Mathematik I

Vorlesung 2 - Logik

Prof. Dr. Sandra Eisenreich

23./26. Oktober 2023

Hochschule Landshut

2.1 Aussagenlogik

Motivation

Manche Schlussfolgerungen sind für uns im Alltag ganz natürlich, z.B.:

- Aussage A: Wenn es glatt ist, braucht man Winterreifen. (A: glatt → Winterreifen)
- Aussage B: Es ist glatt. (B: glatt)

Wenn A und B beide zutreffen (Man schreibt: "$A \wedge B$", also "(glatt → Winterreifen)∧ glatt"), heißt das, mann muss auf Winterreifen wechseln.

Einfach? Eigentlich ja. Aber nicht wenn es sehr kompliziert wird und viele viele Aussagen mit einander zusammenhängen, oder man logische Schlüsse mit Hilfe eines Algorithmus per Rechner ableiten will. Dazu muss man Aussagen wie oben in ein formalisiertes Setting übersetzen; das passiert in der **Aussagenlogik**.

Das passiert im Bereich der **Logik**.

Anwendung in der Informatik

- **in der Schalttechnik: boolesche Algebra** ist die Grundlage bei der Entwicklung von digitaler Elektronik und wird dort als Schaltalgebra, etwa bei der Erstellung von Schaltnetzen, angewandt. Boolsche Logik basiert - wie der Name schon sagt - auf dem Prinzip der Logik, das heißt die Aussagen, die nur die Werte “True” oder “False” annehmen können.
- **Logische Agenten in Künstlicher Intelligenz, automatisiertes Beweisen:** Die Logik von Aussagen folgt strengen Regeln, die es ermöglichen, sie auch Computern “beizubringen” und Schlussfolgerungen oder sogar ganze Beweise zu automatisieren.

Definition

Eine **Aussage** ist ein Sachverhalt, der mit wahr oder falsch beschrieben werden kann.

Beispiel:

- $1 < 9$: “wahr”
- Es gibt unendlich viele Primzahlen: “wahr”
- $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ sind gleichmächtig: “falsch”
- Die Abbildung $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist injektiv: “falsch”
- Die Abbildung $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ ist injektiv: “wahr”
- Die Abbildung $f: \mathbb{R}_{\leq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist bijektiv: “wahr”
- Kontinuumshypothese (Es gibt keine Menge, deren Mächtigkeit zwischen der Mächtigkeit der natürlichen Zahlen und der Mächtigkeit der reellen Zahlen liegt.): ist wahr oder falsch (werden dies aber nicht beantworten können)

Im Folgenden bezeichnen wir Aussagen mit großen Buchstaben $A, B, C, \ldots$ Sie können die Werte wahr oder falsch annehmen.

Zusammengesetzte Aussagen

Aussagen können auch verknüpft oder negiert werden, es entstehen dadurch neue Aussagen. Es gibt folgende Operatoren:

Definition

- **"und"** $\wedge$ **(Konjunktion)**; $A \wedge B$= "Aussagen A und B sind beide wahr".
- **"und/oder"** $\vee$ **(Disjunktion)**; Die verknüpfte Aussage $A \vee B$ ist: "Aussage A ist wahr (und/) oder B ist wahr".
- **"wenn-dann"** $\rightarrow$ **(Implikation)**; $A \rightarrow B$ = "Wenn Aussage A wahr ist, dann ist auch Aussage B wahr."
- **"genau - dann"** $\leftrightarrow$ **(Äquivalenz)**; $A \leftrightarrow B$ = "Aussage A ist genau dann wahr, wenn B wahr ist".
- **"nicht": Bez.** $\neg$ **(Negation)**; $\neg A$ = "Die Negation von Aussage A ist wahr".

Achtung: Eine Verknüpfung von Ausagen ist eine Aussage, die wahr oder falsch sein kann! Z.B. heißt $A \rightarrow B$ **nicht**, dass aus der Aussage A immer Aussage B folgt, sondern ist nur die "Behauptung", dass aus A immer B folgt (was wahr oder falsch sein kann!)

