19.10.23

- $R_7$ : $11 \; R_7 \; 4$ $\quad$ $11 \; R_7 \; 18$

$18 \; R_7 \; 4$

$-2 \; R_7 \; 5$ $\quad$ $-2 = \underline{(-1) \cdot 7} + 5$

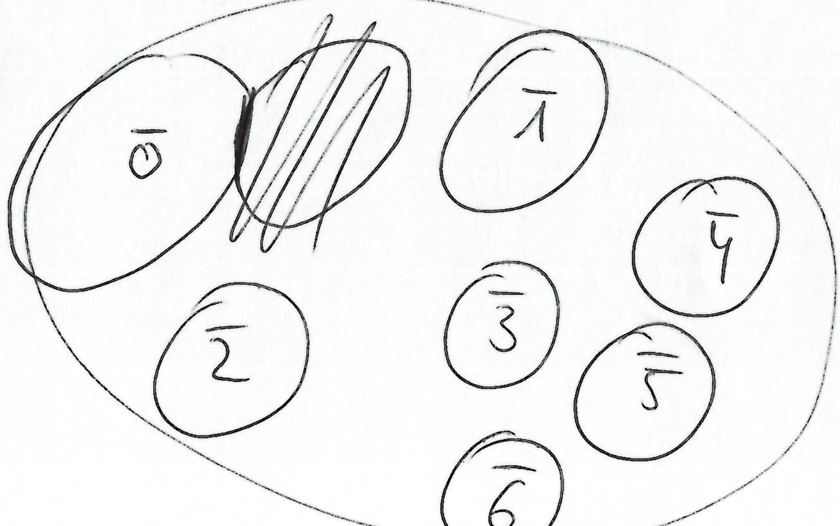
$\overline{0} = \{0, 7, 14, 21, \dots$
$\quad -7, -14, -21, \dots \}$

$\overline{1} = \{1, 8, 15, 22, \dots$
$\quad -6, -13, -20, \dots \}$

$\overline{2} = \{2, 9, 16 \dots$
$\quad -5, -12, \dots \}$

$\overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}$

$\mathbb{Z}$ :




---

Ordnungsrelationen:

partielle Ordnung. { "$\leq$": $\quad x \leq y \quad y \leq z \quad \Rightarrow x \leq z$ $\quad$ transitiv ✓

$x \leq x$ $\quad$ reflexiv ✓

wenn $x \leq y$ und $y \leq x$ $\Rightarrow x = y$ ✓

Frage: "$<$" partielle Ordnung? Nein, weil nicht reflexiv.

Frage: · "$\geq$" ✓ partielle Ordnung

~~$x \geq y$~~

· "$\neq$" nicht reflexiv ← $x \neq x$ gilt nicht.
nicht transitiv: $z.B.$ für $z = x$
✓ $x \neq y$ $y \neq x$
trotzdem: $x$ nicht $\neq x$.

---

Unterschied zw. Äqu.rel. & part. Ordnung

symmetrisch: immer, wenn $xRy$ gilt, gilt auch $yRx$ (*)

z.B. $x = y \Rightarrow y = x$

gilt das für "$\leq$"? Nein, z.B. $1 \leq 2$

---

Vollständige Ordnung:

$3, -1$: & Ordnung "$\leq$": $-1 \leq 3$.

$2, 4$: $2 \leq 4$

$2, -4$: $-4 \leq 2$

vollst. Ordnung = partielle Ordnung + alle Elemente können angeordnet ("verglichen") werden

Beispiele:

1. $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$: "$\leq$" vollständig geordnet
2. "$<$" ~~nicht~~ g keine partielle Ordnung.

---

(*) Äquivalenzrel.

"gleiche Körpergröße"

$xRy \Rightarrow yRx$ symm.

für alle Personen $x, y$, mit gleicher Körpergröße

Ordnungsrel.: nicht symmetrisch.

