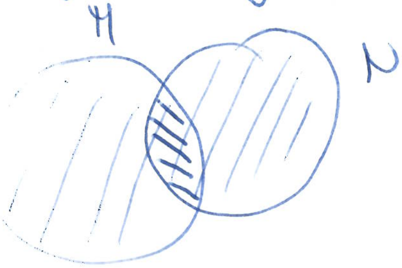
16.10.23

Rechenregeln für Mengen:

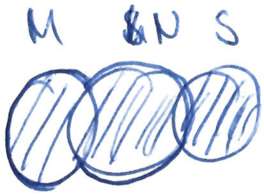
- Kommutativgesetz



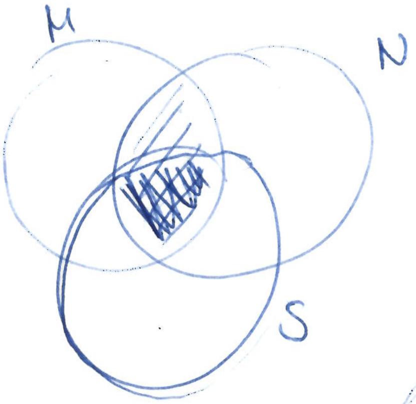
$$M \cup N = N \cup M$$

$$M \cap N = N \cap M$$

- Assoziativgesetz

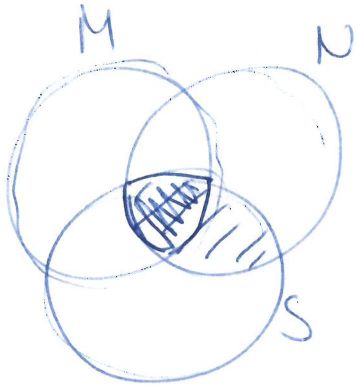


$$(M \cup N) \cup S = M \cup (N \cup S)$$

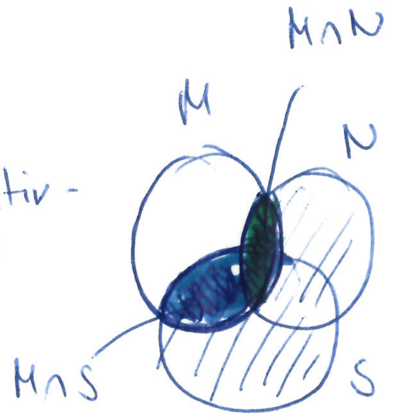


$$(M \cap N) \cap S =$$

$$M \cap (N \cap S) =$$



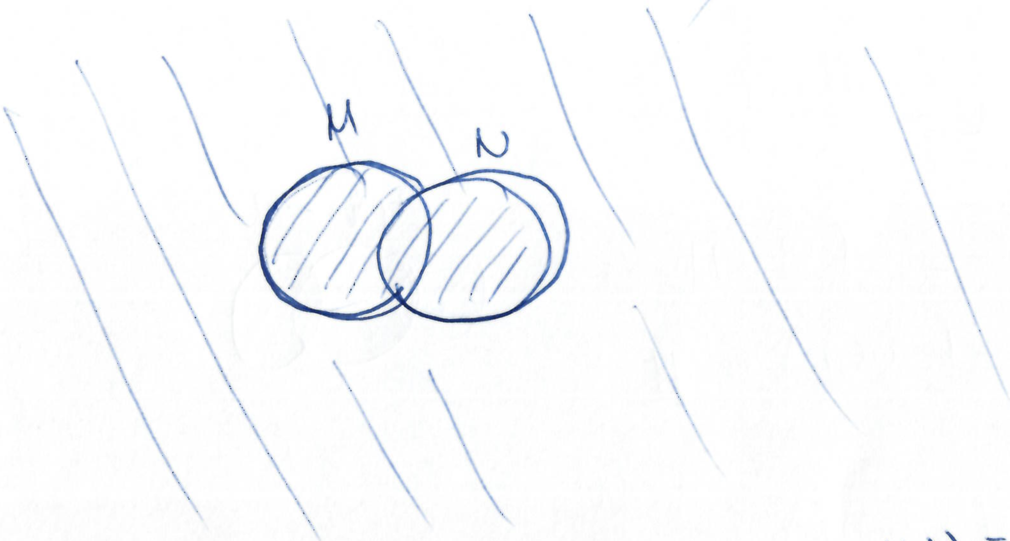
- Distributivgesetz:



