Gestión de Portafolios: Modelo de Markowitz y Ratio de Sharpe

Piero Alexander Simeón Bustillos

3 de junio de 2025

1. Introducción

Este trabajo simula una gestión de portafolios con fines didácticos y de demostración, centrándose en el uso de técnicas cuantitativas para construir y evaluar portafolios de inversión.

> La gestión de portafolios implica la selección y administración de una combinación adecuada de activos financieros con el fin de alcanzar objetivos específicos de rentabilidad y riesgo para cada tipo de inversionista. (**cfaesp2023**)

Nuestro trabajo se basa en la implementación de una gestión activa, cuyo objetivo es superar el rendimiento del mercado, medido por un índice de referencia[1]. Para ello, aplicamos el método de gestión de portafolios propuesto por Markowitz, el cual optimiza la asignación de activos en función del equilibrio entre riesgo y rentabilidad esperada (**markowitz1952**).

1.1. Optimización matemática del modelo de Markowitz

El modelo de Markowitz revolucionó la teoría de las inversiones al introducir un marco matemático que optimiza la relación entre riesgo y rendimiento mediante la diversificación de activos. A continuación, se presentan los componentes fundamentales del modelo.

A. Diversificación eficiente

No basta con seleccionar activos que sean individualmente atractivos. La clave de una buena gestión de portafolios radica en cómo se correlacionan entre sí los activos seleccionados.

Ejemplo: Combinar acciones y bonos puede reducir el riesgo total del portafolio sin sacrificar rentabilidad, debido a que sus rendimientos no están perfectamente correlacionados.

[1] Un benchmark es un punto de referencia utilizado para evaluar el rendimiento y/o el riesgo de un portafolio. Sirve como estándar para determinar si la gestión ha sido eficaz.

B. Frontera eficiente

La frontera eficiente representa el conjunto de portafolios óptimos que:

- Maximizan el rendimiento esperado para un nivel de riesgo dado.
- Minimiza el riesgo para un rendimiento esperado específico.

Los inversionistas racionales eligen portafolios ubicados sobre esta curva, ya que ofrecen la mejor relación riesgo-rendimiento posible.

C. Riesgo vs. Rendimiento

- **Riesgo:** Medido como la volatilidad, es decir, la desviación estándar de los retornos del portafolio.
- **Rendimiento:** Corresponde al retorno esperado del portafolio, calculado como promedio ponderado de los retornos esperados de los activos individuales.

D. Retorno esperado del portafolio

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot E(R_i)$$

Donde:

- w_i: Peso del activo i en el portafolio.
- $E(R_i)$: Retorno esperado del activo i.

E. Varianza del portafolio

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}$$

Donde:

- σ_i: Desviación estándar del activo i.
- ρ_{ij}: Correlación entre los activos i y j.

F. Problema de optimización

La optimización del portafolio bajo el modelo de Markowitz se plantea como un problema de programación cuadrática. Una forma típica del problema es:

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{w}} \quad \sigma_p^2 = \mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w} \\
&\text{sujeto a:} \quad \mathbf{w}^T \mathbf{r} \geq \mu, \quad \sum_{i=1}^{n} w_i = 1, \quad w_i \geq 0 \quad \forall i
\end{aligned}
$$

Donde:

- $\mathbf{w}$: Vector de pesos de los activos.
- Σ: Matriz de covarianzas de los retornos.
- $\mathbf{r}$: Vector de retornos esperados.
- μ: Rendimiento mínimo deseado.

