

# ALJABAR LINEAR ELEMENTER (4 sks : (3-1)

Kelas A : Edi Kurniadi,M.Si.,Ph.D

Kelas B : Dr. Sisilia Sylviani M.Si

Program Studi S1 Matematika FMIPA Unpad

10 November 2022

- 1 Ruang Vektor Umum
  - Definisi ruang vektor
  - Sifat-sifat Ruang vektor
- 2 Sub-Ruang
  - Definisi sub ruang
- 3 Basis dan Dimensi
  - Kombinasi Linear dan Pembangun
  - Bebas Linear
  - Basis dan Dimensi
- 4 Latihan Soal

## Definisi Ruang vektor

Misalkan  $V$  himpunan yang tak hampa yang di dalamnya didefinisikan "penjumlahan" dan "perkalian" dengan skalar. Misalkan  $u, v, w \in V$  dan  $k, l$  sembarang skalar.  $V$  dikatakan ruang vektor jika memenuhi

- 1 Untuk setiap  $u, v \in V$ , maka  $u + v \in V$  (Tertutup terhadap operasi penjumlahan)
- 2  $u + v = v + u$  (Komutatif).
- 3  $u + (v + w) = (u + v) + w$  (asosiatif).
- 4 Terdapat unsur  $0 \in V$  sedemikian sehingga  $0 + v = v = v + 0$  untuk setiap  $v \in V$ .
- 5 Untuk setiap  $v \in V$ , terdapat  $-v \in V$  sedemikian sehingga  $v + (-v) = 0 = (-v) + v$ .

- ⑥ Untuk skalar  $k$  dan  $v \in V$ ,  $kv \in V$ .
- ⑦  $k(u + v) = ku + kv$ .
- ⑧  $(k + l)u = ku + lu$ .
- ⑨  $k(lu) = (kl)u$ .
- ⑩  $1u = u$ .

### Contoh ruang vektor

- ① Himpunan  $V = \mathbb{R}^2$  dengan operasi standar penjumlahan dan perkalian skalar.
- ② Secara umum, himpunan  $V = \mathbb{R}^n$  dengan operasi standar penjumlahan dan perkalian skalar.
- ③ Himpunan  $V$  dari semua matriks  $2 \times 2$  dengan operasi penjumlahan matriks dan perkalian skalar dengan matriks.

- 4 Dari contoh 2, secara umum himpunan  $V$  dari semua matriks  $m \times n$  dengan operasi penjumlahan matriks dan perkalian skalar dengan matriks adalah contoh ruang vektor.
- 5 Anggap  $V$  himpunan fungsi bernilai riil yang didefinisikan di  $(-\infty, \infty)$ . Operasi penjumlahannya didefinisikan oleh

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$

dan perkalian skalar  $k$  diberikan oleh

$$(kf)(x) = kf(x)$$

maka  $V$  adalah ruang vektor.

## Latihan Soal

- Misalkan  $V = \mathbb{R}^2$  dengan operasi penjumlahan dan perkalian skalarnya didefinisikan berturut-turut sbb:

$$(u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2), k(u_1, v_1) = (ku_1, 0)$$

Apakah  $V$  ruang vektor?

## Theorem 2.1.

Misalkan  $V$  ruang vektor dan misalkan  $u \in V$  dan  $k$  skalar.  
Maka:

- 1  $0u = 0.$
- 2  $k0 = 0.$
- 3  $(-1)u = -u$
- 4 Jika  $ku = 0$ , maka  $k = 0$  atau  $u = 0.$

### Latihan Soal

- ① Anggap  $V = \mathbb{R}^3$  dengan operasi penjumlahan dan perkalian skalar diberikan oleh

$$(x, y, z) + (a, b, c) = (x+a, y+b, z+c), \quad \text{dan} \quad k(x, y, z) = (0, 0, 0).$$

Apakah  $V$  ruang vektor?

- ② Misalkan  $V$  himpunan semua bilangan riil positif dengan operasi diberikan oleh

$$x + y = xy, \quad \text{dan} \quad kx = x^k.$$

Periksa apakah  $V$  ruang vektor?

- ③ Misalkan  $V$  himpunan matriks  $2 \times 2$  yang berbentuk

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

Terhadap operasi penjumlahan dan perkalian skalar matriks, apakah  $V$  ruang vektor?

