Mathematik I

Vorlesung 1 - Mengen und Abbildungen

Prof. Dr. Sandra Eisenreich

12./16. Oktober 2023

Hochschule Landshut

1.1 Mengen

Motivation

Sie werden in der Informatik unter anderem zu tun haben mit...

- einem Haufen an Daten,
- Zahlenbereiche, über die Schleifen iterieren (wenn Sie dem Programm sagen, dass es z.B. für $i = 1, \dots, 20$ oder alle natürlichen Zahlen $i = 1, 2, 3, \dots$ irgendwas machen soll),
- einer Menge an Inputs und Outputs,
- Zwischenergebnissen,
- ...

Was haben all diese Dinge gemein? - Es sind Mengen.

Definition und Notationen

Definition

Eine **Menge** ist eine beliebige Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen (Georg Cantor, 1845 - 1918).

Beispiel: Die Menge aller natürlichen Zahlen $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$.

Notation: Seien M, N zwei Mengen, x ein Objekt. Dann schreibt man

1. $x \in M$: x ist ein Element von M.
2. $x \notin M$: x ist kein Element von M.
3. $M = N$: M, N haben die gleichen Elemente.
4. $M \neq N$: Es gibt Elemente in einer Menge, die in der anderen Menge nicht enthalten sind.

Beschreibung von Mengen

Man beschreibt Mengen, indem man entweder

1. alle Elemente in der Menge $\{\dots\}$ auflistet, z.B.: $\{1, 2, 4, 8\} = \{8, 2, 1, 4\}$ oder $\{\text{Apfel}, \text{Birne}, \{\text{Banane}\}\}$,
2. oder die Elemente über eine charakteristische Eigenschaft beschreibt, z.B.:

$$\mathbb{Z} := \{x \mid x \text{ ist eine ganze Zahl}\} = \{0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \dots\}$$

   Hier bedeutet

   - " := ": "ist definiert als", also: das Symbol $\mathbb{Z}$ ist definiert als die Menge aller ganzen Zahlen
   - $x|$: "x mit folgender Eigenschaft", also alle x mit der Eigenschaft, dass x eine ganze Zahl ist.

Wichtige Mengen

1. $\mathbb{Z} := \{x \mid x \text{ ist eine ganze Zahl}\}$.
2. $\mathbb{N} := \{x \mid x \text{ ist eine natürliche Zahl}\} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$
3. $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$
4. $\mathbb{Q} := \{x \mid x \text{ ist rational}\} = \{x | x = \frac{p}{q}$, wobei $p, q \in /Zundq \neq 0\}$ (die Menge der Brüche)
5. $\mathbb{R} := \{x \mid x \text{ ist reell}\}$ (enthält neben allen Brüchen auch irrationale Zahlen wie z.B. die Kreiszahl π)
6. $\varnothing := \{\}$ die sogenannte "leere Menge" ist die Menge, die kein Element enthält.
7. die Menge der Zahlen, die nur durch sich selbst teilbar sind oder 1 (Primzahlen und 1) $P := \{x \in \mathbb{N} \mid \text{Falls } x = p \cdot q \text{ mit } p, q \in \mathbb{N}, \text{ dann gilt } p = 1 \text{ oder} q = 1\} = \{x \mid x \text{ ist Primzahl oder } x = 1\}$ (z.B. $5 \in P$, allerdings $6 \notin P$).

Bemerkung: Achtung! Man kann auch Mengen von Mengen bilden, z.B.: $M := \{3, \mathbb{N}\}$.
Frage: Ist $5 \in M$? Antwort: Nein! $5 \neq 3$ und $5 \neq \mathbb{N}$.

Beziehungen zwischen Mengen

Definition

Seien M, N zwei Mengen. Dann heißt M **Teilmenge** von N, geschrieben als

$$M \subset N,$$

wenn jedes Element von M auch ein Element von N ist.