1.2. Ejemplo de optimización

Cuadro 1: Activos seleccionados para el portafolio y benchmark

Ticker	**Empresa**	**Sector**	**Tipo**	**País**
AAPL	Apple Inc.	Tecnología	Acción	EE.UU.
AMZN	Amazon.com Inc.	Consumo Discrecional	Acción	EE.UU.
AVGO	Broadcom Inc.	Semiconductores	Acción	EE.UU.
CAT	Caterpillar Inc.	Industrial	Acción	EE.UU.
GOOG	Alphabet Inc. (Class C)	Tecnología	Acción	EE.UU.
HD	Home Depot Inc.	Consumo Discrecional	Acción	EE.UU.
KO	Coca-Cola Co.	Consumo Básico	Acción	EE.UU.
LLY	Eli Lilly and Co.	Salud	Acción	EE.UU.
META	Meta Platforms Inc.	Tecnología	Acción	EE.UU.
MSFT	Microsoft Corp.	Tecnología	Acción	EE.UU.
PLTR	Palantir Technologies	Tecnología	Acción	EE.UU.
TRN	Trinity Industries Inc.	Industrial	Acción	EE.UU.
TSM	Taiwan Semiconductor Mfg.	Semiconductores	Acción	Taiwán
XOM	Exxon Mobil Corp.	Energía	Acción	EE.UU.
SPY	S&P 500 ETF	Índice Diversificado	Índice	EE.UU.

Elaboraremos una extración de datos con un recomendado de 3 a 5 años, para ello presentaremos el siguiente codigo en python

```
#Packetes necesarios
import yfinance as yf
import pandas as pd
import seaborn as sns
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
```

```
import seaborn as sns

from datetime import datetime, timedelta

# Lista de tickers
tickers = ["AAPL", "AMZN", "AVGO", "CAT", "GOOG", "HD", "KO", "LLY", "META",
           "MSFT", "PLTR", "TRN", "TSM", "XOM", "SPY"]

# Fechas: últimos 5 años desde hoy
end_date = datetime.today()
start_date = end_date - timedelta(days=5*365)

# Descarga de datos con precios ajustados
data = yf.download(tickers,
                   start=start_date.strftime('%Y-%m-%d'),
                   end=end_date.strftime('%Y-%m-%d'),
                   interval='1mo',
                   auto_adjust=True)

# Usamos solo los precios de cierre
data = data['Close']

# Eliminamos fechas con valores faltantes
data.dropna(inplace=True)

# Calculamos retornos mensuales simples
returns = data.pct_change().dropna()

# Guardamos por si deseas exportarlo
returns.to_csv("retornos_mensuales_5años.csv")

# Mostrar ejemplo
returns.head() #me presentara un encabezado de toda la data extraida
```

1.3. Estadísticos descriptivos

Con la data extraida podemos realizar los calculos matematicos de nuestros activos.

```
# Estadísticos descriptivos básicos
stats = returns.describe().T[['mean', 'std', 'min', 'max']]
stats.rename(columns={'mean': 'Retorno promedio', 'std': 'Volatilidad'}, inplace=True)
stats
```

Cuadro 2: Estadísticas descriptivas de los activos

Ticker	Retorno promedio	Volatilidad	Mínimo	Máximo
AAPL	0.012802	0.072635	-0.120817	0.188633
AMZN	0.008698	0.089749	-0.237525	0.270596
AVGO	0.041703	0.108374	-0.162584	0.430405
CAT	0.020802	0.095535	-0.171978	0.319235
GOOG	0.017960	0.077943	-0.176750	0.165080
HD	0.009298	0.069198	-0.139381	0.181582
KO	0.010479	0.051135	-0.121991	0.137639
LLY	0.034100	0.094856	-0.179409	0.231758
META	0.023967	0.118848	-0.326342	0.267711
MSFT	0.016599	0.064332	-0.107376	0.176291
PLTR	0.080319	0.313034	-0.320637	1.676209
SPY	0.012365	0.047033	-0.096159	0.108777
TRN	0.013423	0.110073	-0.192666	0.336300
TSM	0.021614	0.099229	-0.177444	0.348172
XOM	0.026405	0.083011	-0.136556	0.269156

