23.10.23

Injektiv / surjektiv / bijektiv:

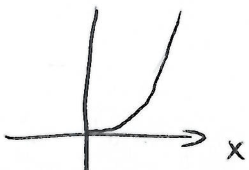
- $f_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ $\quad (f(x) = x^2)$

  nicht injektiv, da $f(-1) = f(1) = 1$, aber $-1 \neq 1$.

  nicht surjektiv, da z.B. $-1 \notin \text{Bild}(f)$, aber $-1 \in \mathbb{R}$ (Zielmenge).

  denn $-1 = x^2$ hat keine Lösung in $\mathbb{R}$.

- $f_2: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$



  injektiv, da: Seien $x_1 \neq x_2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ (Definitionsmenge)

  zu zeigen: $f(x_1) \neq f(x_2)$

  hierzu: $f(x_1) = x_1^2$, $f(x_2) = x_2^2$

  und da $x_1, x_2 \geq 0$, können wir die Wurzel ziehen. Beweis durch Widerspruch:

  Angenommen $f(x_1) = f(x_2) \iff x_1^2 = x_2^2 \iff x_1 = x_2$ $\quad \big|\; x_1, x_2 \geq 0$

  Dies ist im Widerspruch zur Annahme $\lightning$

- $f: M = \text{Studenten} \to \mathbb{N}$

  $m \mapsto$ Matrikelnummer von m

  - ist injektiv, weil keine 2 Studenten dieselbe Matrikelnummer haben.
  - nicht surjektiv, weil nicht alle $n \in \mathbb{N}$ Matrikelnummern sind

- $g: \mathbb{N} \to \{0, 1, \dots, 4\}$

  $n \mapsto$ Rest von n beim Teilen durch 5

  - ist nicht injektiv, weil $g(7) = g(2)$, aber $2 \neq 7 \in \mathbb{N}$
  - ist surjektiv, $g(0) = 0$, $g(1) = 1$, $\dots$, $g(4) = 4$.

- $\mathrm{id}_M: M \to M$ $\quad (\mathrm{id}_M(x) = x)$

  $x \mapsto x$ $\quad$ (für M mit mehr als 1 Element)

  ist injektiv: Seien $x_1 \neq x_2 \in M$. Dann ist $\mathrm{id}_M(x_1) = x_1$, $\mathrm{id}_M(x_2) = x_2$, also auch $\mathrm{id}_M(x_1) \neq \mathrm{id}_M(x_2)$.

- nochmal zu $g(n) = $ Rest von n beim Teilen d. 5
  $= n \,\%\, 5$

  z.B. $g(8) = 3$, $g(16) = 1$, $g(22) = 2$

  $g(-2) = 3$

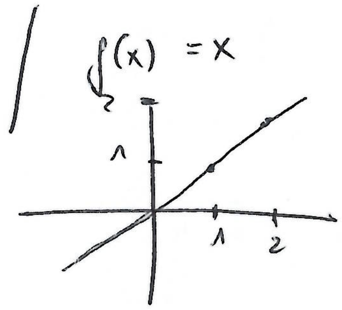
  $8 = 1 \cdot 5 + 3$

  $-2 = (-1)5 + 3$

- nochmal zu $id_M : M \to M$

  z.B. $M = \{1, 2, 3, 4\}$

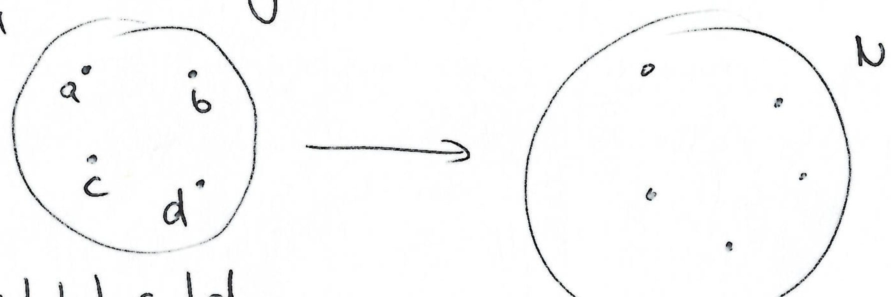
x	1	2	3	4
id_M	1	2	3	4



$M = \{$Apfel, Birne$\}$

$id_M(\text{Apfel}) = \text{Apfel}$

- Sei $f: M \to N$ eine Abbildung zwischen endlichen Mengen M, N.



$M \to x$	a	b	c	d
$N \to f(x)$				

<u>Beh:</u> Falls f injektiv ist, ist die Anzahl der Elemente in M $\leq$ die Anzahl der Elemente in N.