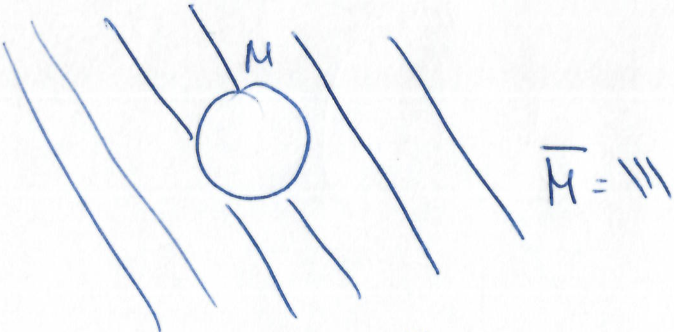
$$M \cap (N \cup S) = (M \cap S) \cup (M \cap N)$$

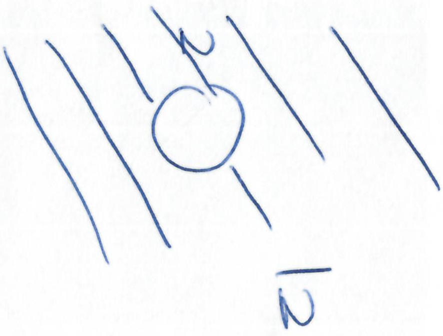
$$\left(x \cdot (a+b) = x \cdot a + x \cdot b \right)$$