Der Wahrheitsgehalt von verknüpften Aussagen werden über **Wahrheitstabellen** dargestellt:

Wahrheitstabellen

Konjunktion

"und" $\wedge$

A	B	$A \wedge B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Implikation

"wenn-dann" $\rightarrow$

A	B	$A \rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Negation

"nicht" $\neg$

A	$\neg A$
w	f
f	w

Disjunktion

"oder" $\vee$

A	B	$A \vee B$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Äquivalenz

'genau-dann" $\leftrightarrow$

A	B	$A \leftrightarrow B$
w	w	w
f	w	f
w	f	f
f	f	w

Für Verknüpfungen von Aussagen gibt “Rechenregeln”, die man durch eine Wahrheitstabelle nachweisen kann. Beispiel:

Satz

Es gilt: $\underbrace{(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)}_{F} = A \text{ Xor } B$ *(Xor = entweder oder)*

Beweis. durch Auswertung in einer Wahrheitstabelle:

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	F	A Xor B
w	w	$\underline{w}$	w	$\underline{f}$	f	f
w	f	w	f	w	w	w
f	w	w	f	w	w	w
f	f	f	f	w	f	f

Belegung identisch

$\Rightarrow$ Beh. ■

Aussageformeln

Wir können aus Aussagen mit Hilfe der definierten Verknüpfungen $(\vee, \wedge, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow)$ neue Aussagen bilden:

Beispiel: $(A \vee B) \;\wedge\; \neg(A \wedge B), \neg(A \leftrightarrow B), \neg(A \leftrightarrow (B \vee (\neg C)))$

Solche Verknüpfungen nennt man **Aussageformeln**. Um die Formeln lesbarer zu machen (weniger Klammern), führt man folgende **Vorrangsregeln** ein:

$\neg$ hat stärkste Bindung
$\wedge$ ist stärker als $\vee$
$\vee$ ist stärker als $\rightarrow$
$\rightarrow$ ist stärker als $\leftrightarrow$

Somit kann man die letzte Formel im obigen Bsp. auch schreiben als: $\neg(A \leftrightarrow B \vee \neg C)$
(ist nicht dasselbe wie $\neg A \leftrightarrow B \vee \neg C$)

Automatisierung von Auswertungen

Man kann Aussagen automatisiert auswerten, indem man einfach eine Wahrheitstabelle aufstellt und alle Möglichkeiten durchrechnet. Problem: je mehr Aussagevariablen man hat, umso mehr Fälle muss man überprüfen! Das kann schnell mühsam werden.

Frage: Wie viele Zeilen hat die Wahrheitstabelle für eine Aussage, die 3 Variablen verknüpft?

Beispiel:

A_1	A_2	A_3	$A_1 \wedge A_2$	
w	w	w		$\dots$
w	w	f		
w	f	w		
w	f	f		
f	w	w		
f	w	f		
f	f	w		
f	f	f		

Bei der Verknüpfung von drei Aussagen gibt es 8 mögliche Kombinationen.

Beachte: Bei n Variablen $A_1, \dots, A_n$ hat die Wahrheitstabelle 2^n Zeilen!

Definition

Zwei Aussageformeln heißen **gleichwertig**, wenn Sie für alle möglichen Belegungen der Aussagevariablen die gleichen Wahrheitswerte liefern.

Beispiel:

$B \vee \neg A$ ist gleichwertig zu $A \rightarrow B$:

A	B	$B \vee \neg A$	$A \rightarrow B$
w	w	w	w
w	f	f	f
f	w	w	w
f	f	w	w

Definition

Seien F_1 und F_2 Formeln. Dann bedeutet:

- $F_1 \Leftrightarrow F_2$: F_1 und F_2 sind gleichwertig
- $F_1 \Rightarrow F_2$: Falls F_1 wahr ist, dann gilt auch F_2

Beispiel: $(A \wedge B) \Rightarrow (A \vee B)$

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$
w	w	$\boxed{w}$	$\boxed{w}$
w	f	f	w
f	w	f	w
f	f	f	f