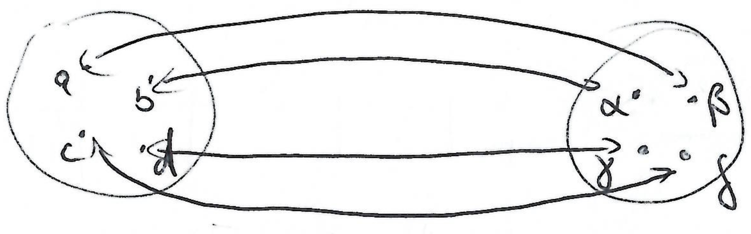
<u>Bew.:</u> Sei $M = \{m_1, \ldots, m_i\}$ mit $i \in \mathbb{N}$
und $N = \{n_1, \ldots, n_j\}$ mit $j \in \mathbb{N}$ <u>zu zeigen:</u> $i \leq j$

~~Ang~~ <u>Bew. durch Widerspruch:</u> angenommen $i > j$, d.h. N hat weniger Elemente als M.
Da f injektiv ist, sind die Elemente $f(m_1), \ldots, f(m_i)$ alle unterschiedlich, das Bild von f hat also i Element.
Aber $f(M) = \text{Bild}(f) \subset N$, das heißt N müsste mindestens i verschiedene Elemente haben. Nach Ann. ist aber $i > j$
~~als~~ $\Rightarrow$ Widerspruch. $\square$

Die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ hat für $n > 3$ keine ganzzahlige Lösung für x, y, z.

(für $n = 2$ z. B. $3^2 + 4^2 = 5^2$)

Ist $f: M \to N$ eine bijektive Abbildung, dann hat sie eine Umkehrabbildung

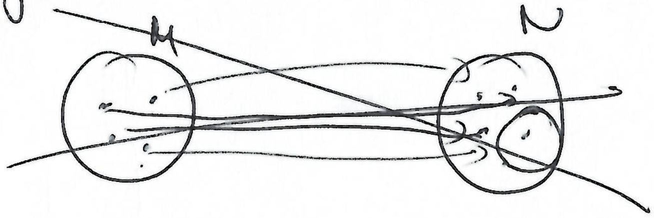


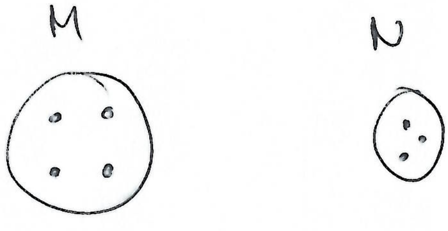
1 zu 1

a	b	c	d
β	α	δ	γ

α	β	γ	δ
b	a	d	c

Ist f zwischen endl. Mengen M und N surjektiv, so gilt:

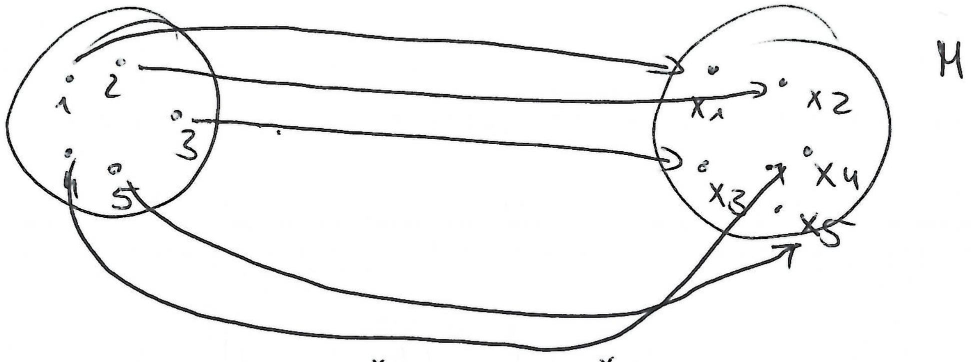




Anz. von Elementen in $M \geq$ Anz. von El. in N
(weil jedes Element in N getroffen werden muss)

<u>Zusammenfassend:</u> $f: M \to N$ Abb.

- f injektiv, $\underbrace{|M|}_{\text{Anz. von El. in } M \,=\, \text{Mächtigkeit von } M} \leq |N|$
- f surjektiv, $|M| \geq |N|$
- f bijektiv: $|M| = |N|$



$$M = \{\overset{x_1}{\text{Apfel}}, \overset{x_2}{\text{Birne}}, \overset{x_3}{\text{Banane}}\} \qquad |M| = 3$$

$f: \{1, 2, 3\} \to M$

1	2	3
Apfel	Birne	Banane

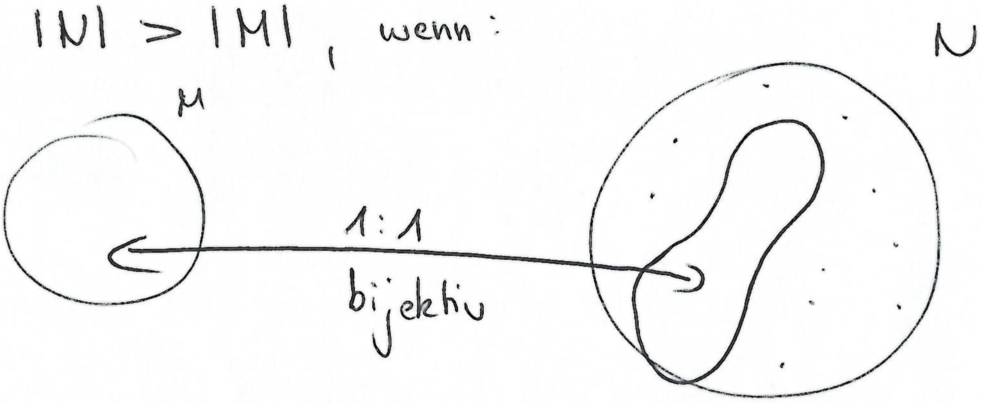
← bijektive Abb.

