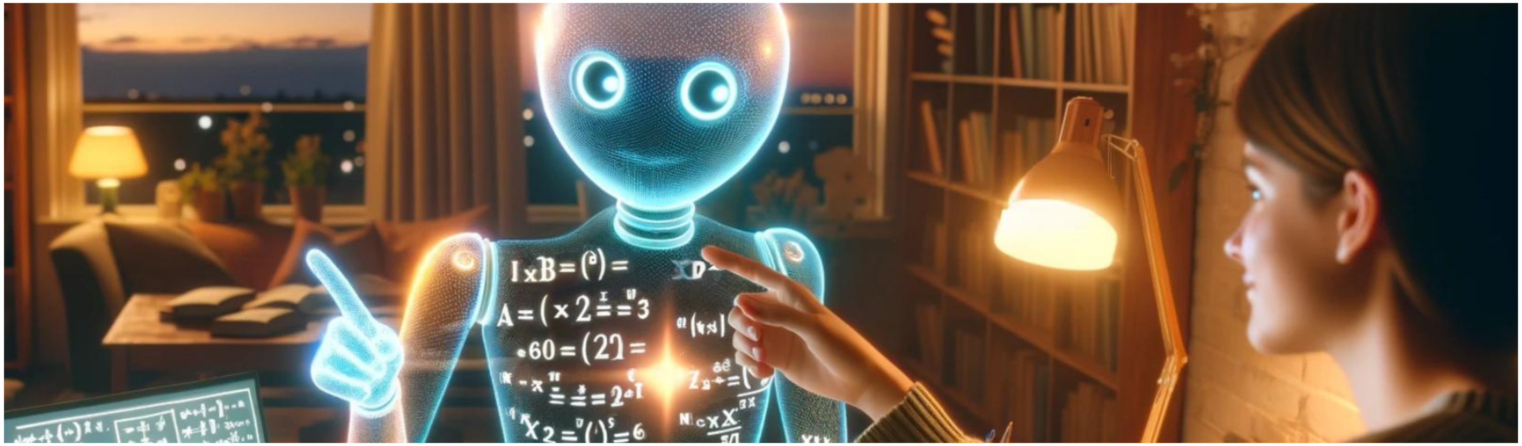


미분과 최적화

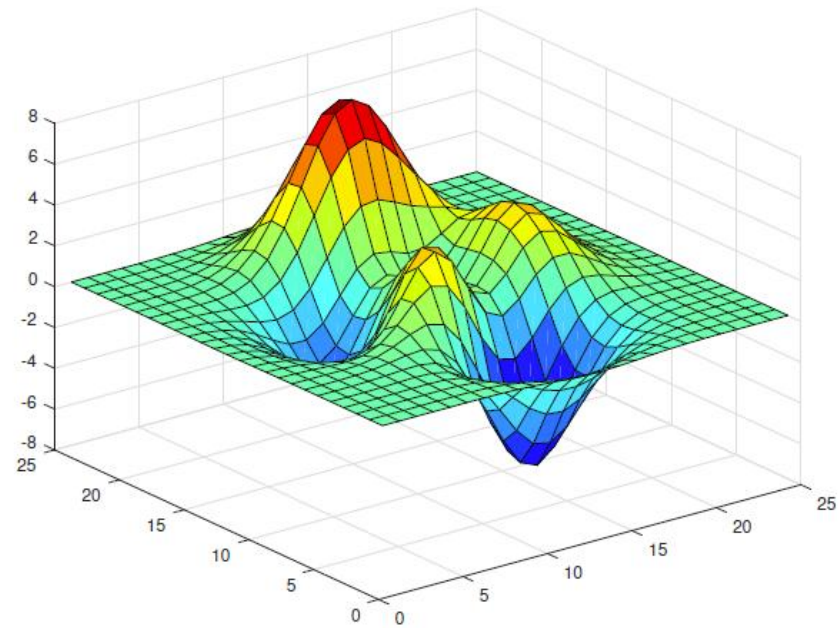
2025 Young Mathematician Camp

성균관대학교 수학과 허정규

kms 대한수학회 Korean Mathematical Society

목차

1. 함수의 극한
2. 접선
3. 미분과 도함수
4. 이변수함수
5. 편도함수
6. 이변수 함수의 미분
7. 연쇄법칙
8. 방향도함수
9. 기울기 벡터
10. 방향도함수의 최대화
11. 기울기 벡터의 중요성
12. 극댓값과 극솟값
13. 경사하강법



파이썬 기초 실습 (with Colab)

파이썬_기초.ipynb

파일 수정 보기 삽입 런타임 도구 도움말

+ 코드 + 텍스트

```python
# 1. 변수와 자료형
a = 10          # 정수형
b = 3.14        # 실수형
c = "Hello"     # 문자열
d = True        # 불리언

print(f"a: {a}, b: {b}, c: {c}, d: {d}")  # 출력
```

```
a: 10, b: 3.14, c: Hello, d: True
```

https://colab.research.google.com/drive/1E-G0C59l5FyvzVEuhf65AD1cfEx_-vlx#scrollTo=a2e92cbf-a513-4546-9518-170d35709b18

넘파이 기초 실습 (with Colab)

넘파이_기초.ipynb

파일 수정 보기 삽입 런타임 도구 도움말

+ 코드 + 텍스트

```python
# 1. 벡터 정의 및 연산
import numpy as np

# 벡터 정의
v1 = np.array([1, 2, 3])  # 1차원 벡터
v2 = np.array([4, 5, 6])

print("벡터 v1:", v1)
print("벡터 v2:", v2)
```

```
벡터 v1: [1 2 3]
벡터 v2: [4 5 6]
```

https://colab.research.google.com/drive/1E-G0C59I5FyvzVEuhf65AD1cfEx_-vIx#scrollTo=a2e92cbf-a513-4546-9518-170d35709b18

자연상수 e

- **Euler**, 1748

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$$

2.718281828459045235⋯

n 이 아주 큰 수이면

$$(1+\frac{1}{n})^n \approx e$$

- **exp 함수**

e^x : e의 x 제곱

목차

1. 함수의 극한

2. 접선

3. 미분과 도함수

4. 이변수함수

5. 편도함수

6. 이변수 함수의 미분

7. 연쇄법칙

8. 방향도함수

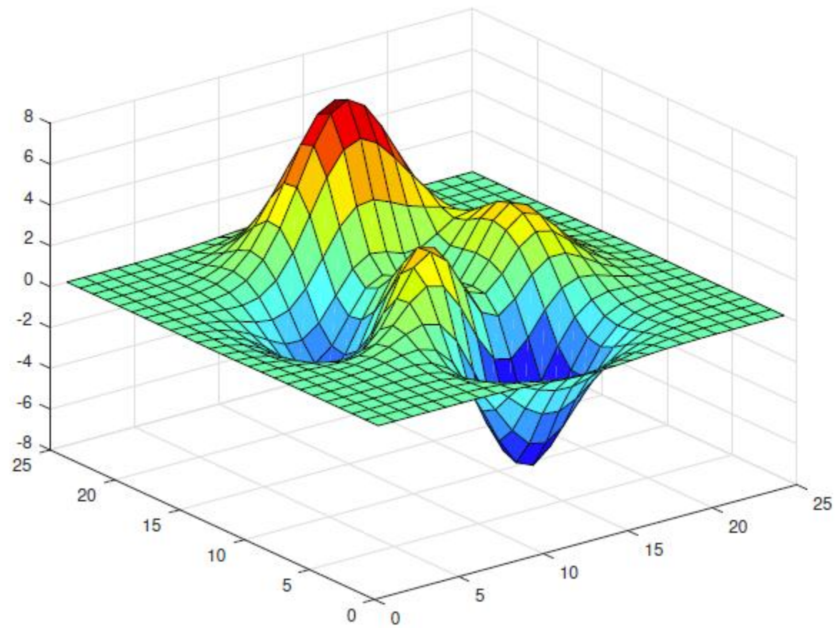
9. 기울기 벡터

10. 방향도함수의 최대화

11. 기울기 벡터의 중요성

12. 극댓값과 극솟값

13. 경사하강법



함수의 극한

$f(x) = (x - 1)/(x^2 - 1)$일때 $x = 1$ 근방에서 함수 f의 움직임을 조사해보자. 아래 표는 2에 가까운 x의 값들에 대한 $f(x)$의 값을 나타낸 것이다.

$x < 1$	$f(x)$	$x > 1$	$f(x)$
0.5	0.666667	1.5	0.400000
0.9	0.526316	1.1	0.476190
0.99	0.502513	1.01	0.497512
0.999	0.500250	1.001	0.499750
0.9999	0.500025	1.0001	0.499975

1 0.5 1 0.5

함수의 극한

표와 그림 1의 f의 그래프(포물선)로부터 x가 1에서 가까워질수록(어느 쪽으로든) $f(x)$는 0.5에 가까워짐을 알 수 있다. 실제로 x를 1에 충분히 가깝게 잡으면 $f(x)$의 값을 원하는 만큼 0.5에 가깝게 잡을 수 있을 것으로 보인다. 이것을 "x가 1에 접근할 때 함수 $f(x) = x^2 - x + 2$의 극한은 0.5이다."라고 말하고

$$\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1} = 0.5$$

로 나타낸다.

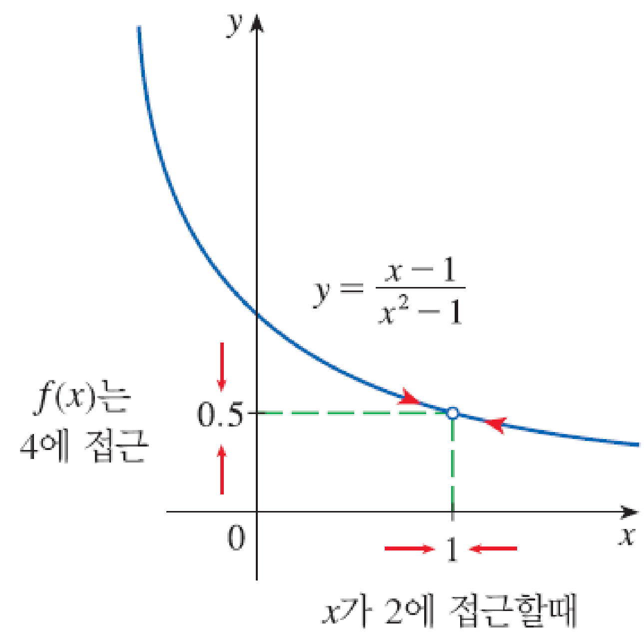


그림 1

함수의 극한

극한의 일반적인 정의는 다음과 같다.

1 정의 수 a의 근처에 있는 x에 대하여 $f(x)$가 정의된다고 하자(a는 제외한 a의 열린구간에서 f가 정의됨을 의미한다). a와 같지는 않지만 a에 충분히 가까운 x를 잡으면(a의 어느 쪽이든) L에 얼마든지 가까운(L에 원하는 만큼 가까운) $f(x)$ 값을 얻을 수 있을 때

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

로 나타내고 "x가 a에 접근할 때 $f(x)$의 극한은 L이다."라고 말한다.

위의 정의는 x가(a의 어느 쪽이든) a에 가까워질수록(단 $x \neq a$) $f(x)$ 값은 점점 더 L에 가까워진다는 것을 의미하고 있다. 또

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

은

$$x \to a\text{일 때 } f(x) \to L$$

로 나타내기도 하고 "x가 a에 접근할 때 $f(x)$는 L에 접근한다."라고 읽는다.

함수의 극한

$\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$을 구하여라.

$\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$을 구하여라.

주어진 식은

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

입니다. 직접 대입하면 $\frac{1^2 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0}$ 형태로 나타나므로, 식을 변형하거나 미분을 이용해야 합니다.

---

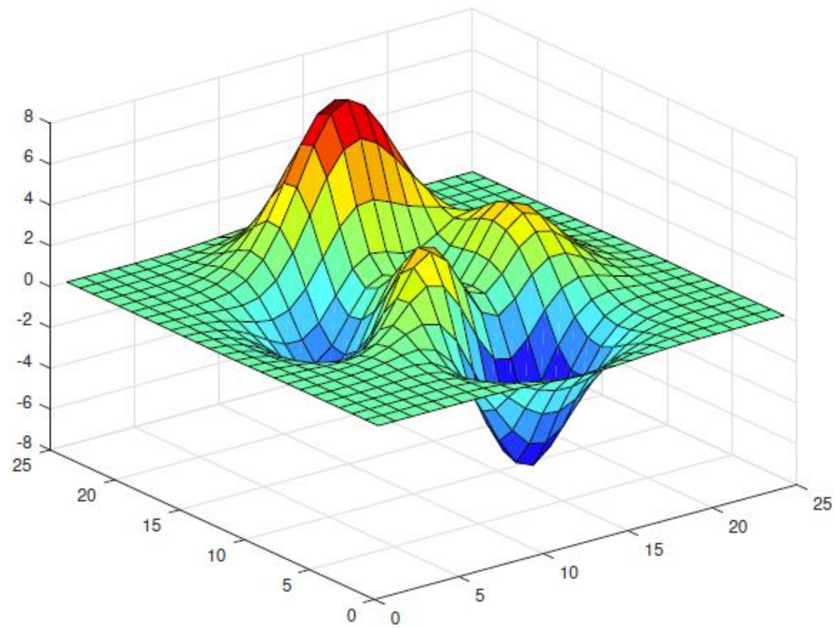
1. 식을 변형하여 계산하기

다항식을 인수분해하면 $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ 이므로,

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1}(x + 1) = 1 + 1 = 2.$$

목차

1. 함수의 극한
2. **접선**
3. 미분과 도함수
4. 이변수함수
5. 편도함수
6. 이변수 함수의 미분
7. 연쇄법칙
8. 방향도함수
9. 기울기 벡터
10. 방향도함수의 최대화
11. 기울기 벡터의 중요성
12. 극댓값과 극솟값
13. 경사하강법



접선

곡선 C의 방정식이 $y = f(x)$일 때, 점 $P(a, f(a))$에서 C의 접선을 구하려면 먼저 인접한 점 $Q(x, f(x))$(단 $x \neq a$)를 생각하고, 할선 PQ의 기울기

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

를 구한다. x를 a에 접근시켜 Q가 곡선 C를 따라 P에 접근하게 한다.

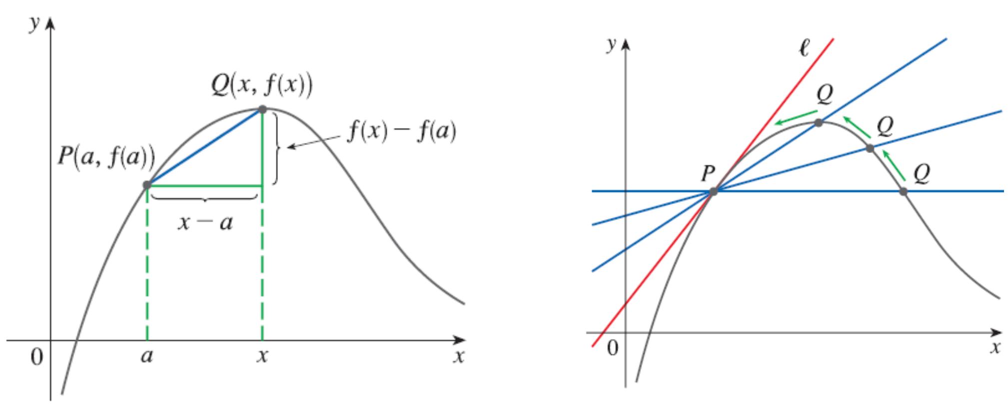


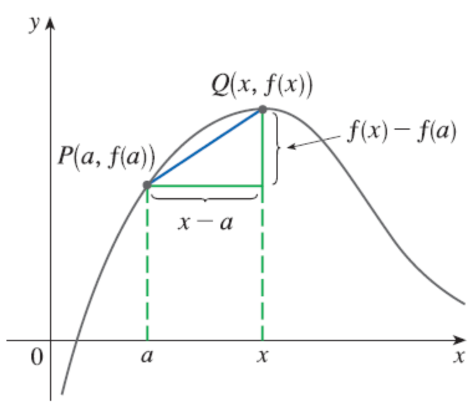
그림 1

접선

1 정의 점 $P(a, f(a))$에서 곡선 $y = f(x)$의 **접선**은

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

가 존재할 때 P를 지나고 기울기가 m인 직선이다.



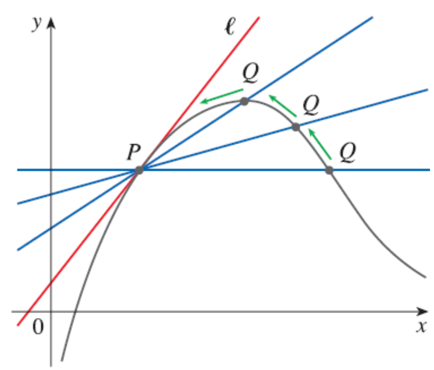


그림 1

접선

점 (3, 1)에서 쌍곡선 $y = 3/x$의 접선의 방정식을 구하여라.

