAR LINEAR ELEMENTER
(sks : 4(3-1))

Kelas A : Edi Kurniadi,M.Si.,Ph.D
Kelas B : Dr. Sisilia Sylviani, M.Si

Program Studi S1 Matematika FMIPA Unpad

29 September 2020

Metode Invers

Misalkan $Ax = b$ suatu SPL dengan A matriks koefisien berukuran $n \times n$, x matriks peubah, dan b matriks konstanta. Jika A invertible maka penyelesaian untuk SPL ini diberikan oleh

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A^{-1}b. \tag{1}$$

Perhatikan beberapa SPL berikut

1. Diberikan SPL

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 7 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 &= -8 \end{aligned} \tag{2}$$

Matriks koefisien, peubah, dan konstantanya adalah

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ -8 \end{bmatrix}$$

Matriks A invertible dengan inversnya adalah $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/8 & 1/4 & 1/8 \\ 9/16 & -3/8 & 1/16 \\ 5/16 & 1/8 & -3/16 \end{bmatrix}$. Jadi penyelesaian SPL (2) adalah

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/8 & 1/4 & 1/8 \\ 9/16 & -3/8 & 1/16 \\ 5/16 & 1/8 & -3/16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

2. Penyelesaian SPL

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= -6 \end{aligned} \tag{3}$$

tidak bisa menggunakan metode invers karena matriks koefisien $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ tidak invertible. Tentunya dengan OBE, penyelesaian SPL ini bisa diperoleh.

Metode Cramer

Misalkan $Ax = b$ suatu SPL dengan A matriks koefisien berukuran $n \times n$, x matriks peubah, dan b matriks konstanta. Jika A invertible maka penyelesaian untuk SPL ini diberikan oleh

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \ldots, x_n = \frac{|A_n|}{|A|}. \tag{4}$$

dengan A_j adalah matriks yang diperoleh dengan menggantikan entri-entri kolom ke j pada matriks A dengan entri-entri pada matriks $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$. Metode tersebut dinamakan Metode Cramer.

Perhatikan contoh-contoh berikut ini:

1. Diberikan SPL sebagai berikut:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & - & & & 7x_3 = & 3 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 = & 7 \\ x_1 & - & & & 5x_3 = & 1 \end{array}$$

   Untuk mendapat penyelesaian SPL tersebut kita akan gunakan Metode Cramer sebagai berikut:

Matriks koefisien A, matriks peubah x, dan matriks konstanta b nya berturut-turut:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -7 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

matriks-matriks A_1, A_2, dan A_3-nya adalah:

$$\mathbf{A_1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -7 \\ 7 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix}, \mathbf{A_2} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -7 \\ 2 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & -5 \end{bmatrix}, \mathbf{A_3} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determinan matriks-matriks tersebut adalah

$$|A| = -40, \ |A_1| = -40, \ |A_2| = -40, \ \text{dan } |A_3| = 0.$$

Jadi penyelesaian SPL tersebut adalah

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-40}{-40} = 1,$$
$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-40}{-40} = 1,$$
$$x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{0}{-40} = 0.$$

Latihan Soal

1. Gunakan Metode Gauss-Jordan untuk mencari solusi SPL :

$$\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 - 2x_3 \qquad + 2x_5 \qquad &= 0 \\
2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 &= -1 \\
5x_3 + 10x_4 + 15x_6 &= 5 \\
2x_1 + 6x_2 \qquad + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 &= 6
\end{aligned} \tag{5}$$

2. Tentukan juga solusi SPL di atas dengan metode Gauss.

Suatu SPL dikatakan **homogen** jika mempunyai bentuk

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array} \tag{6}$$

Solusi $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$ untuk (6) disebut solusi **trivial** dan jika ada solusi yang lain untuk (6) maka solusi tersebut disebut solusi **tak trivial**.

Contoh Penyelesaian SPLH

Berikut beberapa contoh menyelesaikan SPLH

1. Dengan metode invers penyelesaian SPLH

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}$$

dapat dilakukan sebagai berikut:
Matriks koefisien, matriks peubah, dan matriks konstantanya berturut-turut adalah

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

karena A invertible maka metode invers berlaku. Dalam hal ini, $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ dan penyelesaian SPLH-nya diberikan oleh $x = A^{-1}b$. Dengan kata lain,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

2. Penyelesaian SPLH

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 4x_4 &= 0 \end{aligned}$$

SPLH ini tidak dapat diselesaikan dengan metode invers atau Cramer. Dengan menerapkan OBE pada matriks yang diperbanyak

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

akan diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \approx \\ -b_1 + b_2 \\ -2b_1 + b_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \approx \\ \\ -b_3 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} -2b_2 + b_1 \\ \approx \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 16 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} b_3 + b_1 \\ -2b_3 + b_2 \\ \approx \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan menetapkan $x_4 = \alpha$ dengan $\alpha \in \mathbb{R}$ suatu parameter, maka penyelesaian SPLH tersebut adalah.

$$\begin{aligned} x_1 &= -20\alpha, \\ x_2 &= 14\alpha, \\ x_3 &= -4\alpha, \\ x_4 &= \alpha. \end{aligned}$$

Remark

Suatu SPL homogen senantiasa mempunyai solusi, setidaknya solusi trivial.