Beispiel:

- $\{2\} \subset \mathbb{N}$, da $2 \in \mathbb{N}$
- $\{2, \sqrt{2}\} \not\subset \mathbb{N}$, da $2 \in \mathbb{N}$, aber $\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$
- $\{\text{Banane}, \{\text{Apfel}\}\} \not\subset \{\text{Banane, Apfel, Orange}\}$
- $\varnothing \subset \{1, 2\}$. Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge M! Beweis: Die Aussage ist wahr, wenn jedes Element $x \in \varnothing$ auch in M enthalten ist. Es gibt aber kein Element $x \in \varnothing$, daher ist diese Aussage trivialerweise wahr.

Definition

Sei M eine Menge. Dann heißt die Menge aller Teilmengen von M die **Potenzmenge** von M. Bezeichnung: $P(M)$, (manchmal auch 2^M).

Beispiel:

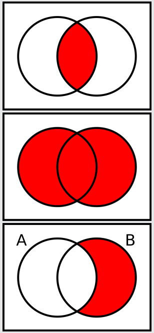
- $M = \{0, 1, 2\} \Rightarrow P(M) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$
- $M = \{1, \{2, 3\}\} \Rightarrow P(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{\{2, 3\}\}, M\}$
- $M = \{\text{Apfel}, 1, \emptyset\} \Rightarrow P(M) = \{\emptyset, \{\text{Apfel}\}, \{1\}, \{\emptyset\}, \{\text{Apfel}, 1\}, \{\text{Apfel}, \emptyset\}, \{1, \emptyset\}, M\}$
- $M = \{2, 4, 6, 8\} \Rightarrow P(M) = \{\emptyset, \{2\}, \{4\}, \{6\}, \{8\}, \{2, 4\}, \{2, 6\}, \{2, 8\}, \{4, 6\}, \{4, 8\}, \{6, 8\}, \{4, 6, 8\}, \{2, 6, 8\}, \{2, 4, 8\}, \{2, 4, 6\}, M\}$

Mengenoperationen

Definition

Seien M, N zwei Mengen. Dann heißt

1. $M \cap N := \{x \mid x \in M \text{ und } x \in N\}$ der **Durchschnitt** von M und N.
2. $M \cup N := \{x \mid x \in M \text{ oder } x \in N\}$ die **Vereinigung** von M und N.
3. $M \backslash N := \{x \mid x \in M \text{ und } x \notin N\}$ das **relative Komplement von** N **in** M oder einfach "M ohne N".
   Sonderfall: Falls $N \subset M$, heißt $M \backslash N$ das **Komplement** von N in M, und wird geschrieben als $\bar{N}^M$. Arbeitet man mit einer festen Grundmenge M (also wenn klar ist, was M ist), dann schreibt man auch einfach $\bar{N}$



Beispiel: Sei $M = \{1, 2, \{1, 2\}\}, N = \{2, 3\}$

- $M \cap N = \{2\}$
- $M \cup N = \{1, 2, \{1, 2\}, 3\}$
- $M \backslash N = \{1, \{1, 2\}\}$

Rechenregeln für Mengenoperationen

Satz

Seien M, N, S Mengen. Dann gilt:

- *Kommutativgesetz:*
$$\begin{aligned} M \cup N &= N \cup M, \\ M \cap N &= N \cap M \end{aligned}$$
- *Assoziativgesetz:*
$$\begin{aligned} (M \cup N) \cup S &= M \cup (N \cup S), \\ (M \cap N) \cap S &= M \cap (N \cap S) \end{aligned}$$
- *Distributivgesetz:*
$$\begin{aligned} M \cap (N \cup S) &= (M \cap N) \cup (M \cap S), \\ M \cup (N \cap S) &= (M \cup N) \cap (M \cup S) \end{aligned}$$
- *leere Menge:* $M \cup \varnothing = M$, $M \cap \varnothing = \varnothing$, $M \backslash \varnothing = M$