접선

점 (3, 1)에서 쌍곡선 $y = 3/x$의 접선의 방정식을 구하여라.

1. **함수와 점 확인**

   주어진 곡선은 $y = \frac{3}{x}$이고, 접선을 구해야 하는 점은 $(3, 1)$입니다.
   먼저 $(3, 1)$이 실제로 곡선 위의 점인지 확인합니다.

$$y = \frac{3}{x} \quad \Rightarrow \quad 1 = \frac{3}{3} \quad \Rightarrow \quad 1 = 1.$$

   좌변과 우변이 일치하므로, $(3, 1)$은 곡선 위의 점이 맞습니다.

2. **미분(도함수) 구하기**

   $y = \frac{3}{x}$를 미분하여 접선의 기울기를 구합니다.

$$y = 3x^{-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 3 \cdot (-1)x^{-2} = -\frac{3}{x^2}.$$

3. **접선의 기울기**

   $x = 3$에서의 접선의 기울기는

$$m = -\frac{3}{(3)^2} = -\frac{3}{9} = -\frac{1}{3}.$$

접선

점 (3, 1)에서 쌍곡선 $y = 3/x$의 접선의 방정식을 구하여라.

4. **접선의 방정식 (점-기울기 식)**

   점 $(x_1, y_1) = (3, 1)$에서 기울기 $m = -\frac{1}{3}$를 가지는 접선의 방정식은

   $$y - y_1 = m(x - x_1).$$

   즉,

   $$y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 3).$$

5. **정리하여 표준 형태로 표현**

   아래와 같이 전개하여 y에 관한 식으로 정리할 수 있습니다.

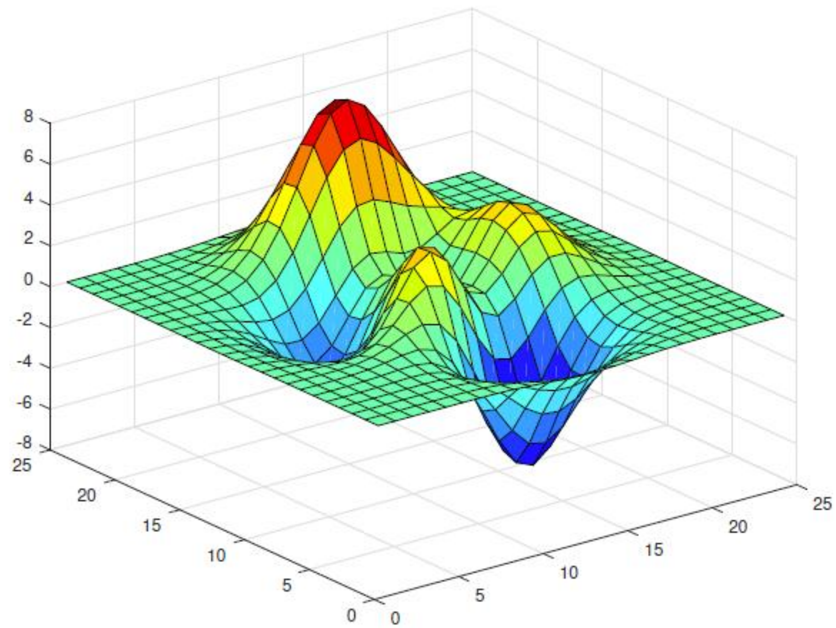
   $$y - 1 = -\frac{1}{3}x + 1 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{3}x + 2.$$

   혹은 양변에 3을 곱해 아래와 같은 일반형(또는 표준형)으로 쓸 수도 있습니다.

   $$3y = -x + 6 \quad \Rightarrow \quad x + 3y = 6.$$

목차

1. 함수의 극한
2. 접선
3. 미분과 도함수
4. 이변수함수
5. 편도함수
6. 이변수 함수의 미분
7. 연쇄법칙
8. 방향도함수
9. 기울기 벡터
10. 방향도함수의 최대화
11. 기울기 벡터의 중요성
12. 극댓값과 극솟값
13. 경사하강법



4 정의 극한

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

가 존재할 때 이 극한을 a에서 **함수 f의 미분**(derivative)이라 하고 $f'(a)$로 나타낸다.

$f'(a)$는 "f 프라임 a"라고 읽는다.

$x = a + h$라 놓으면 $h = x - a$이고, $h \to 0$일 필요충분조건은 $x \to a$인 것이다. 따라서 미분의 정의는 접선의 기울기를 구할 때 보았듯이 다음과 같이 나타낼 수 있다.

5

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

2와 (b) a에서 함수 $f(x) = x^2 - 8x + 9$의 미분을 구하여라.

미분과 도함수

2와 (b) a에서 함수 $f(x) = x^2 - 8x + 9$의 미분을 구하여라.

1. 미분의 정의(순간변화율)

함수 $f(x)$가 주어졌을 때, $x = a$에서의 미분계수(순간변화율) $f'(a)$는

$$\boxed{f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.}$$

3. $f(a+h) - f(a)$ 계산

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= \left[a^2 + 2ah + h^2 - 8a - 8h + 9\right] - \left[a^2 - 8a + 9\right] \\ &= a^2 + 2ah + h^2 - 8a - 8h + 9 - a^2 + 8a - 9 \\ &\quad (\text{괄호를 풀어서 부호를 모두 반영}) \\ &= \underbrace{a^2 - a^2}_{=0} + 2ah + h^2 - \underbrace{8a + (-8a)}_{-8a+8a=0} - 8h + \underbrace{9 - 9}_{=0} \\ &= 2ah + h^2 - 8h. \end{aligned}$$

2와 (b) a에서 함수 $f(x) = x^2 - 8x + 9$의 미분을 구하여라.

4. 분자를 h로 나누기

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{2ah+h^2-8h}{h} = \frac{h(2a+h-8)}{h} \quad (\text{단 } h \neq 0).$$

여기서 $h \neq 0$이므로 분모 h를 약분하면

$$= 2a + h - 8.$$

5. 극한 $\lim\limits_{h \to 0}$

$$f'(a) = \lim_{h \to 0}\left(2a+h-8\right) = 2a - 8.$$

미분과 도함수

앞 절에서 고정된 수 a에서 함수 f의 미분은

1
$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

라 하였다. 여기서는 관점을 바꾸어 수 a를 변화시켜보자. 식 **1**의 a를 변수 x로 바꾸면

2
$$\boxed{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

가 된다. 주어진 x에 대해 이 극한이 존재할 때 이를 $f'(x)$로 대응시킨다. 따라서 f'을 f의 **도함수**(derivative of f)라고 부르는 새로운 함수라 할 수 있고, 식 **2**에 의해 정의된다. x에서 f'의 값, 즉 $f'(x)$는 기하학적으로 점 $(x, f(x))$에서 f의 그래프에 접하는 접선의 기울기로 해석될 수 있다.

함수 f'은 식 **2**의 극한 계산에 의해 f로부터 유도되었기 때문에 f의 도함수라고 부른다. f'의 정의역은 $\{x \mid f'(x)$가 존재한다$\}$이고, f의 정의역보다 작을 것이다.

미분과 도함수

그림 1에 주어진 함수 f의 그래프를 보고 도함수 f'의 그래프의 개형을 그려라.

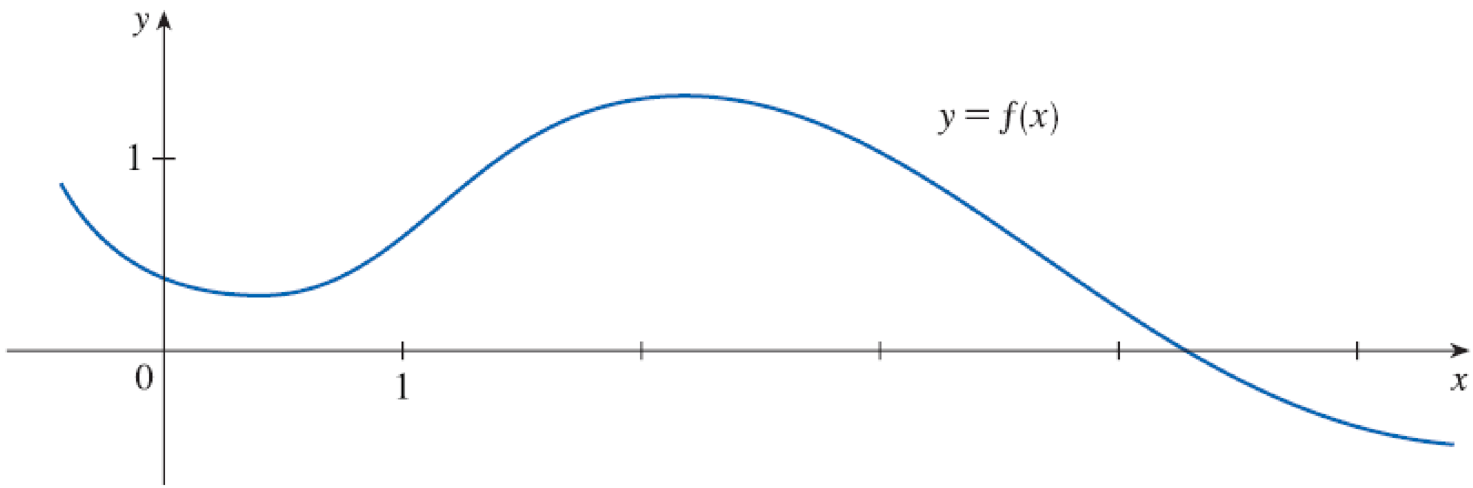


그림 1

그림 1에 주어진 함수 f의 그래프를 보고 도함수 f'의 그래프의 개형을 그려라.

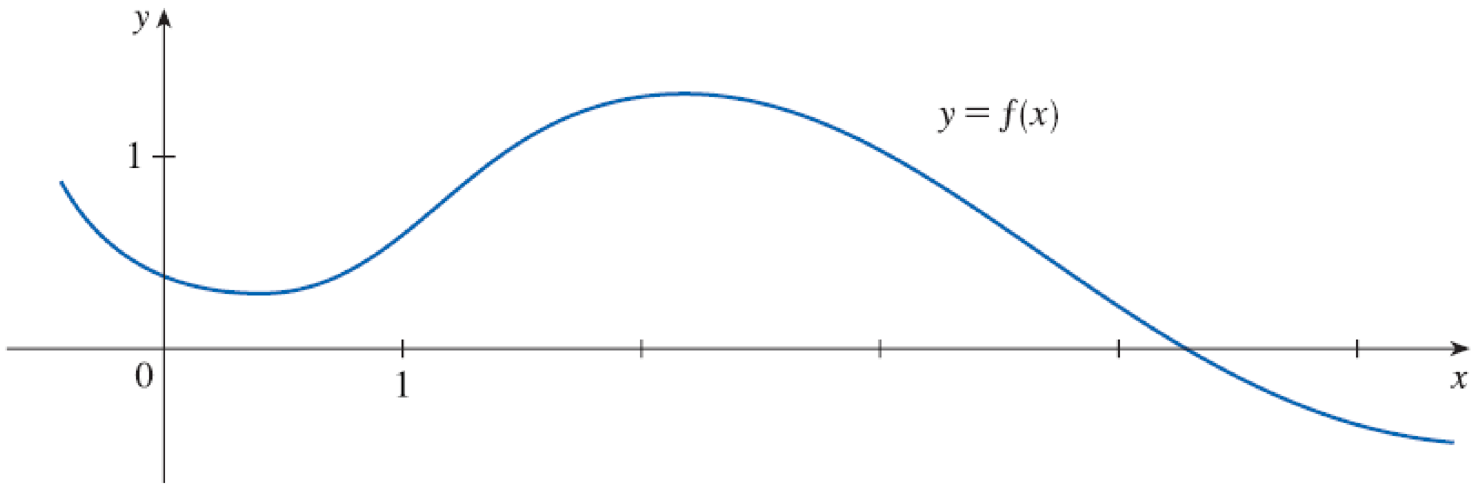


그림 1

1. $f(x)$의 증감(기울기) 파악하기

1. **처음 구간**

   그림 왼쪽에서 시작할 때, $f(x)$가 **내려가는** 형태이므로 이 구간에서의 접선 기울기는 **음수**입니다.

   즉, $f'(x) < 0$인 상태로 시작합니다.

그림 1에 주어진 함수 f의 그래프를 보고 도함수 f'의 그래프의 개형을 그려라.

2. **첫 번째 극솟점(어딘가에서)**
   어느 지점에서 $f(x)$가 가장 낮아졌다가 다시 상승하기 시작합니다. 이 지점이 **극솟점**이므로
   - 그 점에서 $f'(x) = 0$.
   - 극솟점 이전에는 $f'(x) < 0$, 극솟점 이후에는 $f'(x) > 0$.
3. **그 후 증가 구간**
   극솟점 뒤로는 $f(x)$가 **올라가는** 구간이므로, 그동안은 $f'(x) > 0$이 됩니다.
4. **극댓점(정점)**
   어느 지점에서 $f(x)$가 가장 높아졌다가(극댓점) 다시 내려가기 시작합니다.
   - 이 지점에서 다시 $f'(x) = 0$.
   - 그 전에는 $f'(x) > 0$, 그 뒤로는 $f'(x) < 0$.
5. **마지막 구간**
   그림 오른쪽 끝으로 갈수록 $f(x)$가 점점 **내려가는** 모습이므로, 결국 $f'(x) < 0$ 상태로 진행하게 됩니다.

미분과 도함수

$f(x) = x^3 - x$일 때 $f'(x)$를 구하여라.

미분과 도함수

$f(x) = x^3 - x$일 때 $f'(x)$를 구하여라.

- x^3의 도함수는 $3x^2$.
- $-x$의 도함수는 -1.

따라서,

$$f'(x) = 3x^2 - 1.$$

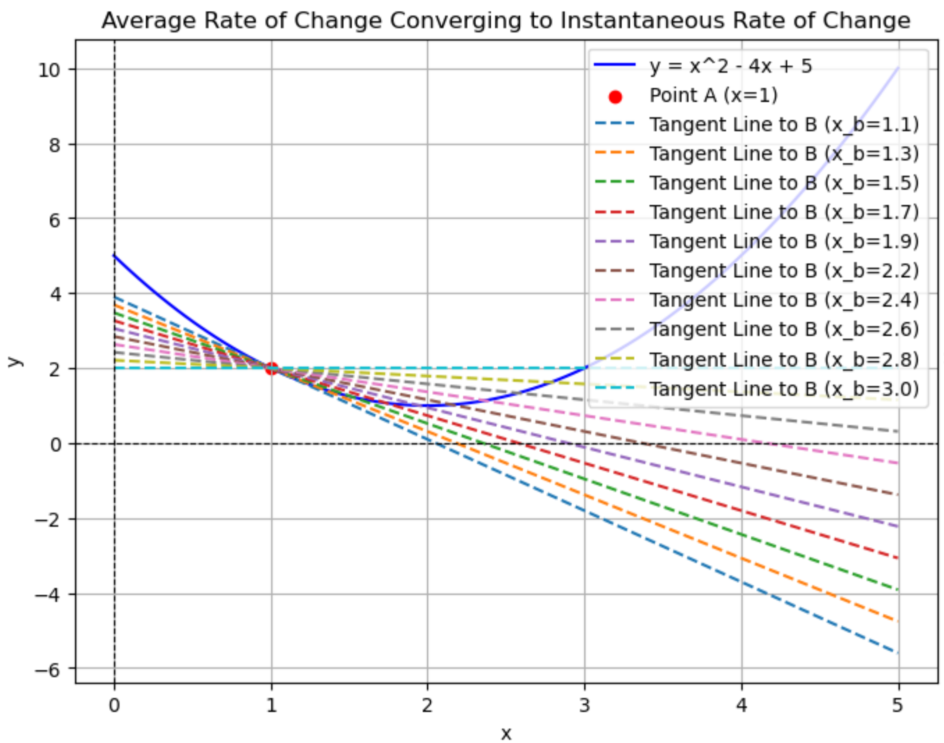
미분과 도함수

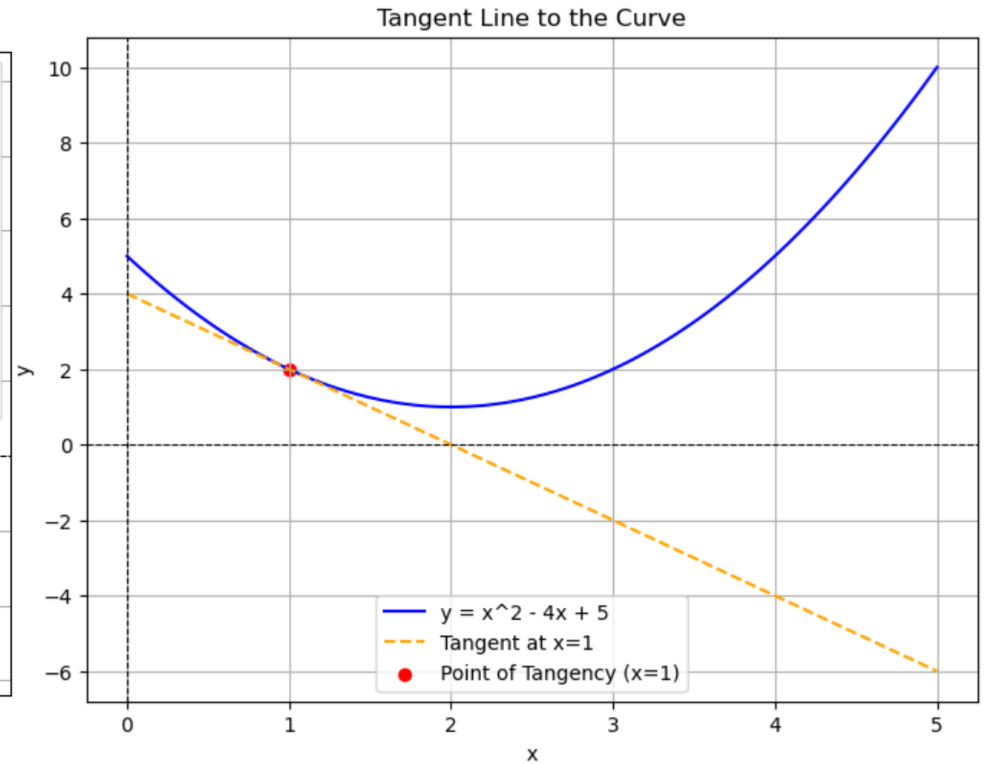
독립변수가 x이고 종속변수가 y임을 나타내는 전통적인 기호 $y = f(x)$를 사용하면 다음과 같이 도함수를 나타내는 몇몇 다른 기호들이 있다.

