Schaltalgebra

Wertetabelle

Wertetabelle, auch als **Wahrheitstabelle** oder **Schaltbelegungstabelle** bezeichnet

Aufbau:

n … Eingangsgrößen	m … Ausgangsgrößen
alle Kombinationen der Eingangsgrößenwerte = 2^n	für jede Ausgangsgröße y{0, 1, -}

Beispiel:

x_1	x_2	x_3	y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	-

Wertetabelle für 3 Eingangsgrößen

„-“ bedeutet dass der Wert beliebig oder nicht definiert ist. Dies ist z.B. der Fall, wenn die Eingangskombination in einem System nicht auftreten kann.

UND-Verknüpfung (AND)

Wahrheitstabelle

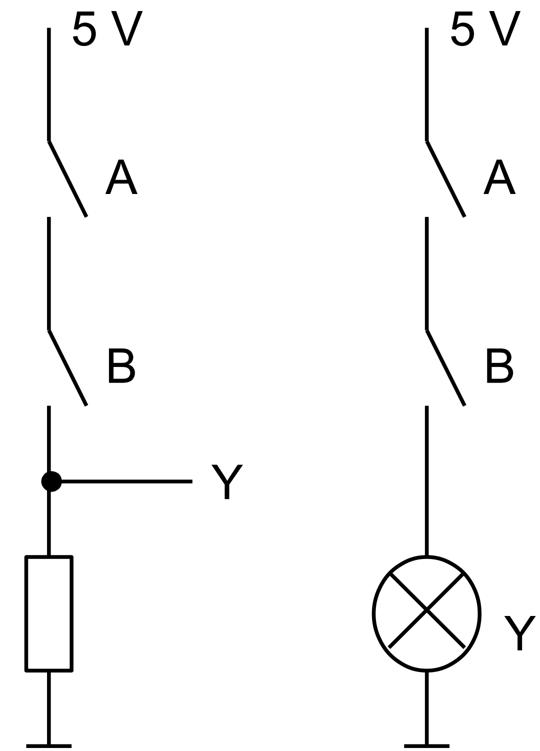
Nr.	A	B	Y
1	0	0	0
2	0	1	0
3	1	0	0
4	1	1	1

Boolesche Gleichung

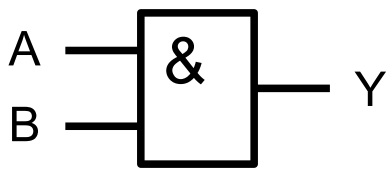
$$Y = A \wedge B$$

$\wedge$ = logische UND-Verknüpfung

Schaltung



Schaltzeichen:



Sprachlich: Wenn Semesterferien sind (A=1) **und** ich Geld habe (B=1), fahre ich nach Italien (Y=1).

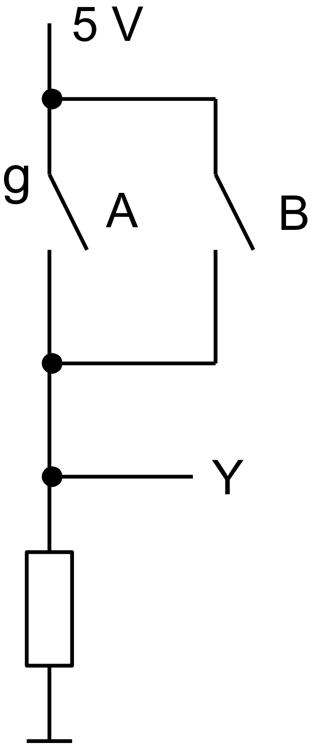
ODER-Verknüpfung (OR)

Wahrheitstabelle | Boolesche Gleichung | Schaltung

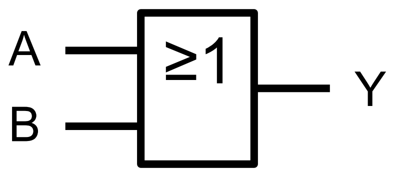
Nr.	A	B	Y
1	0	0	0
2	0	1	1
3	1	0	1
4	1	1	1

$$Y = A \vee B$$

$\vee$ = logische ODER-Verknüpfung



Schaltzeichen:



Sprachlich: Wenn Oktoberfest ist (A=1) **oder** jemand einen ausgibt (B=1), trinke ich drei Mass Bier (Y=1).