1.4. Gráfico de correlograma

```
# Cargar los datos (reemplaza si ya tienes el DataFrame `returns`)
returns = pd.read_csv("retornos_mensuales_5años.csv", index_col=0, parse_dates=True)

# Calcular matriz de correlación
correlation_matrix = returns.corr()

# Crear el gráfico de calor
plt.figure(figsize=(12, 10))
sns.heatmap(correlation_matrix, annot=True, fmt=".2f", cmap='coolwarm', linewidths=0.5, center=
plt.title("Matriz de Correlaciones de los Retornos Mensuales", fontsize=16)
plt.xticks(rotation=45, ha='right')
plt.yticks(rotation=0)
plt.tight_layout()
plt.show()
```

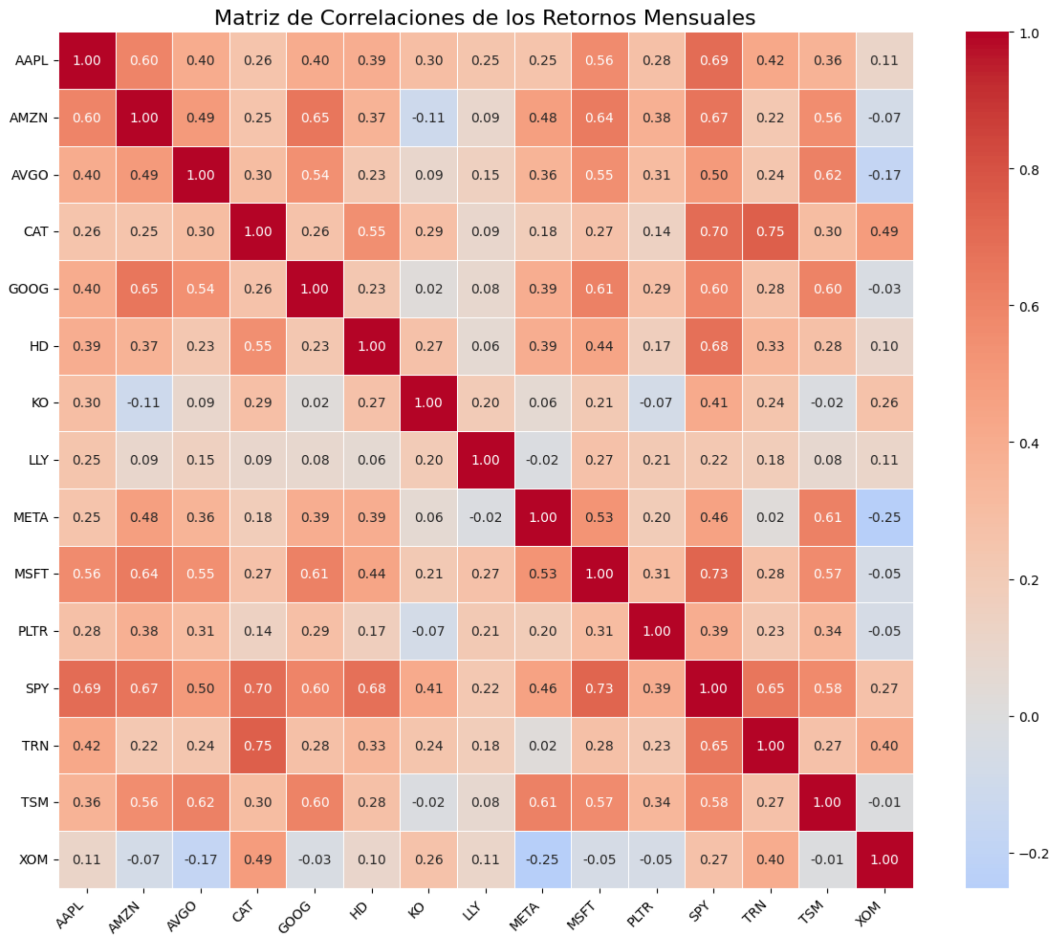

Figura 1: Matriz de correlaciones entre los retornos mensuales de los activos

1.5. Ratio de Sharpe

El Ratio de Sharpe, desarrollado por el premio Nobel William F. Sharpe en 1966, es la métrica fundamental para evaluar el desempeño ajustado al riesgo en gestión de inversiones (**sharpe1994**). Formalmente se define como:

$$\text{Sharpe Ratio} = \frac{E[R_p] - R_f}{\sigma_p} \tag{1}$$

donde:

