课后作业 4 参考答案

1. 考虑如下波函数（30）

$$\Psi(x,t) = Ae^{-\lambda|x|}e^{-i\omega t}$$

其中$x \in (-\infty, \infty)$，A、λ和ω都是正的实常数.

(a) 归一化 Ψ.

(b) 求x和x^2的期望.

(c) 求x的标准差σ.

(d) 粒子处在$(\langle x\rangle - \sigma)$ ～ $(\langle x\rangle + \sigma)$范围之外的概率是多少？

(a)$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*\Psi dx = \int_{-\infty}^{\infty} A^2 e^{-2\lambda|x|} dx = A^2/\lambda = 1$,得 $\mathrm{A} = \sqrt{\lambda}$

(b)$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \mathrm{x}\Psi dx = \int_{-\infty}^{\infty} A^2 x e^{-2\lambda|x|} dx = 0$,

$$\langle x^2\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \mathrm{x}^2 \Psi dx = \int_{-\infty}^{\infty} A^2 x^2 e^{-2\lambda|x|} dx = 1/2\lambda^2$$

(c)$\sigma^2 = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 = 1/2\lambda^2$,$\sigma = \sqrt{2}/\lambda$

(d)$\mathrm{p} = \int_{-\sqrt{2}/\lambda}^{\sqrt{2}/\lambda} \Psi^*\Psi dx = 1 - e^{-\sqrt{2}}$,所以处在其范围之外的概率为$e^{-\sqrt{2}}$

2. 证明： (20)

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_1^*\Psi_2 dx = 0$$

其中 Ψ_1 和 Ψ_2 是同一个薛定谔方程的任意两个（归一化）解.

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_1^*\Psi_2 dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t}(\Psi_1^*\Psi_2) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\Psi_2 \frac{\partial \Psi_1^*}{\partial t} + \Psi_1^* \frac{\partial \Psi_2}{\partial t}\right) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\Psi_2\left(-\frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial^2\Psi_1^*}{\partial x^2} + \frac{iU}{\hbar}\Psi_1^*\right) + \Psi_1^*\left(\frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial^2\Psi_2}{\partial x^2} - \frac{iU}{\hbar}\Psi_2\right)\right) dx$$

$$= \frac{i\hbar}{2m}\int_{-\infty}^{\infty} \left(\Psi_2\left(-\frac{\partial^2\Psi_1^*}{\partial x^2}\right) + \Psi_1^*\left(\frac{\partial^2\Psi_2}{\partial x^2}\right)\right) dx$$

$$= \frac{i\hbar}{2m}\left(-\Psi_2\frac{\partial\Psi_1^*}{\partial x}\Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial\Psi_1^*}{\partial x}\frac{\partial\Psi_2}{\partial x} dx + \Psi_1^*\frac{\partial\Psi_2}{\partial x}\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial\Psi_1^*}{\partial x}\frac{\partial\Psi_2}{\partial x} dx\right)$$

$= \frac{i\hbar}{2m}\left(-\Psi_2\frac{\partial\Psi_1^*}{\partial x}\Big|_{-\infty}^{\infty} + \Psi_1^*\frac{\partial\Psi_2}{\partial x}\Big|_{-\infty}^{\infty}\right) = 0$（波函数在无穷远处趋于零）

3. 某个粒子在$t = 0$ 时刻的波函数表述为：(50)

$$\Psi(x,0)=\begin{cases}A(a^2-x^2), & -a\le x\le +a,\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

求：

(a) 归一化常数 A。

(b) x的期望。

(c) 动量p的期望(为什么不能直接用$\langle p\rangle = md\langle x\rangle/dt$求？)

(d) x^2的期望。

(e) p^2的期望。

(f) x的不确定度σ_x。

(g) p的不确定度σ_p。

(h) 验证结果是否满足不确定关系。

(a)$\int_{-\infty}^{\infty}\Psi^*\Psi dx=\int_{-a}^{a}A^2(a^2-x^2)^2dx=\frac{16}{15}A^2a^5=1$,得$A=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{a^5}}$

(b)$\langle x\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\Psi^* x\Psi dx=\int_{-a}^{a}A^2x(a^2-x^2)^2dx=0$（奇函数，积分为零）

(c)$\langle p\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\Psi^*(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x})\Psi dx=-i\hbar\int_{-a}^{a}A^2(a^2-x^2)(-2x)dx=0$

因为不知道波函数随时间的依赖关系，所以不能直接用$\langle p\rangle=md\langle x\rangle/dt$求

(d) $\langle x^2\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\Psi^*\mathrm{x}^2\Psi dx=\int_{-a}^{a}A^2x^2(a^2-x^2)^2dx=a^2/7$

(e)$\langle p^2\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\Psi^*(-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2})\Psi dx=-\hbar^2\int_{-a}^{a}A^2(a^2-x^2)(-2)dx=5\hbar^2/2a^2$

(f)$\sigma_x=\sqrt{\langle x^2\rangle-\langle x\rangle^2}=a/\sqrt{7}$

(g)$\sigma_p=\sqrt{\langle p^2\rangle-\langle p\rangle^2}=\frac{\sqrt{10}\hbar}{2a}$

(h) $\sigma_x\sigma_p=\sqrt{\frac{10}{7}}\hbar>\frac{\hbar}{2}$，其结果满足不确定关系