Bemerkung: "$\Rightarrow$", "$\Leftrightarrow$" sind keine Verknüpfungen der Aussagen (im Gegensatz zu "$\rightarrow$", "$\leftrightarrow$")

Satz (Regeln für Aussageformeln)

$$\begin{array}{rcl}
A \vee B & \Leftrightarrow & B \vee A \\
A \wedge B & \Leftrightarrow & B \wedge A \\
(A \wedge B) \wedge C & \Leftrightarrow & A \wedge (B \wedge C) \\
(A \vee B) \vee C & \Leftrightarrow & A \vee (B \vee C) \\
A \wedge (B \vee C) & \Leftrightarrow & (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \\
A \vee (B \wedge C) & \Leftrightarrow & (A \vee B) \wedge (A \vee C) \\
\neg(A \vee B) & \Leftrightarrow & \neg A \wedge \neg B \\
\neg(A \wedge B) & \Leftrightarrow & \neg A \vee \neg B \\
\neg\neg A & \Leftrightarrow & A
\end{array}$$

Regeln sind ähnlich den Regeln beim Rechnen mit Zahlen bzw. bei der Bildung von Schnittmengen bzw. der Vereinigung von Mengen.

Satz (Ersetzungssatz)

Es seien F_1, F_2 Formeln mit $F_1 \Leftrightarrow F_2$, und G_1 eine Formel, welche F_1 als Teilformel enthält. Sei G_2 die Formel, die aus G_1 durch Ersetzen von F_1 durch F_2 entsteht. Dann gilt auch
$G_1 \Leftrightarrow G_2$

Beispiel:

$$\begin{aligned} F_1 &= \neg(A \wedge B) \\ F_2 &= \neg A \vee \neg B \\ G_1 &= \neg(A \wedge B) \wedge (A \vee C) \\ G_2 &= (\neg A \vee \neg B) \wedge (A \vee C) \end{aligned}$$

Dann ist $G_1 \Leftrightarrow G_2$

Tautologie

Definition (Tautologie)

Eine Formel heißt **allgemeingültig** oder *Tautologie*, wenn sie für alle Werte der enthaltenen Aussagevariablen den Wert wahr liefert.

Bemerkung: Dies bedeutet: Eine Aussage ist eine Tautologie, wenn sie **immer** wahr ist.

Beispiel:

$$A \vee \neg A$$

$$(B \vee \neg A) \leftrightarrow (A \rightarrow B)$$

$$A \rightarrow B \vee \neg B$$

Beispiele:

- Gilt folgende Äquivalenz? $(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg(\neg A \wedge \neg B))$?

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \wedge (\neg B)$	$\neg(\neg A \wedge \neg B)$	$(A \vee B)$
w	w	f	f	f	w	w
w	f	f	w	f	w	w
f	w	w	f	f	w	w
f	f	w	w	w	f	f

Die Äquivalenz gilt.

- Ist folgende Aussage eine Tautologie? $((A \wedge B) \wedge ((\neg A) \vee (\neg B))) \rightarrow B$.
  Die Aussage (wir nennen sie C) ist eine Tautologie, wenn alle Wahrheitswerte wahr sind:

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \vee (\neg B)$	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \wedge ((\neg A) \vee (\neg B))$	C
w	w	f	f	f	w	f	w
w	f	f	w	w	f	f	w
f	w	w	f	w	f	f	w
f	f	w	w	w	f	f	w

2.1 Prädikatenlogik

Motivation

Betrachten wir wieder einfache Aussagen:

- A(25): “Morgen wird es 25 Grad warm.”
- B: “Ich ziehe ein T-Shirt an.”

Mit Aussagelogik können wir jezt formulieren: $A \to B$, also wenn es morgen 25 Grad warm wird, ziehe ich ein T-Shirt an. Aber wie schreibt man “Wenn es morgen 25 Grad warm oder wärmer wird, ziehe ich ein T-Shirt an.”?

Das geht natürlich, indem man zusätzlich (unendlich viele!) Aussagen definiert:
A(26): “Morgen wird es 26 Grad warm”, A(27): “Morgen wird es 27 Grad warm” etc. . .
und dann schreibt $(A(25) \vee A(26) \vee A(27) \vee \dots) \to B$.