- $E[R_p]$: Retorno esperado del portafolio (media aritmética de los retornos históricos)
- R_f: Tasa libre de riesgo (usualmente el rendimiento de bonos del Tesoro a 3 meses)
- σ_p: Volatilidad anualizada del portafolio (desviación estándar de los retornos)

La interpretación del ratio sigue tres casos fundamentales:

1. **Sharpe $>$ 1**: Desempeño excelente (retornos que compensan ampliamente el riesgo)

2. **0 < Sharpe ≤ 1**: Desempeño aceptable
3. **Sharpe < 0**: Portafolio ineficiente (no compensa el riesgo asumido)

Para el cálculo práctico con datos mensuales:

$$\text{Sharpe Anualizado} = \sqrt{12} \times \frac{\text{Retorno mensual promedio} - R_f/12}{\sigma_{\text{mes}}}$$

```python
# 1. Configuración inicial
tasa_libre_riesgo_anual = 0.02  # 2% anual (Supondremos eso)
meses_por_año = 12

# 2. Cargar tus estadísticas (o usar las que ya calculaste)
# Asumiremos como dataframe los resultados presentados en el cuadro 2
# Ejemplo:
stats = pd.DataFrame({
    'Retorno promedio': [0.012802, 0.008698, 0.041703, 0.020802, 0.017960,
                         0.009298, 0.010479, 0.034100, 0.023967, 0.016599,
                         0.080319, 0.012365, 0.013423, 0.021614, 0.026405],
    'Volatilidad': [0.072635, 0.089749, 0.108374, 0.095535, 0.077943,
                    0.069198, 0.051135, 0.094856, 0.118848, 0.064332,
                    0.313034, 0.047033, 0.110073, 0.099229, 0.083011]
}, index=['AAPL', 'AMZN', 'AVGO', 'CAT', 'GOOG', 'HD', 'KO', 'LLY', 'META',
          'MSFT', 'PLTR', 'SPY', 'TRN', 'TSM', 'XOM'])

# 3. Función para calcular Sharpe Ratio anualizado
def calcular_sharpe(retorno_mensual, volatilidad_mensual, tasa_libre_riesgo_anual):
    """
    Calcula el Sharpe Ratio anualizado

    Args:
        retorno_mensual: Retorno promedio mensual (decimal)
        volatilidad_mensual: Volatilidad mensual (decimal)
        tasa_libre_riesgo_anual: Tasa anual (decimal)

    Returns:
        float: Sharpe Ratio anualizado
    """
    # Convertir tasa libre de riesgo a mensual
    rf_mensual = tasa_libre_riesgo_anual / meses_por_año

    # Calcular Sharpe mensual
    sharpe_mensual = (retorno_mensual - rf_mensual) / volatilidad_mensual

    # Anualizar
    sharpe_anualizado = sharpe_mensual * np.sqrt(meses_por_año)

    return sharpe_anualizado
```

```python
# 4. Calcular para todos los activos
stats['Sharpe Ratio'] = stats.apply(
    lambda x: calcular_sharpe(x['Retorno promedio'], x['Volatilidad'], tasa_libre_riesgo_anual
    axis=1
)

# 5. Ordenar por mejor Sharpe Ratio
stats_sorted = stats.sort_values(by='Sharpe Ratio', ascending=False)

# 6. Mostrar resultados
print("Ratio de Sharpe Anualizado para cada activo:")
print(stats_sorted[['Sharpe Ratio']].round(2))

# 7. Visualización opcional
import matplotlib.pyplot as plt

plt.figure(figsize=(10, 6))
stats_sorted['Sharpe Ratio'].plot(kind='bar', color='skyblue')
plt.axhline(y=0, color='red', linestyle='--')
plt.title('Ratio de Sharpe Anualizado por Activo', fontsize=14)
plt.ylabel('Sharpe Ratio')
plt.xlabel('Activos')
plt.xticks(rotation=45)
plt.grid(axis='y', alpha=0.3)
plt.tight_layout()
plt.show()
```