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = Df(x) = D_x f(x)$$

기호 D와 d/dx는 도함수를 구하는 과정인 **미분**(differentiation)의 연산을 나타내기 때문에 **미분연산자**라고 부른다.

미분 실습 (with Colab)

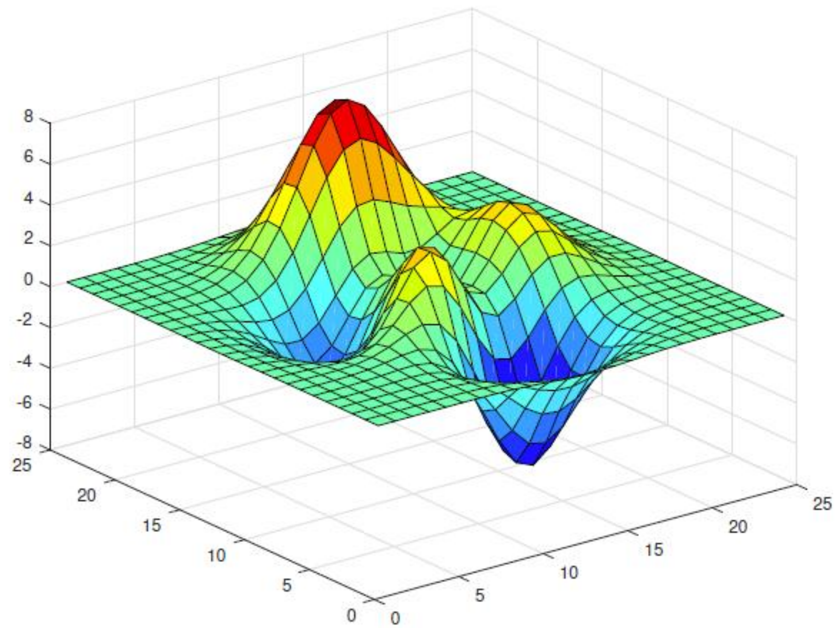




https://colab.research.google.com/drive/1E-G0C59I5FyvzVEuhf65AD1cfEx_-vlx#scrollTo=a2e92cbf-a513-4546-9518-170d35709b18

목차

1. 함수의 극한
2. 접선
3. 미분과 도함수
4. **이변수함수**
5. 편도함수
6. 이변수 함수의 미분
7. 연쇄법칙
8. 방향도함수
9. 기울기 벡터
10. 방향도함수의 최대화
11. 기울기 벡터의 중요성
12. 극댓값과 극솟값
13. 경사하강법



이변수 함수

이변수함수는 $\mathbb{R}^2$의 부분집합을 정의역으로 하고 $\mathbb{R}$의 부분집합을 치역으로 하는 함수이다. 이러한 함수의 표시법 중 하나는 xy평면의 부분집합으로 묘사되는 정의역 D에서의 화살도표법이다(그림 1 참조). 여기서 정의역 D는 xy평면의 부분집합이고 치역은 z축으로 나타낸 실수축의 수집합이다. 예를 들어, $f(x, y)$가 D 모양을 하는 편평한 금속판 위의 점 (x, y)에서 온도를 나타낸다고 하면 z축은 기록된 온도를 나타내는 온도계와 같다.

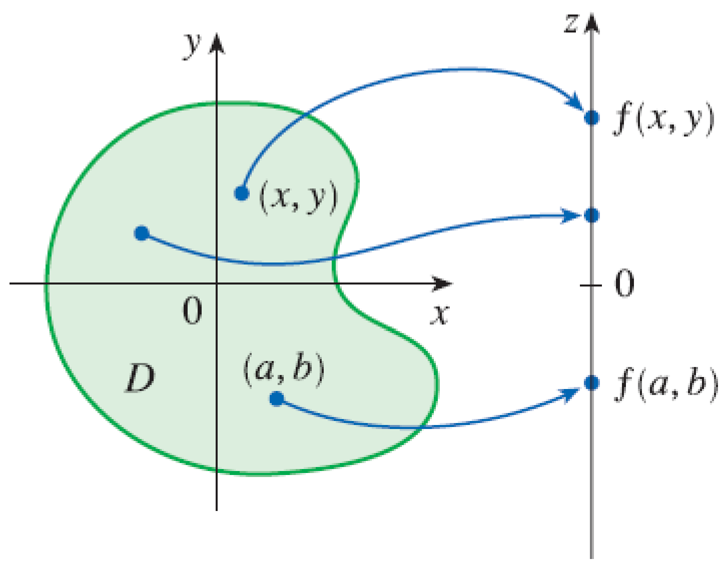


그림 1

이변수 함수

매우 추운 겨울에 체감추위지수(wind-chill index)는 추위가 얼마나 맹위를 떨치는가를 명확히 묘사하는 데 종종 이용된다. 이 지수 W는 실제온도 T와 바람의 속도 v에 의존한다. 그래서 W는 T와 v의 함수이고 $W = f(T, v)$로 나타낸다. 표 1은 미국기상청과 캐나다의 기상청에 의해 수집된 W의 값을 기록한 것이다.

표 1 대기온도와 바람속도의 함수로서 체감추위지수

바람속도(km/h)

실제온도(°C)

T \ v	5	10	15	20	25	30	40	50	60	70	80
5	4	3	2	1	1	0	−1	−1	−2	−2	−3
0	−2	−3	−4	−5	−6	−6	−7	−8	−9	−9	−10
−5	−7	−9	−11	−12	−12	−13	−14	−15	−16	−16	−17
−10	−13	−15	−17	−18	−19	−20	−21	−22	−23	−23	−24
−15	−19	−21	−23	−24	−25	−26	−27	−29	−30	−30	−31
−20	−24	−27	−29	−30	−32	−33	−34	−35	−36	−37	−38
−25	−30	−33	−35	−37	−38	−39	−41	−42	−43	−44	−45
−30	−36	−39	−41	−43	−44	−46	−48	−49	−50	−51	−52
−35	−41	−45	−48	−49	−51	−52	−54	−56	−57	−58	−60
−40	−47	−51	−54	−56	−57	−59	−61	−63	−64	−65	−67

예를 들면 온도가 −5°C이고 바람속도가 50km/h이면 바람이 없는 −15°C 정도의 추위를 느낄 것이다. 그래서

$$f(-5, 50) = -15$$

이변수 함수

이변수함수의 움직임을 나타내는 또 다른 방법으로 그래프를 생각해보자.

정의 f가 정의역이 D인 이변수함수이면, f의 **그래프**는 $\mathbb{R}^3$에서 $(x, y) \in D$이고 $z = f(x, y)$인 모든 점 (x, y, z)의 집합이다.

이변수함수의 그래프는 방정식이 $z = f(x, y)$인 곡면 S이다. f의 곡면 S를 xy평면에 있는 정의역 D의 위쪽 또는 아래쪽에 바로 놓이게 하여 표시할 수 있다(그림 5 참조).

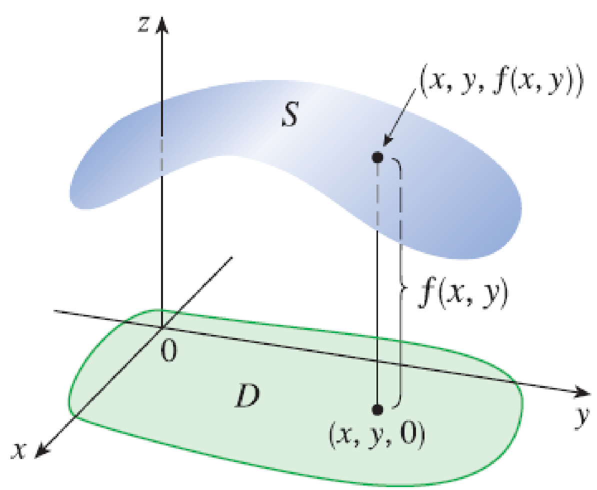


그림 5

이변수 함수

함수 $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$의 그래프를 그려라.