### Definition 3.1.

Misalkan  $W$  himpunan bagian dari  $V$  yang memuat setidaknya satu vektor.  $W$  dikatakan subruang dari  $V$  jika  $W$  sendiri adalah ruang vektor di bawah penjumlahan dan perkalian skalar yang didefinisikan di  $V$ .

#### Contoh

Diketahui bahwa  $V = \mathbb{R}^2$  adalah ruang vektor terhadap operasi penjumlahan dan perkalian skalar biasa. Sekarang misalkan  $W = \{(a, 0) \in \mathbb{R}^2; a, b \in \mathbb{R}\}$  himpunan bagian  $\mathbb{R}^2$ . Periksa apakah  $W$  subruang  $V$ .

### Theorem 3.2.

Misalkan  $W \subseteq V$  yang tak kosong.  $W$  subruang  $V$  jika dan hanya jika

- ① Tertutup operasi penjumlahan, dan
- ② Tertutup terhadap operasi perkalian skalar.

- Tinjau Sistem-sistem persamaan linear berikut

$$\text{a. } \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 3 & -6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{b. } \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 7 & -8 \\ -2 & 4 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{c. } \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 7 & -8 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

d. 
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

apakah ruang penyelesaian SPL homogen tersebut adalah subruang dari  $\mathbb{R}^3$ ?

Secara umum diperoleh bahwa

### Theorem 3.3.

*Jika  $Ax = 0$  suatu SPL homogen dari  $m$  persamaan dan  $n$  variable maka himpunan penyelesaiannya adalah sub ruang dari  $\mathbb{R}^n$ .*

## Kombinasi Linear

### Definition 4.1.

Suatu vektor  $w$  disebut kombinasi linear dari vektor-vektor  $v_1, v_2, \dots, v_n$  jika ada skalar  $k_1, k_2, \dots, k_n$  sehingga

$$w = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n$$

### Contoh

- Apakah  $w = (9, 2, 7)$  kombinasi linear dari  $u = (1, 2, -1)$  dan  $v = (6, 4, 2)$ .

## PEMBANGUN

### Definition 4.2.

Diketahui  $V$  ruang vektor riil. Misalkan  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$ . Jika setiap vektor di  $V$  dapat ditulis sebagai kombinasi linear vektor-vektor di  $S$  yaitu untuk setiap  $v$  di  $V$  ada skalar  $k_1, k_2, \dots, k_n$  sehingga  $v = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n$  maka  $S$  dikatakan membangun  $V$  dan ditulis  $V = \text{Span } S$ .

- Perhatikan bahwa  $\text{Span } S$  ini adalah subruang dari ruang vektor  $V$ . Kita berikan buktinya sebagai berikut :
  - a. Karena ada skalar  $k_1 = 0, k_2 = 0, \dots, k_n = 0$  sehingga vektor nol dapat ditulis menjadi  $0 = 0v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_n$  maka  $0 \in \text{span } S$ . Jadi,  $\text{span } S$  bukan himpunan kosong.

- b. Menggunakan sifat ketertutupan penjumlahan dan hasil kali skalar di  $V$  maka  $\text{span } S \subseteq V$ .
- c. Ambil  $u, v$  di  $\text{span } S$  dan skalar  $\beta$  maka ada skalar-skalar  $k_1, k_2, \dots, k_n$  dan  $c_1, c_2, \dots, c_n$  sehingga  $u = k_1v_1 + k_2v_2 + \dots + k_nv_n$  dan  $u = c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_nv_n$ . Perhatikan bahwa  $u + v$  dan  $\beta u$  dapat ditulis sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor  $v_1, v_2, \dots, v_n$ . Hal ini menunjukkan bahwa  $u + v$  dan  $\beta u$  anggota  $\text{span } S$ . Jadi,  $\text{span } S$  subruang  $V$

## CONTOH

- Apakah  $v_1 = \{1, 1, 2\}$ ,  $v_2 = \{1, 0, 1\}$  dan  $\{2, 1, 3\}$  membangun  $\mathbb{R}^3$ .