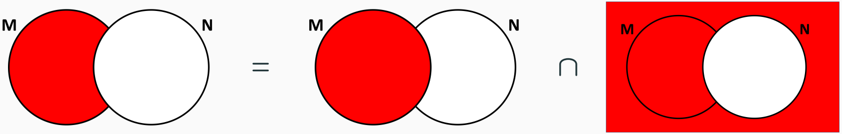
Rechenregeln für Komplementbildung

Lemma

Sei G eine feste Grundmenge und $M, N \subset G$. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
M \setminus N &= M \cap \bar{N} \\
\overline{M \cup N} &= \bar{M} \cap \bar{N} \\
\overline{M \cap N} &= \bar{M} \cup \bar{N} \\
\bar{\bar{M}} &= M
\end{aligned}
$$

Bildlicher Beweis der ersten Behauptung $M \setminus N = M \cap \bar{N}$:



$$M \setminus N \quad = \quad M \quad \cap \quad \bar{N}$$

(Un)endliche Schnitte und Vereinigungen

Bemerkung: Seien A, B, C Mengen. Dann gilt (Assoziativgesetz):

$$\begin{aligned}(A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C) \\ (A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C)\end{aligned}$$

Man kann somit die Klammern auch weglassen und definiert

$$\begin{aligned}A \cup B \cup C &:= (A \cup B) \cup C \\ A \cap B \cap C &:= (A \cap B) \cap C\end{aligned}$$

Diese Definition setzt sich analog fort auf eine beliebige endliche Anzahl von Mengen.

Frage: Aber was passiert bei unendlich vielen Mengen?

Definition

Sei M eine beliebige Menge von Indizes (z.B. $M = \mathbb{N}$) und für alle $n \in \mathbb{N}$ sei eine Menge A_n gegeben. Dann definieren wir:

$$\begin{aligned}
\bigcap_{n \in M} A_n &:= \{x \mid x \in A_n \text{ für alle } n \in M\} \\
\bigcup_{n \in M} A_n &:= \{x \mid x \in A_n \text{ für mindestens ein } n \in M\}
\end{aligned}$$

Beispiel:

$$\left.\begin{aligned}
A_1 &:= \left]0, 1\right[\\
A_2 &:= \left]0, \tfrac{1}{2}\right[\\
&\dots \\
A_n &:= \left]0, \tfrac{1}{n}\right[
\end{aligned}\right\} \quad \text{Dann gilt:} \qquad
\begin{aligned}
\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n &= A_1 = (0, 1) \\
\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n &= \varnothing
\end{aligned}$$

Bemerkung: Wäre $A_n := [0, \frac{1}{n}]$, dann gilt $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{0\}$.

Wir beweisen hier exemplarisch die Aussage

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$$

Hierbei führen wir einen sogenannten **Widerspruchsbeweis**:
Wir nehmen an, die Aussage, die wir zeigen wollen, ist falsch. Von dieser Annahme leiten wir einen Widerspruch ab, weswegen die Annahme nicht falsch gewesen sein kann.

Beweis. Angenommen, die Aussage wäre falsch, also dass gilt: $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$. Dann gäbe es ein $x \in \left]0, 1\right[$ mit $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Da $x > 0$ ist, können wir $\frac{1}{x}$ berechnen. Sei $n \in \mathbb{N}$ eine Zahl, die größer ist als $\frac{1}{x}$. Dann gilt $\frac{1}{n} < x$, also enthält $A_n = \left]0, \frac{1}{n}\right[$ auch nicht den Punkt x. Daraus folgt: $x \notin \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$, was ein Widerspruch ist zur Annahme. Das beweist die Behauptung. ■

Das kartesische Produkt

Definition

1. Seien M, N Mengen. Wir definieren wir das **kartesische Produkt** von M und N als:

$$M \times N := \{(x, y) \mid x \in M \text{ und } y \in N\}.$$

   Es kommt hier auf die Reihenfolge an, z.B. ist $((2, 5) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N})$ verschieden von $(5, 2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ wie bei Vektoren.