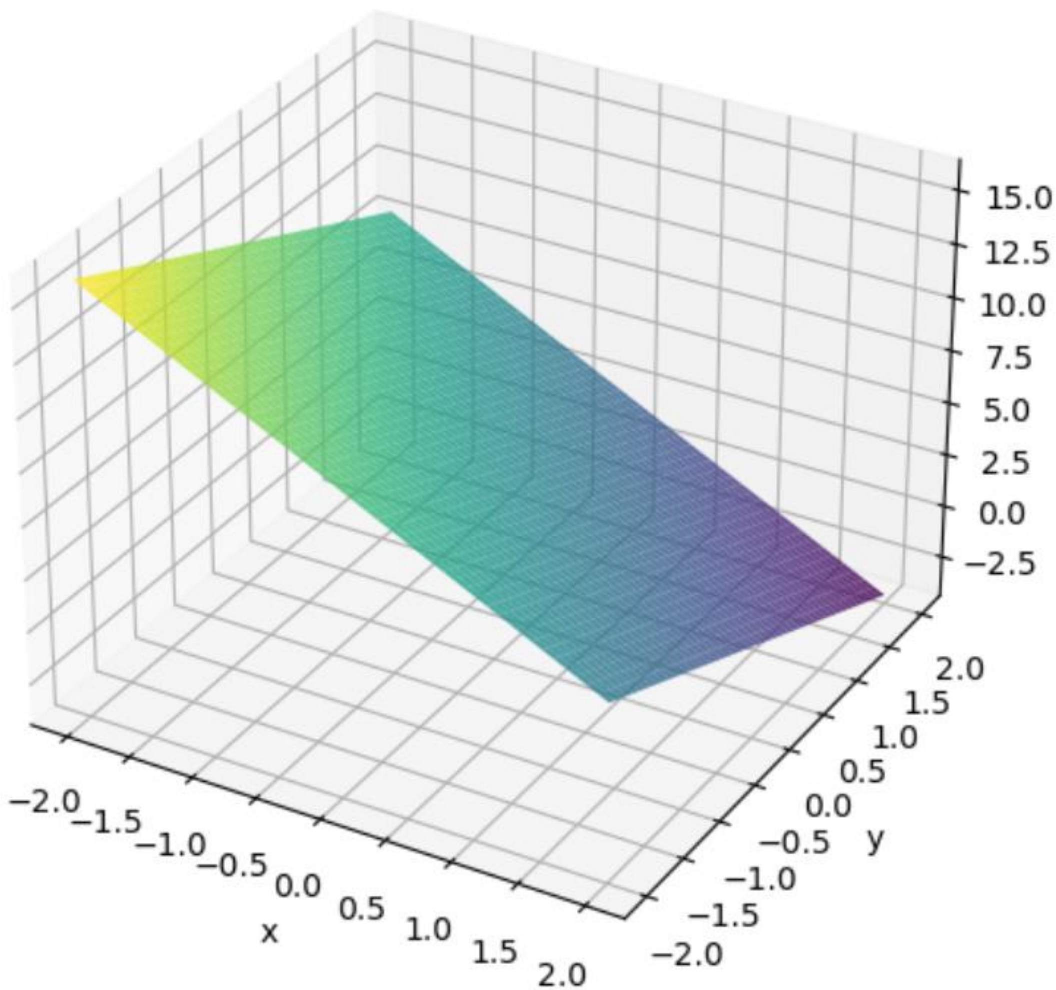
이변수 함수

함수 $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$의 그래프를 그려라.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
# 1. x, y 범위 설정
x = np.linspace(-2, 2, 50)  # -2부터 2까지 50개의 점
y = np.linspace(-2, 2, 50)
# 2. 격자(meshgrid) 생성
X, Y = np.meshgrid(x, y)
# 3. 주어진 함수 f(x,y)에 맞춰 Z값 계산
Z = 6 - 3*X - 2*Y
# 4. 3D 그래프 그리기
fig = plt.figure(figsize=(8,6))
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
ax.plot_surface(X, Y, Z, cmap='viridis', alpha=0.8)
ax.set_xlabel('x')
ax.set_ylabel('y')
ax.set_zlabel('z')
ax.set_title('f(x,y) = 6 - 3x - 2y')
plt.show()
```

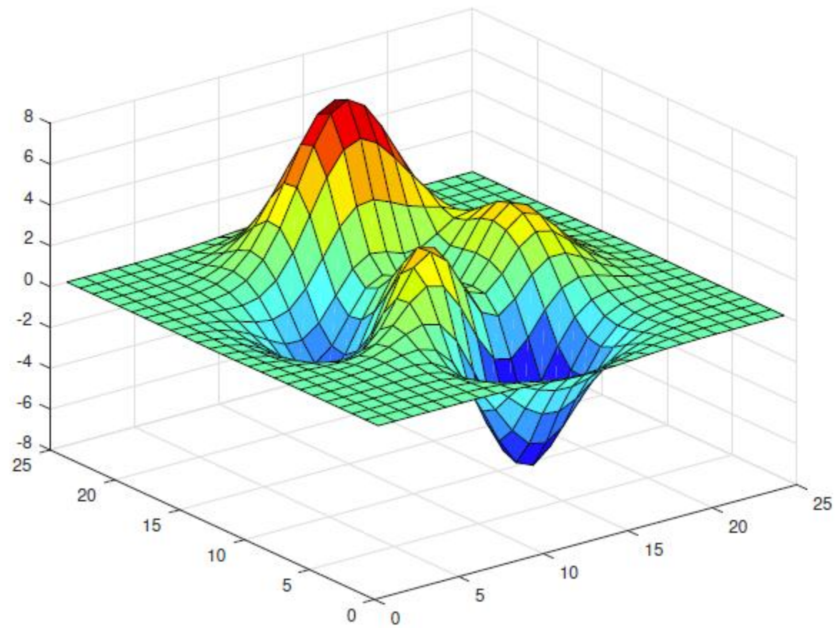
이변수 함수

함수 $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$의 그래프를 그려라.



목차

1. 함수의 극한
2. 접선
3. 미분과 도함수
4. 이변수함수
5. 편도함수
6. 이변수 함수의 미분
7. 연쇄법칙
8. 방향도함수
9. 기울기 벡터
10. 방향도함수의 최대화
11. 기울기 벡터의 중요성
12. 극댓값과 극솟값
13. 경사하강법



편도함수

일반적으로 f가 두 변수 x와 y의 함수이면, y를 고정하는 동안, 즉 $y = b$ (b는 상수)로 일정할 때 오직 x만 변한다고 가정하자. 그러면 실제로 단지 일변수 x만의 함수를 생각할 수 있다. 즉, $g(x) = f(x, b)$. 만일 g가 a에서 도함수를 가지면, **(a, b)에서 x에 관한 f의 편도함수**(partial derivative)라고 하고 $f_x(a, b)$로 표시한다.

1

$$\boxed{f_x(a, b) = g'(a) \qquad [\text{단}, g(x) = f(x, b)]}$$

도함수의 정의에 의해

$$g'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{g(a + h) - g(a)}{h}$$

이므로, 식 1은

2

$$\boxed{f_x(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}}$$

가 된다. 이와 마찬가지로 **(a, b)에서 y에 관한 f의 편도함수** $f_y(a, b)$는 x가 $x = a$로 일정할 때 함수 $G(y) = f(a, y)$의 b에서 도함수를 다음과 같이 구하여 얻는다.

3

$$\boxed{f_y(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a, b + h) - f(a, b)}{h}}$$

편도함수

만약 등식 $\boxed{2}$와 $\boxed{3}$에서 점 (a, b)를 변하도록 하면 f_x와 f_y는 이변수함수가 된다.

4 정의 f가 이변수함수이면, 그 **편도함수**는 다음과 같이 정의된 함수 f_x와 f_y이다.

$$f_x(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$f_y(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}$$

편도함수

편도함수에 대한 다른 표기법이 많이 있다. 예를 들어, f_x 대신 f_1 또는 $D_1 f$(첫 번째 변수에 관한 미분을 나타내기 위해) 또는 $\partial f/\partial x$로 쓸 수 있다. 그러나 여기서 $\partial f/\partial x$는 미분의 비로 해석되어서는 안 된다.

편도함수의 표기법 $z = f(x, y)$이면,

$$f_x(x, y) = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = f_1 = D_1 f = D_x f$$

$$f_y(x, y) = f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = f_2 = D_2 f = D_y f$$

편도함수를 계산하기 위해서 해야 할 일은 x에 관한 편도함수는 y를 고정하여 얻는 단일변수함수 g의 도함수라는 사실을 식 $\boxed{1}$로부터 기억하는 것이다. 따라서 다음과 같은 규칙을 가진다.

$z = f(x, y)$의 편도함수를 구하기 위한 규칙

1. f_x를 구하기 위해서 y를 상수로 보고 $f(x, y)$를 x에 관해 미분한다.

2. f_y를 구하기 위해서 x를 상수로 보고 $f(x, y)$를 y에 관해 미분한다.

편도함수

$f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$일 때 $f_x(2, 1)$과 $f_y(2, 1)$을 구하여라.

$f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$일 때 $f_x(2, 1)$과 $f_y(2, 1)$을 구하여라.

1. $f_x(x, y)$ 구하기

x에 대한 편미분에서는 y를 상수로 간주합니다.

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(x^3 + x^2y^3 - 2y^2\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(x^3) + \frac{\partial}{\partial x}(x^2y^3) + \frac{\partial}{\partial x}(-2y^2) \\ &= 3x^2 + \left(2x \cdot y^3\right) + 0 \\ &= 3x^2 + 2x\,y^3. \end{aligned}$$

따라서 $(x, y) = (2, 1)$에서,

$$f_x(2,1) = 3 \cdot (2)^2 + 2 \cdot 2 \cdot (1)^3 = 3 \cdot 4 + 4 = 12 + 4 = 16.$$

편도함수

$f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$일 때 $f_x(2, 1)$과 $f_y(2, 1)$을 구하여라.

2. $f_y(x, y)$ 구하기

이번에는 y에 대해 미분하므로, x는 상수로 봅니다.

$$\begin{aligned} f_y(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(x^3 + x^2y^3 - 2y^2\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial y}(x^3) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2y^3) + \frac{\partial}{\partial y}(-2y^2) \\ &= 0 + x^2 \cdot \frac{d}{dy}(y^3) - 2 \cdot \frac{d}{dy}(y^2) \\ &= x^2 \cdot 3y^2 - 2 \cdot (2y) \quad (\text{왜냐하면 } \tfrac{d}{dy}y^3 = 3y^2,\ \tfrac{d}{dy}y^2 = 2y) \\ &= 3x^2y^2 - 4y. \end{aligned}$$

$(x, y) = (2, 1)$에서,

$$f_y(2, 1) = 3 \cdot (2)^2 \cdot (1)^2 - 4 \cdot (1) = 3 \cdot 4 \cdot 1 - 4 = 12 - 4 = 8.$$

편도함수

편도함수의 기하학적 해석을 위해서 방정식 $z = f(x, y)$가 곡면 S(f의 그래프)를 나타낸다고 하자. 만약 $f(a, b) = c$이면 점 $P(a, b, c)$는 S상에 놓인다. 수직면 $y = b$가 S를 가로지를 때 얻는 곡선 C_1에 관심을 둔다(다시 말해서, C_1은 평면 $y = b$에서 S의 자취이다). 마찬가지로 수직면 $x = a$는 곡선 C_2에서 S를 가로지른다. 두 곡선 C_1과 C_2는 점 P를 통과한다(그림 1 참조).

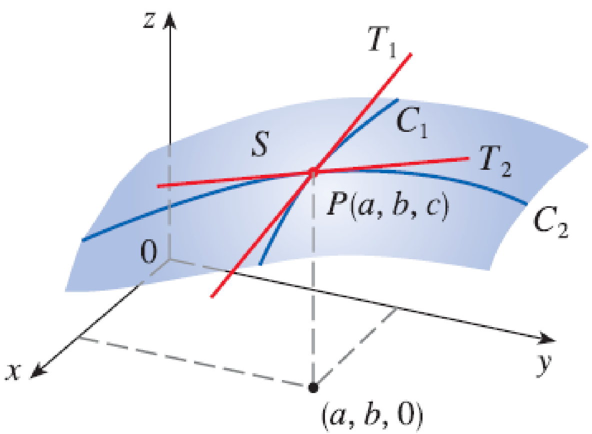


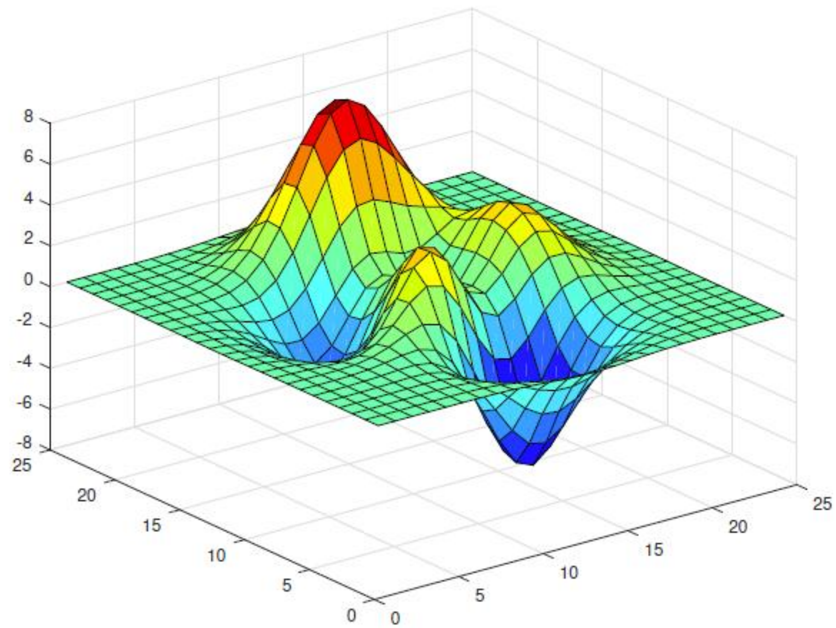
그림 1 (a, b)에서 편도함수는 C_1과 C_2의 접선의 기울기이다.

곡선 C_1이 함수 $g(x) = f(x, b)$의 그래프임을 주목하면 P에서 이것의 접선 T_1의 기울기는 $g'(a) = f_x(a, b)$이다. 곡선 C_2는 함수 $G(y) = f(a, y)$의 그래프이며 P에서 그것의 접선 T_2의 기울기는 $G'(b) = f_y(a, b)$이다.

따라서 편미분계수 $f_x(a, b)$와 $f_y(a, b)$는 기하학적으로 $y = b$와 $x = a$의 평면에서 S의 자취 C_1과 C_2에 대한 점 (a, b, c)에서 접선의 기울기로 해석할 수 있다.

목차

1. 함수의 극한
2. 접선
3. 미분과 도함수
4. 이변수함수
5. 편도함수
6. 이변수 함수의 미분
7. 연쇄법칙
8. 방향도함수
9. 기울기 벡터
10. 방향도함수의 최대화
11. 기울기 벡터의 중요성
12. 극댓값과 극솟값
13. 경사하강법



이변수 함수의 미분

일변수함수 $y = f(x)$에 대해 x가 a에서 $a + \Delta x$까지 변할 때 y의 증분은

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$$

로 정의되었음을 상기한다. 3장에서 만약 f가 a에서 미분가능하면

5 $$\Delta y = f'(a)\,\Delta x + \varepsilon\,\Delta x \qquad (\text{단, } \Delta x \to 0\text{일 때 } \varepsilon \to 0\text{이다})$$

이제 이변수함수 $z = f(x, y)$를 생각하고, x가 a에서 $a + \Delta x$로 변하고 y가 b에서 $b + \Delta y$로 변한다고 하자. 그러면 z의 상응하는 **증분**(increment)은

6 $$\Delta z = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b)$$

이다. 따라서 증분 Δz는 (x, y)가 (a, b)에서 $(a + \Delta x, b + \Delta y)$로 변할 때 f값의 변화를 나타낸다.

이변수 함수의 미분

