

# ALJABAR LINEAR ELEMENTER 4(3-1)

Kelas A : Edi Kurniadi,M.Si.,Ph.D

Kelas B : Dr. Sisilia Sylviani, M.Si.

Program Studi S1 Matematika FMIPA Unpad

7 September 2023

## 1 Matriks (Lanjutan)

- Operasi Baris Elementer
- Matriks Bentuk Eselon dan Tereduksi
- Invers Matriks
- Jenis-Jenis matriks

## Operasi Baris Dasar atau Elementer

Terdapat 3 jenis Operasi Baris Elementer (OBE) sbb :

- ① Kalikan sebuah baris dengan suatu konstanta tak nol.
- ② Pertukarkan dua baris.
- ③Tambahkan kelipatan suatu baris ke baris lainnya.

Operasi-operasi tersebut disebut **OPERASI BARIS ELEMENTER** yang selanjutnya akan disingkat **OBE**.

Contoh Penerapan OBE Berikut adalah OBE yang dikenakan pada sebuah matriks.

- ① Diberikan matriks  $A$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 5 & 5 \end{bmatrix}.$$

Mengalikan baris pertama dari  $A$  dengan 2 untuk memperoleh matriks  $A'$  yaitu:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 5 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{2b_1} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 5 & 5 \end{bmatrix} =: A'$$

adalah suatu OBE pada  $A$ .

- ② Diberikan matriks  $B$  sebagai berikut :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 5 \end{bmatrix}.$$

Menambahkan  $-2$  kali baris pertama ke baris ke dua pada matriks  $B$  untuk memperoleh  $B'$  yaitu:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 5 \end{bmatrix} \underset{-2b_1 + b_2}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & 5 \end{bmatrix} =: B'.$$

adalah suatu OBE pada matriks  $B$ .

- ❸ Diberikan matriks  $C$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 9 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Mempertukarkan baris pertama dan ke tiga pada matriks  $C$  untuk memperoleh matriks  $C'$  yaitu

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 9 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \underset{b_1 \leftrightarrow b_3}{\approx} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} =: C'.$$

adalah suatu OBE pada  $C$ .

## Remark

*OBE berguna untuk menyelesaikan suatu sistem persamaan linear, menghitung determinan, invers matriks, dan menentukan rank suatu matriks.*

### Trace Matriks

## Definition

Misalkan  $A$  matriks persegi berukuran  $n \times n$ , maka trace  $A$  dinyatakan dengan  $\text{tr}(A)$ , didefinisikan sebagai jumlah semua entri pada diagonal utama  $A$ .

$$\text{tr} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11} + a_{22}.$$

## Matriks Eselon Baris dan Matriks Eselon Baris Tereduksi

- ① Jika suatu baris tidak semuanya nol, maka angka tak nol pertama dalam baris tersebut adalah angka 1(**utama 1**).
- ② Jika ada baris yang semuanya nol, maka baris tersebut dikelompokkan bersama di bagian bawah baris-baris matriks tersebut.
- ③ Jika ada dua baris yang berurutan yang tidak semuanya nol, utama 1 dalam baris yang lebih bawah terletak di sebelah kanan utama 1 dalam baris yang lebih atas,
- ④ Masing-masing kolom yang berisi sebuah utama 1 mempunyai nol di tempat lainnya.

## Definition

Matriks yang memenuhi 1–3 disebut matriks **eselon baris**, dan matriks yang memenuhi 1–4 disebut matriks **matriks eselon baris tereduksi**.

Perhatikan contoh cara memperoleh matriks eselon baris (EB) dan matriks eselon baris tereduksi (EBT) berikut ini:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Tambahkan -2 kali baris pertama ke baris ke dua untuk memperoleh :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Tambahkan -3 kali baris pertama ke baris ke tiga untuk memperoleh :

$$\left[ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{array} \right]$$

Kalikan baris ke dua dengan  $\frac{1}{2}$  untuk memperoleh :

$$\left[ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & \frac{-7}{2} & \frac{-17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{array} \right]$$

Tambahkan -3 kali baris ke dua ke baris ke tiga untuk memperoleh :

$$\left[ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & \frac{-7}{2} & \frac{-17}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-3}{2} \end{array} \right]$$