~~1 | 2 | 3 | 4 | 5~~

1	2	3
Apfel	Birne	Banane

~~M = {Apfel, Birne, Banane}~~

$|N| > |M|$, wenn:



Beispiele zu Mächtigkeit:

- $|\mathbb{N}_0| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$

Beweis: Die Abb. $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$, $x \mapsto x - 1$ $\left(f(x) = x-1\right)$

1	2	3	4
0	1	2	3

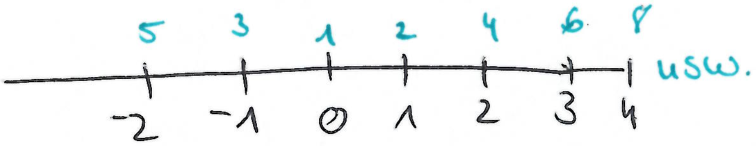
usw.

ist bijektiv.

- surjektiv: Sei $y \in \mathbb{N}_0$ beliebig. z.z.: es gibt ein $x \in \mathbb{N}$ mit $f(x) = y$. hierzu: $f(y+1) = y$ ✓
  $y + 1 \in \mathbb{N}$ für $y \in \mathbb{N}_0$ und ist Urbild von y.

- <u>injektiv:</u> Sei $x_1 \neq x_2 \in \mathbb{N}$. (direkter Beweis)
  Dann gilt $f(x_1) = x_1 - 1 \neq x_2 - 1 = f(x_2)$.
  $\Rightarrow f$ ist injektiv.

<u>Beispiel:</u> $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$



<u>Bew.:</u> Wir betrachten die Abb.

$$f: \cancel{\mathbb{N} \to \mathbb{Z}} \quad \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} 2 \cdot x & \text{für } x > 0 \\ 2 \cdot (-x) + 1 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

Diese Abbildung ist bijektiv.

<u>Bew.</u> zu M unendl. groß, $f: \mathbb{N} \to M$ surj $\Rightarrow |M| = |\mathbb{N}|$

$\not\Rightarrow$

<u>Beh:</u> $|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}| = \aleph_0$

<u>Bew mit Widerspruch:</u> Ang. $|\mathbb{R}| \leq |\mathbb{N}|$

Da $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, kann "<" nicht gelten, also ang. $|\mathbb{R}| = |\mathbb{N}|$.
~~Dann~~
d.h. es gibt eine Bijektion von $\mathbb{N}$ auf eine Teilmenge von $\mathbb{R}$.

d.h. man kann die Elemente von $\mathbb{R}$ "durchzählen" bzw. in eine Liste schreiben; u.a. für alle Elemente in $[0,1]$.

$\mathbb{N}$	$[0,1]$					
1	$0,\overset{2}{a_{11}}$	$\overset{4}{a_{12}}$	$\overset{8}{a_{13}}$	$\overset{1}{a_{14}}$		...
2	$0,\underset{a_{21}}{1}$	$\underset{a_{22}}{5}$	$\underset{a_{23}}{1}$	$\underset{a_{24}}{3}$	$\underset{a_{25}}{4}$	...
3						
4						
5	$0,a_{51}$	a_{52}	...			

$b_1 \neq a_{11}$
$b_2 \neq a_{22}$
$b_3 \neq a_{33}$
$\Big\}\ 0,b_1 b_2 b_3 \dots$

Wir betrachten die Zahl

$x = 0{,}\, b_1\, b_2\, b_3\, b_4, \dots$

wobei $b_i \neq a_{ii}$ ist, das heißt x unterscheidet sich von der i-ten Zahl in der Liste in ~~Stelle i~~ der i-ten Nachkommastelle.

Das heißt: x kommt nicht in der Liste vor.

Aber: $x \in [0,1]$ und wir hatten angenommen dass alle solchen Zahlen in der Liste stehen. Widerspruch. $\square$

---

0 ——— 1

1	0.	1	2	3	4	5	6	...
2	0.	2	$\boxed{1}$	5	7	8	0	...
3	0.	3	9	6	2	7	1	...
4	0.	2	2	7	8	9		

0, 2 $\boxed{2}$ 7 1

$\in [0,1]$

1.000.000

Aussagenlogik

Beispiele zu Aussagen: A: "$1 < 9$" "wahr"

B: "Es gibt unendlich viele Primzahlen" "wahr"

C: "Es gibt endlich viele Primzahlen" "falsch"

$C = \neg B$

Satz: $(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B) = A \text{ Xor } B$ (entweder oder)

Bew.:

A	B	C = $A \vee B$	$A \wedge B$	D = $\neg(A \wedge B)$	$C \wedge D$ = $(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$	A Xor B
w	w	w	w	f	f	f
w	f	w	f	w	w	w
f	w	w	f	w	w	w
f	f	f	f	w	f	f