

Karnaugh-Veitch-Diagramm

Karnaugh-Veitch-Diagramm

KV-Diagramm für 2 Variable:

| | \bar{A} | A |
|-----------|--------------------------|--------------------|
| \bar{B} | $\bar{A} \wedge \bar{B}$ | $A \wedge \bar{B}$ |
| B | $\bar{A} \wedge B$ | $A \wedge B$ |

Eine 1 auf einem Platz eines KV-Diagramms steht für eine Vollkonjunktion.

Beispiel:

| Nr. | A | B | Y |
|-----|-----|-----|-----|
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 2 | 0 | 1 | 1 |
| 3 | 1 | 0 | 1 |
| 4 | 1 | 1 | 0 |

| | \bar{A} | A |
|-----------|-----------|-----|
| \bar{B} | 1 | 1 |
| B | 1 | 0 |

Eine KV-Diagramm ist äquivalent zu einer Wertetabelle. Die Anordnung ist etwas anders.

Karnaugh-Veitch-Diagramm

KV-Diagramm für 3 Variable:

| | $\overline{A}\overline{B}$ | $A\overline{B}$ | AB | $\overline{A}B$ |
|----------------|--|-----------------------------|------------------|-----------------------------|
| \overline{C} | $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ | $A\overline{B}\overline{C}$ | $AB\overline{C}$ | $\overline{A}B\overline{C}$ |
| C | $\overline{A}BC$ | $A\overline{B}C$ | ABC | $\overline{A}BC$ |

Beispiel:

$$Y = \underline{AB\overline{C}} \vee \underline{A\overline{B}C} \vee \underline{ABC} \vee \underline{\overline{A}BC}$$

| | $\overline{A}\overline{B}$ | $A\overline{B}$ | AB | $\overline{A}B$ |
|----------------|----------------------------|-----------------|------|-----------------|
| \overline{C} | 0 | 0 | 1 | 0 |
| C | 0 | 1 | 1 | 1 |

Karnaugh-Veitch-Diagramm

Vereinfachen der Gleichung nach den Rechenregeln der Booleschen Algebra:

$$Y = ABC\bar{C} \vee A\bar{B}C \vee ABC \vee \bar{A}BC$$

$$Y = AB(\bar{C} \vee C) \vee AC(\bar{B} \vee B) \vee BC(\bar{A} \vee A)$$

$$Y = AB \vee AC \vee BC$$

Vereinfachen der Gleichung mit Hilfe des KV-Diagramms:

| | $\bar{A}\bar{B}$ | $A\bar{B}$ | AB | $\bar{A}B$ |
|-----------|------------------|------------|------|------------|
| \bar{C} | 0 | 0 | 1 | 0 |
| C | 0 | 1 | 1 | 1 |

$$Y = \underline{AB} \vee \underline{AC} \vee \underline{BC}$$

Karnaugh-Veitch-Diagramm

Vereinfachen der Gleichung mit Hilfe des KV-Diagramms:

| | $\bar{A}\bar{B}$ | $A\bar{B}$ | AB | $\bar{A}B$ |
|-----------|------------------|------------|------|------------|
| \bar{C} | 0 | 0 | 1 | 0 |
| C | 0 | 1 | 1 | 1 |

$$Y = \underline{AB} \vee \underline{AC} \vee \underline{BC}$$

Regeln für die Blockbildung:

- Jede 1 muss in mindestens einem Block erfasst werden.
- In einem Block sind 2^n Einsen enthalten, also 1, 2, 4, 8, 16 ...
- Mit möglichst großen und möglichst wenigen Blöcken werden alle Einsen erfasst.
- Ein Block hat immer die Form eines Rechtecks.
- Der Term für einen Block wird durch die Variablen bestimmt, über die der Block geht. Variable, die sich über den Block ändern, entfallen. Die Variablen werden miteinander UND-verknüpft.
- Die einzelnen Terme (Blöcke) werden ODER-verknüpft.

Karnaugh-Veitch-Diagramm

Beispiel 1:

| x_1 | x_2 | x_3 | y |
|-------|-------|-------|-----|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

| | $\overline{x_2} \overline{x_1}$ | $x_2 \overline{x_1}$ | $x_2 x_1$ | $\overline{x_2} x_1$ |
|------------------|---------------------------------|----------------------|-----------|----------------------|
| $\overline{x_3}$ | 0 | 0 | 1 | 1 |
| x_3 | 0 | 1 | 1 | 1 |

$$y = \underline{x_1} \vee \underline{x_3 x_2}$$

Karnaugh-Veitch-Diagramm

Beispiel 2:

| x_1 | x_2 | x_3 | y |
|-------|-------|-------|-----|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

