02.11.23

- $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = \prod_{i=1}^{n} i$

$n! = n \cdot (n-1)!$ $\qquad 0! = 1$

$1! = 0! \cdot 1 = 1$
$2! = 1! \cdot 2 = 1 \cdot 2 = 2$
$3! = 2! \cdot 3 = 2 \cdot 3 = 6$
$4! = 4 \cdot 3! = 24$ usw.

- $x^n = \begin{cases} x & \text{falls } n = 1 \\ x \cdot x^{n-1} & \text{falls } n > 1. \end{cases}$

$x^1 = x$
$x^2 = x \cdot x^1$
$x^3 = x \cdot x^2 = x \cdot x \cdot x \ldots$

$x^{22} = x \cdot x \cdot x \cdot x$ $\qquad$ 21 Schritte / Multiplikationen

1 Schritt ...

$x^{22} = \underbrace{x^{11} \cdot x^{11}}$

1 Multiplikation (statt 11), um von x^{11} auf x^{22} zu kommen)

$x^{11} = \underbrace{x^{10} \cdot x} = x^5 \cdot x^5 \cdot x$ $\qquad$ (statt 5, um von x^5 auf x^{10} zu kommen)

1 Multiplikation

$x^5 = x^4 \cdot x = \underbrace{x^2 \cdot x^2 \cdot x}$

2 Multiplikationen $\qquad$ (statt 3, um von x^2 auf x^5 zu kommen)

$x^2 = x \cdot x$

1 M

卌 I $\rightarrow$ 6 Multiplikationen statt 21

$x^{23} = x^{22} \cdot x = x^{11} \cdot x^{11} \cdot x = (x^5 \cdot x^5 \cdot x)^2 \cdot x$ usw.

(7 Mult. statt 22!)

Binomialkoeffizienten:

$\binom{6}{1} = 6$

1 2 3 4 5 6

$\binom{3}{2} = 3 = \#$ Teilmengen von $\{1,2,3\}$ mit 2 Elementen

$\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}$. aus $\{1,2,3\}$

$\binom{n}{1} = n$ $\qquad \{1, \ldots, n\} \leftarrow \{1\}, \{2\}, \{3\}, \ldots \{n\}$.

$\binom{n}{n-1} = n$ $\qquad \underbrace{\{2,\ldots,n\}, \{1,3,\ldots,n\}, \{1,2,4,\ldots,n\} \text{ usw. bis } \{1,\ldots,n-1\}}_{n}$.

Was ist $\binom{49}{6}$?

Beh: $\binom{n}{k} = \begin{cases} 1 & \text{falls } k=0 \text{ oder } \cancel{n=0}\ k=n \\ \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} & \text{sonst.} \end{cases}$

$\binom{5}{3}$:

$\binom{0}{0} = 1$

$\binom{1}{0} = 1 \quad \binom{1}{1} = 1$

$1 = \binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} = 2 \quad \binom{2}{2} = 1$

$1 = \binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} = 3 \quad \binom{3}{2} = 3 \quad \binom{3}{3} = 1$

$1 = \binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} = 4 \quad \binom{4}{2} = 6 \quad \binom{4}{3} = 4 \quad \binom{4}{4} = 1$

$1 = \binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} = 5 \quad \binom{5}{2} = 10 \quad \binom{5}{3} = 10 \quad \binom{5}{4} = 5 \quad \binom{5}{5} = 1$

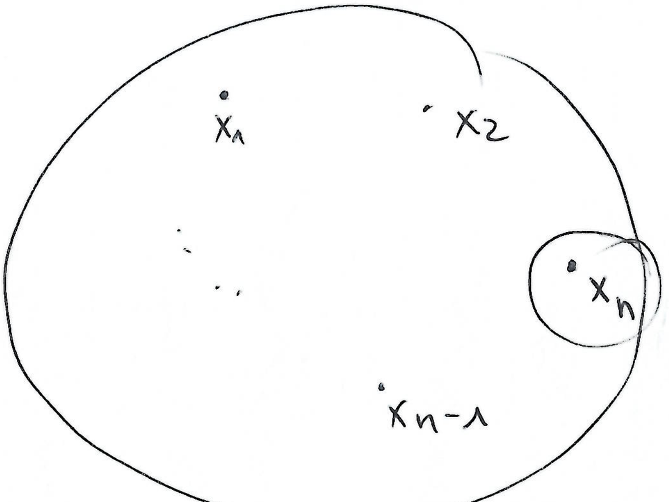
Pascal'sches Dreieck

Beh.: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ für $n,k>0$. $k \le n$.

Bew.: ~~Menge~~ Anz. von k-Elementigen M Teilmengen einer Menge mit n Elementen

Anz von k-elementigen Teilmengen einer Menge mit n-1 El.

Anz. von (k-1)-elementigen Tm. einer Menge mit n-1 El.

