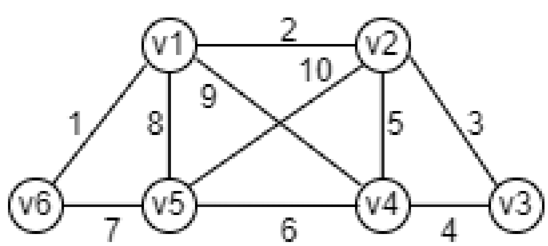
Курсовая работа по дискретной математике. 3 Вариант

Галкин Алексей Дмитриевич

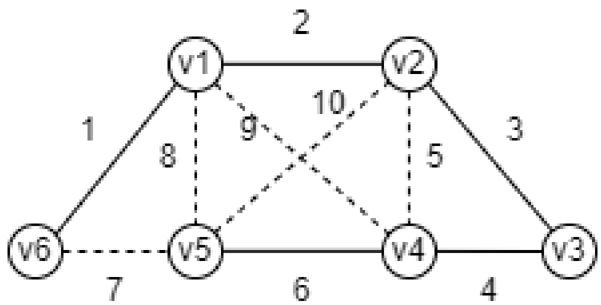
1 Задание 6

Пусть каждому ребру неориентированного графа соответствует некоторый элемент электрической цепи. Составить линейно независимые системы уравнений Кирхгофа для токов и напряжений. Пусть первому и пятому ребру соответствуют источники тока с ЭДС E1 и E2 (полярность выбирается произвольно), а остальные элементы являются сопротивлениями. Используя закон Ома, и, предполагая внутренние сопротивления источников тока равными нулю, получить систему уравнений для токов.

2 Решение

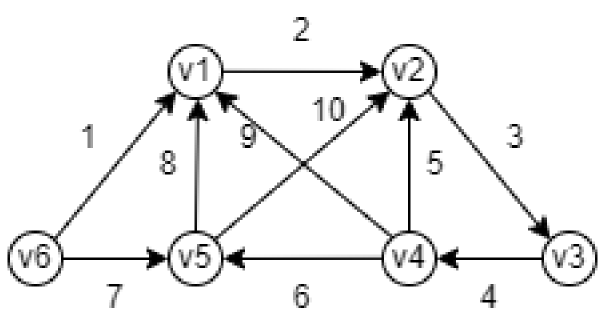


Выделим произвольным образом остовное дерево графа. Одним из возможных остовных деревьев является это дерево. (пунктирными линиями изображены удаленные из ребра).



Далее добавляем любое из ребер, не вошедщих в остовое дерево графа, мы получаем граф с некоторым простым циклом. Всего в остовное дерево вошли v = m - n + 1 = 10 - 6 + 1 = 5 ребер (где m — кол-во ребер в графе, n = кол-во вершин). Поэтому будет 5 циклов. В цикловой базис войдут циклы:
$\mu_1 = \mu_1(7) = 1,2,3,4,6,7$, $\mu_2 = \mu_2(8) = 2,3,4,6,8$, $\mu_3 = \mu_3(5) = 3,4,5$, $\mu_4 = \mu_4(9) = 2,3,4,9$, $\mu_5 = \mu_5(10) = 3,4,6,10$

Введём произвольным образом ориентацию на ребрах графа.



Для графа изображенного на рис. с выделенным ранее цикловым базисом $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5)$ и выбранной ориентацией ребер, соответствующей орграфу, цикломатическая матрица имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ Выпишем систему уравнений Кирхгофа для напряжений:

$\mu_1 : -u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_6 - u_7 = 0,$
$\mu_2 : u_2 + u_3 + u_4 + u_6 + u_8 = 0,$
$\mu_3 : u_3 + u_4 + u_5 = 0,$
$\mu_4 : u_2 + u_3 + u_4 + u_9 = 0,$

$\mu_5 : u_3 + u_4 + u_6 - u_{10} = 0,$
Или, с учётом закона Ома, а также, что $u_1 = E_1, u_5 = E_2$, имеем:

$$\begin{cases} -E_1 + i_2 r_2 + i_3 r_3 + i_4 r_4 + i_6 r_6 - i_7 r_7 = 0, \\ i_2 r_2 + i_3 r_3 + i_4 r_4 + i_6 r_6 + i_8 r_8 = 0, \\ i_3 r_3 + i_4 r_4 + E_2 = 0, \\ i_2 r_2 + i_3 r_3 + i_4 r_4 + i_9 r_9 = 0, \\ i_3 r_3 + i_4 r_4 + i_6 r_6 - i_{10} r_{10} = 0, \end{cases}$$

Система уравнений Кирхгофа для токов имеет вид, где

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7	q_8	q_9	q_{10}
v1	1	-1	0	0	0	0	0	1	1	0
v2	0	1	1	0	1	0	0	0	0	-1
v3	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0
v4	0	0	0	1	-1	-1	0	0	0	-1
v5	0	0	0	0	0	1	1	-1	0	1
v6	-1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0

$$\begin{cases} i_1 - i_2 + i_8 + i_9 = 0, \\ i_2 + i_3 + i_5 - i_{10} = 0, \\ i_3 - i_4 = 0, \\ i_4 - i_5 - i_6 - i_{10} = 0, \\ i_6 + i_7 - i_8 + i_{10} = 0, \\ -i_1 - i_7 = 0, \end{cases}$$

Чтобы получилось линейную независимость уравнений Кирхгофа для токов необходимо из системы исключить любое уравнение, например, 4. В результате система линейно независимых уравнений Кирхгофа для токов имеет вид:

$$\begin{cases} i_1 - i_2 + i_8 + i_9 = 0, \\ i_2 + i_3 + i_5 - i_{10} = 0, \\ i_3 - i_4 = 0, \\ i_6 + i_7 - i_8 + i_{10} = 0, \\ -i_1 - i_7 = 0, \end{cases}$$

Общая система уравнений для токов:

$$\begin{cases} -E_1 + i_2 r_2 + i_3 r_3 + i_4 r_4 + i_6 r_6 - i_7 r_7 = 0, \\ i_2 r_2 + i_3 r_3 + i_4 r_4 + i_6 r_6 + i_8 r_8 = 0, \\ i_3 r_3 + i_4 r_4 + E_2 = 0, \\ i_2 r_2 + i_3 r_3 + i_4 r_4 + i_9 r_9 = 0, \\ i_3 r_3 + i_4 r_4 + i_6 r_6 - i_{10} r_{10} = 0, \\ i_1 - i_2 + i_8 + i_9 = 0, \\ i_2 + i_3 + i_5 - i_{10} = 0, \\ i_3 - i_4 = 0, \\ i_6 + i_7 - i_8 + i_{10} = 0, \\ -i_1 - i_7 = 0, \end{cases}$$