Resultados del Ratio de Sharpe

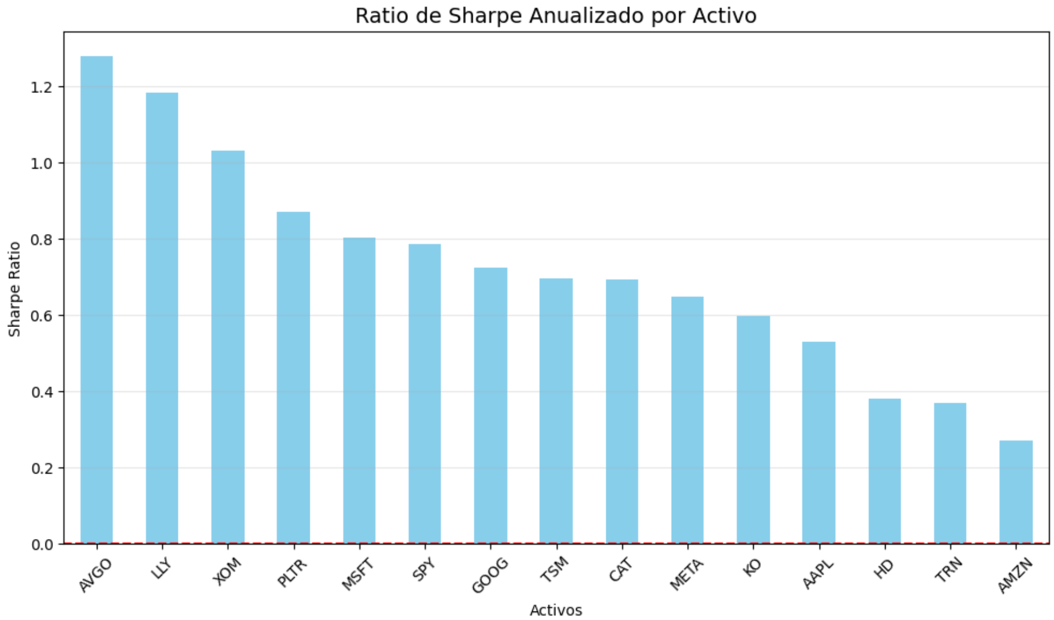

Figura 2: Clasificación de activos por Ratio de Sharpe anualizado. Los valores numéricos exactos se muestran en la Tabla 3.

Cuadro 3: Valores exactos del Ratio de Sharpe

Activo	**Sharpe Ratio**
LLY (Eli Lilly)	1.18
XOM (Exxon Mobil)	1.03
AVGO (Broadcom)	1.28
MSFT (Microsoft)	0.80
SPY (S&P 500 ETF)	0.79
GOOG (Alphabet)	0.72
TSM (Taiwan Semiconductor)	0.70
CAT (Caterpillar)	0.69
META (Meta Platforms)	0.65
AAPL (Apple)	0.53
HD (Home Depot)	0.38
KO (Coca-Cola)	0.60
TRN (Trinity Industries)	0.37
AMZN (Amazon)	0.27

