课后作业 2 参考答案

1. 验证$|+y\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle+\frac{1}{\sqrt{2}}i|1\rangle$和$|-y\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle-\frac{1}{\sqrt{2}}i|1\rangle$的如下性质（15）：
   a. $|+y\rangle$和$|-y\rangle$互相正交；
   b. 在S_z的测量下得到$|0\rangle$态和$|1\rangle$态的概率均各为 1/2；
   c. 在S_x的测量下得到$|+\rangle$态和$|-\rangle$态的概率均各为 1/2。

解：a. $\langle +y|-y\rangle=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle 0|-\frac{1}{\sqrt{2}}i\langle 1|\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle-\frac{1}{\sqrt{2}}i|1\rangle\right)=0$，所以他们互相正交

b. 以$|0\rangle$，$|1\rangle$为正交基，则$\boldsymbol{S_z}=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$，所以$|0\rangle$，$|1\rangle$为$S_z$的本征态；而$|+y\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}$，$|-y\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}$，所以在$S_z$的测量下得到$|0\rangle$态和$|1\rangle$态的概率均各为 1/2

c. 由$|+\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle+\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$，$|-\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle-\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$知，$|0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle+\frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle$，$|1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle-\frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle$，所以$|+y\rangle=\frac{1+i}{2}|+\rangle+\frac{1-i}{2}|-\rangle$，$|-y\rangle=\frac{1-i}{2}|+\rangle+\frac{1+i}{2}|-\rangle$；以$|+\rangle$，$|-\rangle$为正交基，则$\boldsymbol{S_x}=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$，所以$|+\rangle$，$|-\rangle$为$S_x$的本征态；$|+y\rangle=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+i\\ 1-i\end{pmatrix}$，$|-y\rangle=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1-i\\ 1+i\end{pmatrix}$，所以在$S_x$的测量下得到$|+\rangle$态和$|-\rangle$态的概率均各为$\left|\frac{1\pm i}{2}\right|^2=\frac{1}{2}$

2. 求如下矩阵的本征值和本征向量（10）：

$$\boldsymbol{S}_y=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}$$

若该矩阵为S_y在$|0\rangle$、$|1\rangle$坐标下的表示，则本征向量与$|+y\rangle$和$|-y\rangle$的关系是？

解：由本征方程$\begin{vmatrix}-\lambda & -i\frac{\hbar}{2}\\ i\frac{\hbar}{2} & -\lambda\end{vmatrix}=0$，解得$\lambda=\pm\frac{\hbar}{2}$，本征向量$\left|+\frac{\hbar}{2}\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}$，$\left|-\frac{\hbar}{2}\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}$；若该矩阵为$S_y$在$|0\rangle$、$|1\rangle$坐标下的表示，本征向量与$|+y\rangle$和$|-y\rangle$一一对应。

3. 证明$[S_i,S_j]=i\varepsilon_{ijk}\hbar S_k$。（15）

解：在以$|0\rangle$，$|1\rangle$为正交基的坐标下，$\boldsymbol{S_x}=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{S_y}=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{S_z}=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$；只需验证$[S_x,S_y]=i\hbar S_z$，$[S_y,S_x]=-i\hbar S_z$，$[S_y,S_z]=i\hbar S_x$，$[S_z,S_y]=-i\hbar S_x$，$[S_z,S_x]=i\hbar S_y$，$[S_x,S_z]=-i\hbar S_y$即可

4. 对于$|+\rangle$态，计算$\langle(\Delta S_y)^2\rangle\langle(\Delta S_z)^2\rangle$和$\frac{1}{4}|\langle[\Delta S_y,\Delta S_z]\rangle|^2$，并验证不确定性关系（15）。

解：$\langle(\Delta S_y)^2\rangle = \langle {S_y}^2\rangle - \langle S_y\rangle^2 = \langle + | {S_y}^2 | + \rangle - \langle + | S_y | + \rangle^2$

在在$|0\rangle$、$|1\rangle$坐标下，$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{S}_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}, {\boldsymbol{S}_y}^2 = \frac{\hbar^2}{4}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$

所以$\langle + | {S_y}^2 | + \rangle - \langle + | S_y | + \rangle^2 = \frac{\hbar^2}{8}(1 \quad 1)\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \left[\frac{\hbar}{4}(1 \quad 1)\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right] = \frac{\hbar^2}{4}$

同理可得$\langle(\Delta S_z)^2\rangle = \langle {S_z}^2\rangle - \langle S_z\rangle^2 = \langle + | {S_z}^2 | + \rangle - \langle + | S_z | + \rangle^2 = \frac{\hbar^2}{4}$