2. für n viele (mehr als zwei) Mengen $M_1, \ldots, M_n$ definieren wir ihr kartesisches Produkt als

$$M_1 \times M_2 \times \ldots M_n \quad := \quad \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in M_i \text{ für alle } i = 1, \ldots, n\}$$

   Falls alle $M_i = M$ gleich sind, dann schreiben wir

$$\underbrace{M \times \ldots \times M}_{\text{n-mal}} \quad =: \quad M^n$$

Beispiel:

1. $M = \{\text{Studenten in der Mathe 1 Vorlesung}\}$, $N = \{1, 2, \dots, 5\}$ ist die Menge der möglichen Klausurnoten. Dann ist die Menge aller möglichen Klausurergebnisse gegeben durch:

$$\begin{aligned} M \times N \quad = \quad & \{(\text{Kurt}, 1), (\text{Kurt}, 2), (\text{Kurt}, 3), \dots \\ & \ (\text{Berta}, 1), (\text{Berta}, 2), \dots \\ & \vdots \\ & \dots\} \end{aligned}$$

   Das Ergebnis der Klausur ist dann eine Teilmenge

$$\{(\text{Kurt}, 2), (\text{Berta}, 3), \dots\} \subset M \times N.$$

2. $M = N = \mathbb{R}$, dann ist $M \times N = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$
3. $M \times \varnothing = \varnothing$

1.2 Relationen

Motivation

Unser Alltag ist voller Dinge, die Beziehungen zueinander haben. Zum Beispiel dass manche Kräuter nebeneinander auf der Fensterbank gezüchtet werden können (= eine Beziehung zwischen diesen Kräutern) - andere nicht (z.B. Basilikum und Minze).

Beispiele von Relationen:

- "x ist Follower von y auf Instagram" = Relation von x und y
- "Website x hat einen Link auf Website y" ebenso,
- "x hatte Kontakt mit y" (Corona-Warnapp)

Für besonders schöne Relationen kann man Mengen unterteilen in sogenannte **Äquivalenzklassen**, also in disjunkte Gruppen von "ähnlichen" Elementen, was für viele Dinge essentiell ist.

Viele große Internetkonzerne gründen ihren Erfolg auf der algorithmischen Auswertung von solchen Relationen. (wichtiges Anwendungsbeispiel von **Big Data**)

Anwendungen in der Informatik

- **Graphen**: Immer wenn man Informationen oder Daten in eine Baumstruktur oder Graphenstruktur packt, macht man nichts anderes, als Relationen zwischen diesen optisch darzustellen.
- **Partitionsalgorithmen**: Wenn man eine Menge von etwas hat, die man irgendwie schlau aufteilen will (partitionieren), geschieht dies oft über Relationen und die Unterteilung in Äquivalenzklassen.
- **theoretische Informatik:** häufig.
- **Verschlüsselungsverfahren**
- uvm...

Relationen

Eine Relation ist eine Beziehung zwischen den Elementen von Mengen.

Definition

Seien M, N Mengen. Dann heißt eine Teilmenge $R \subset M \times N$ **Relation auf** $M \times N$. Wenn $M = N$ ist, dann sagen wir, R ist eine **Relation auf** M.

Eine Relation ist also dann gegeben, wenn Elemente von M und N in irgendeiner Beziehung zueinander stehen.

Beispiel:

1. M = Menge der Studenten, $R = \{(x, y) \in M^2 \mid x \text{ ist mit } y \text{ befreundet}\} \subset M \times M = M^2$
2. $\mathbb{R}_{\leq} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\} \subset \mathbb{R}^2$

Notation: Ist $(x, y) \in R \subset M \times N$, dann schreibt man oft xRy, und sagt "x steht in einer Beziehung zu y".

Beispiel:

1. Alle Beziehungen zwischen Zahlen, die Sie aus der Schule kennen (also $<, \leq, =, \neq, >, \geq$) sind Relationen, z.B.:

$$x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad (x, y) \in \mathbb{R}_{\leq}$$

2. $\mathbb{R}_{\geq} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq y\}$
3. $M = \{\text{Menge der Studenten in der Vorlesung}\}$
   $R := \{(x, y) \in M^2 \mid x \text{ und } y \text{ sind gleich groß}\}$
4. $M = N = P(\mathbb{R})$ die Potenzmenge der reellen Zahlen, also die Menge der Teilmengen von $\mathbb{R}$. $R := \{(A, B) \in P(\mathbb{R})^2 \mid A \subset B\}$. Somit ist "$\subset$" eine Relation.