Achtung: Das sprachliche „oder“ ist nicht eindeutig für den Fall, wenn beide Bedingungen erfüllt sind.

Negation (NOT)

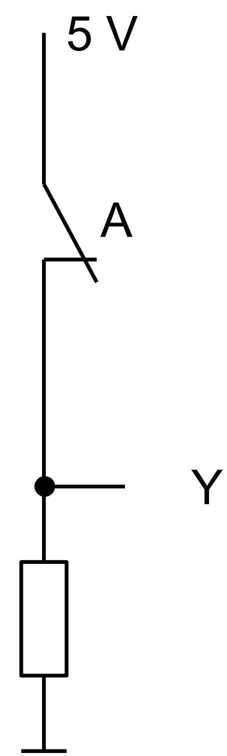
Wahrheitstabelle

Nr.	A	Y
1	0	1
2	1	0

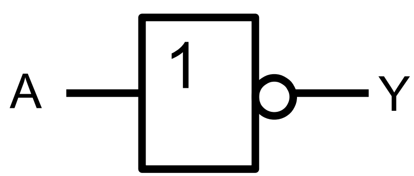
Boolesche Gleichung

$$Y = \overline{A}$$

Schaltung



Schaltzeichen:



Sprachlich: Wenn es **nicht** regnet (A=0),
fahre ich mit dem Fahrrad zur Hochschule (Y=1).

Weitere Boolesche Funktionen

Wahrheitstabelle

Nr.	A	B	G0	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8
1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	0
2	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0
3	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
4	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	1

Aufgabe: Formulieren Sie sprachlich die Funktionen.

Geben Sie die Gleichung mit AND-, OR- und NOT-Gliedern an.

Beispiel: G0 ist 1 (ist immer wahr) unabhängig von den Eingangswerten.

$G0 = 1$

NAND-Verknüpfung

Wahrheitstabelle

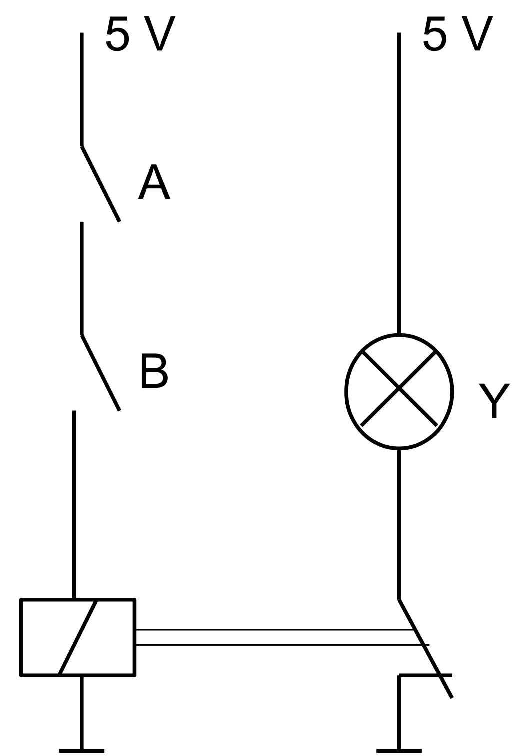
Nr.	A	B	Y
1	0	0	1
2	0	1	1
3	1	0	1
4	1	1	0

Boolesche Gleichung

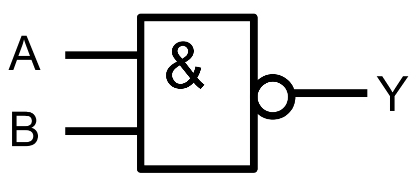
$$Y = \overline{A \wedge B}$$

$$Y = \overline{A} \vee \overline{B}$$

Schaltung



Schaltzeichen:



Sprachlich: Wenn die Wassertemperatur unter 20°C ist (A=1) **und** wenn die Lufttemperatur unter 25°C ist (B=1), gehe ich **nicht** an den See (Y=0).

Wenn die Wassertemperatur **nicht** unter 20°C ist (A=0) **oder** wenn die Lufttemperatur **nicht** unter 25°C ist (B=0), gehe ich an den See (Y=1).