미분가능한 일변수함수 $y = f(x)$에 대해 미분 dx를 독립변수로 정의하였다. 즉, dx는 실숫값으로 주어졌다. 그러면 y의 미분은

$$dy = f'(x)\,dx \tag{9}$$

로 정의되었다(3.8절 참조). 그림 6은 증분 Δy와 미분 dy 사이의 관계를 보여준다. x가 $dx = \Delta x$ 양에 따라 변할 때, Δy는 곡선 $y = f(x)$의 높이의 변화를 의미하고 dy는 접선의 높이의 변화를 의미한다.

미분가능한 이변수함수 $z = f(x, y)$에 대해 **미분** dx와 dy가 독립변수가 되도록 정의한다. 즉, 그것에 임의의 값을 주어도 된다. 그러면 **미분** dz는, 또는 **전미분**(total differential)이라고 부르는데, 다음과 같이 정의한다.

$$\boxed{dz = f_x(x, y)\,dx + f_y(x, y)\,dy = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy} \tag{10}$$

(식 9와 비교하여라.) 때때로 dz 대신 표기법 df를 사용한다.

이변수 함수의 미분

$z = f(x, y) = x^2 + 3xy - y^2$일 때 미분 dz를 구하여라.

이변수 함수의 미분

$z = f(x, y) = x^2 + 3xy - y^2$일 때 미분 dz를 구하여라.

1. 편미분 f_x, f_y 구하기

1. x에 대한 편미분:

$$f_x = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + 3xy - y^2) = 2x + 3y \quad (\text{왜냐하면 } y^2 \text{는 } x\text{에 무관한 상수})$$

2. y에 대한 편미분:

$$f_y = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + 3xy - y^2) = 3x - 2y \quad (\text{왜냐하면 } x^2 \text{는 } y\text{에 무관한 상수})$$

2. 미분 dz (총미분) 쓰기

2변수 함수의 전체 미분(총미분)은

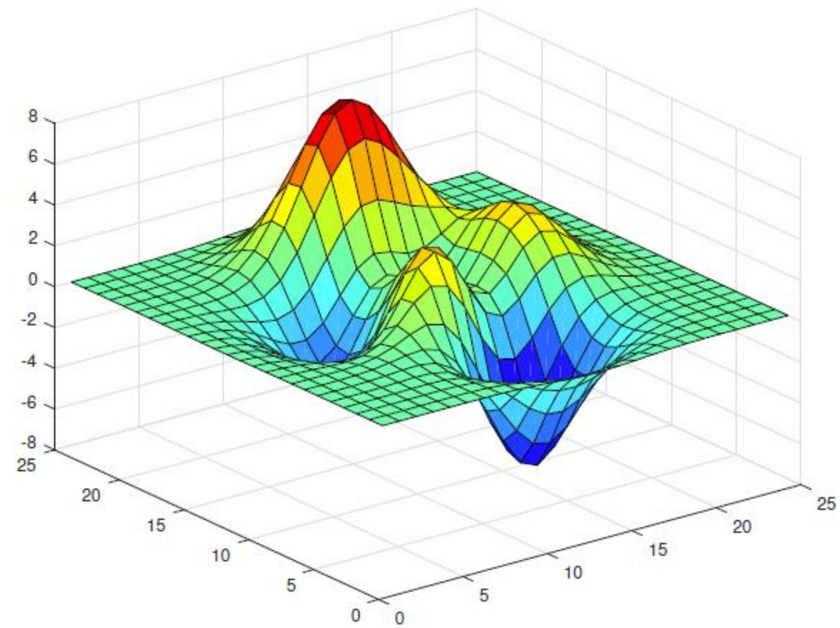
$$dz \;=\; f_x\,dx \;+\; f_y\,dy.$$

위에서 구한 f_x와 f_y를 대입하면,

$$\boxed{dz = (2x + 3y)\,dx \;+\; (3x - 2y)\,dy.}$$

목차

1. 함수의 극한
2. 접선
3. 미분과 도함수
4. 이변수함수
5. 편도함수
6. 이변수 함수의 미분
7. **연쇄법칙**
8. 방향도함수
9. 기울기 벡터
10. 방향도함수의 최대화
11. 기울기 벡터의 중요성
12. 극댓값과 극솟값
13. 경사하강법



연쇄법칙

이변수 이상의 함수에 대한 연쇄법칙은 여러 가지 형태가 있으며 그 각각은 합성함수를 미분하는 법칙을 제공한다. 첫 번째 설명(정리 **1**)은 $z = f(x, y)$이고, 차례로 변수 x, y가 변수 t의 함수인 경우를 다룬다. 이것은 z가 t의 간접적인 함수 $z = f(g(t), h(t))$임을 의미하고 연쇄법칙은 t의 함수로서의 z를 미분하는 공식을 제공한다. f가 미분가능(13.4절의 정의 **7**)이라 가정한다. 이것은 f_x와 f_y가 연속인 경우이다(13.4절의 정리 **8**).

1 연쇄법칙(경우 1) $z = f(x, y)$가 x와 y에 관해 미분가능한 함수라 하고 $x = g(t)$와 $y = h(t)$가 t의 미분가능한 함수라 하자. 그러면 z는 t의 미분가능한 함수이고

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

이다.

종종 $\partial f/\partial x$ 대신에 $\partial z/\partial x$를 사용하므로 연쇄법칙은 다음처럼 나타낼 수도 있다.

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}}$$

연쇄법칙

$x = \sin 2t$, $y = \cos t$일 때 $z = x^2y + 3xy^4$이면 $t = 0$일 때 dz/dt를 구하여라.

연쇄법칙

$x = \sin 2t$, $y = \cos t$일 때 $z = x^2y + 3xy^4$이면 $t = 0$일 때 dz/dt를 구하여라.

1. 사슬법(Chain Rule) 적용

1.1. $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ 구하기

$$z = x^2 y + 3 x y^4.$$

1. $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 y) + \frac{\partial}{\partial x}(3 x y^4) = (2x y) + 3 y^4.$$

2. $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ $$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 y) + \frac{\partial}{\partial y}(3 x y^4) = x^2 + 3x \cdot 4 y^3 = x^2 + 12 x y^3.$$

1.2. $\dfrac{dx}{dt}$와 $\frac{dy}{dt}$ 구하기

- $x = \sin(2t)$ $$\frac{dx}{dt} = 2\cos(2t).$$
- $y = \cos(t)$ $$\frac{dy}{dt} = -\sin(t).$$

연쇄법칙

$x = \sin 2t$, $y = \cos t$일 때 $z = x^2y + 3xy^4$이면 $t = 0$일 때 dz/dt를 구하여라.

2. $t = 0$에서의 값들을 대입

1. 먼저 $x(0)$, $y(0)$, $\frac{dx}{dt}\big|_{t=0}$, $\frac{dy}{dt}\big|_{t=0}$를 구합니다.
   - $x(0) = \sin(2 \cdot 0) = \sin(0) = 0.$
   - $y(0) = \cos(0) = 1.$
   - $\frac{dx}{dt}\big|_{t=0} = 2\cos(2 \cdot 0) = 2\cos(0) = 2.$
   - $\frac{dy}{dt}\big|_{t=0} = -\sin(0) = 0.$
2. $\dfrac{\partial z}{\partial x}(0,1)$과 $\frac{\partial z}{\partial y}(0,1)$ 계산
   - $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2xy + 3y^4.$ $\quad \dfrac{\partial z}{\partial x}(0,1) = 2 \cdot 0 \cdot 1 + 3 \cdot 1^4 = 3.$
   - $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 12xy^3.$ $\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}(0,1) = (0)^2 + 12 \cdot 0 \cdot 1^3 = 0.$
3. 따라서, $\displaystyle \frac{dz}{dt}\bigg|_{t=0} = \underbrace{\frac{\partial z}{\partial x}(0,1)}_{=3} \times \underbrace{\frac{dx}{dt}\bigg|_{t=0}}_{=2} + \underbrace{\frac{\partial z}{\partial y}(0,1)}_{=0} \times \underbrace{\frac{dy}{dt}\bigg|_{t=0}}_{=0}.$

연쇄법칙

이제 다음 상황을 생각해보자. $z = f(x, y)$이고 x와 y는 각각 s와 t의 이변수함수로 $x = g(s, t)$, $y = h(s, t)$이다. 그러면 z는 간접적으로 s와 t의 함수이고 $\partial z/\partial s$와 $\partial z/\partial t$를 구하고자 한다. $\partial z/\partial t$ 계산에서 s를 고정하고 t에 관해 z의 도함수를 계산하자. 정리 **1** 을 적용하여

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

를 얻을 수 있다. $\partial z/\partial s$에 대해서도 비슷하게 할 수 있다. 그래서 연쇄법칙에 대한 다음 정리를 증명하였다.

2 연쇄법칙(경우 2) $x = g(s, t)$, $y = h(s, t)$가 s와 t의 미분가능한 함수이고 $z = f(x, y)$는 x와 y의 미분가능한 함수이면

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \qquad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

이다.

연쇄법칙

$z = e^x \sin y$, $x = st^2$, $y = s^2 t$일 때 $\partial z/\partial s$와 $\partial z/\partial t$를 구하여라.

$z = e^x \sin y$, $x = st^2$, $y = s^2t$일 때 $\partial z/\partial s$와 $\partial z/\partial t$를 구하여라.

2. $\dfrac{\partial z}{\partial s}$

$$\frac{\partial}{\partial s}\left[e^{(st^2)}\sin(s^2t)\right] = \underbrace{\frac{\partial}{\partial s}\left(e^{(st^2)}\right)}_{\text{(a)}} \cdot \sin(s^2t) + e^{(st^2)} \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial s}\left[\sin(s^2t)\right]}_{\text{(b)}}.$$

1. (a) 부분: $$\frac{\partial}{\partial s}\left(e^{(st^2)}\right) = e^{(st^2)} \cdot \frac{\partial}{\partial s}(st^2) = e^{(st^2)}\,(t^2).$$

2. (b) 부분: $$\frac{\partial}{\partial s}\left[\sin(s^2t)\right] = \cos(s^2t) \cdot \frac{\partial}{\partial s}(s^2t) = \cos(s^2t)\cdot(2st).$$

인수 $e^{(st^2)}$를 묶어서 정리하면,

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial s} = e^{(st^2)}\left[t^2\sin(s^2t) + 2st\cos(s^2t)\right].}$$