JAWAB

Kita ambil sebarang vektor di  $\mathbb{R}^3$ , katakanlah  $v = (a, b, c)$ . Untuk membuktikan bahwa  $\{v_1, v_2, v_3\}$  membangun  $\mathbb{R}^3$  kita harus mencari skalar  $k_1, k_2, k_3$  sedemikian sehingga  $v = k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3$ . Anda buktikan bahwa akhirnya Anda akan memperoleh SPL sebagai berikut :

$$\begin{array}{rclcl} k_1 + k_2 & + & 2k_3 & = & a \\ k_1 & + & k_3 & = & b \\ 2k_1 + k_2 & + & 3k_3 & = & c \end{array}$$

Anda Tunjukkan bahwa ada nilai  $b_1, b_2, b_3$  yang menyebabkan SPL tidak konsisten. Jadi, ada vektor di  $\mathbb{R}^3$  yang bukan merupakan kombinasi linear vektor-vektor  $v_1, v_2, v_3$ . Kita peroleh,  $\{v_1, v_2, v_3\}$  tidak memangun  $\mathbb{R}^3$ .

### Lemma 4.3.

*Misalkan  $RX = 0$  bentuk eselon tereduksi dari SPL homogen dengan  $s$  variabel bebas. Notasikan  $w_i$  solusi dari  $RX = 0$  untuk variabel bebas yang berpadanan dengan utama 1 dan variabel bebas lainnya nol. maka koleksi  $\{w_1, w_2, \dots, w_s\}$  membangun ruang solusi dan koleksi tersebut adalah **PEMBANGUN MINIMAL***

- Langkah mencari pembangun minimal adalah
  - 1 Nyatakan komlin  $k_1v_1 + k_2v_2 + \dots + k_nv_n = 0$

- ② Buat SPL homogennya hingga diperoleh matriks lengkap/diperbanyaknya.
- ③ Lakukan OBE hingga diperoleh matriks dalam bentuk eselon tereduksi.
- ④ Kolom-kolom yang memuat utama 1 adalah vektor-vektor pembangun minimal sedangkan yang tidak memuat utama 1 dapat dibuang

Perhatikan contoh berikut

- Misalkan  $V = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$ . Carilah pembangun minimalnya.

JAWAB

Ikuti prosedur di atas sehingga Anda akan memperoleh

pembangun minimalnya  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

### Definition 4.4.

Misalkan  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  suatu himpunan vektor-vektor dari  $V$ . Himpunan  $S$  dikatakan bebas linear jika  $k_1 = 0, k_2 = 0, \dots, k_n = 0$  satu-satunya solusi untuk kombinasi linear

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n = 0.$$

Jika ada solusi lain maka  $S$  disebut *Bergantung linear*.

- Apakah vektor-vektor berikut

$$v_1 = (1, -2, 3), \quad v_2 = (5, 6, -1), \quad v_3 = (3, 2, 1)$$

bebas linear di  $\mathbb{R}^3$ ?

JAWAB

Perhatikan kombinasi linear  $k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 = 0$  sehingga diperoleh SPL homogen sebagai berikut :

$$\begin{aligned}k_1 + 5k_2 + 3k_3 &= 0 \\ -2k_1 + 6k_2 + k_3 &= 0 \\ 3k_1 - k_2 + k_3 &= 0\end{aligned}$$

Anda buktikan dengan mereduksi matriks lengkapnya sehingga diperoleh matriks eselon tereduksi. SPL homogen tersebut ternyata mempunyai solusi tak trivial. Jadi ada

solusi lain selain nol dan hal ini menunjukkan  $\{v_1, v_2, v_3\}$  himpunan yang bergantung linear.

## BASIS

### Definition 4.5.

Jika  $V$  sebarang ruang vektor dan  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subseteq V$ , maka  $S$  disebut BASIS untuk  $V$  jika dipenuhi dua syarat berikut:

- 1  $S$  himpunan yang bebas linear.
- 2  $V = \text{span } S$ .

### Definition 4.6.

Banyaknya vektor-vektor dalam basis disebut dimensi.

Berikut beberapa ruang vektor real beserta basis standarnya

- ①  $\mathbb{R}^n$  himpunan semua ganda  $n$  bilangan real dimana basis standarnya.

$$\left\{ e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Dimensi  $\mathbb{R}^n$  adalah  $n$ .