NOR-Verknüpfung

Wahrheitstabelle

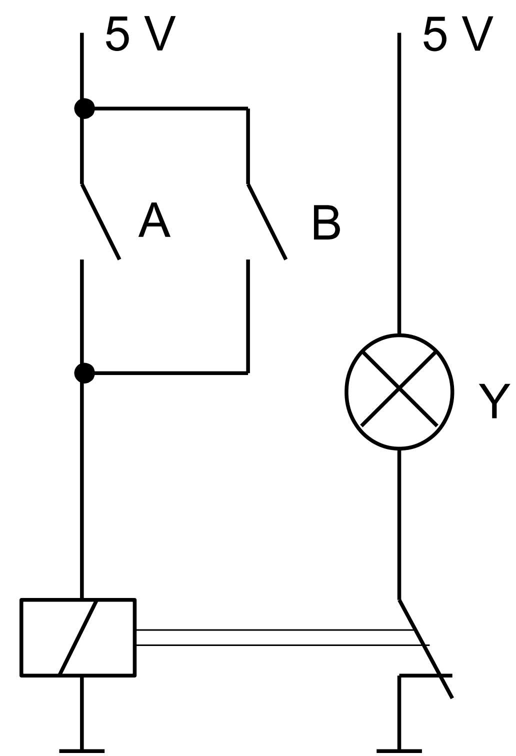
Nr.	A	B	Y
1	0	0	1
2	0	1	0
3	1	0	0
4	1	1	0

Boolesche Gleichung

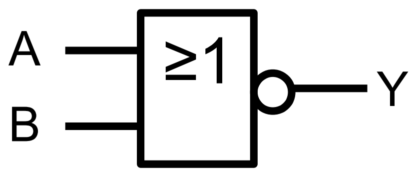
$$Y = \overline{A \vee B}$$

$$Y = \overline{A} \wedge \overline{B}$$

Schaltung



Schaltzeichen:



Sprachlich: Wenn der Tank leer ist (A=1) **oder** die Batterie entladen ist (B=1), kann ich **nicht** mit dem Auto fahren (Y=0).

Wenn der Tank **nicht** leer ist (A=0) **und** die Batterie **nicht** entladen ist (B=0), kann ich mit dem Auto fahren (Y=1).

Äquivalenz

Wahrheitstabelle

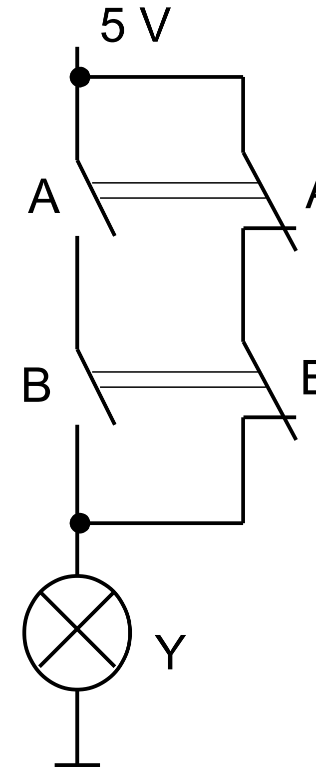
Nr.	A	B	Y
1	0	0	1
2	0	1	0
3	1	0	0
4	1	1	1

Boolesche Gleichung

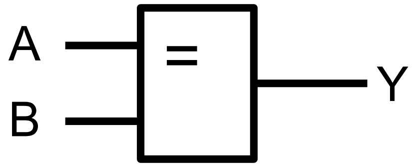
$$Y = (A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B})$$

$$Y = A \leftrightarrow B$$

Schaltung



Schaltzeichen:



Sprachlich:

Antivalenz (XOR, Exklusiv-ODER)

Wahrheitstabelle

Nr.	A	B	Y
1	0	0	0
2	0	1	1
3	1	0	1
4	1	1	0

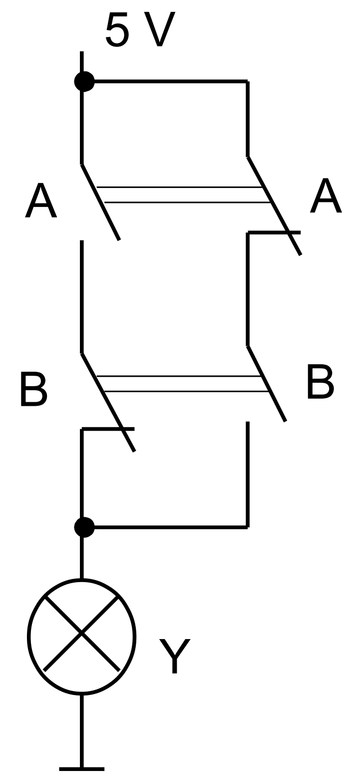
Boolesche Gleichung

$$Y = (\overline{A} \wedge B) \vee (A \wedge \overline{B})$$

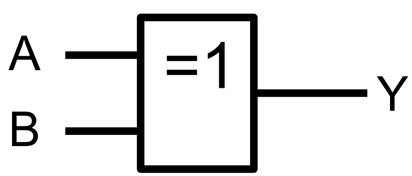
$$Y = A \oplus B$$

$$Y = A \nleftrightarrow B$$

Schaltung



Schaltzeichen:



Sprachlich:

Logischer Ring

Ein logischer Ring ist eine Menge von Booleschen Funktionen, mit denen alle möglichen logischen Verknüpfungen dargestellt werden können.

Logische Ringe sind:

- UND, ODER, NICHT
- NAND
- NOR
- ÄQUIVALENZ, ANTIVALENZ

Dass heißt, dass sich beispielsweise ausschließlich mit NAND-Gliedern alle logischen Funktionen darstellen lassen, also ohne Verwendung zusätzlicher UND- und/oder ODER-Glieder.

Wertetabelle

Auslesen einer Booleschen Gleichung aus der Wertetabelle basierend auf „1-Zeilen“

Beispiel:

x_2	x_1	y
0	0	0
0	**1**	**1**
1	**0**	**1**
1	1	0

Gleichung:

$$y = (\overline{x_2} \wedge x_1) \vee (x_2 \wedge \overline{x_1})$$

$$y = \overline{x_2}\, x_1 \vee x_2\, \overline{x_1}$$

Regeln:

- jede Zeile, in der y = 1 ist, liefert einen Term
- alle Eingangsvariablen werden pro Zeile miteinander UND-verknüpft
- die Terme jeder Zeile werden miteinander ODER-verknüpft

Wertetabelle

Auslesen einer Booleschen Gleichung aus der Wertetabelle basierend auf „0-Zeilen“

Beispiel:

x_2	x_1	y
0	**0**	**0**
0	1	1
1	0	1
1	**1**	**0**

Gleichung:

$$y=(x_1 \vee x_2) \wedge (\overline{x_2} \vee \overline{x_1})$$

Regeln:

- jede Zeile, in der y = 0 ist, liefert einen Term
- alle Eingangsvariablen werden pro Zeile miteinander ODER-verknüpft
- die Terme jeder Zeile werden miteinander UND-verknüpft
- steht bei der Eingangsvariablen eine 0, wird die unnegierte Variable aufgeschrieben, steht eine 1, wird die negierte Variable aufgeschrieben

Wertetabelle

Auslesen einer Booleschen Gleichung aus der Wertetabelle basierend auf „0-Zeilen“

Beispiel:

x_2	x_1	y
0	**0**	**0**
0	**1**	**0**
1	**0**	**0**
1	1	1

Gleichung:

$$y=(x_2 \vee x_1) \wedge (x_2 \vee \overline{x_1}) \wedge (\overline{x_2} \vee x_1)$$

Wenn man vereinfach, ergibt sich:

$$y=(x_2 \wedge (x_1 \vee \overline{x_1})) \wedge ((x_2 \vee \overline{x_2}) \wedge x_1)$$

$$y=x_2 \wedge x_1$$

Hinweis:

Es gibt Wertetabellen, bei denen das Auslesen der „1-Zeilen“ schneller zu einer minimalen Gleichung führt, aber es gibt auch Wertetabellen, bei denen das Auslesen der „0-Zeilen“ schneller zum Ziel führt.

Grundsätzlich ist es egal, ob Sie die „1-Zeilen“ oder die „0-Zeilen“ auslesen. Sie müssen in beiden Fällen zum gleichen Ergebnis gelangen (Ausnahme: Wertetabellen mit don't-care Zeilen).