$z = e^x \sin y$, $x = st^2$, $y = s^2t$일 때 $\partial z/\partial s$와 $\partial z/\partial t$를 구하여라.

3. $\dfrac{\partial z}{\partial t}$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[e^{(st^2)}\sin(s^2t)\right] = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{(st^2)}\right)}_{\text{(c)}}\sin(s^2t) \; + \; e^{(st^2)}\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\left[\sin(s^2t)\right]}_{\text{(d)}}.$$

1. (c) 부분: $$\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{(st^2)}\right) = e^{(st^2)} \cdot \frac{\partial}{\partial t}(st^2) = e^{(st^2)} \cdot (2st).$$

2. (d) 부분: $$\frac{\partial}{\partial t}\left[\sin(s^2t)\right] = \cos(s^2t) \cdot \frac{\partial}{\partial t}(s^2t) = \cos(s^2t) \cdot (s^2).$$

역시 $e^{(st^2)}$를 묶으면,

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial t} = e^{(st^2)}\left[2s\,t\,\sin(s^2t) \; + \; s^2\,\cos(s^2t)\right].}$$

연쇄법칙

연쇄법칙의 경우 2는 세 가지 변수를 포함하고 있는데, s와 t는 **독립**변수이고, x와 y는 **중간**변수, 그리고 z는 **종속**변수이다. 정리 $\boxed{2}$는 각각의 중간변수가 한 개의 항으로 되어 있으며 각 항은 1차원 연쇄법칙과 유사함을 알 수 있다(3.4절 식 $\boxed{2}$ 참조).

연쇄법칙을 기억하기 위해 그림 2의 **수형도**를 그리는 것이 도움이 된다. z가 x, y의함수임을 알 수 있도록 종속변수 z에서 중간변수 x, y까지 가지로 연결한다. 그 다음 x, y로부터 독립변수 s, t까지 가지로 연결한다. 각각의 가지에 대응하는 편도함수를 쓴다. $\partial z/\partial s$를 구하기 위해 z로부터 s까지 각각의 경로를 따라 편도함수를 곱하고 다시 합한다.

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

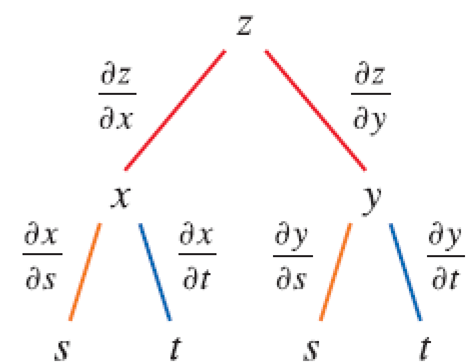
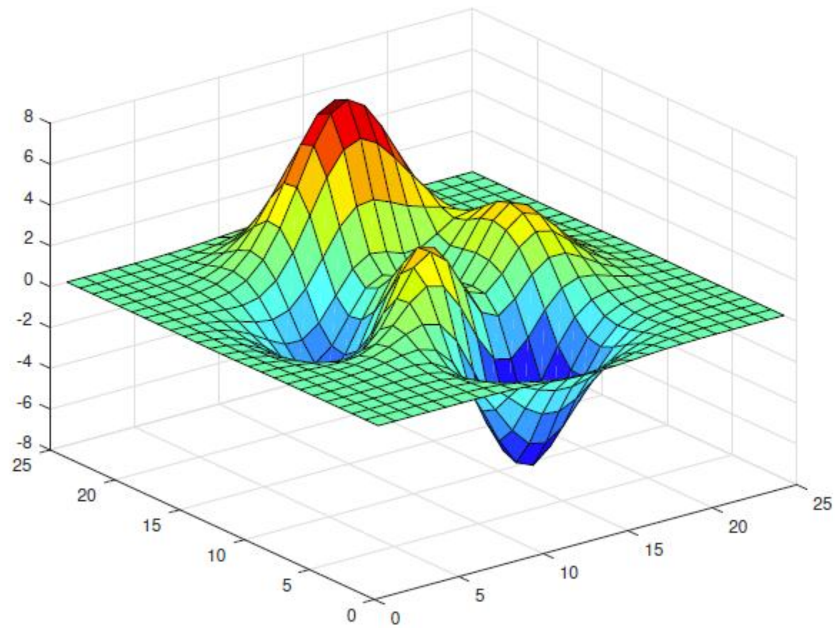


그림 2

마찬가지로 $\partial z/\partial t$는 z부터 t까지 경로를 이용하여 구한다.

목차

1. 함수의 극한
2. 접선
3. 미분과 도함수
4. 이변수함수
5. 편도함수
6. 이변수 함수의 미분
7. 연쇄법칙
8. **방향도함수**
9. 기울기 벡터
10. 방향도함수의 최대화
11. 기울기 벡터의 중요성
12. 극댓값과 극솟값
13. 경사하강법



방향도함수

그림 1의 기상도는 10월의 어느 날 오후 3시의 캘리포니아주와 네바다주에 대한 온도 함수 $T(x, y)$의 등고선 지도를 보여주고 있다. 등위곡선(또는 등온선)은 온도가 같은 지역을 연결한다. 리노와 같은 위치에서 편도함수 T_x는 리노에서 동쪽으로 여행할 때 거리에 관한 온도의 변화율이고, T_y는 북쪽으로 여행할 때 온도의 변화율이다. 그러나 남동쪽으로(라스베이거스 방향) 또는 어떤 다른 방향으로 여행할 때 온도의 변화율을 알고자 하면 어떻게 될까? 이 절에서는 모든 방향에서 둘 이상 변수함수의 변화율을 구할 수 있도록 하는 소위 방향도함수라 부르는 도함수의 한 유형을 소개한다.

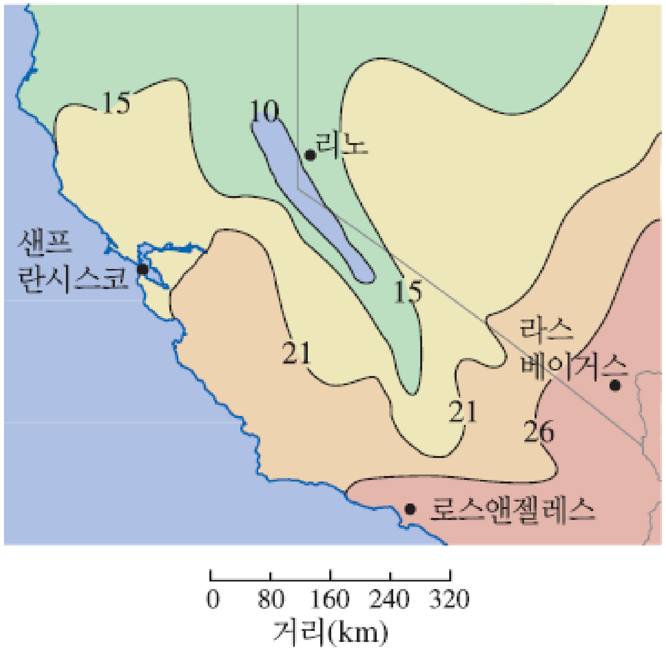


그림 1

방향도함수

$z = f(x, y)$이면 편도함수 f_x와 f_y는 다음과 같이 정의됨을 상기하자.

$$\boxed{1} \qquad f_x(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

그리고 x방향과 y방향에서, 즉 단위벡터 $\mathbf{i}$와 $\mathbf{j}$의 방향에서 z의 변화율을 나타낸다.

이제 임의의 단위벡터 $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ 방향으로 (x_0, y_0)에서의 z의 변화율을 구해보자(그림 2 참조). 이를 위해 방정식 $z = f(x, y)$인 곡면 S(f의 그래프)를 생각하고 $z_0 = f(x_0, y_0)$라 하자.

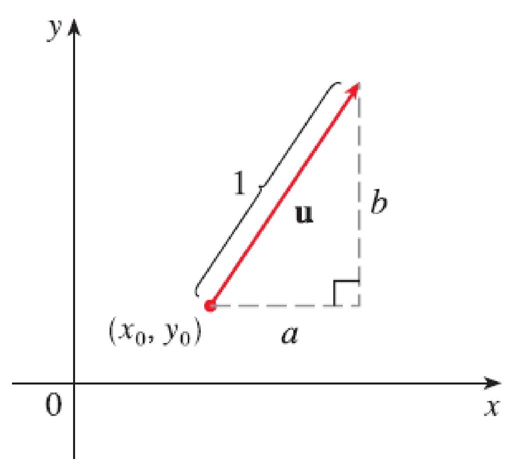


그림 2 단위벡터 $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$

방향도함수

u방향으로 P를 지나는 xy평면에 수직인 평면은 곡선 C에서 S를 가로지른다(그림 3 참조). P에서 C에 대한 접선 T의 기울기는 **u**방향으로의 z의 변화율이다.

만약 $Q(x, y, z)$가 C상의 또 다른 점이고 P'과 Q'이 xy평면상으로 P와 Q를 투사한 점이라면, 벡터 $\overrightarrow{P'Q'}$는 **u**에 평행이고, 따라서 어떤 실수 h에 대해

$$\overrightarrow{P'Q'} = h\mathbf{u} = \langle ha, hb \rangle$$

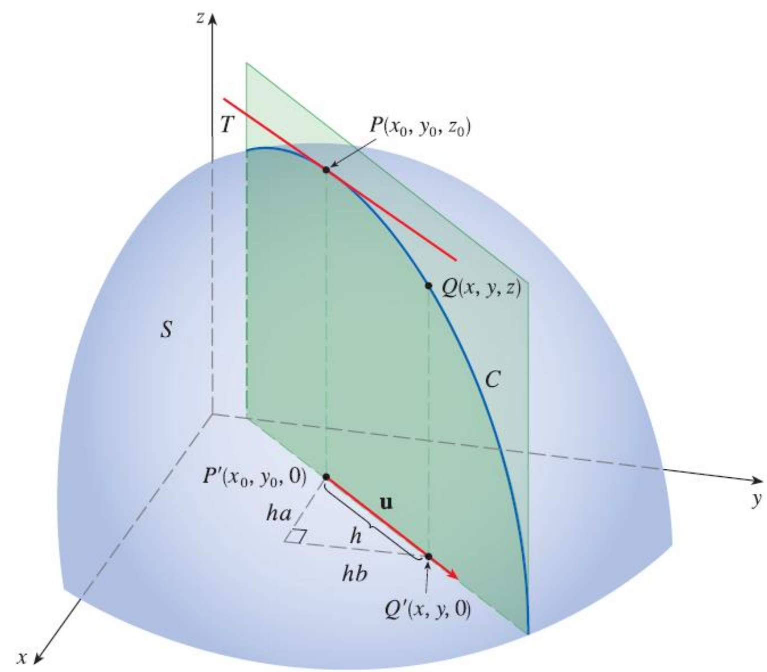


그림 3

이다. 그러므로 $x - x_0 = ha$, $y - y_0 = hb$이므로 $x = x_0 + ha$, $y = y_0 + hb$이고

$$\frac{\Delta z}{h} = \frac{z - z_0}{h} = \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

이다. 만약 $h \to 0$일 때 극한을 취하면 **u**방향에 대한(거리에 관한) z의 변화율을 얻는다.

이것을 **u**방향에 대한 f의 방향도함수라고 부른다.

$\boxed{2}$ **정의** 단위벡터 $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ 방향에 대한 (x_0, y_0)에서 다음의 극한이 존재할 때 f의 **방향도함수**(directional derivative)는

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

이다.

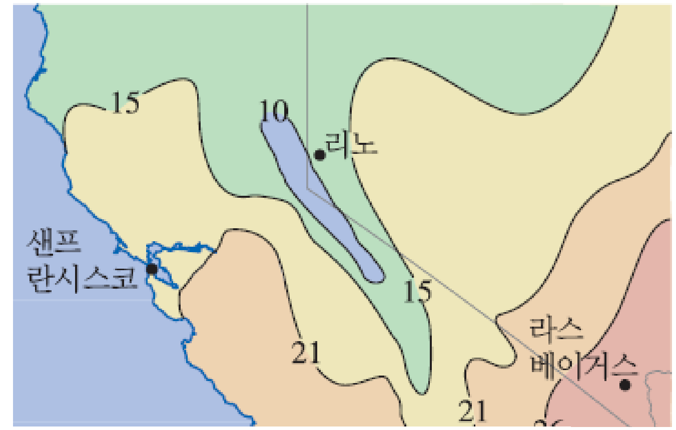
정의 $\boxed{2}$와 식 $\boxed{1}$을 비교해보면 $\mathbf{u} = \mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle$일 때 $D_{\mathbf{i}} f = f_x$이고 $\mathbf{u} = \mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$일 때 $D_{\mathbf{j}} f = f_y$임을 알 수 있다. 다시 말해서 x와 y에 관한 f의 편도함수는 방향도함수의 특별한 경우이다.

방향도함수

그림 1의 기상도를 이용하여 리노에서 남동쪽으로 이동할 때 온도함수의 방향도함수의 값을 추정하여라.

방향도함수

그림 1의 기상도를 이용하여 리노에서 남동쪽으로 이동할 때 온도함수의 방향 도함수의 값을 추정하여라.



1. 핵심 아이디어: 등온선 간 온도 차이 ÷ 대략적인 거리

- **리노 부근 등온선**: 약 10 ℃
- **남동쪽 방향 등온선**: 예컨대 15 ℃ 정도 (그림상으로 보면 리노에서 남동쪽으로 조금 내려가면 15 ℃ 선에 닿는 것을 추정)
- **온도 차이**: 약 $15 - 10 = 5$ ℃
- **등온선 간 거리**: 지도 축척을 보고 리노에서 남동쪽으로 15 ℃ 선까지가 대략 100 km 정도라고 가정(그림 속 눈금 80–120 km 부근으로 추정)

이렇게 잡으면,

$$\text{방향도함수(온도 변화율)} \approx \frac{5\ (\text{℃ 증가})}{100\ (\text{km})} = 0.05\,\frac{\text{℃}}{\text{km}}.$$

kms 대한수학회 Korean Mathematical Society

식으로 정의된 함수의 방향도함수를 계산할 때 일반적으로 다음 정리를 이용한다.

3 정리 f가 x와 y의 미분가능한 함수이면, f는 모든 단위벡터 $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ 방향으로의 방향도함수를 갖고

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = f_x(x, y)\, a + f_y(x, y)\, b$$

이다.

만약 단위벡터 $\mathbf{u}$가 양의 x축과 각 θ를 이루면(그림 5에서처럼), $\mathbf{u} = \langle \cos\theta, \sin\theta \rangle$로 쓸 수 있고, 정리 3의 식은

6 $$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = f_x(x, y) \cos\theta + f_y(x, y) \sin\theta$$

가 된다.

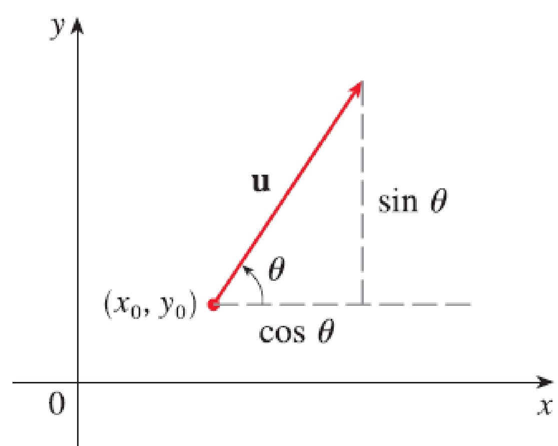
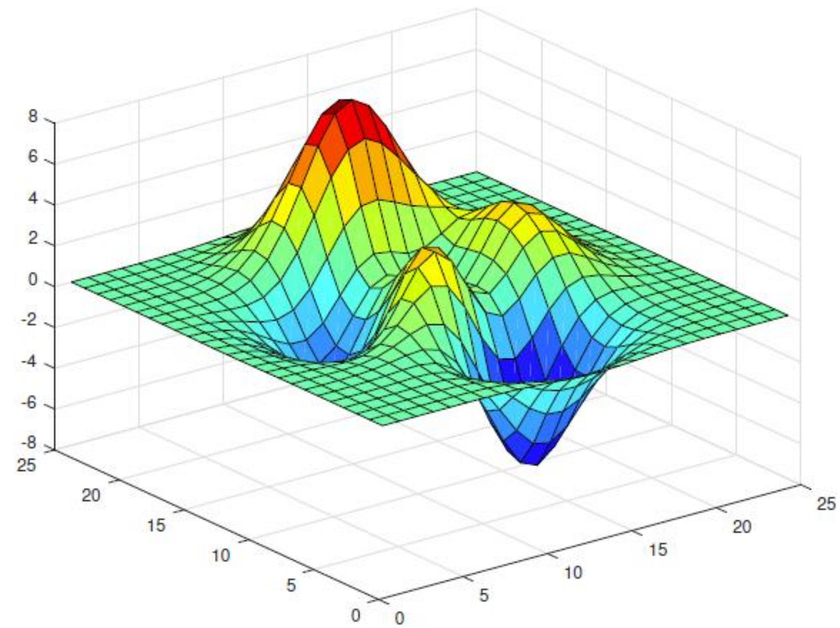


그림 5 단위벡터 $\mathbf{u} = \langle \cos\theta, \sin\theta \rangle$

목차

1. 함수의 극한
2. 접선
3. 미분과 도함수
4. 이변수함수
5. 편도함수
6. 이변수 함수의 미분
7. 연쇄법칙
8. 방향도함수
9. 기울기 벡터
10. 방향도함수의 최대화
11. 기울기 벡터의 중요성
12. 극댓값과 극솟값
13. 경사하강법



기울기 벡터

정리 3 으로부터 방향도함수는 두 벡터의 내적으로 쓸 수 있다.

7

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f(x, y) &= f_x(x, y)\,a + f_y(x, y)\,b \\ &= \langle f_x(x, y), f_y(x, y) \rangle \cdot \langle a, b \rangle \\ &= \langle f_x(x, y), f_y(x, y) \rangle \cdot \mathbf{u} \end{aligned}$$