Theorem

Sebuah SPL homogen dengan jumlah variable yang lebih banyak daripada jumlah PL mempunyai tak hingga banyaknya solusi.

Misalkan diberikan beberapa SPL berbentuk $Ax = b_1, Ax = b_2, \ldots, Ax = b_k$, maka matriks yang diperbanyaknya berbentuk

$$[A : b_1 : b_2 : \cdots : b_k].$$

Dengan OBE pada matriks yang diperbanyak tersebut, akan diperoleh penyelesaian-penyelesaian SPL tersebut. Untuk kasus matriks koefisien A invertible maka penyelesaiannya adalah:

$$x = A^{-1}b_1 : b_2 : \cdots : b_k.$$

Perhatikan contoh-contoh berikut ini.
Diberikan beberapa SPL berikut ini:

1. Diberikan matriks koefisien, matriks peubah, dan matriks konstanta berikut ini

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 1 & 9 & -2 \\ 6 & 4 & -8 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

$$b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, b_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Perhatikan bahwa matriks koefisien A invertible dengan A^{-1} diberikan oleh

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 32 & -18 & 17/2 \\ 2 & -1 & 1/2 \\ 25 & -14 & 13/2 \end{bmatrix}.$$

Oleh karenanya, metode invers dapat digunakan dalam menyelesaikan SPL-SPL tersebut dengan penyelesaian:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 & -18 & 17/2 \\ 2 & -1 & 1/2 \\ 25 & -14 & 13/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -18 \\ -1 \\ -14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -210,5 \\ -12,5 \\ -163,5 \end{bmatrix}.$$

2. Diberikan matriks koefisien, matriks peubah, dan matriks konstanta berikut ini

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Perhatikan bahwa $\det(A) = 0$ yang mengakibatkan matriks koefisien A tidak invertible. Jadi, metode invers tidak bisa digunakan untuk mendapatkan penyelesaian SPL-SPL tersebut. Dengan OBE pada matriks yang diperbanyak

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

didapat matriks eselon tereduksinya sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Perhatikan bahwa untuk SPL dengan matriks konstanta $b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$, SPL tersebut inkonsisten, sedangkan untuk SPL dengan matriks konstanta $b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, SPL tersebut mempunyai penyelesaian tak trivial

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -8 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Konsistensi Suatu SPL

Selanjutnya pada SPL $Ax = b$ kita dapat menetapkan suatu syarat pada matriks b sedemikian sehingga SPL tersebut konsisten.

Remark

Misalkan $Ax = b$ suatu SPL dengan A matriks persegi yang invertible, maka tidak ada syarat yang harus dipenuhi oleh b agar SPL tersebut konsisten. Lebih jauh SPL tersebut mempunyai penyelesaian tunggal.

Diberikan suatu SPL $Ax = b$ dengan

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

Cari suatu syarat agar SPL tersebut konsisten.
Kita lakukan OBE pada matriks yang diperbanyaknya sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & b_1 \\ 1 & 2 & 3 & b_2 \\ 2 & 2 & 2 & b_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \approx \\ -b_1 + b_2 \\ -2b_1 + b_3 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 1 & 2 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 - 2b_1 \end{bmatrix} \begin{matrix} -b_2 + b_1 \\ \approx \end{matrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2b_1 - b_2 \\ 0 & 1 & 2 & b_2 - b_3 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 - 2b_1 \end{bmatrix}.$$

Jadi, agar $Ax = b$ konsisten maka matriks konstanta b harus memenuhi

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 2b_1 \end{bmatrix}.$$

1. Selesaikan SPL berikut dengan metode Gauss-Jordan
   1. $$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 &= -2 \\ 2x_1 + x_2 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 0 \end{aligned}$$
   2. $$\begin{aligned} -2b + 3c &= 1 \\ 3a + 6b - 3c &= -2 \\ 6a + 6b + 3c &= 5 \end{aligned}$$

2. Untuk nilai a berapakah SPL berikut akan mempunyai tak hingga banyak solusi?Solusi tunggal?tidak punya solusi?

$$x + 2y - 3z = 4$$
$$3x - y + 5z = 2$$
$$4x + y + (a^2 - 14)z = a + 2$$