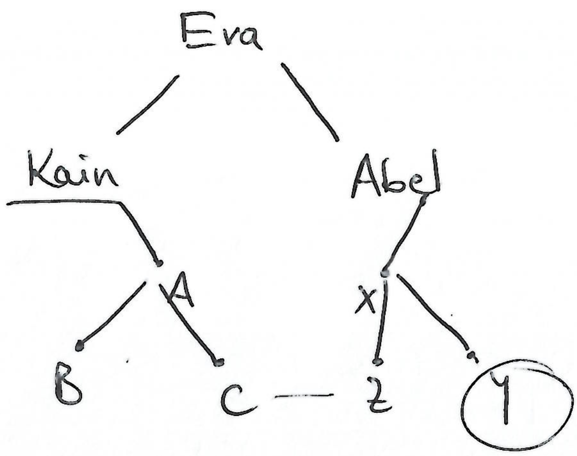
"$\leq$"

$-2 \leq 1 \not\Rightarrow 1 \leq -2$.

$-2 \leq -2$ ⇐ hier kann man "umdrehen"

3. Stammbaum

sagen: $A \leq B \iff$ A ist ein direkter Vorfahre von B (oder B)




z.B. Kain $\leq$ C

partielle Ordnung? • reflexiv, weil für alle Personen D gilt: $D \leq D$ ✓

Variablen
Seien $D, E, F \in$ {Eva, Kain, Abel, A, B, C, X, Y, Z}

• transitiv: Ist D ein direkter Vorfahre von E und E einer von F, dann ist D direkter Vorfahre von F ✓

• Wenn $D \leq E$ und $E \leq D$, dann ist D Vorf. von E und E Vorfahre von D.
$\Rightarrow$ D und E sind die gleiche Person ✓

$\Rightarrow$ partielle Ordnung.

Aber: keine vollständige Ordnung, weil z.B. Kain und Z keine Relation eingehen.

# Abbildungen



$$\underset{\mathbb{R}}{\overset{\Uparrow}{f(x)}} = \underset{\mathbb{R}}{\overset{\Uparrow}{x^2}}$$

$$f : \mathbb{R} = \text{Definitionsmenge} \longrightarrow \mathbb{R} = \text{Zielmenge}$$
$$x \longmapsto x^2$$

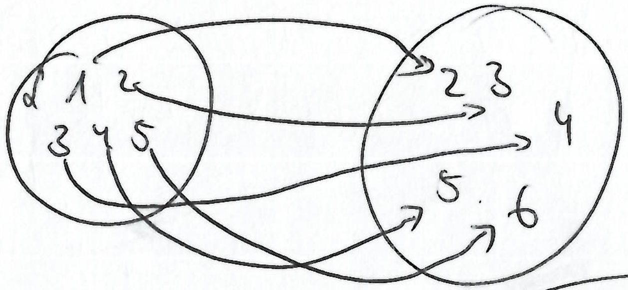
**Bsp:** $f_1 : \{1,2,3,4,5\} \longrightarrow \mathbb{N}$
$$x \longmapsto x+1$$