- ②  $\mathbf{P}_n$  adalah himpunan semua polinom berderajat paling tinggi  $n$ , basis standarnya adalah  $\{1, x, x^2, x^3, \dots, x^n\}$  dengan dimensinya adalah  $n + 1$

- Apakah  $X = \{(1, 0, 1), (1, 1, 2), (-1, 1, -2)\}$  merupakan basis bagi  $\mathbb{R}^3$  ?

Anda harus memeriksa 2 hal yaitu (1). Buktikan bahwa  $\mathbb{R}^3 = \text{span } X$  dan (2) Anda tunjukkan bahwa  $X$  himpunan yang bebas linear di  $\mathbb{R}^3$ .

## Latihan Soal

Berikan Argumen yang benar untuk setiap jawaban yang Anda berikan.

- 1 a. Periksa apakah

$$\mathbf{H} = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \setminus \int_0^1 (aX^2 + bX + c) dX = 0 \right\}$$

subruang dari  $\mathbb{R}^3$

- b. Misalkan  $\mathbf{P}_2$  menyatakan ruang polinom atas  $\mathbb{R}$  yang berderajat paling tinggi 2. Asumsikan subhimpunan  $X = \{1 + x, 1 + x - x^2, x^2, 1 - x\} \subseteq \mathbf{P}_2$  membangun  $\mathbf{P}_2$ . Bangunlah sebuah basis  $Y \subseteq X$  bagi  $\mathbf{P}_2$ .

- 2 Misalkan  $V$  suatu ruang vektor real dan  $W = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subseteq V$ . Buktikan bahwa  $\text{span } W$  subruang dari  $V$ .
- 3 Diketahui  $M_2(\mathbb{R})$  himpunan semua matriks berordo  $2 \times 2$  adalah ruang vektor real dan  $Y = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \text{rank}(A) = 1\}$ . Apakah  $Y$  subruang dari  $M_n(\mathbb{R})$ .
- 4 Tentukan apakah  $v_1 = (1, 1, 2), v_2 = (1, 0, 1), v_3 = (2, 1, 3)$  membangun ruang vektor  $\mathbb{R}^3$ . Jelaskan
- 5 Carilah basis  $R = \{(a, 0, 0) : a \in \mathbb{R}\}$  yang merupakan subruang  $\mathbb{R}^3$ . Kemudian buktikan jawaban Anda.
- 6 Carilah basis  $W = \{(a, a + c, c) : a, c \in \mathbb{R}\}$  yang merupakan subruang  $\mathbb{R}^3$ . Kemudian jelaskan Jawaban Anda.
- 7 Tentukan basis dan dimensi dari subruang  $\mathbb{R}^4$  berikut ini.

- a.  $W_1 = \{(a, b, c, 0) | a, b, c \in \mathbb{R}\}$
- b.  $W_2 = \{(a, b, a - b, a + b) | a, b \in \mathbb{R}\}$
- c.  $W_3 = \{(a, a, a, a) | a \in \mathbb{R}\}$

- 8 Tentukan basis dan dimensi subruang dari  $P_3$  yang terdiri dari semua polinom berbentuk  $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$  di mana  $a_0 = 0$
- 9 Misalkan  $V$  suatu ruang vektor real. Misalkan  $\bar{v} \in V$  dan  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .  
Apakah berlaku jika  $\bar{v} \neq 0$  dan  $\alpha\bar{v} = \beta\bar{v}$ , maka  $\alpha = \beta$  ?
- 10 Misalkan  $V$  suatu ruang vektor real. Diketahui vektor-vektor berikut :

$$\bar{u} = (1, 0, 1), \bar{v} = (1, 2, 3), \bar{w} = (3, 2, 1), \bar{a} = (1, 4, 1)$$

Himpunan  $S = \{\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}\}$  merupakan basis bagi  $V$ .

- a. Apakah  $\bar{a} \in V$ ? Jelaskan.  
b. Apakah  $S' = \{\bar{a} + \bar{u}, \bar{a} + \bar{v}, \bar{a} + \bar{w}\}$  juga merupakan basis untuk  $V$ ? Jelaskan.