$M \setminus N = M \cap \overline{N}$

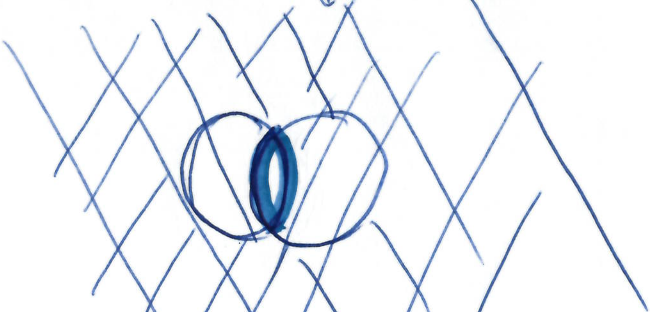


$//// = \overline{M \cup N} = \overline{M} \cap \overline{N}$





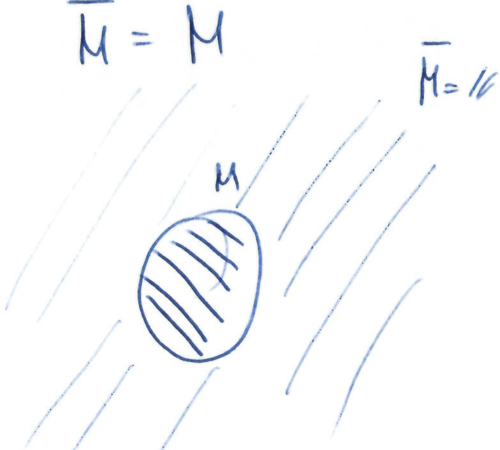
$\overline{M} \cup \overline{N}$



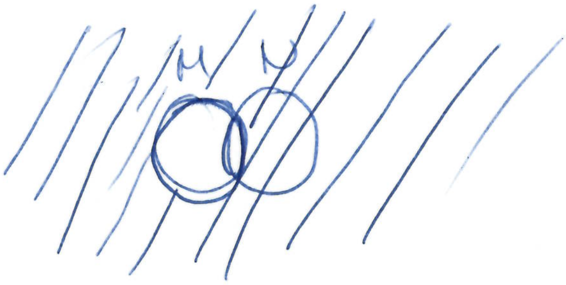
$(-1)\cdot(-1) = (+1)$

$\Downarrow$

$\overline{\overline{M}} = M$

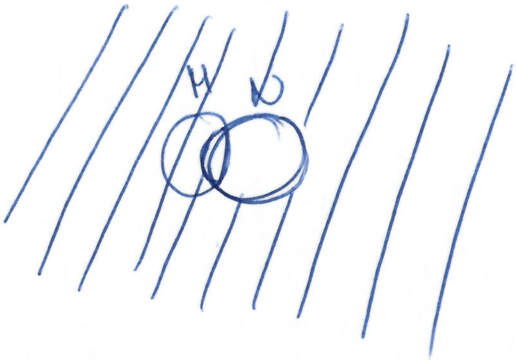


$\overline{M} =$



$\cup$

$\overline{N} =$

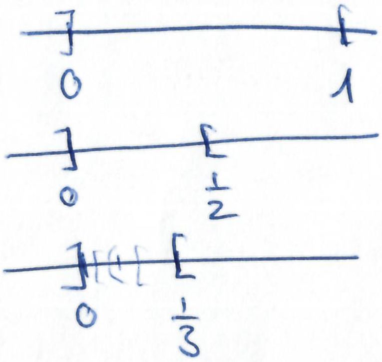


<u>Beispiel:</u>

$A_1 =]0,1[$

$A_2 =]0,\frac{1}{2}[$

$A_3 =]0,\frac{1}{3}[$



$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n =]0,1[$$

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$$

$$A_1 \cap \ldots \cap A_n =]0,\frac{1}{n}[$$

$\frac{1}{n} \to 0$ für $n \to \infty$

Wäre $A_n = [0,\frac{1}{n}]$, dann wäre $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{0\}$.

$\emptyset = \{\}$ — kein Element

$\{0\}$ — ein Element, $0 \in \mathbb{Z}$.

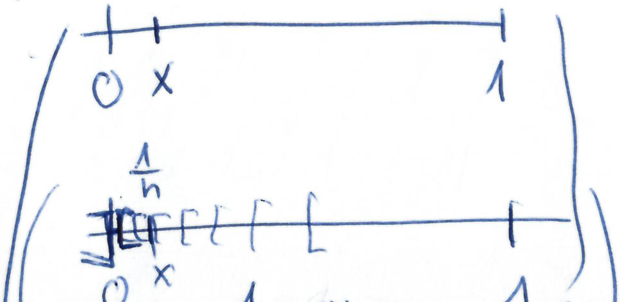
Beh: $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$ für $A_n =]0, \frac{1}{n}[$

Bew. durch Widerspruch. Sei $B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$; zu zeigen: $B = \emptyset$

Wir nehmen an, die Beh. ist falsch, d.h. $B \neq \emptyset$.

es gibt ein Element $x \in B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Da $x > 0$, können wir $\frac{1}{x}$ berechnen.



z.B. $\frac{1}{5}$

$]0, \frac{1}{6}[$

suche: $\frac{1}{n} < x \iff n > \frac{1}{x}$

$x \notin]0, \frac{1}{n}[$

Sei n eine natürliche Zahl mit $n > \frac{1}{x}$. $/ \cdot x / : n$

Dann gilt: $x > \frac{1}{n}$, d.h. $x \notin]0, \frac{1}{n}[= A_n$

$\Rightarrow x \notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = B$ ist ein Widerspruch zu

der Wahl von x als $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Deswegen muss die Beh. richtig sein. $\square$

Kartesisches Produkt: $\mathbb{N} \times \mathbb{R} = \{(a,b) \mid a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{R}\}$.

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y,z) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^3$.