$f(x) = x+1$

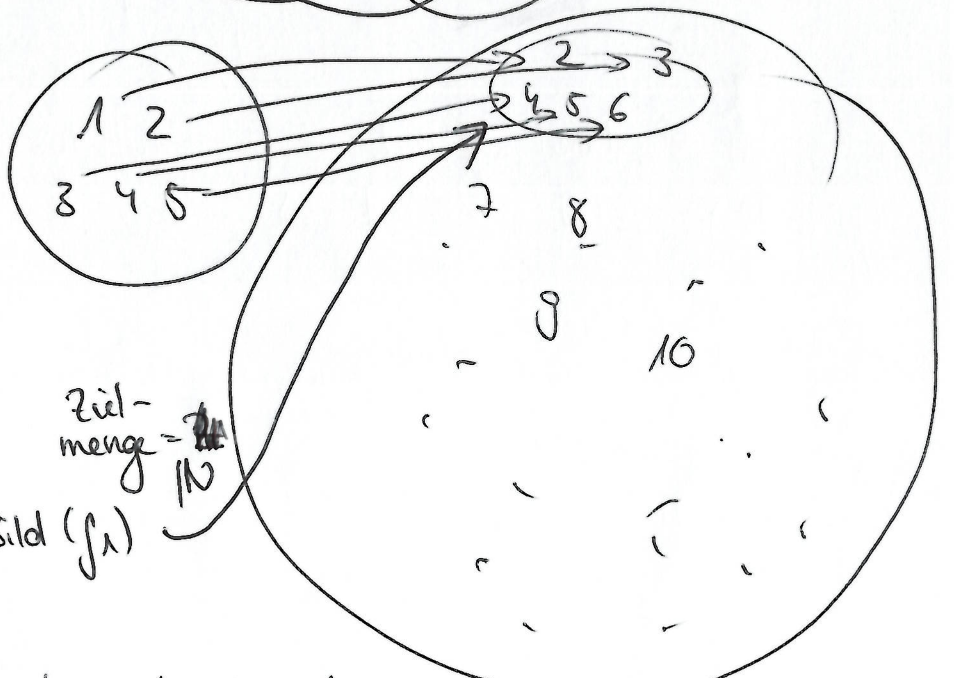
ist eine andere Abb. als

$$f_2 : \{1,2,3,4,5\} \longrightarrow \{2,3,4,5,6\}$$
$$x \longmapsto x+1 \Leftarrow$$ explizite Abbildungs-vorschrift.

$f_2$




$f_1$:



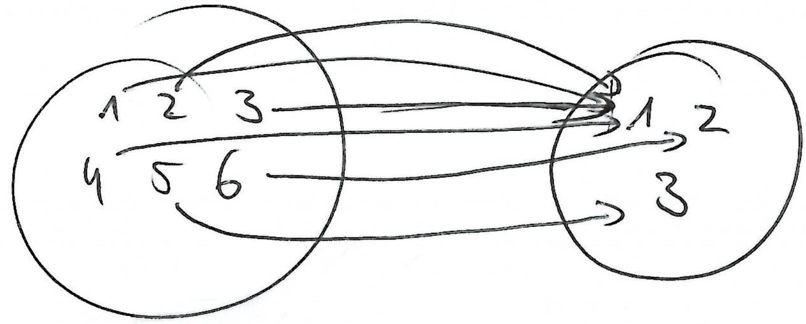

Ziel-menge = $\mathbb{N}$

aber Bild $(f_1)$

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_2(x)$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

z.B. $f^{-1}(\{1\}) = \{-1,1\}$.
$f(x) = x^2$

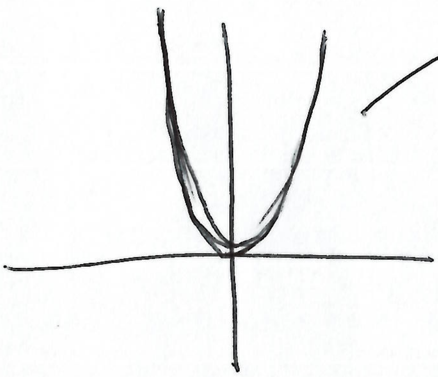
g:



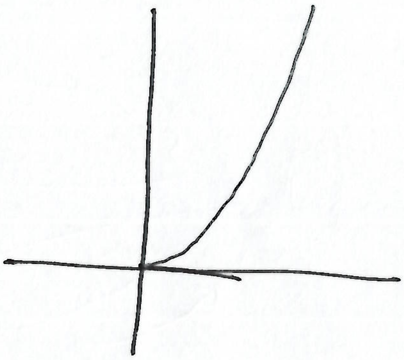
$g^{-1}(\{1\}) = \{1,2,3,4\}$

$g^{-1}(\{1,2\}) = \{1,2,3,4,6\}$.