Rechenregeln

Grundgesetze

$$0 \wedge 0 =$$
$$0 \vee 0 =$$

$$0 \wedge 1 =$$
$$0 \vee 1 =$$

$$1 \wedge 0 =$$
$$1 \vee 0 =$$

$$1 \wedge 1 =$$
$$1 \vee 1 =$$

Rechenregeln

Wertemenge M	{0, 1}
Menge von Operatoren	$\{\vee, \wedge, \overline{}\}$ = {ODER, UND, NICHT}
Variable	$\{x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots, a, b, c\}$ belegt mit Werten aus M

Axiome (Postulate)

Neutralelement:	$a \vee 0 = a$	$a \wedge 1 = a$
Komplement:	$a \vee \bar{a} = 1$	$a \wedge \bar{a} = 0$
Kommutativgesetz:	$a \vee b = b \vee a$	$a \wedge b = b \wedge a$
Distributivgesetz:	$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$	$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

Rechenregeln

Theoreme (aus Axiomen abgeleitete Regeln)

Idempotenz

Eigenschaften für „0“ und „1“

Absortionsgesetz

Assoziativitätgesetz

Identität

Expansionsgesetz

NAND

Wahrheitstabelle

Nr.	A	B	Y
1	0	0	1
2	0	1	1
3	1	0	1
4	1	1	0

Boolesche Gleichung

$$Y = \overline{A \wedge B}$$

$$Y = \overline{A} \vee \overline{B}$$

Sprachlich

Wenn die Wassertemperatur unter 20°C ist (A=1) **und** wenn die Lufttemperatur unter 25°C ist (B=1), gehe ich **nicht** an den See (Y=0).

Wenn die Wassertemperatur **nicht** unter 20°C ist (A=0) **oder** wenn die Lufttemperatur **nicht** unter 25°C ist (B=0), gehe ich an den See (Y=1).

Frage: Gilt $\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$?

NOR

Wahrheitstabelle

Nr.	A	B	Y
1	0	0	1
2	0	1	0
3	1	0	0
4	1	1	0

Boolesche Gleichung

$$Y = \overline{A \vee B}$$

$$Y = \overline{A} \wedge \overline{B}$$

Sprachlich

Wenn der Tank leer ist (A=1) **oder** die Batterie entladen ist (B=1), kann ich **nicht** mit dem Auto fahren (Y=0).

Wenn der Tank **nicht** leer ist (A=0) **und** die Batterie **nicht** entladen ist (B=0), kann ich mit dem Auto fahren (Y=1).

Frage: Gilt $\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$?

De Morgansche Gesetze

Erstes De Morgansches Gesetz: $\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$

Nachweis mittels Wertetabelle:

Fall	A	B	$A \wedge B$	$\overline{A \wedge B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \vee \overline{B}$
1	0	0					
2	0	1					
3	1	0					
4	1	1					

Zweites De Morgansches Gesetz: $\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$

Nachweis mittels Wertetabelle:

Fall	A	B	$A \vee B$	$\overline{A \vee B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \wedge \overline{B}$
1	0	0					
2	0	1					
3	1	0					
4	1	1					

Satz von Shannon

Die Negation einer Booleschen Funktion erhält man, indem man ersetzt:

negierte Variable	durch	nicht negierte variable
nicht negierte Variable	durch	negierte Variable
0	durch	1
1	durch	0
UND $(\wedge)$	durch	ODER $(\vee)$
ODER $(\vee)$	durch	UND $(\wedge)$
Äquivalenz $(\leftrightarrow)$	durch	Antivalenz $(\nleftrightarrow)$
Antivalenz $(\nleftrightarrow)$	durch	Äquivalenz $(\leftrightarrow)$

Normalformen

Vollkonjunktion:

ist eine UND-Verknüpfung, in der alle vorhandenen Variablen einmal vorkommen, entweder negiert oder nicht negiert.

Volldisjunktion:

ist eine ODER-Verknüpfung, in der alle vorhandenen Variablen einmal vorkommen, entweder negiert oder nicht negiert.

Disjunktive Normalform, ODER-Normalform:

besteht aus mehreren Vollkonjunktionen, die durch ODER verknüpft sind.
Sie kann auch aus einer einzigen Vollkonjunktion bestehen.

Konjunktive Normalform, UND-Normalform:

besteht aus mehreren Volldisjunktionen, die durch UND verknüpft sind.
Sie kann auch aus einer einzigen Volldisjunktion bestehen.