Äquivalenzrelationen

Definition

Sei R eine Relation auf M. Dann heißt R

- **reflexiv**, wenn immer xRx gilt, das heißt $(x,x) \in R \subset M$.
- **symmetrisch**, wenn aus xRy auch yRx folgt.
- **transitiv**, wenn aus xRy und yRz auch xRz folgt.

Eine Relation, welche reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, heißt **Äquivalenzrelation**.

Diese Relationen sind enorm wichtig (siehe Anwendungen in der Informatik).

Beispiele

- “gleiche Körpergröße” erfüllt alle drei Bedingungen, ist also eine Äquivalenzrelation.
- “Freundschaft” verletzt in der Regel die Transitivität, ist also keine Äquivalenzrelation.
- Wir betrachten die Menge M aller Kleidungsstücke in unserem Schrank und definieren darauf die Relation

  $$R = \{(x, y) \in M^2 | x \text{ wird vor oder gleichzeitig mit } y \text{ angezogen}\}$$

  z.B.: Unterhose R Hose (btw. (Unterhose, Hose)$\in R$). Diese Relation ist reflexiv, nicht symmetrisch, aber transitiv. Keine Äquivalenzrelation.
- Wir betrachten die Menge M der Studenten in Mathematik I und definieren die Relation x mag y, also:

  $$R = \{(x, y) \in M^2 | x \text{ mag } y\}$$

  R ist (das hoffe ich sehr) reflexiv, nicht notwendigerweise symmetrisch, und nicht transitiv. Keine Äquivalenzrelation.

- “$<$” ist keine Äquivalenzrelation, denn sie ist:
  - nicht reflexiv ($x < x$ ist falsch),
  - nicht symmetrisch (für zwei beliebige x, y gilt entweder $x < y$, $x = y$ oder $x > y$. Wenn z.B. $x < y$ gilt, dann gilt nicht $y < x$),
  - aber sie ist transitiv. (aus $x < y$ und $y < z$ folgt auch $x < z$).
- “$\leq$” ist reflexiv (da $x \leq x$), nicht symmetrisch, aber transitiv
- “$\neq$” ist nicht reflexiv (da $x = x$), symmetrisch (aus $x \neq y$ folgt auch $y \neq x$), nicht transitiv (z.B. $2 \neq 3$ und $3 \neq 2$, aber es gilt nicht $2 \neq 2$)

Eine der wichtigsten Äquivalenzrelationen (u.a. für Verschlüsselungsverfahren, Algorithmik, etc) ist die folgende:

Definition

Eine wichtige Relation auf $\mathbb{Z}$ ist gleicher Rest bei Division durch eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ und wird wie folgt notiert:

$$R_n := \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x \text{ und } y \text{ lassen den gleichen Rest bei Division durch } n\}$$

Bemerkung: Wie berechnet man den Rest bei negativen Zahlen?

z.B.: $-13 = -3 \cdot 5 + 2$.

Allgemein: Man berechnet den Rest einer Zahl $z \in \mathbb{Z}$ bei Division durch $n \in \mathbb{N}$, indem man sie in folgender Form schreibt:

$$z = q \cdot n + r, \text{ wobei } q \in \mathbb{Z} \text{ und } r \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$$

das heißt der Rest ist immer positiv und zwischen 0 und n.

Beispiel: $R_5 = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x$ und y lassen den gleichen Rest bei Division durch $5\}$.