Aber das ist furchtbar umständlich! Lieber würde man die Temperatur als eine Variable x lassen, und schreiben:
A(x): “Morgen wird es x Grad warm.”
Dies ist eine Funktion in x, und für jedes feste x ist dies eine Aussage. So etwas nennt man **“Aussagefunktion” oder “Prädikat.”**

Motivation

"Wenn es morgen 25 Grad warm oder wärmer wird, ziehe ich ein T-Shirt an." können wir dann schreiben als: "Wenn es ein $x \geq 25$ gibt, so dass $A(x)$ gilt (es also morgen x Grad warm wird), dann B." und wenn wir für "es existiert" noch das Zeichen $\exists$ einführen, liest sich das:

$$(\exists x \geq 25\ A(x)) \to B.$$

Wenn man mit solchen "Funktionen" von Aussagen hantiert, nennt sich das **Prädikatenlogik**.

Aber wie schreiben wir "Für alle Temperaturen <25 Grad ziehe ich kein T-Shirt an"? Hier braucht es noch ein Symbol für "für alle": dieses schreibt man als $\forall$:

$$\forall x < 25 : (A(x) \to \neg B)$$

Das Benutzen von $\exists$ oder $\forall$ nennt man **Quantifizieren**: es macht aus einer Aussagefunktion mit einer Variablen eine Aussage ohne Variable.

Beispiel: [Schaltjahrberechnung] S: "x ist ein Schaltjahr" ist nach keine Aussage, da sie von x abhängt. für spezifisches $x \in \mathbb{N}$ wird S zu einer Aussage mit Wahrheitswert wahr oder falsch.

Definition

Sätze, die erst durch Einsetzen von Werten zu Aussagen werden, nennt man **Prädikate (bzw. Aussagefunktionen)**.

Prädikate sind Abbildungen, im obigen Beispiel haben wir:

$$\begin{aligned} S : \mathbb{N} &\to \{\text{wahr, falsch}\} \\ x &\mapsto S(x) = \text{“}x \text{ ist Schaltjahr''} \end{aligned}$$

Definition

Sie M eine Menge. Ein **n-stelliges Prädikat** ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} P : M^n &\to \{w, f\} \\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) &\mapsto P(x_1, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

M heißt **Individuenbereich**.

Beispiel:

- "x ist größer als y" ist das Prädikat

$$P(x,y) = \begin{cases} w & \text{falls} \quad x > y \\ f & \text{falls} \quad x \le y \end{cases}$$

- "$y - x$ ist eine Primzahl":

$$P(x,y) = \begin{cases} w & \text{falls} \quad y - x \text{ prim} \\ f & \text{sonst} \end{cases}$$

Prädikate können wie Aussagen mit $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$ verbunden werden: $\big(S(x) \vee S(y)\big) \wedge \neg P(x, y)$ ist wieder ein 2-stelliges Prädikat. Solche Gebilde sind **Formeln der Prädikatenlogik**.

Beispiel:

$$P(x) = \begin{cases} w & \text{falls } x \text{ prim} \\ f & \text{sonst} \end{cases} \quad , \quad Q(x, y) = \begin{cases} w & x^2 > y \\ f & x^2 < y \end{cases}$$

Betrachte das Prädikat $R(x, y) = P(x) \wedge \neg Q(x, y)$. Dann gilt:

$$\begin{array}{ccccc} R(5,3) & = & \underset{w}{P(5)} & \wedge & \neg Q(5,3) \\ & & & & \underbrace{w}_{f} \quad = f \\ R(2,5) & = & \underset{w}{P(2)} & \wedge & \neg Q(2,5) \\ & & & & \underbrace{f}_{w} \quad = w \end{array}$$

Quantifizieren

Definition

In der Prädikatenlogik führen wir zwei weitere Symbole ein:

$\forall$: “für alle”: “für alle x ist $A(x)$ wahr” $= \forall x: A(x)$

$\exists$: “es gibt”: “es gibt ein x, so dass $A(x)$ wahr ist” $= \exists x: A(x)$

Das Hinschreiben von $\forall x$ bzw. $\exists x$ vor ein Prädikat nennt man **Quantifizieren**. Durch Quantifizieren wird aus einem einstelligen Prädikat $P(x)$ eine Aussage.