11 Diketahui  $V = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$ . Definisikan

$$x \oplus y = xy, \quad \alpha \odot x = x^\alpha.$$

Buktikan bahwa  $V$  ruang vektor real.

- 12 Selidiki apakah Himpunan semua pasangan *triple* terurut bilangan real dengan operasi  $(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$  dan  $\beta(x, y, z) = (0, 0, 0)$  merupakan ruang vektor real? Kalau bukan, Anda tuliskan sifat mana yang gagal untuk dipenuhi.

- 13 Selidiki apakah Himpunan semua matriks  $2 \times 2$  dengan entri real berbentuk

$$\begin{bmatrix} a & a+b \\ a+b & b \end{bmatrix}$$

dengan penjumlahan dan perkalian skalar biasa merupakan ruang vektor? Jika bukan tuliskan sifat yang tidak terpenuhinya.

- 14 Diketahui bahwa  $M_n$  himpunan semua matriks berukuran  $n \times n$  dengan entri semuanya real. Manakah yang berikut yang merupakan ruang bagian dari  $M_n$

- $W_1 = \{A \in M_n | \text{trace}(A) = 0\}.$
- $W_2 = \{A \in M_n | A^T = -A\}$

- 15 Manakah yang merupakan ruang bagian dari  $P_3$

- $U_1 = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 | a_0 = 0\}$
- $U_2 = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 | a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0\}$

c.  $U_3 = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 | a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Z}\}.$

- 16 Untuk nilai real  $\lambda$  berapakah vektor-vektor berikut membentuk suatu himpunan yang bergantung linier di  $\mathbb{R}^3$  ?

$$\bar{v}_1 = (\lambda, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}), \quad \bar{v}_2 = (\frac{-1}{2}, \lambda, \frac{-1}{2}), \quad \bar{v}_3 = (\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, \lambda)$$

- 17 Buktikan bahwa jika  $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$  bebas linier dan  $\bar{v}_3 \notin \text{span}\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$ , maka  $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$  bebas linier
- 18 Buktikan bahwa jika  $\bar{y}$  kombinasi linier dari  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ , maka

$$\text{span}\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\} = \text{span}\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{y}\}$$

- 19 Apakah polinom  $t^3 + 2t + 1, t^2 - t + 2, t^3 + 2, -t^3 + t^2 - 5t + 2$  membangun  $P_3$ ?

- 20 Diketahui  $V = \mathbb{R}^3$  dan  $S = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4, \bar{x}_5\}$  dimana  $\bar{x}_1 = [1, 0, 1]$ ,  $\bar{x}_2 = [0, 1, 1]$ ,  $\bar{x}_3 = [1, 1, 2]$ ,  $\bar{x}_4 = [1, 2, 1]$  dan  $\bar{x}_5 = [-1, 1, -2]$ . Apakah  $S$  membangun  $V$ ? Carilah basis untuk  $V$  yang merupakan himpunan bagian dari  $S$ .
- 21 Temukan nilai  $a$  sehingga  $\{[a^2, 0, 1], [0, a, 2], [1, 0, 1]\}$  merupakan basis bagi  $\mathbb{R}^3$ .
- 22 Buktikan bahwa  $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$  basis untuk  $M_2$ .
- 23 Mana dari yang berikut ini merupakan basis bagi  $\mathbb{R}^3$ .
- $\{t^3 + 2t^2 + 3t, 2t^3 + 1, 6t^3 + 8t^2 + 6t + 4, t^3 + 2t^2 + t + 1\}$
  - $\{t^3 + t^2 + 1, t^3 - 1, t^3 + t^2 + t\}$

24 Apakah ruang vektor real  $V$  merupakan basis bagi dirinya sendiri? jelaskan.

25 Misalkan  $W$  ruang bagian dari  $P_3$  yang dibangun oleh

$$X = \{t^3 + t^2 - 2t + 1, t^2 + 1, t^3 - 2t, 2t^3 + 3t^2 - 4t + 3\}$$

Carilah suatu basis untuk  $W$  dan temukan dimensi dari  $W$ .

26 Pandang  $V = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}$ .

Tentukan suatu basis untuk  $V$ .

27 Perluaslah  $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$  menjadi basis untuk  $M_2$ .

28 Perluas  $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$  menjadi basis bagi  $\mathbb{R}^4$ .