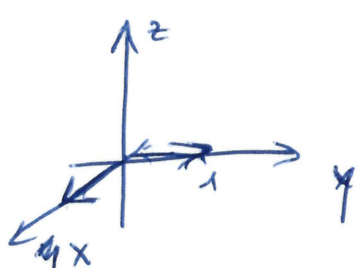
$\{0,1,2\} \times \{1,4\} = \{(0,1), (0,4), (1,1), (1,4), (2,1), (2,4)\}$.

$P(\{0,1,2\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\}$

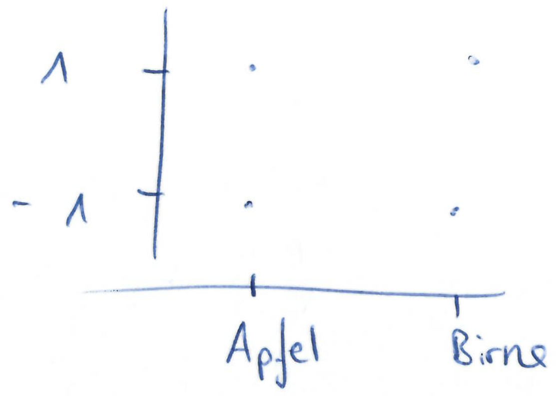
$\{1,0,0\} = \{0,1\}$

$(1,0,0) \in \mathbb{R}^3$

$(0,1,0)$



$$\underbrace{\{-1, 1\}}_{\text{2 Elemente}} \times \underbrace{\{\text{Apfel}, \text{Birne}\}}_{\text{2 Elemente}} = \{(-1, \text{Apfel}), (-1, \text{Birne}), (1, \text{Apfel}), (1, \text{Birne})\}$$



"Raster"

Beispiele:

- $M = \{\text{Studenten in Mathe 1 Vorlesung}\} = \{\text{Anton}, \text{Berta}, \dots\}$

  $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

  $M \times N = \{(\text{Anton}, 1), (\text{Anton}, 2), \dots (\text{Anton}, 5)$
  $(\text{Berta}, 1), \dots \}$

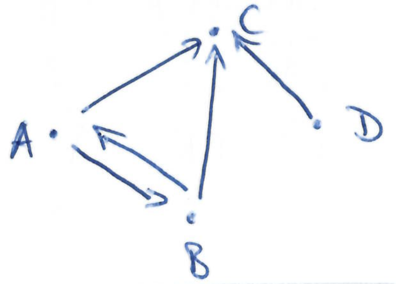
  Das Ergebnis der Klausur ist eine Teilmenge von $M \times N$.

- $M \times \emptyset = \{(m, n) \mid m \in M \text{ und } \underbrace{n \in \emptyset}_{\text{gibt es nicht}}\} = \emptyset$

Relationen

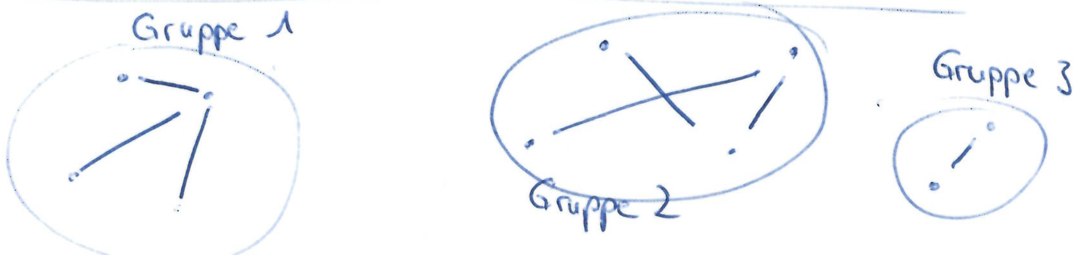
- Graphen

Instagram:



"$\longrightarrow$": folgt.

"friends auf fb"



$(x,y) \longrightarrow \quad R \subset M \times M$ ← alle Tupel, die diese Relation erfüllen

Beispiele:

- M = Menge aller Studenten in Mathe 1

"Relation" $R = \{ (x,y) \in M \times M = M^2 \mid x$ ist befreundet mit $y \}$.