1.6. Calculo y ponderación

Con la obtención de todos los datos necesarios podemos obtener la ponderación optima de nuestro portafolio

```
    mean_returns = stats['Retorno promedio'].values
cov_matrix = returns.cov().values
tickers = stats.index.tolist()

# Parámetros
num_portafolios = 80000
tasa_libre_riesgo = 0.02  # 2% anual

# Inicializar arrays para resultados
resultados = np.zeros((num_portafolios, 3 + len(tickers)))

for i in range(num_portafolios):
    # Generar pesos aleatorios que sumen 1
    pesos = np.random.random(len(tickers))
    pesos /= np.sum(pesos)

    # Retorno esperado del portafolio
    retorno_esperado = np.dot(pesos, mean_returns) * 12  # anualizado

    # Riesgo (volatilidad)
    volatilidad = np.sqrt(np.dot(pesos.T, np.dot(cov_matrix * 12, pesos)))  # anualizado

    # Sharpe Ratio
    sharpe = (retorno_esperado - tasa_libre_riesgo) / volatilidad

    # Guardar: retorno, riesgo, sharpe, y pesos
    resultados[i, 0] = retorno_esperado
    resultados[i, 1] = volatilidad
    resultados[i, 2] = sharpe
    resultados[i, 3:] = pesos

# Convertimos a DataFrame
columnas = ['Retorno', 'Volatilidad', 'Sharpe Ratio'] + tickers
portafolios = pd.DataFrame(resultados, columns=columnas)

# Buscar portafolios óptimos
mejor_sharpe = portafolios.loc[portafolios['Sharpe Ratio'].idxmax()]
menor_riesgo = portafolios.loc[portafolios['Volatilidad'].idxmin()]
mayor_retorno = portafolios.loc[portafolios['Retorno'].idxmax()]
```

y finalmente al tener lo mejores resultados podemos agruparlo en un grafico.

```
    # Extraer retorno y riesgo del portafolio óptimo
rp = mejor_sharpe['Retorno']
```

```
sp = mejor_sharpe['Volatilidad']

# Pendiente de la CAL (Sharpe Ratio)
slope = (rp - tasa_libre_riesgo) / sp

# Crear volatilidades para la línea CAL (hasta un poco más que la frontera)
x_cal = np.linspace(0, sp * 1.5, 100)
y_cal = tasa_libre_riesgo + slope * x_cal

# Graficar
plt.figure(figsize=(12, 8))
sc = plt.scatter(portafolios['Volatilidad'], portafolios['Retorno'],
                 c=portafolios['Sharpe Ratio'], cmap='viridis', alpha=0.5)
plt.colorbar(sc, label='Sharpe Ratio')

# CAL
plt.plot(x_cal, y_cal, color='red', linestyle='--', label='Capital Allocation Line (CAL)')

# Punto de tangencia (portafolio óptimo)
plt.scatter(sp, rp, color='red', marker='*', s=200, label='Portafolio Óptimo (Máx. Sharpe)')

# Rótulos
plt.title('Frontera Eficiente y Capital Allocation Line (CAL)')
plt.xlabel('Volatilidad (Riesgo Anual)')
plt.ylabel('Retorno Esperado Anual')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.tight_layout()
plt.show()
```