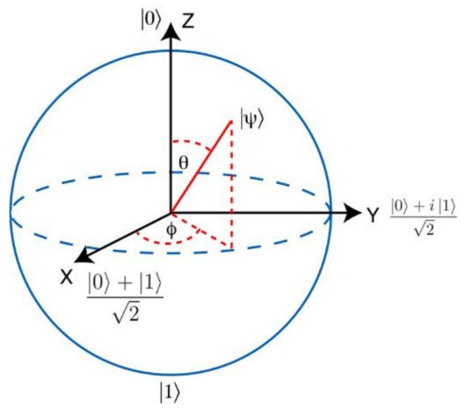
而$[S_y, S_z] = i\hbar S_x$，$|i\hbar\langle + | S_x | + \rangle|^2 = \left| i\frac{\hbar^2}{4}(1 \quad 1)\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right|^2 = \frac{\hbar^4}{4}$

所以$\langle(\Delta S_y)^2\rangle\langle(\Delta S_z)^2\rangle = \frac{\hbar^4}{16} \geq \frac{1}{4}|\langle[S_y, S_z]\rangle|^2$

5. 对于三维空间中$\boldsymbol{n} = (n_x \quad n_y \quad n_z)^{\mathrm{T}} = (\sin\theta\cos\phi \quad \sin\theta\sin\phi \quad \cos\theta)^{\mathrm{T}}$的方向（球坐标）测自旋对应算符为
$$S_{\boldsymbol{n}} = S_x n_x + S_y n_y + S_z n_z$$
求其本征值以及本征态在$|0\rangle$、$|1\rangle$坐标下的表示（15）。

解：$S_{\boldsymbol{n}} = S_x n_x + S_y n_y + S_z n_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\, e^{-i\phi}\\ \sin\theta\, e^{i\phi} & -\cos\theta\end{pmatrix}$

本征方程$\begin{vmatrix}\frac{\hbar}{2}\cos\theta - \lambda & \frac{\hbar}{2}\sin\theta\, e^{-i\phi}\\ \frac{\hbar}{2}\sin\theta\, e^{i\phi} & -\frac{\hbar}{2}\cos\theta - \lambda\end{vmatrix} = 0$，解得$\lambda = \pm\frac{\hbar}{2}$，本征态$\left|+\frac{\hbar}{2}\right\rangle =$



$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$$

$\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\\ \sin\frac{\theta}{2}e^{i\phi}\end{pmatrix}, \left|-\frac{\hbar}{2}\right\rangle = \begin{pmatrix}\sin\frac{\theta}{2}\\ -\cos\frac{\theta}{2}e^{i\phi}\end{pmatrix}$，对应 Bloch 球上的态

6. 考虑一束处在$|0\rangle$态电子，使其

a. 经过$\boldsymbol{n} = (\sin\theta \quad 0 \quad \cos\theta)^{\mathrm{T}}$方向的 S-G 实验，并屏蔽掉$\boldsymbol{n}$方向自旋为$-\hbar/2$ 的电子

b. 经过z方向的 S-G 实验，并屏蔽掉z方向自旋为$\hbar/2$ 的电子

求最后所得电子占初始电子数的比例，求使该占比最大化的方向$\boldsymbol{n}$（15）。

解：$\boldsymbol{n}$方向的自旋算符为：$S_{\boldsymbol{n}} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$，其本征态$|+\boldsymbol{n}\rangle = \begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}$，$|-\boldsymbol{n}\rangle = \begin{pmatrix}\sin\frac{\theta}{2} \\ -\cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}$，将$|0\rangle$态表述为$|+\boldsymbol{n}\rangle$和$|-\boldsymbol{n}\rangle$的叠加态：$|0\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|+\boldsymbol{n}\rangle + \sin\frac{\theta}{2}|-\boldsymbol{n}\rangle$. 屏蔽掉$\boldsymbol{n}$方向自旋为$-\hbar/2$ 的电子后，其态坍缩成了$|+\boldsymbol{n}\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + \sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$，还剩下比例为$\cos^2\frac{\theta}{2}$的电子；经过$z$方向的 S-G 实验并屏蔽掉$z$方向自旋为$\hbar/2$ 的电子后，其态坍缩成了$|1\rangle$，剩下的电子占初始电子数的比例$\cos^2\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{4}\sin^2\theta$， 当$\theta = \pi/2$ 时，最大占比为 1/4，此时$\boldsymbol{n} = (1 \quad 0 \quad 0)^{\mathrm{T}}$.

7. 经典纠缠与量子纠缠的区别在于？（5）
   a. 纠缠的物体之间是否有相互作用
   b. 是否涉及对纠缠的物体的测量
   c. 是否存在隐变量
   d. 是否能瞬间确定另一物体的状态

8. 有 5 量子比特的量子态需要多少个实数描述？（5）
   a. 20
   b. 32
   c. 62
   d. 64

9. 目前产生较大影响的两类量子算法是？（多选）（5）
   a. Deutsch-Jozsa 算法
   b. 量子傅里叶变换
   c. 量子加密
   d. 量子搜索