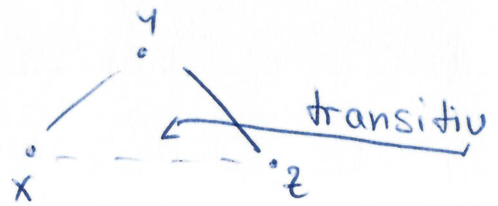
$\leq \neq \mathbb{R}$

- $\mathbb{R}_{\leq} = \{ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 \mid x \leq y \}$.

$x \leq y \iff (x,y) \in \mathbb{R}_{\leq}$

$x R y \iff (x,y) \in R$.

- $"=" = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y \} = \{ (x,x) \mid x \in \mathbb{R} \}$.
- $">" = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y \}$
- $R_{\subset} = \{ (A,B) \in P(\mathbb{R}) \times P(\mathbb{R}) \mid A \subset B \}$



Äquivalenzrelationen:

- gleiche Körpergröße auf $M = \{$Studenten in Mathe 1$\}$

  $R = \{ (x,y) \in M \times M \mid x$ und y sind gleich groß $\}$.

$(x,x) \in R$ – reflexiv: ist erfüllt, da jeder so groß ist wie er selbst.

$(x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$. – symmetrisch: ist erfüllt, denn: wenn x so groß ist wie y, dann auch y so groß wie x

– transitiv: Seien $(x,y) \in R$, $(y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$

- M = Menge der Kleidungsstücke

  $R = \{(x,y) \mid x$ wird vor oder gleichzeitig mit y angezogen$\}$.

  z.B. Unterhose R Hose

  - reflexiv ✓
  - symmetrisch: nein
  - transitiv: ✓

- $R_5 = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x$ und y lassen den gleichen Rest bei Division durch $5\}$

$7 R_5 12$, $30 R_5 (-10)$

$-7 R_5 -2$ $-2 R_5 3$ $-7 = -5-2$

$-7 R_5 3$ $= -10 + 3$

$-1 R_5 4$ $-2 = -5+3$

R_n: Äquivalenzrelation

- reflexiv: ✓
- symmetrisch: wenn $x \in \mathbb{Z}$ den Rest r beim Teilen durch n hat und y auch, also $x R_n y$ $\Rightarrow$ und auch $y R_n x$ ✓
- transitiv: Seien $x, y, z \in \mathbb{Z}$, s.d. $x R_n y$ und $y R_n z$, d.h. x hat denselben Rest r beim Teilen durch n wie y und y denselben Rest — " — wie z.
  $\Rightarrow$ alle 3 haben Rest r, also gilt auch $x R_n z$. ✓

<u>Notation</u>:
R_5: $\overline{0}$ = "Äquivalenzklasse von 0" = Alle Zahlen mit Rest 0 beim Teilen durch 5.
$= \{0, 5, 10, 15, \ldots$
$-5, -10, -15, \ldots\}$

$\overline{1} = \{1, 6, 11, 16, 21, \ldots$
$-4, -9, -14, -19$ usw. $\}$

NR:
$-4 = -5+1$

$$\bar{2} = \{2, 7, 12, 17, 22, \ldots, -3, -8, -13, \ldots\}$$

$\vdots$

$$\bar{7} = \bar{2} = \overline{17}$$

Funktionen in d. Schule: $\underset{\in\mathbb{R}}{f(x)} = \underset{\in\mathbb{R}}{x^2}$

$$f(\underset{\in\mathbb{Z}}{x}) = \underset{\in\mathbb{N}_0}{x^2}$$

Definitionsmenge

Zielmenge

$$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$$
$$x \mapsto x^2$$

$\left(f(\underset{\in\mathbb{Z}}{x}) = \underset{\in\mathbb{N}_0}{x^2} \right)$

$$f_2: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$
$$x \mapsto x^2$$