| | $\overline{x_2} \overline{x_1}$ | $x_2 \overline{x_1}$ | $x_2 x_1$ | $\overline{x_2} x_1$ |
|------------------|---------------------------------|----------------------|-----------|----------------------|
| $\overline{x_3}$ | 1 | 0 | 0 | 1 |
| x_3 | 1 | 1 | 0 | 1 |

$$y = \overline{x_2} \vee x_3 \overline{x_1}$$

Beispiel 3:

| | $\overline{x_2} \overline{x_1}$ | $x_2 \overline{x_1}$ | $x_2 x_1$ | $\overline{x_2} x_1$ |
|---------------------------------|---------------------------------|----------------------|-----------|----------------------|
| $\overline{x_4} \overline{x_3}$ | 1 | 0 | 0 | 1 |
| $\overline{x_4} x_3$ | 0 | 1 | 1 | 0 |
| $x_4 x_3$ | 0 | 1 | 1 | 0 |
| $x_4 \overline{x_3}$ | 1 | 0 | 0 | 1 |

$$y = \underline{x_3 x_2} \vee \underline{\overline{x_3} \overline{x_2}}$$

Beispiel 4: „don't care“-Felder

| | $\overline{x_2} \overline{x_1}$ | $x_2 \overline{x_1}$ | $x_2 x_1$ | $\overline{x_2} x_1$ |
|---------------------------------|---------------------------------|----------------------|-----------|----------------------|
| $\overline{x_4} \overline{x_3}$ | - | 1 | - | 1 |
| $\overline{x_4} x_3$ | 0 | 0 | - | 0 |
| $x_4 x_3$ | - | 1 | - | 0 |
| $x_4 \overline{x_3}$ | 0 | - | 1 | - |

Bei Feldern, die mit „-“ gekennzeichnet sind, ist der Ausgangswert der Schaltfunktion beliebig, d.h., er kann 1 oder 0 sein.

Meist ist der Grund für diese „don't care“-Felder, dass die Eingangsbelegung praktisch nicht auftreten kann. Im Entwurf der Schaltung erhält man dadurch zusätzliche Freiheitsgrade.

Beispiel 4: „don't care“-Felder

| | $\overline{X_2} \overline{X_1}$ | $X_2 \overline{X_1}$ | $X_2 X_1$ | $\overline{X_2} X_1$ |
|---------------------------------|---------------------------------|----------------------|-----------|----------------------|
| $\overline{X_4} \overline{X_3}$ | - | 1 | - | 1 |
| $\overline{X_4} X_3$ | 0 | 0 | - | 0 |
| $X_4 X_3$ | - | 1 | - | 0 |
| $X_4 \overline{X_3}$ | 0 | - | 1 | - |

$y =$

Regeln:

- Es müssen alle Einsen (oder Nullen) mindestens einmal erfasst werden.
- „Don't care“-Felder können hinzu genommen werden, wenn dadurch die Blöcke größer gewählt werden können.
- Es werden nur so viele „don't care“-Felder hinzu genommen wie unbedingt notwendig.

Beispiel 4: „don't care“-Felder

| | $\overline{x_2} \overline{x_1}$ | $x_2 \overline{x_1}$ | $x_2 x_1$ | $\overline{x_2} x_1$ |
|---------------------------------|---------------------------------|----------------------|-----------|----------------------|
| $\overline{x_4} \overline{x_3}$ | - | 1 | - | 1 |
| $\overline{x_4} x_3$ | 0 | 0 | - | 0 |
| $x_4 x_3$ | - | 1 | - | 0 |
| $x_4 \overline{x_3}$ | 0 | - | 1 | - |

$$y = \underline{x_4 x_2} \vee \underline{\overline{x_4} \overline{x_3}}$$

Regeln:

- Es müssen alle Einsen (oder Nullen) mindestens einmal erfasst werden.
- „Don't care“-Felder können hinzu genommen werden, wenn dadurch die Blöcke größer gewählt werden können.
- Es werden nur so viele „don't care“-Felder hinzu genommen wie unbedingt notwendig.