Kontrollfragen

1. Stellen Sie die genormten Schaltzeichen für die Glieder UND, ODER, NICHT, NAND und NOR dar. Alle Glieder bis auf das NICHT-Glied sollen zwei Eingänge haben.
2. Gesucht ist die Wahrheitstabelle eines ODER-Gliedes (UND-Gliedes) mit drei Eingängen. Die Eingänge haben die Bezeichnung A, B, C, der Ausgang die Bezeichnung Y.
3. Ein NAND-Glied mit drei (vier) Eingängen soll aus UND-Gliedern mit zwei Eingängen und NICHT-Gliedern mit einem Eingang aufgebaut werden. Geben Sie eine mögliche Zusammenschaltung an.
4. Für ein ANTIVALENZ-Glied wird die Gleichung $Z=(A \wedge \overline{B}) \vee (\overline{A} \wedge B)$ angegeben. Es soll aus Gliedern UND, ODER und NICHT gemäß der Gleichung aufgebaut werden. Geben Sie die Schaltung an.
5. Was versteht man unter einem EXKLUSIV-ODER-Glied? Geben Sie für dieses Glied die Wahrheitstabelle an.

Übungsaufgaben

1. Vereinfachen Sie:

$$y_1 = x_1 \overline{x_2} x_3 \overline{x_4} \vee x_1 x_2 x_3 x_4 \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_4$$
$$y_2 = \overline{x_1} x_3 \overline{x_4} \vee x_1 x_2 x_3 \vee x_2 \overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_2}$$
$$y_3 = x_1 x_2 \overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2} x_3 \overline{x_4} \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} x_4 \vee$$
$$x_1 x_2 \overline{x_3} x_4 \vee x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_3} x_4 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} x_4 \vee \overline{x_1} x_2 x_3 \overline{x_4}$$
$$y_4 = (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_4}) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2})$$
$$y_5 = (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4) \wedge (\overline{x_3} \vee x_4) \wedge (x_2 \vee x_3)$$

2. Welche der Gleichungen liegt in der disjunktiven Normalform vor?
3. Erweitern Sie Gleichung 1, sodass sie in der disjunktiven Normalform vorliegt.
4. Erweitern Sie Gleichung 4, sodass sie in der konjunktiven Normalform vorliegt.
5. Erstellen Sie die Wertetabellen aus den Gleichungen.

Übungsaufgaben

1. Vereinfachen Sie mit Hilfe der Booleschen Algebra.

$$y_1=(x_1\vee 1)\wedge(x_3\vee 0)$$
$$y_2=(x_1\wedge 1)\vee(x_2\wedge 0)$$
$$y_3=\overline{x_1}\,x_2\,\overline{x_3}\vee\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\vee\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\vee\overline{x_1}\,x_2\,x_3$$
$$y_4=(x_1\,\overline{x_2}\vee\overline{x_1}\,x_3)\wedge(x_2\,\overline{x_3}\vee\overline{x_1}\,x_2)$$
$$y_5=\overline{x_1}(x_2\,\overline{x_3}\vee\overline{x_2}\,x_3)\vee x_1(x_2\,\overline{x_3}\vee x_2\,x_3)$$
$$y_6=(x_1\,x_2\vee\overline{x_1}\,x_3)\,x_1\,x_2\,\overline{x_3}\vee x_1\,x_3$$
$$y_7=\overline{(x_1\vee\overline{x_2}\,x_3)}\wedge\overline{(\overline{x_1}\,x_2\vee\overline{x_2}\,x_3)}$$
$$y_8=x_1\,x_2\vee x_1\,x_3\vee x_1\,x_4$$
$$y_9=x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\vee\overline{x_1}\,x_2\,\overline{x_3}\vee\overline{x_1}\,x_2\,x_3\vee x_1\,\overline{x_2}\,x_3$$
$$y_{10}=\overline{x_1}\,\overline{x_2}\vee\overline{x_1}\,x_2\,x_3\vee x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_4}\vee x_1\,\overline{x_2}\,x_3\,\overline{x_4}$$
$$y_{11}=\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\vee x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\vee\overline{x_1}\,x_2\,x_3\vee x_1\,x_2\,x_3$$
$$y_{12}=\bar{a}\,b\,\bar{c}\vee a\,\bar{c}\,d\vee\bar{a}\,c\,d\vee a\,b\,c\vee b\,d$$

$$y_{13}=(x_1\wedge 1)\vee(x_1\wedge 0)$$
$$y_{14}=(\bar{a}\wedge b)\vee(a\wedge b)$$
$$y_{15}=x_1\vee\overline{x_2}\,x_1$$
$$y_{15}=(x_2\vee\overline{x_3})\wedge x_3$$
$$y_{17}=e_1\,e_2\,\overline{e_3}\vee e_1\,e_3\vee e_2\,e_3$$
$$y_{18}=(s_2\wedge 0)\vee(s_3\wedge s_4)$$