HAW LANDSHUT — WS 2023/2024
FAKULTÄT FÜR INFORMATIK — Blatt 2
Eisenreich/Hartmann/Sagraloff/Schröter — 28.10.2023

Übungen zur Vorlesung „Mathematik I"

Aufgabe 1. Abbildungen

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + 3$. Ist diese Abbildung injektiv, surjektiv, bijektiv? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Seien die Mengen A und B durch $A := \{\alpha, \beta, \gamma\}$ und $B := \{1, 2, 3, 4, 5\}$ definiert. Begründen Sie, warum keine Abbildung $A \to B$ surjektiv sein kann!

(c) Seien $f : M \mapsto N$ und $g : N \mapsto S$ Abbildungen. Beweisen Sie: Sind f und g surjektiv (bzw. injektiv), so ist auch $g \circ f$ surjektiv (bzw. injektiv).

Aufgabe 2. Mächtigkeit von Mengen *Wie "groß" Mengen sind ist auch in der Praxis relevant: Wenn man in der Industrie mit Big Data umgeht, hängt die Geschwindigkeit eines Algorithmus von der Mächtigkeit der Datenmenge ab.*
Geben Sie die Mächtigkeit folgender Mengen an:

(a)
- $M_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ und M_1^2
- $M_2 = \bigcup_{i \in M_1} \{i, i + 1, i + 2\}$
- $M_3 = P(\{1\})$,
- $M_4 = P(\{\varnothing, \{1\}\})$
- $M_5 = P(\{1, 2, 3\})$.

(b) Sei S die Menge aller *endlichen* Strings, die sich aus 0-en und 1-en bilden lassen, d.h.

$$L = \{b_1 \dots b_k | b_i \in \{0, 1\} \text{ und } k \in \mathbb{N}\}$$

Zeigen Sie, dass L die gleiche Mächtigkeit wie die Menge der natürlichen Zahlen hat. (Hinweis: überlegen Sie, wie man die Elemente von L in einer Liste aufschreiben kann!)

Aufgabe 3. Logik *"By relieving the brain of all unnecessary work, a good notation sets it free to concentrate on more advanced problems" (Alfred North Whitehead) - Außerdem formalisieren wir mit Logik Aussagen und Schlussfolgerungen auf eine so strukturierte Art und Weise, dass man damit Computern beibringen kann, selbst Schlussfolgerungen zu ziehen.*

(a) Ist die folgende Aussage eine Tautologie? Begründen Sie Ihre Behauptung.

$$((A \to B) \land A) \to B$$

(b) Entscheiden Sie, ob die folgende Äquivalenz von Aussageformeln gilt:

$$A \land (B \lor \neg A) \Leftrightarrow (A \land B) \land (B \lor \neg B)$$

(c) Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

- $\forall x \in \mathbb{N}: \quad x > 0$
- $\exists x \in \mathbb{N}: \quad -x > 0$
- $\forall x \in \mathbb{N} \quad \exists y \in \mathbb{N} \quad y - x$ ist eine Primzahl
- $\forall y \in \mathbb{N} \quad \exists x \in \mathbb{N} \quad y - x$ ist eine Primzahl
- $\exists x \in \mathbb{N} \quad \forall y \in \mathbb{N} \quad y - x \geq 0$
- $\exists y \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{N} \quad y - x \geq 0$

Aufgabe 4. Beweisarten Beweisen Sie die Aussage "Die Summer zweier ungerader Zahlen ist gerade." mit folgenden Beweisarten:

(a) direkter Beweis

(b) Widerspruchsbeweis

Hinweis: Eine ungerade Zahl kann man als $2k + 1$ schreiben für ein $k \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 5. Induktion Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion die Richtigkeit der foglenden Aussage für alle natürlichen Zahlen n:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$