Beispiele

- Für $x \in \mathbb{N}$ betrachte das Prädikat $A(x) = \begin{cases} w & \text{falls } x \text{ prim} \\ f & \text{sonst} \end{cases}$
  - Die Aussage
    $$\text{“}\forall x: \ A(x)\text{”} \ = \ \text{“Jede natürliche Zahl ist prim”}$$
    ist falsch, da z.B. 4 nicht prim ist, also $A(4) = f$.
  - Die Aussage
    $$\text{“}\exists x: \ A(x)\text{”} \ = \ \text{“Es gibt eine natürliche Zahl, die eine Primzahl ist”}$$
    ist wahr, da z.B. $A(3) = w$.
- Für $x, y \in \mathbb{R}$ betrachte das Prädikat $A(x,y) = \begin{cases} w & \text{falls} \quad x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \\ f & \text{falls} \quad x^2 - 2xy + y^2 < 0 \end{cases}$

  Die Aussage
  $$\text{“}\forall \ x, y: \ A(x,y)\text{”} \ = \ \text{“Für alle reellen Zahlen } x, y \text{ ist } x^2 - 2xy + y^2 \geq 0\text{”}$$
  $$\text{ist wahr, da } x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2 \geq 0$$

Durch Quantifizieren wird aus einem einstelligen Prädikat $P(x)$ eine Aussage. Was passiert beim Quantifizieren von 2-stelligen Prädikaten?

Beispiel: Betrachten wir z.B. für $x, y \in \mathbb{R}$ das Prädikat

$$A(x,y) \ : \ x^2 > y.$$

- $\forall x : \ A(x,y)$ ist ein 1-stelligen Prädikat: "Das Quadrat jeder reellen Zahl ist größer als y".
- $\forall x : \ A(x,10)$ ist eine Aussage: "Das Quadrat jeder reellen Zahl ist größer als 10."
- $\forall x : \ A(10,y)$ ist Unsinn!
- $\exists y : [\underbrace{\forall x : \ A(x,y)}_{\text{1-stelliges Prädikat, von } y \text{ abhängig}}]$ ist eine wahre Aussage:

  "Es gibt eine reelle Zahl y so dass das Quadrat jeder reellen Zahl größer ist als y."
  Das stimmt z.B. für $y = -1$, da $x^2 > -1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Definition

In den Prädikaten $\forall x : A(x, y)$ und $\exists x : A(x, y)$heißt x **gebundene Variable**, und y **freie Variable**.

Durch Quantifizieren wird ans einem n-stelligen Prädikat ein $(n - 1)$-stelliges Prädikat. Aus einem 1-stelligen Prädikat wird eine Aussage.

Freie Variablen können quantifiziert werden, oder man kann spezifische Werte einsetzen.

Formeln der Prädikatenlogik entstehen durch Zusammensetzen von Prädikaten $(\vee, \wedge, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow)$ und durch Quantifizieren.

Verneinen von Quantoren

Was passiert, wenn man $\exists$ und $\forall$ verneint?

Beispiel:

- Die Verneinung von "Es gibt eine reelle Zahl, die nicht rational ist" lautet "Alle reelle Zahlen sind rational".
- Die Verneinung von "Alle Primzahlen sind ungerade" lautet "Es gibt eine Primzahl, die nicht ungerade ist"

Allgemein gilt:

- Die Verneinung von $\exists x: A(x)$ ist $\forall x: \neg A(x)$.
- Die Verneinung von $\forall x: A(x)$ ist $\exists x: \neg A(x)$.

Formal lässt sich die letzte Aussage folgendermaßen festhalten:

Satz

$A(x)$ sei ein Prädikat. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \neg\exists x\ A(x) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x\ \neg A(x) \\ \neg\forall x\ A(x) \quad &\Leftrightarrow \quad \exists x\ \neg A(x) \end{aligned}$$