Einschränkung: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,\ x \mapsto x^2 \quad (f(x) = x^2)$

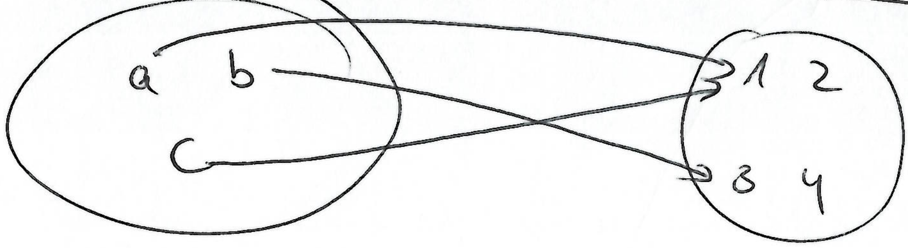


$f|_{\mathbb{R}_{\geq 0}} : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}\ ,\ x \mapsto x^2$



Weitere Beispiele für Abbildungen:

g:



$g: \{a,b,c\} \longrightarrow \{1,2,3,4\}$

| a | b | c |
|---|---|---|
| 1 | 3 | 1 |

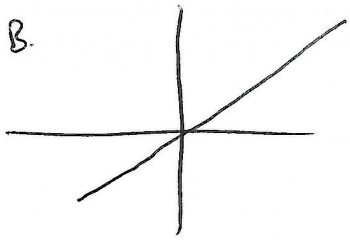
$g^{-1}(\{1\}) = \{a,c\}$ Urbild , $g^{-1}(\{2\}) = \emptyset$

Bild: $g(\{a,b\}) = \{1,3\}$ $g(\{a,b,c\}) = \{1,3\}$
= Bildmenge

Wichtige Abb: "identische Abb"

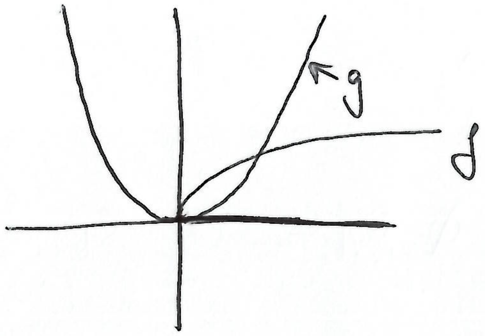
$$id_M : M \longrightarrow M$$
$$x \longmapsto x$$

z. B.



Bsp. für Hintereinanderausführen:

$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$
$$x \mapsto x^2$$




$$f: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$
$$x \longmapsto \sqrt{x}$$

$$f \circ g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

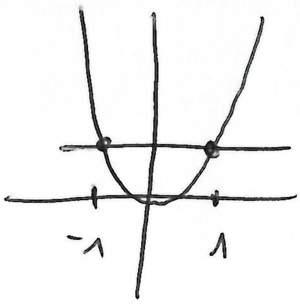
$f(g(x))$

$$x \mapsto f(g(x)) = f(x^2) = \sqrt{x^2} = |x|$$

$$id_{\mathbb{R}_{\geq 0}} = g \circ f: \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$
$$x \longmapsto g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x.$$

injektiv:

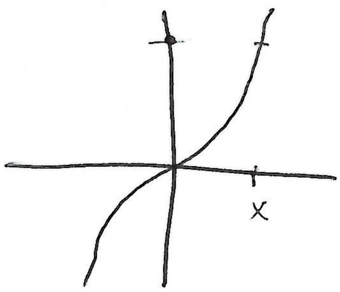
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$




? nicht injektiv weil

$f(x) = x^2$ $\qquad f(-1) = 1 = f(1)$

nicht surjektiv




$f(x) = x^3$ ist injektiv

und surjektiv

bijektiv = injektiv + surjektiv.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ , $x \mapsto x^2$ surjektiv !
nicht injektiv

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ , $x \mapsto x^2$ nicht surjektiv
nicht injektiv

$f: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ , $x \mapsto x^2$ injektiv ! nicht surj.

$f: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ , $x \mapsto x^2$ inj. + surj.
= bijektiv.