Kalikan baris ke tiga dengan -2 untuk memperoleh :

$$\left[ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & \frac{-7}{2} & \frac{-17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

Tambahkan -1 kali baris ke tiga ke baris pertama untuk memperoleh:

$$\left[ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{35}{2} \\ 0 & 1 & \frac{-7}{2} & \frac{-17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

Kalikan  $\frac{-11}{2}$  baris ke tiga ke baris pertama dan  $\frac{7}{2}$  baris ke tiga ke baris ke dua untuk memperoleh :

$$\left[ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

Tentukan bentuk baris eselon dan eselon tereduksi dari matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

## Definition

Misalkan  $A$  matriks persegi.  $A$  dikatakan invertible (atau dapat dibalik) jika ada matriks  $B$  sedemikian sehingga  $AB = BA = I$  dengan  $I$  matriks identitas. Dalam hal ini,  $B$  dikatakan invers dari  $A$ .

## Remark

*Matriks persegi  $I$  dikatakan matriks identitas apabila semua entri pada diagonal utamanya 1 dan 0 selainnya.*

Matriks  $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$  invertible (atau dapat dibalik) karena terdapat matriks  $B = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$  sedemikian sehingga

$AB = BA = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ . Tetapi matriks  $G = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$  tidak invertible ( atau tidak dapat dibalik) karena tidak ada matriks  $H$  sedemikian sehingga  $GH = HG = I_2$ .

Khusus matriks  $2 \times 2$ , teorema berikut ini mempermudah untuk mendapatkan invers suatu matriks.

### Theorem

Matriks  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  invertible jika dan hanya jika  $ad - bc \neq 0$  dan inversnya diberikan oleh

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Berikut ini beberapa sifat tentang invers matriks

## Theorem

*Misalkan  $A$  dan  $B$  matriks-matriks invertible yang berukuran  $n \times n$  maka  $AB$  invertible dan  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$*

Perhatikan bahwa

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n.$$

Demikian juga untuk kasus

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = I_n.$$

Oleh karena itu,  $AB$  invertible. Selanjutnya dengan ketunggalan invers matriks maka  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

Misalkan diberikan matriks

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Invers matriks tersebut adalah

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Diperoleh bahwa  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$ .

Jika inversnya dihitung dari perkalian  $A$  dan  $B$  yaitu

$AB = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$  maka  $(AB)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$ . Hasil ini sesuai dengan  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

Selanjutnya diperkenalkan juga pangkat suatu matriks oleh bilangan bulat. Misalkan  $A$  matriks berukuran  $n \times n$  dan  $k$  bilangan bulat nonnegatif.

### Definition

Misalkan  $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ . Pangkat bilangan bulat nonnegatif diberikan oleh

$$A^0 = I_n \text{ dan } A^n = AAA \cdots A \dots \text{ sebanyak } n \text{ kali.}$$

Selanjutnya pangkat bilangan bulat negatif diberikan oleh

$$A^{-n} = (A^{-1})^n = A^{-1}A^{-1}A^{-1} \cdots A^{-1} \dots \text{ sebanyak } n \text{ kali.}$$

Selanjutnya sifat-sifat invers matriks diberikan sebagai berikut:

## Theorem

*Misalkan  $A$  matriks berukuran  $n \times n$  invertible dan  $k$  bilangan bulat nonnegatif, maka*

- a.  $A^T$  invertible dan  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ .
- b.  $A^k$  invertible dan  $(A^k)^{-1} = A^{-k} = (A^{-1})^k$ .
- c. untuk sembarang skalar  $\alpha \neq 0$ , matriks  $\alpha A$  invertible dan  $(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1} A^{-1}$ .
- d.  $(A^{-1})^{-1} = A$ .

Teorema ini akan dibuktikan pada bagian (a) saja, sisanya dikerjakan sebagai latihan. Menggunakan sifat-sifat transpos, diperoleh

$$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I_n^T = I_n,$$

demikian juga diperoleh bahwa

$$(A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = I_n^T = I_n.$$

Hal ini menunjukkan bahwa  $A^T$  invertible. Karena invers suatu matriks tunggal maka  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ .

Berikut akan dibahas matriks elementer yang berguna untuk menentukan invers suatu matriks.

### Definition

Matriks persegi  $E$  berukuran  $n \times n$  dikatakan matriks elementer atau matriks dasar jika matriks ini bisa diperoleh dari matriks identitas  $I_n$  berukuran  $n \times n$  dengan melakukan suatu OBE tunggal.

## Matriks

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

adalah matriks elementer yang diperoleh dengan mengalikan baris ke dua dari matriks identitas  $I_2$  dengan -2. Demikian juga matriks,

$$E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

adalah matriks elementer dengan mempertukarkan baris ke 1 dan ke 2 matriks identitas  $I_2$ .

## Theorem

*Misalkan matriks elementer E dihasilkan dengan OBE terhadap  $I_n$  dan misalkan A suatu matriks  $n \times m$ , maka hasil kali EA adalah matriks yang dihasilkan jika OBE yang sama dikenakan terhadap A.*

Perhatikan contoh-contoh berikut ini :

- ① Diberikan matriks elementer  $E$  dan matriks  $A$  sebagai berikut:

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Matriks elementer  $E$  diperoleh dengan mempertukarkan baris ke satu dan ke dua dari matriks identitas

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \text{ Perhatikan bahwa matriks}$$

$$A' = EA = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

sama dengan mempertukarkan baris ke satu dan ke dua pada matriks  $A$ .

② Misalkan matriks

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

dan matriks elementer

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

yang dihasilkan dengan cara menjumlahkan 2 kali baris pertama pada baris ke tiga pada matriks identitas  $I_3$ .  
Maka hasil kali

$$EB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 3 & 4 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

yang merupakan matriks yang tepat sama dengan matriks yang diperoleh dengan menambahkan 3 kali baris pertama ke baris ke tiga pada  $B$ .

## Theorem

*Setiap matriks elementer bisa dibalik dan inversnya juga merupakan matriks elementer.*

Invers suatu matriks persegi (jika ada) bisa ditentukan dengan menggunakan Teorema ini. Misalkan  $A$  matriks persegi berukuran  $n \times n$  invertible dan  $E_1, E_2, \dots, E_k$  matriks-matriks dasar sedemikian sehingga

$$E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 A = I_n. \quad (1)$$

Dengan membalik (1), kita peroleh

$$A^{-1} = E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 I_n. \quad (2)$$

Secara sederhana kita reduksi  $[A : I]$  menjadi  $[I : A^{-1}]$ .

Perhatikan contoh-contoh berikut ini

- ① Invers matriks  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$  dapat dihitung sebagai berikut:
  - ① Reduksi matriks  $[A : I_2]$  menjadi  $[I_2 : A^{-1}]$ .

$$\left[ \begin{array}{cc} 2 & 3 & : & 1 & 0 \\ 1 & 2 & : & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Pertukarkan baris pertama dan ke dua untuk mendapatkan

$$\left[ \begin{array}{cc} 1 & 2 & : & 0 & 1 \\ 2 & 3 & : & 1 & 0 \end{array} \right].$$

- ② Tambahkan -2 kali baris pertama ke baris ke dua untuk mendapatkan

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{array} \right].$$

- ③ Kalikan baris ke dua dengan -1 untuk mendapatkan

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right].$$

- ④ Tambahkan -2 baris ke dua ke baris pertama untuk mendapatkan

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right].$$

- ⑤ Didapat bahwa  $[I_2 : A^{-1}]$ . Dengan kata lain invers dari  $A$  adalah

$$A^{-1} = \left[ \begin{array}{cc} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{array} \right].$$

Tentukan invers matriks

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Kita ubah dari  $[X : I_3]$  menjadi  $[I_3 : X^{-1}]$  sebagai berikut:

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \underset{-2b_1 + b_3}{\approx}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right] \underset{\frac{1}{2}b_2}{\approx}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right] \underset{3b_2 + b_3}{\approx}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & : & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 & : & -2 & 3/2 & 1 \end{array} \right] \underset{\sim}{\approx} \frac{2}{3}b_3$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & : & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & -4/3 & 1 & 2/3 \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} & -3b_3 + b_1 \\ & (-3/2)b_3 + b_2 \\ & \underset{\sim}{\approx} \end{aligned}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & : & 5 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & : & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & : & -4/3 & 1 & 2/3 \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} & -2b_2 + b_1 \\ & \underset{\sim}{\approx} \end{aligned}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & : & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & : & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & : & -4/3 & 1 & 2/3 \end{array} \right].$$

Jadi invers matriks  $X$  adalah

$$X^{-1} = Y = \left[ \begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ -4/3 & 1 & 2/3 \end{array} \right].$$

## Jenis-jenis matriks

- ① Matriks diagonal  $A = [a_{ij}]$  : Matriks persegi yang semua anggota di luar diagonal utama semuanya nol.

Berikut adalah contoh matriks diagonal berukuran  $2 \times 2$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \text{diag } \{-2, -3\},$$

dan juga matriks diagonal berukuran  $3 \times 3$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \text{diag } \{2, 4, 5\}.$$

Secara umum matriks diagonal  $D$  berdimensi  $n \times n$  dapat dituliskan sebagai berikut:

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix} = \text{diag } \{d_1, d_2, d_3, \dots, d_n\}.$$

Matriks diagonal ini invertible (atau dapat dibalik) jika semua entri pada diagonal utamanya tak nol dan balikannya (invers) diberikan sebagai berikut :

$$\mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{d_n} \end{bmatrix}.$$

Pangkat dari matriks diagonal diberikan sebagai berikut:

$$\mathbf{D}^k = \begin{bmatrix} d_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & d_n^k \end{bmatrix}$$

Diberikan matriks diagonal  $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ . Invers dan pangkat 5 dari  $D$  berturut-turut adalah

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, D^5 = \begin{bmatrix} 1^5 & 0 & 0 \\ 0 & 2^5 & 0 \\ 0 & 0 & 3^5 \end{bmatrix}.$$

Lebih jauh, matriks  $D^{-5}$  dapat diperoleh dengan memangkatkan 5 matriks  $D^{-1}$ . Dalam hal ini diperoleh bahwa

$$D^{-5} = \begin{bmatrix} 1^5 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2})^5 & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{1}{3})^5 \end{bmatrix}.$$

- ② Matriks identitas. Matriks diagonal yang semua entri pada diagonal utamanya 1.

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- ❸ Matriks Segitiga bawah : Matriks persegi  $A = [a_{ij}]$  yang memenuhi  $a_{ij} = 0$  untuk  $i < j$ .

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 5 \end{bmatrix}.$$

- ❹ Matriks Segitiga atas : matriks persegi  $A = [a_{ij}]$  yang memenuhi  $a_{ij} = 0$  untuk  $i > j$ .

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

- ⑤ Matriks Simetris. Matriks persegi yang memenuhi  $A^T = A$ . Berikut adalah contoh matriks simetris

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Jika  $A$  dan  $B$  matriks-matriks simetris dengan ukuran yang sama dan jika  $k$  sebarang skalar maka :

- a.  $A^T$  simetris.
  - b.  $A \pm B$  simetris.
  - c.  $kA$  simetris.
- ⑥ Matriks Skew Simetri. Matriks persegi yang memenuhi  $A^T = -A$ .

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

- 7 Matriks Ekuivalen Baris. Matriks yang diperoleh dengan sejumlah OBE.

Matriks  $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$  ekuivalen baris dengan  $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

- 8 Matriks dasar atau elementer : matriks persegi yang diperoleh dengan melakukan suatu operasi baris elementer tunggal pada matriks identitas.
- 9 Matriks Bentuk eselon baris.
- 10 Matriks bentuk eselon baris tereduksi.

## Latihan Soal

- ① Tentukan matriks eselon tereduksi dari  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 7 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$
- ② Tentukan matriks eselon tereduksi dari  
 $B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & -3 & -2 \\ 6 & 6 & 3 & 5 \end{bmatrix}$
- ③ Tentukan matriks eselon dan matriks eselon tereduksi dari  
matriks  $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$