이 내적에서 첫 번째 벡터는 방향도함수에서뿐만 아니라 다른 많은 상황에서도 나타난다. 그래서 f의 기울기 벡터(f의 *gradient*)라는 특별한 이름을 붙이고, **grad** f 또는 ∇f로 표기하며 'del f'라 읽는다.

8 정의 f가 두 변수 x와 y의 함수이면, f의 **기울기 벡터**는 벡터함수 ∇f이고 다음과 같이 정의된다.

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x(x, y), f_y(x, y) \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}$$

기울기 벡터에 대한 이 표기법을 사용해서 방향도함수에 대한 식 **7** 을 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

9

$$\boxed{D_{\mathbf{u}} f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u}}$$

이것은 $\mathbf{u}$ 위에 기울기 벡터를 정사영시킨 것으로 $\mathbf{u}$방향으로의 함수 f의 방향도함수를 나타낸다.

기울기 벡터

함수 $f(x, y) = x^2y^3 - 4y$의 점 $(2, -1)$에서 벡터 $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$의 방향으로의 방향도함수를 구하여라.

함수 $f(x, y) = x^2y^3 - 4y$의 점 $(2, -1)$에서 벡터 $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$의 방향으로의 방향도함수를 구하여라.

2. 그래디언트(Gradient) 구하기

방향도함수 $D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0)$는

$$\nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{u}$$

로 계산합니다.

여기서 $\mathbf{u}$는 $\mathbf{v}$를 단위벡터로 정규화(normalize)한 것이고,
$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$입니다.

2.1. $\frac{\partial f}{\partial x}$ 계산

$$f(x, y) = x^2 y^3 - 4y.$$

- $x^2 y^3$를 x에 대해 미분하면: $2x\, y^3$.
- $-4y$는 x에 무관하므로 미분 결과 0.

$$\therefore \quad f_x(x, y) = 2x\, y^3.$$

함수 $f(x, y) = x^2y^3 - 4y$의 점 $(2, -1)$에서 벡터 $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$의 방향으로의 방향도함수를 구하여라.

2. 그래디언트(Gradient) 구하기

2.2. $\frac{\partial f}{\partial y}$ 계산

- $x^2\,y^3$를 y에 대해 미분하면: $x^2 \cdot 3y^2 = 3x^2y^2$.
- $-4y$는 y를 미분하면 -4.

$$\therefore \quad f_y(x, y) = 3x^2\,y^2 \;-\; 4.$$

2.3. 점 $(2, -1)$에서의 ∇f

1. $f_x(2, -1) = 2 \cdot (2) \cdot (-1)^3 = 4 \cdot (-1) = -4.$
2. $f_y(2, -1) = 3 \cdot (2^2) \cdot (-1)^2 - 4 = 3 \cdot 4 \cdot 1 - 4 = 12 - 4 = 8.$

$$\therefore \quad \nabla f(2, -1) = \langle -4,\ 8 \rangle.$$

기울기 벡터

함수 $f(x, y) = x^2y^3 - 4y$의 점 $(2, -1)$에서 벡터 $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$의 방향으로의 방향도함수를 구하여라.

3. 방향벡터 v의 단위벡터 구하기

$$\mathbf{v} = \langle 2,\ 5 \rangle, \quad \|\mathbf{v}\| = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}.$$

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \left\langle \frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}} \right\rangle.$$

4. 방향도함수 계산

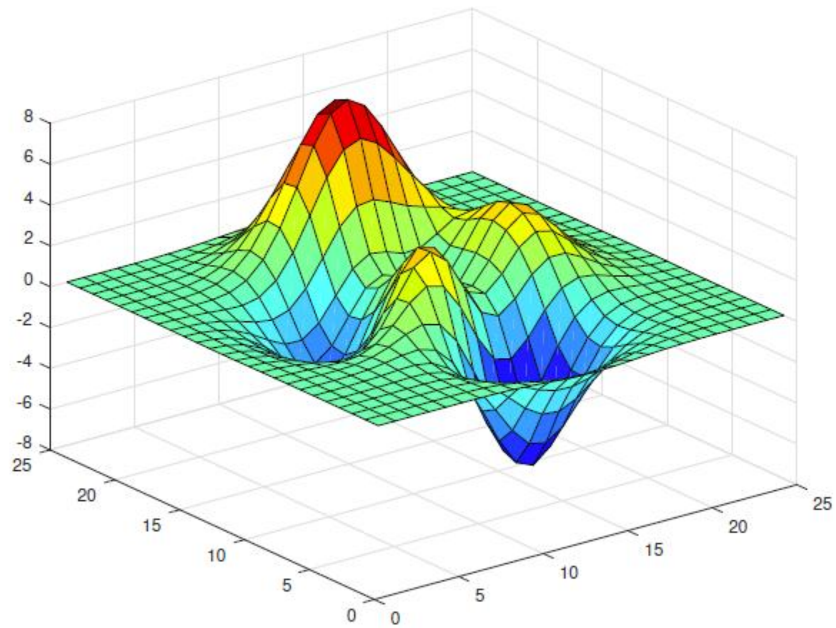
$$D_{\mathbf{v}} f(2, -1) = \nabla f(2, -1) \cdot \mathbf{u} = \langle -4, 8 \rangle \cdot \left\langle \frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}} \right\rangle.$$

내적

$$(-4) \times \frac{2}{\sqrt{29}} + (8) \times \frac{5}{\sqrt{29}} = \frac{-8 + 40}{\sqrt{29}} = \frac{32}{\sqrt{29}}.$$

목차

1. 함수의 극한
2. 접선
3. 미분과 도함수
4. 이변수함수
5. 편도함수
6. 이변수 함수의 미분
7. 연쇄법칙
8. 방향도함수
9. 기울기 벡터
10. 방향도함수의 최대화
11. 기울기 벡터의 중요성
12. 극댓값과 극솟값
13. 경사하강법



방향도함수의 최대화

이변수 또는 삼변수함수의 주어진 점에서 모든 가능한 방향도함수를 생각해보자. 이것은 모든 가능한 방향에서 f의 변화율을 제공한다. 그러면 다음과 같은 질문을 생각할 수 있다. 어떤 방향에서 f가 가장 빠르게 변하고 변화율의 최댓값은 무엇인가? 이 대답은 다음 정리로 주어진다.

15 정리 f가 이변수 또는 삼변수의 미분가능한 함수라고 하자. 그러면 방향도함수 $D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x})$의 최댓값은 $|\nabla f(x)|$이고, 이것은 기울기 벡터 $\nabla f(\mathbf{x})$와 벡터 $\mathbf{u}$의 방향이 일치할 때 나타난다.

방향도함수의 최대화

(a) $f(x, y) = xe^y$일 때, 점 $P(2, 0)$에서 점 $Q\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ 방향으로 점 P에서의 f의 변화율을 구하여라.

(b) 어느 방향에서 f는 최대 변화율을 가지는가? 변화율의 최댓값은 얼마인가?

방향도함수의 최대화

(a) $f(x, y) = xe^y$일 때, 점 $P(2, 0)$에서 점 $Q\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ 방향으로 점 P에서의 f의 변화율을 구하여라.

(b) 어느 방향에서 f는 최대 변화율을 가지는가? 변화율의 최댓값은 얼마인가?

- **최대 변화율 방향**: 그래디언트 ∇f가 향하는 방향이 최대 변화율 방향이다.
- **최대 변화율의 값**: $\|\nabla f\|$ (그래디언트의 크기)이다.

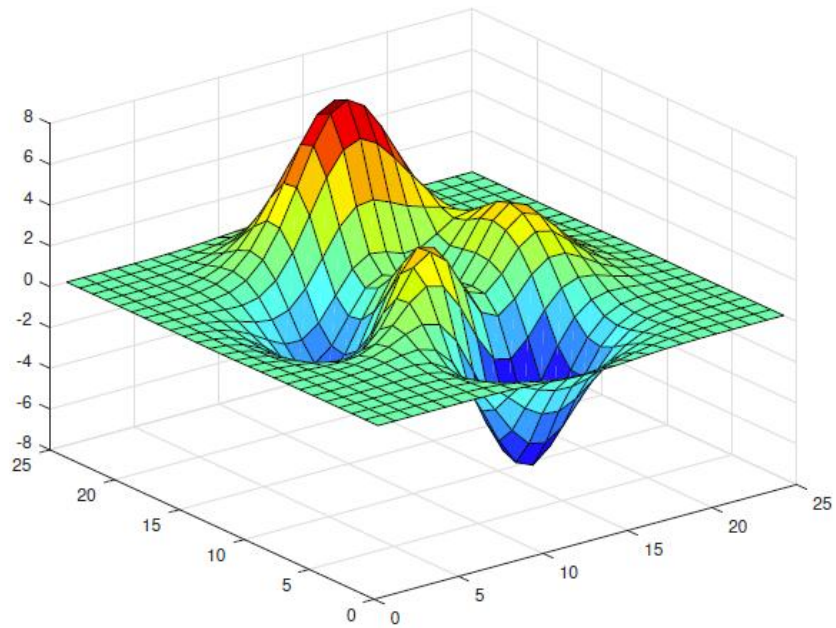
위에서 구한 $\nabla f(2,0) = \langle 1,\ 2\rangle$.

1. **방향**: $\langle 1,\ 2\rangle$ 방향(즉, 이를 단위벡터화한 $\langle \frac{1}{\sqrt{5}},\ \frac{2}{\sqrt{5}}\rangle$)
2. **최댓값**:

$$\|\nabla f(2,0)\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}.$$

목차

1. 함수의 극한
2. 접선
3. 미분과 도함수
4. 이변수함수
5. 편도함수
6. 이변수 함수의 미분
7. 연쇄법칙
8. 방향도함수
9. 기울기 벡터
10. 방향도함수의 최대화
11. 기울기 벡터의 중요성
12. 극댓값과 극솟값
13. 경사하강법



기울기 벡터의 중요성

이제 기울기 벡터의 중요성을 알아보자. 우선 삼변수함수 f와 그 정의역에서 점 $P(x_0, y_0, z_0)$를 생각한다. 한편, 정리 **15** 로부터 기울기 벡터 $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$는 f의 가장 빠른 증가 방향을 제공한다는 것을 알고 있다. 또 다른 한편으로 $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$는 P를 통과하는 f의 등위곡면 S에 직각임을 안다(그림 10 참조). 이러한 두 성질은 직관적으로 완전히 양립할 수 있다. 왜냐하면 등위곡면상에서 점 P를 움직일 때, f의 값은 조금도 변하지 않기 때문이다. 그래서 수직방향으로 움직이면 최대증가치를 얻는 것은 타당하다.

마찬가지로 이변수함수 f와 그 정의역에서 점 $P(x_0, y_0)$를 생각한다. 기울기 벡터 $\nabla f(x_0, y_0)$는 f의 가장 빠른 증가 방향을 제공한다. 또한 접평면에 대한 논의와 비슷한 생각을 하면 $\nabla f(x_0, y_0)$는 P를 통과하는 등위곡선 $f(x, y) = k$와 수직임을 보여준다. 다시 이것은 직관적으로 그럴듯하다. 왜냐하면 곡선을 따라 움직여도 f의 값이 일정하기 때문이다(그림 12 참조).

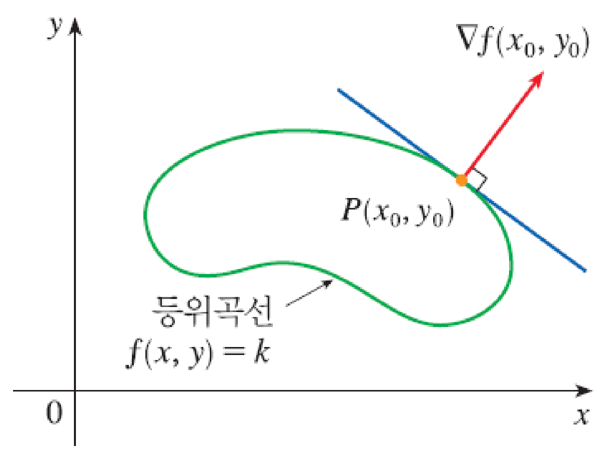


그림 12

기울기 벡터의 중요성

이제 기울기 벡터의 중요성을 요약해보자.

기울기 벡터의 성질 f를 $\nabla f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$인 이변수 혹은 삼변수의 미분가능한 함수라 하자.

- $\mathbf{x}$에서 단위벡터 $\mathbf{u}$방향으로 f의 방향도함수는 $D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}$로 주어진다.
- $\nabla f(\mathbf{x})$는 $\mathbf{x}$에서 f의 증가율이 최대인 방향을 가리키며 최대 변화율은 $|\nabla f(\mathbf{x})|$이다.
- $\nabla f(\mathbf{x})$는 $\mathbf{x}$를 지나는 f의 등위곡선 또는 등위곡면과 수직이다.