Übungsaufgaben (1)

1. Bestimmen Sie die minimalen Schaltausdrücke für $y_1 \dots y_4$ in disjunktiver Normalform.
2. Bestimmen Sie die minimalen Schaltausdrücke für $y_1 \dots y_4$ in konjunktiver Normalform.

| | $\overline{x_2} \overline{x_1}$ | $\overline{x_2} x_1$ | $x_2 x_1$ | $x_2 \overline{x_1}$ |
|---------------------------------|---------------------------------|----------------------|-----------|----------------------|
| $\overline{x_4} \overline{x_3}$ | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $\overline{x_4} x_3$ | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $x_4 x_3$ | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $x_4 \overline{x_3}$ | 1 | 0 | 0 | 1 |

 $y_1 =$

| | $\overline{x_2} \overline{x_1}$ | $\overline{x_2} x_1$ | $x_2 x_1$ | $x_2 \overline{x_1}$ |
|---------------------------------|---------------------------------|----------------------|-----------|----------------------|
| $\overline{x_4} \overline{x_3}$ | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $\overline{x_4} x_3$ | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $x_4 x_3$ | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $x_4 \overline{x_3}$ | 0 | 1 | 0 | 0 |

 $y_2 =$

| | $\overline{x_2} \overline{x_1}$ | $\overline{x_2} x_1$ | $x_2 x_1$ | $x_2 \overline{x_1}$ |
|---------------------------------|---------------------------------|----------------------|-----------|----------------------|
| $\overline{x_4} \overline{x_3}$ | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $\overline{x_4} x_3$ | 1 | 1 | 0 | 0 |
| $x_4 x_3$ | 0 | 1 | 1 | 0 |
| $x_4 \overline{x_3}$ | 0 | 0 | 1 | 1 |

 $y_3 =$

| | $\overline{x_2} \overline{x_1}$ | $\overline{x_2} x_1$ | $x_2 x_1$ | $x_2 \overline{x_1}$ |
|---------------------------------|---------------------------------|----------------------|-----------|----------------------|
| $\overline{x_4} \overline{x_3}$ | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $\overline{x_4} x_3$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $x_4 x_3$ | 1 | 0 | 0 | 1 |
| $x_4 \overline{x_3}$ | 1 | 1 | 1 | 1 |

 $y_4 =$

Übungsaufgaben (2)

3. Bestimmen Sie die minimalen Schaltausdrücke für $y_5 \dots y_8$. Wählen Sie die Normalform, die zu einer kleineren Gleichung führt.

| | $\overline{x_2} \overline{x_1}$ | $\overline{x_2} x_1$ | $x_2 x_1$ | $x_2 \overline{x_1}$ |
|---------------------------------|---------------------------------|----------------------|-----------|----------------------|
| $\overline{x_4} \overline{x_3}$ | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $\overline{x_4} x_3$ | 0 | - | 1 | 1 |
| $x_4 x_3$ | 0 | - | 0 | 0 |
| $x_4 \overline{x_3}$ | - | 0 | 0 | 1 |

 $y_5 =$

| | $\overline{x_2} \overline{x_1}$ | $\overline{x_2} x_1$ | $x_2 x_1$ | $x_2 \overline{x_1}$ |
|---------------------------------|---------------------------------|----------------------|-----------|----------------------|
| $\overline{x_4} \overline{x_3}$ | - | 0 | - | 0 |
| $\overline{x_4} x_3$ | 0 | 1 | - | 1 |
| $x_4 x_3$ | - | 0 | 1 | 0 |
| $x_4 \overline{x_3}$ | - | 1 | 1 | - |

 $y_6 =$

| | $\overline{x_2} \overline{x_1}$ | $\overline{x_2} x_1$ | $x_2 x_1$ | $x_2 \overline{x_1}$ |
|---------------------------------|---------------------------------|----------------------|-----------|----------------------|
| $\overline{x_4} \overline{x_3}$ | 1 | 1 | 0 | - |
| $\overline{x_4} x_3$ | 0 | 0 | - | 0 |
| $x_4 x_3$ | 1 | - | 1 | 1 |
| $x_4 \overline{x_3}$ | - | 1 | 0 | - |

 $y_7 =$

| | $\overline{x_2} \overline{x_1}$ | $\overline{x_2} x_1$ | $x_2 x_1$ | $x_2 \overline{x_1}$ |
|---------------------------------|---------------------------------|----------------------|-----------|----------------------|
| $\overline{x_4} \overline{x_3}$ | 0 | 1 | - | 0 |
| $\overline{x_4} x_3$ | - | - | 0 | - |
| $x_4 x_3$ | 1 | 0 | - | 1 |
| $x_4 \overline{x_3}$ | - | 0 | 1 | - |

 $y_8 =$

Übungsaufgaben (3)

Kürzen Sie mit Hilfe des Karnaugh-Verfahrens folgende Ausdrücke:

$$y_{10} = \overline{x_1} \overline{x_2} \vee \overline{x_1} x_2 x_3 \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_4} \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \overline{x_4}$$

$$y_{11} = \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} \vee \overline{x_1} x_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3$$

$$y_{12} = \overline{a} b \overline{c} \vee a \overline{c} d \vee \overline{a} c d \vee a b c \vee b d$$