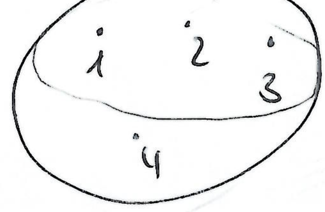


Es gibt 2 Arten von k-elementigen Tm von $\{x_1, \dots, x_n\}$:

(M)

Typ 1: $x_n \in M$; die restlichen $(k-1)$ Elemente von M sind $(k-1)$-elementige Teilmengen von $\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$
Davon gibt es $\binom{n-1}{k-1}$ viele.

Typ 2: $x_n \notin M$, das heißt die k Elemente von M sind in $\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$, es gibt $\binom{n-1}{k}$ viele k-element Teilmengen von $\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$. $\square$



2-elementige Tm $\binom{4}{2}$

$\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}$,

$\binom{3}{2} + \binom{3}{1} = 3 + 3 = 6$

zum Spezialfall $k=0$:

$\binom{n}{0}$ = Anz. der 0-elementigen Teilmengen einer Menge mit n Elementen = Anz. $\{\emptyset\}$ = 1 ✓

zum Spezialfall $k=n$:

$\binom{n}{n}$ = Anz. der $\underbrace{\text{n-elementigen Teilmengen}}$ einer Menge mit n Elementen. = 1 ✓

gibt nur eine, die ganze Menge selbst!

<u>Beh:</u> $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ für $n \in \mathbb{N}_0$, $0 \le k \le n$.

<u>Bew:</u> mit vollständiger Induktion

<u>Induktionsanfang:</u> $n=0$, $k=0$: $\binom{0}{0} = 1$ = linke Seite

rechte Seite: $\frac{0!}{0! \cdot 0!} = \frac{1}{1 \cdot 1} = 1$ ✓

<u>Induktionsvoraussetzung:</u> für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte:
für $0 \le k \le n$ ist $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$

<u>Induktionsschritt:</u> $n \longrightarrow n+1$

<u>z.z.:</u> für $0 \le k \le n+1$: $\binom{n+1}{k} = \frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!}$

<u>hierzu:</u>

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{nach Induktionsvoraussetzung}}}{=} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!\,(n-(k-1))!}$$

<u>NR:</u>

$k! = k \cdot (k-1)!$

$(n+1-k)! = (n-k)! \cdot (n-k+1)$
$\quad \| $
$(n-k+1)!$

$\frac{n! \cdot (n+1)}{\dots}$

$$\overset{(*)}{=} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \Big\backslash^{\cdot (n-k+1)} + \frac{n!}{(k-1)!\,(n+1-k)!} \Big\backslash^{\cdot k}$$

$$= \frac{n! \cdot (n-k+1) + k \cdot n!}{k! \cdot (n-k+1)!} = \frac{n!\,(n-k+1+k)}{k!\,(n-k+1)!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{k!\,(n-k+1)!} = \text{rechte Seite} ✓ \quad \square$$

z. B. $n = 6$, $k = \cancel{3}\,2$

(*): $\frac{6!}{2\cancel{3}! \cdot \underbrace{(6-2)!}_{4!}} + \frac{6!}{\cancel{2}1! \cdot \underbrace{(6-2+1)!}_{5!}}$

$$= \underbrace{\frac{6!}{2! \cdot 4!}}_{\text{mit 5 erweitern um auf } 2! \cdot 5! \text{ zu kommen}} + \frac{6!}{1! \cdot 5!} = \frac{5 \cdot 6! + 2 \cdot 6!}{2! \cdot 5!} \dots$$

$2! = 2 \cdot 1!$

$5! = 5 \cdot 4!$

mit 2 erweitern um auf $2!\,5!$ zu kommen

$$(n+1)! = \underbrace{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n}_{n!} \cdot (n+1) = n! \cdot (n+1)$$

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$

$7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$

$7! \cdot 8 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 7 \cdot 8 = 8!$

- 1712 im 5-er System:

$1712 : 5 = 342$ Rest 2
$342 : 5 = 68$ Rest 2
$68 : 5 = 13$ Rest 3
$13 : 5 = 2$ Rest 3
$\rightarrow$ $2 : 5 = 0$ Rest 2

$(1712)_{10} = (23322)_5$

- 123 im 7-er System:

$123 : 7 = 17$ Rest 4
$17 : 7 = 2$ Rest 3
$2 : 7 = 0$ Rest 2

$\Rightarrow (123)_{10} = (234)_7$

- 285 im Hexadezimalsystem: B: 16

$10 = A$ $B = 11$, $C = 12$, $D = 13$ usw.

$285 : 16 = 17$ Rest $13 = D$
$17 : 16 = 1$ Rest 1
$1 : 16 = 0$ Rest 1

$(285)_{10} = (11D)_{16}$.