만약 언덕의 지형도를 생각하고 $f(x, y)$가 좌표 (x, y)인 지점에서 해수면으로부터의 높이를 나타낸다고 하면, 그림 13에서처럼 가장 가파른 오르막길은 모든 등고선과 수직이 되도록 그릴 수 있다. 이러한 현상은 13.1절의 그림 12에서도 알 수 있다. 거기서 론섬 지류는 가장 가파른 계곡을 따라 형성되어 있다.

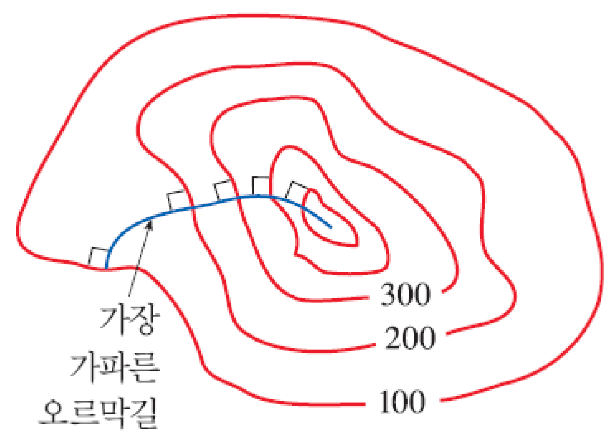
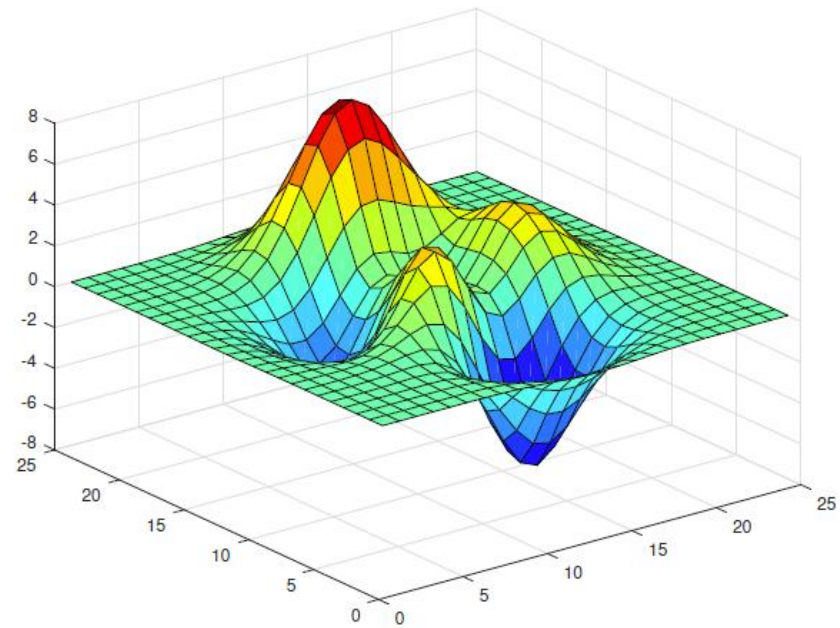


그림 13

목차

1. 함수의 극한
2. 접선
3. 미분과 도함수
4. 이변수함수
5. 편도함수
6. 이변수 함수의 미분
7. 연쇄법칙
8. 방향도함수
9. 기울기 벡터
10. 방향도함수의 최대화
11. 기울기 벡터의 중요성
12. 극댓값과 극솟값
13. 경사하강법



극댓값과 극솟값

4장에서 공부했듯이 도함수의 주요한 사용은 최댓값과 최솟값(극값)을 찾는 것이다. 이 절에서는 이변수함수의 최댓값과 최솟값을 찾는 데 편도함수를 어떻게 사용하는지를 배운다. 특히 예제 5에서는 일정한 양의 판지가 있을 때 뚜껑 없는 판지 상자의 부피를 최대로 하는 방법을 배우게 된다.

그림 1의 f의 그래프를 보면 언덕과 계곡을 볼 수 있다. 여기에는 $f(a, b)$가 주변의 $f(x, y)$의 값보다 더 큰 값을 갖는 두 점 (a, b)가 있는데, 이 두 점을 f의 극댓값이라 한다. 이 두 값 중에서 더 큰 값을 최댓값이라 한다. 마찬가지로 $f(a, b)$가 주변의 값보다 더 작을 때 f는 두 개의 극솟값을 가진다. 이 두 값 중에서 더 작은 값을 최솟값이라 한다.

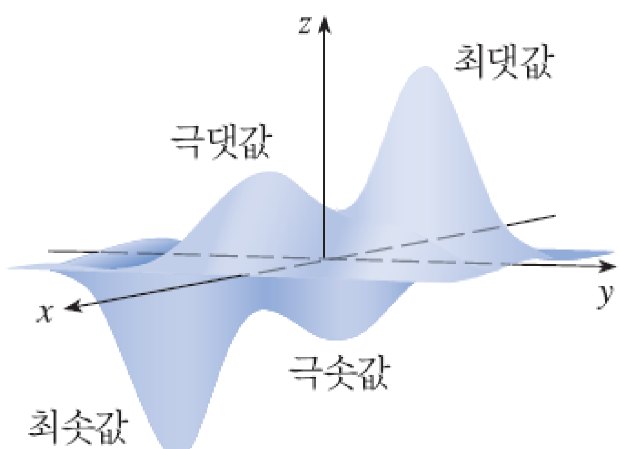


그림 1

극댓값과 극솟값

1 정의 (a, b) 근방에 있는 모든 (x, y)에 대해 $f(x, y) \leqslant f(a, b)$이면 이변수함수 f는 (a, b)에서 **극대**이다. [이것은 중심이 (a, b)인 어떤 원판 내의 모든 점 (x, y)에 대해 $f(x, y) \leqslant f(a, b)$를 의미한다.] 값 $f(a, b)$는 **극댓값**(local maximum value)이라 부른다. 만약 (a, b) 근방에 있는 모든 (x, y)에 대해 $f(x, y) \geqslant f(a, b)$이면, f는 (a, b)에서 **극소**이고 $f(a, b)$는 **극솟값**(local minimum value)이다.

페르마 정리(4.1절)는 일변수함수의 경우 f가 c에서 극댓값이나 극솟값을 갖고 $f'(c)$가 존재하면 $f'(c) = 0$을 말하고 있다. 다음 정리는 이변수함수에 대해서 비슷한 결과를 말해준다.

2 정리 만약 f가 (a, b)에서 극값(극댓값 또는 극솟값)을 가지며 1계 편도함수가 (a, b)에서 존재하면 $f_x(a, b) = 0$, $f_y(a, b) = 0$이다.

$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$이면

$$f_x(x, y) = 2x - 2 \qquad f_y(x, y) = 2y - 6$$

이다. 이러한 편도함수는 $x = 1$, $y = 3$에서 0이다. 따라서 임계점은 (1, 3)이다. 완전제곱에 의해 다음을 얻는다.

$$f(x, y) = 4 + (x - 1)^2 + (y - 3)^2$$

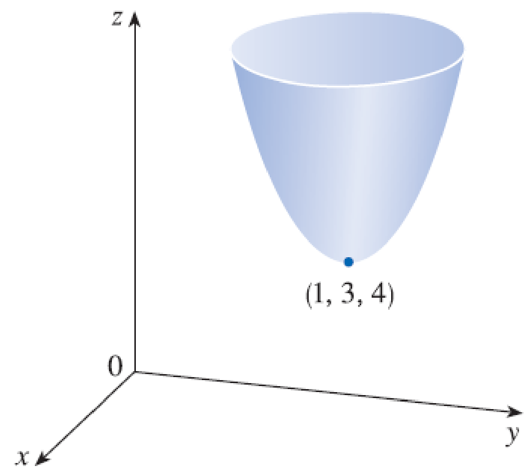


그림 2 $z = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$

$(x - 1)^2 \geq 0$이고 $(y - 3)^2 \geq 0$이므로 x와 y의 모든 값에 대해 $f(x, y) \geq 4$를 얻는다. 그러므로 $f(1, 3) = 4$는 극솟값이며 사실 최솟값이 된다. 그림 2에서 보는 바와 같이 꼭짓점 (1, 3, 4)를 갖는 타원포물면인 f의 그래프로부터 이러한 사실이 기하학적으로 확인된다. ■

극댓값과 극솟값

$f(x, y) = y^2 - x^2$의 극값을 구하여라.

$f(x, y) = y^2 - x^2$의 극값을 구하여라.

1. 임계점 찾기

함수

$$f(x,y) = y^2 - x^2$$

에서 편도함수를 구하고 0으로 만들어 임계점을 찾습니다:

1. $f_x = \dfrac{\partial}{\partial x}(y^2 - x^2) = -2x.$
2. $f_y = \dfrac{\partial}{\partial y}(y^2 - x^2) = 2y.$

$$f_x = 0 \ \Rightarrow\ -2x = 0 \ \Rightarrow\ x = 0, \quad f_y = 0 \ \Rightarrow\ 2y = 0 \ \Rightarrow\ y = 0.$$

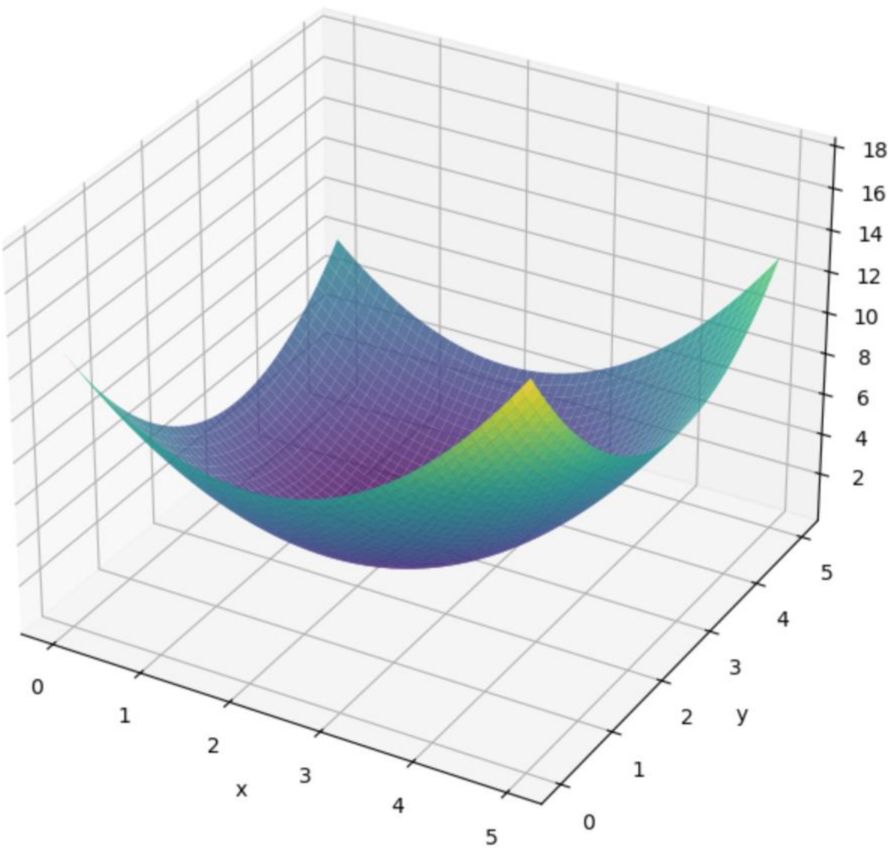
따라서 **임계점은 $(0, 0)$**뿐입니다.

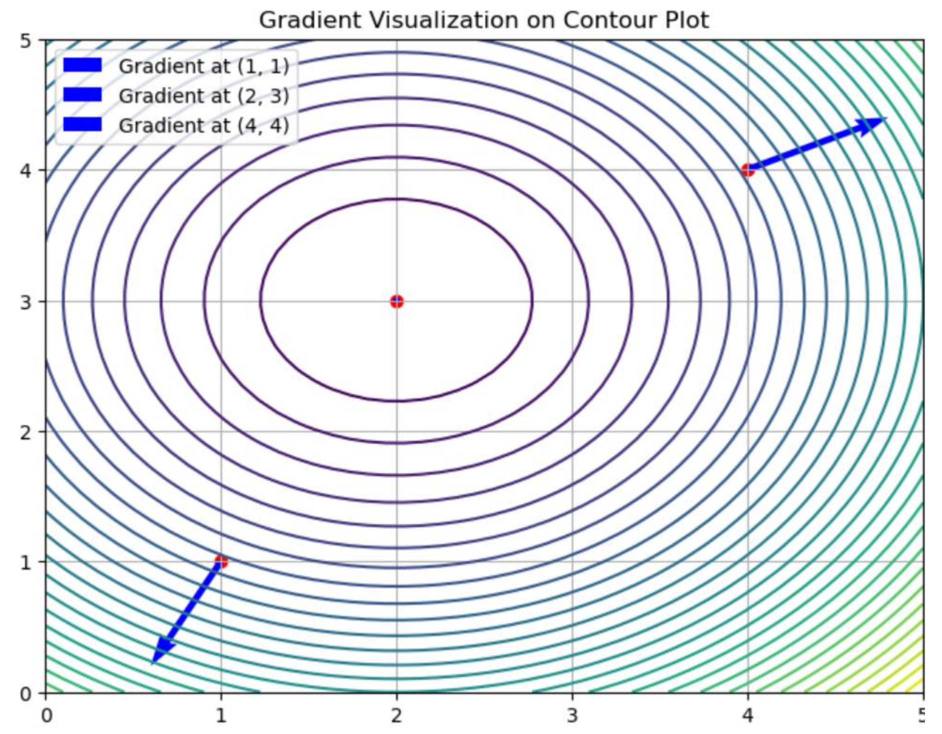
2. 임계점에서의 함수값

$$f(0,0) = (0)^2 - (0)^2 = 0.$$

즉, $(0, 0)$에서의 함수값은 **0**입니다.

다변수함수 미분 실습 (with Colab)

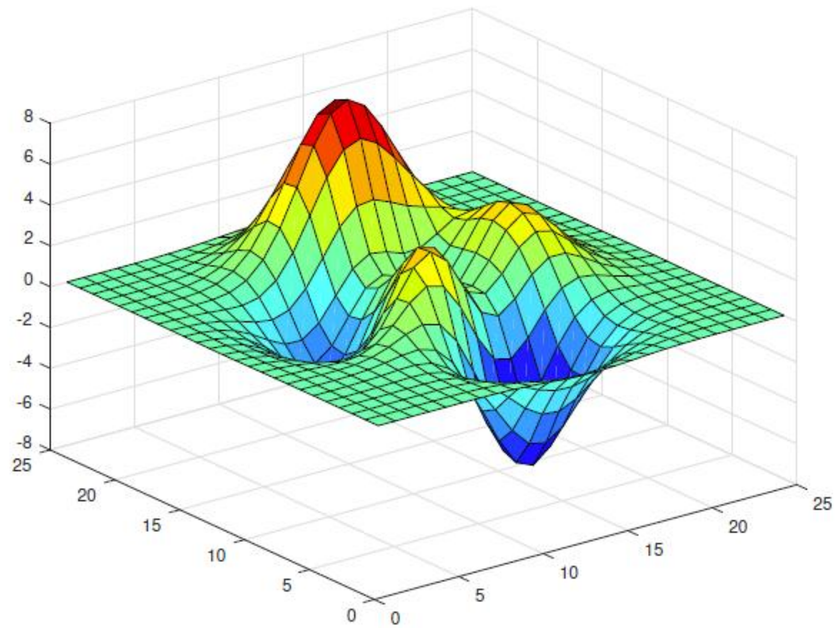




https://colab.research.google.com/drive/1gwD-evfSBpBev39RlJiuwnXdanhGqfis

목차

1. 함수의 극한
2. 접선
3. 미분과 도함수
4. 이변수함수
5. 편도함수
6. 이변수 함수의 미분
7. 연쇄법칙
8. 방향도함수
9. 기울기 벡터
10. 방향도함수의 최대화
11. 기울기 벡터의 중요성
12. 극댓값과 극솟값
13. 경사하강법



경사하강법

이제 미분의 성질을 이용하여 추세선 $f(x)=ax$에 대한 손실함수

$$L(a)=2a^2-4a+4$$

를 다음과 같이 최적화하고, $a=1$에서 손실함수의 값이 최소임을 확인해 보자.

❶ a의 초깃값을 정한다.

손실함수의 최적화 과정에서 처음 정한 a의 값을 **초깃값**이라고 한다.

예를 들어 $a=4$를 초깃값으로 정한다.

❷ 초깃값에서 손실함수의 미분계수의 부호를 조사하여 손실함수의 값이 감소하는 방향을 찾는다.

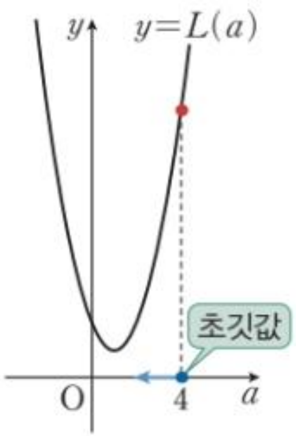
손실함수의 도함수는

$$L'(a)=4a-4$$

이고, 초깃값 $a=4$에서 미분계수의 부호는

$$L'(4)=12>0$$

이다.



따라서 $a=4$보다 작은 a의 값을 이용하면 손실함수의 값을 더 작게 할 수 있다.

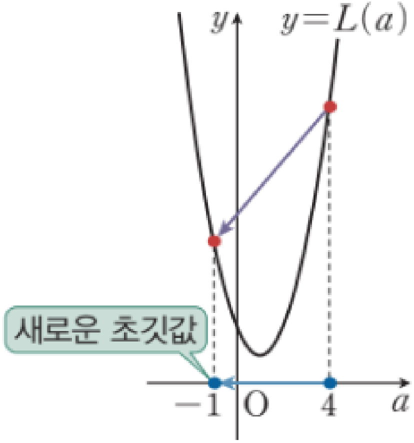
경사하강법

❸ ❷에서 구한 방향에서 손실함수의 값이 감소하는 다른 a의 값을 찾고, 이 값을 새로운 초깃값으로 정한다.

예를 들어 $a=4$보다 작은 값인 $a=-1$일 때

$$L(-1)=10$$

이므로, $L(4)=20$보다 손실함수의 값이 감소한 것을 확인할 수 있다.

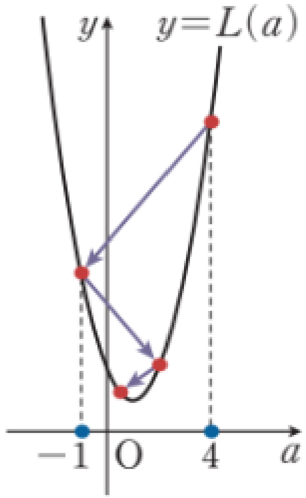


이와 같은 방법으로 초깃값 $a=4$에서보다 손실함수의 값이 더 작아지는 새로운 초깃값 $a=-1$을 찾을 수 있다.

이때 초깃값을 $a=4$ 대신 $a=-1$로 택하는 것을

'$a=4$를 $a=-1$로 이동시킨다.'

고 표현한다.



❹ ❷와 ❸의 과정을 반복한다.

kms 대한수학회 Korean Mathematical Society

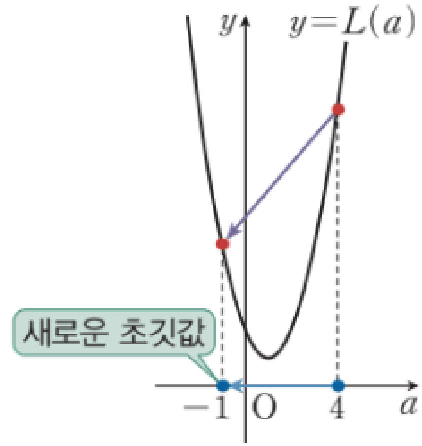
❸ ❷에서 구한 방향에서 손실함수의 값이 감소하는 다른 a의 값을 찾고, 이 값을 새로운 초깃값으로 정한다.

예를 들어 $a=4$보다 작은 값인 $a=-1$일 때

$$L(-1)=10$$

이므로, $L(4)=20$보다 손실함수의 값이 감소한 것을 확인할 수 있다.

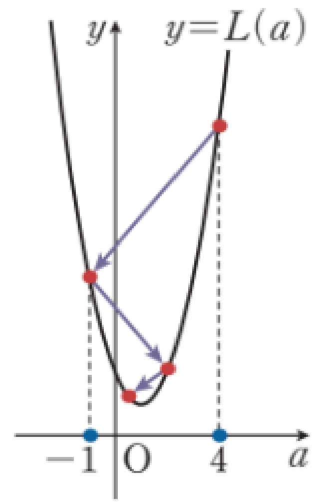
이와 같은 방법으로 초깃값 $a=4$에서보다 손실함수의 값이 더 작아지는 새로운 초깃값 $a=-1$을 찾을 수 있다.



이때 초깃값을 $a=4$ 대신 $a=-1$로 택하는 것을

'$a=4$를 $a=-1$로 이동시킨다.'

고 표현한다.



❹ ❷와 ❸의 과정을 반복한다.

경사하강법

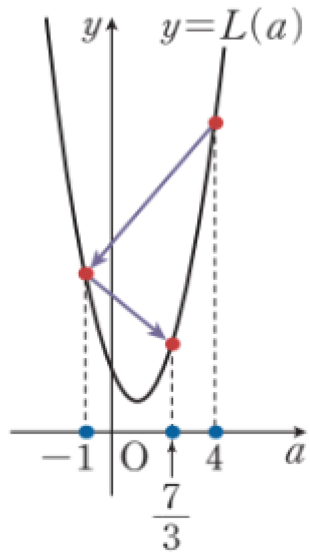
경사하강법은 초깃값에서 손실함수의 미분계수의 부호를 확인하면 초깃값을 어느 방향으로 이동시킬 것인지 확인할 수 있다. 그러나 초깃값을 얼마나 이동시켜야 하는지를 반복해서 정해야 하므로 계산 과정이 불편하다.

따라서 처음 정한 초깃값을 다음과 같은 방법으로 이동시켜서 좀 더 편리하게 최적화할 수 있다.

경사하강법

적당한 상수 $r\ (r>0)$에 대하여 초깃값 $a=c$를 정한다.

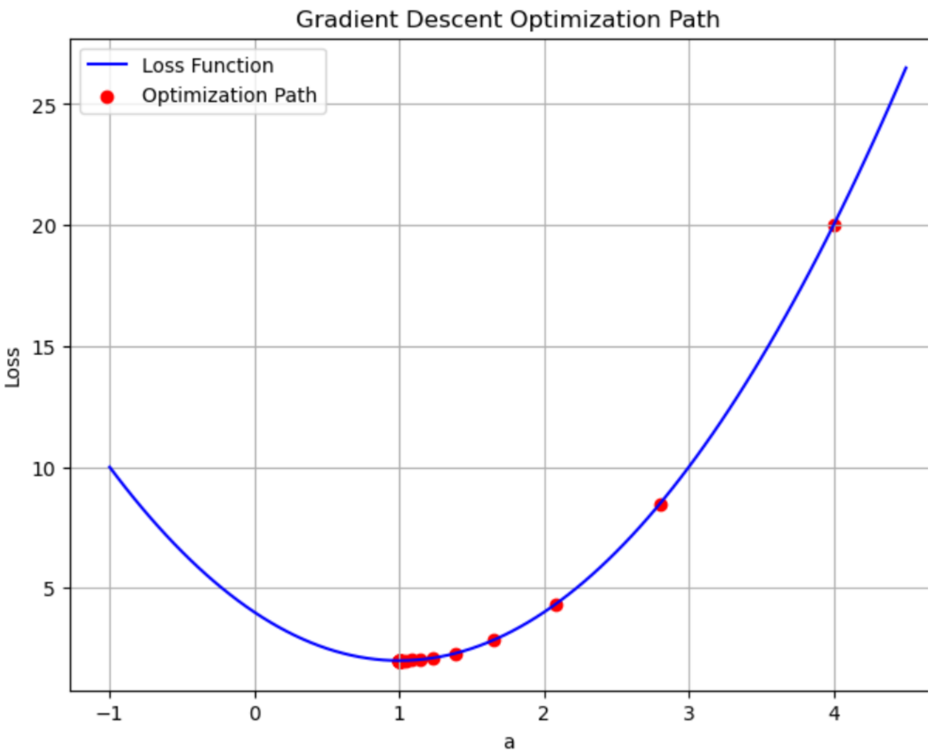
그 다음, 초깃값 $a=c$를 새로운 초깃값 $a=c-rL'(c)$로 이동시키는 과정을 반복한다.

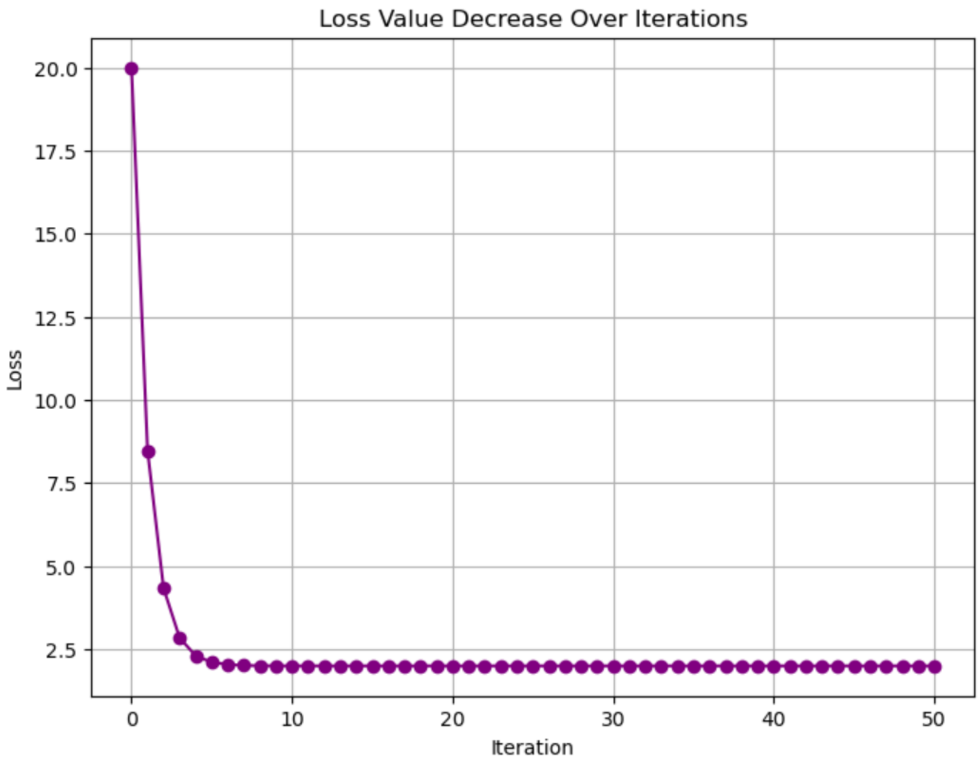


이상으로부터 새로운 초깃값 $a=c-rL'(c)$는 항상 손실함수의 값이 감소하는 방향에 위치함을 알 수 있다. 또, 상수 r가 초깃값 $a=c$를 얼마나 이동시킬 것인지를 결정하게 된다.

이런 의미에서 r의 값을 경사하강법의 **학습률**(learning rate)이라고 한다.

경사하강법 실습 (with Colab)



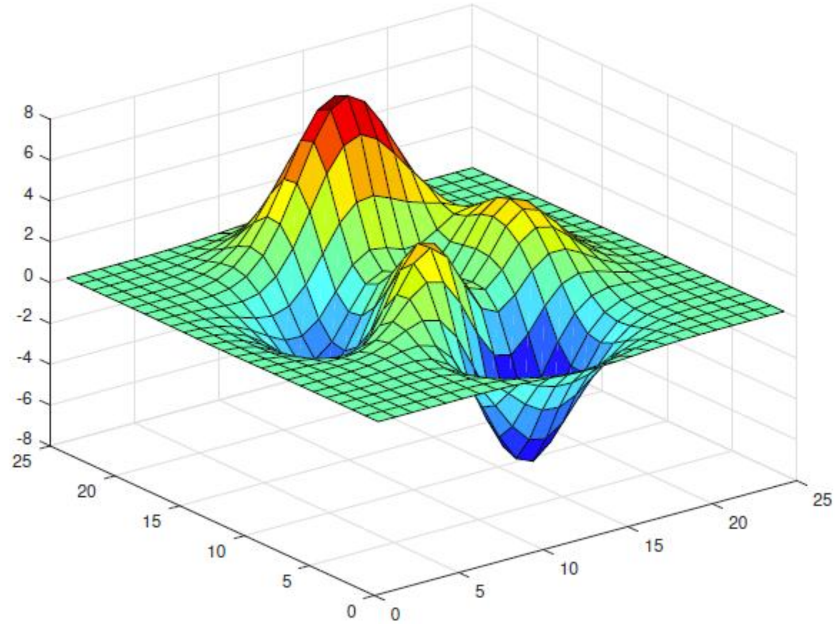


https://colab.research.google.com/drive/1gwD-evfSBpBev39RlJiuwnXdanhGqfis#scrollTo=e242550d-b9d1-43e5-8ba7-52e31e1b7076

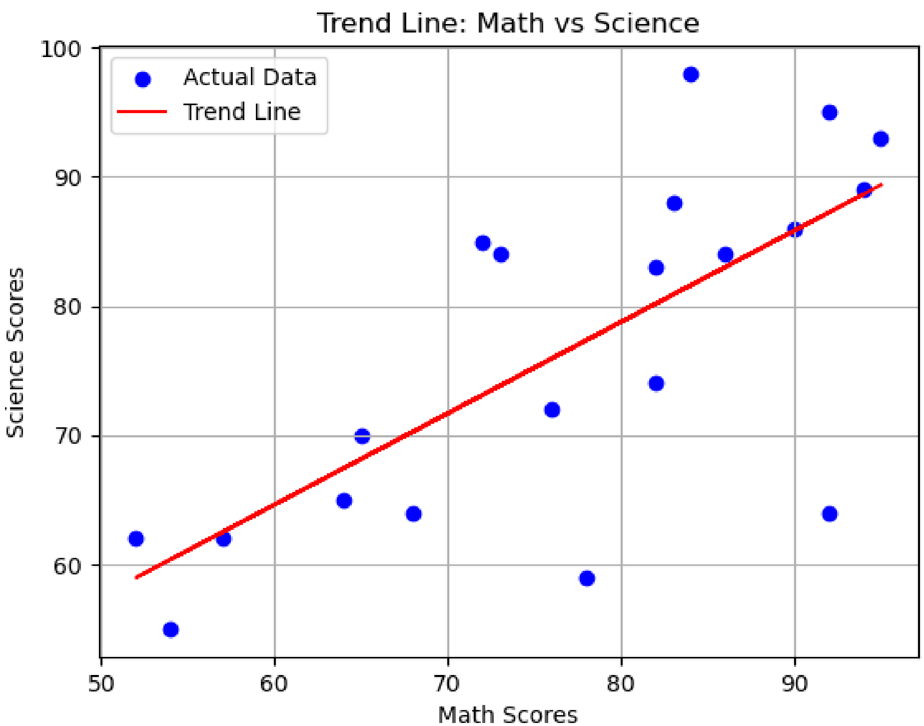
목차

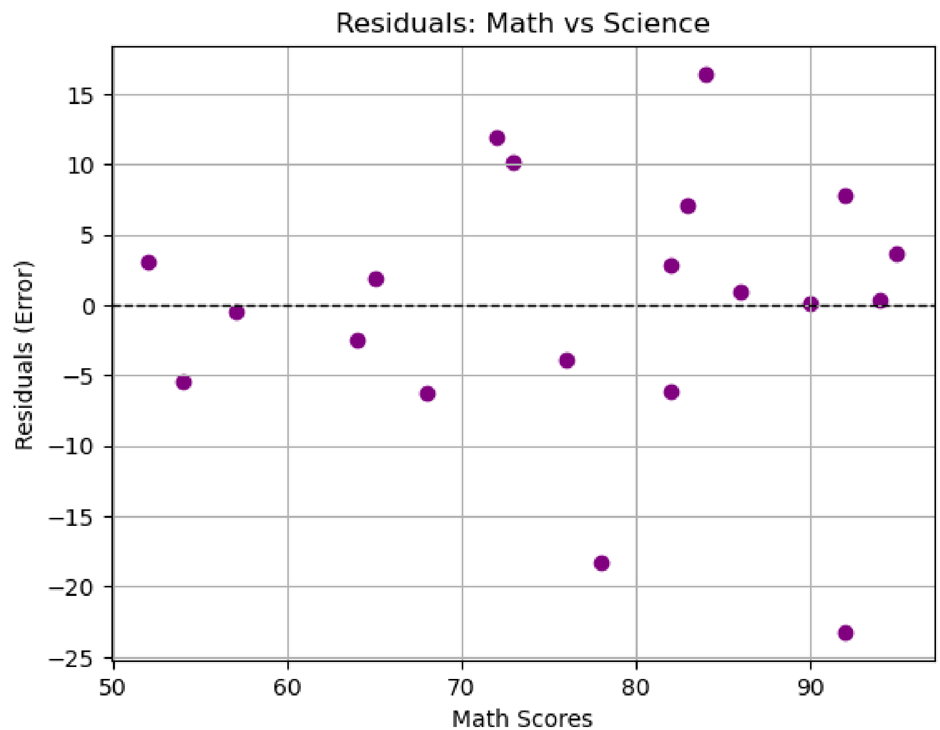
1. 함수의 극한
2. 접선
3. 미분과 도함수
4. 이변수함수
5. 편도함수
6. 이변수 함수의 미분
7. 연쇄법칙
8. 방향도함수
9. 기울기 벡터
10. 방향도함수의 최대화
11. 기울기 벡터의 중요성
12. 극댓값과 극솟값
13. 경사하강법

+ 선형회귀



선형회귀 (with Colab)





https://drive.google.com/file/d/1s8JSrpNAcWz7-uKn_AxXKnC27tcz_U1w/view?usp=sharing

Reference

1. Stewart, J. (2012). Calculus: early transcendentals. Cengage Learning.
2. 황선욱, 외. (2024). 인공지능수학. 미래엔