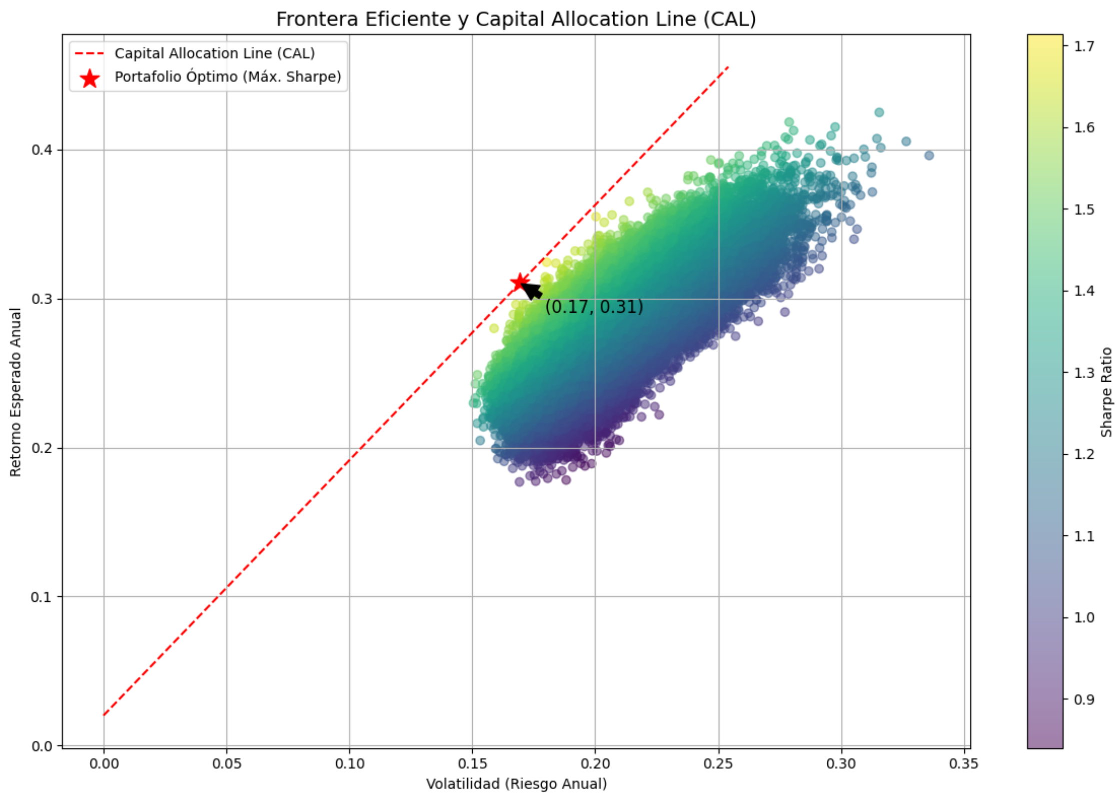

Figura 3: Frontera eficiente y línea de asignación de capital (CAL). El punto en rojo representa el portafolio óptimo de máximo Sharpe.

Cuadro 4: Resumen del portafolio óptimo y su CAL

Elemento	**Valor**
Tasa libre de riesgo (R_f)	2 % anual
Retorno del portafolio óptimo (R_p)	31 % anual
Volatilidad del portafolio óptimo (σ_p)	16 % anual
Sharpe Ratio	1.81
Ecuación de la CAL	$R_c = 0{,}02 + 1{,}81 \cdot \sigma_c$

Cuadro 5: Composición del portafolio óptimo (máximo Sharpe)

Activo	**Peso (%)**
AAPL	10.13
AMZN	1.14
AVGO	14.57
CAT	3.30
GOOG	5.43
HD	0.89
KO	12.43
LLY	8.90
META	13.31
MSFT	0.45
PLTR	3.19
SPY	0.65
TRN	1.70
TSM	2.92
XOM	21.00

El portafolio óptimo, obtenido a través de simulación Monte Carlo sobre 80,000 combinaciones posibles, presenta una diversificación entre múltiples sectores. Se observa una mayor ponderación en **XOM (21 %)**, **AVGO (14.57 %)**, y **META (13.31 %)**, lo que sugiere una inclinación hacia sectores de energía y tecnología. Activos como SPY, MSFT y HD tienen peso marginal, lo que indica que no contribuyen significativamente a mejorar la relación riesgo-retorno del portafolio.

Referencias

[1] CFA Institute. *Programa CFA Nivel III – Gestión de carteras y planificación patrimonial.* Traducción oficial al español. CFA Institute, 2023.

[2] Markowitz, H. (1952). *Portfolio Selection.* The Journal of Finance, 7(1), 77–91. https://doi.org/10.2307/2975974

[3] Sharpe, W. F. (1994). *The Sharpe Ratio.* Journal of Portfolio Management, 21(1), 49-58. DOI: 10.3905/jpm.1994.409501