1. es gilt:

$$
\begin{aligned}
13:5 &= 2 \text{ Rest } 3 \\
28:5 &= 5 \text{ Rest } 3 \Rightarrow (13,28) \in R_5 \\
24:5 &= 4 \text{ Rest } 4 \Rightarrow (13,24) \notin R_5
\end{aligned}
$$

2. $23R_5 13, 2R_5 - 8, 23R_5 3, \ldots$

$$
\begin{aligned}
&\text{Rest } 0: 0, 5, -5, 10, -10, \ldots \\
&\text{Rest } 1: 1, 6, -4, 11, -9, \ldots \\
&\text{Rest } 2: 2, 7, 12, -3, -8, \ldots \\
&\text{Rest } 3: 3, 8, -2, -7, 13, \ldots \\
&\text{Rest } 4: 4, -1, -6, 9, \ldots
\end{aligned}
$$

Lemma

R_n ist eine Äquivalenzrelation. (z.B. $n = 5$)

Beweis.

- Reflexivität: Offensichtlich gilt zR_nz für alle $z \in \mathbb{Z}$.
- Symmetrie: xR_nz bedeutet: x und z haben denselben Rest beim Teilen durch n, deswegen gilt offensichtlich auch z und x haben denselben Rest beim Teilen durch n, also gilt auch zR_nx. (für alle $x, z \in \mathbb{Z}$).
- Transitivität: xR_ny und $yR_nz \Rightarrow xR_nz$ ist trivial: wenn x denselben Rest hat wie y und z denselben Rest wie y, hat x denselben Rest wie z.

∎

Definition

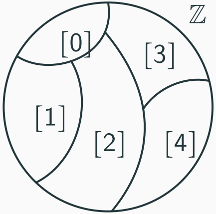
Sei R eine Äquivalenzrelation auf M. Dann heißt

$$\overline{a} := \{x \in M \mid xRa\}$$

Äquivalenzklasse von a.

Beispiel: Im obigen Beispiel gibt es genau 5 verschiedene Äquivalenzklassen, nämlich $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}$.

Beachte: $\overline{-3} = \overline{2}$, $\overline{1} = \overline{6} = \overline{11} = \overline{-4}$



Satz

Ist R eine Äquivalenzrelation auf M. Dann sind verschiedene Äquivalenzklassen disjunkt (d.h. sie haben Durchschnitt $=\varnothing$) und die Vereinigung ist M.

Ordnungsrelationen

Zahlen in $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$ lassen sich durch $(\leq)$ anordnen. Man verallgemeinert dieses Prinzip:

Definition

Sei R eine Relation auf M, welche folgende Eigenschaften besitzt:

- R ist transitiv
- R ist reflexiv
- xRy und yRx impliziert, dass $x = y$

Dann heißt R eine **partielle Ordnung**. (häufig schreibt man $\leq$ für R)

R heißt **vollständige Ordnung**, falls weiter gilt:

- für all $x, y \in M$ gilt xRy oder yRx

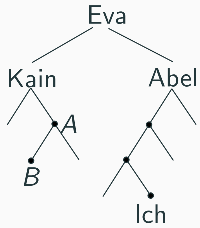
Beispiele

1. $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ sind mit $\leq$ vollständig geordnet.
2. $\mathbb{Z}$ ist mit $<$ nicht geordnet, da Reflexivität nicht gegeben ist.
3. Stammbaum

   Wir sagen, $A \leq B$ genau dann, wenn A ein (direkter) Vorfahre von B ist, z.B.:

   - Eva $\leq$ Kain
   - Abel $\leq$ Ich
   - Kain $\nleq$ Ich

   $\leq$ ist eine partielle Ordnung.



4. **Lexikographische Ordnung**: Ist M eine geordnete Menge (mit Ordnung $\leq$), dann lässt sich auch $M \times M$ anordnen:
   $(a, b) \leq (c, d)$ falls $\begin{cases} a \leq c, & a \neq c \\ a = c \text{ und } b = d \end{cases}$ Das entspricht der Sortierung der Wörter/Namen in einem Wörterbuch/Lexikon/Telefonbuch.

1.3 Abbildungen

Motivation

In der Schule betrachtet man Funktionen auf $\mathbb{R}$ wie z.B. $f(x) = x^2$ oder $f(x) = \sin(x)$, doch es gibt auch andere Arten von Abbildungen.

Bsp: Wetterdaten (Temperatur, Luftdruck, Regenwahrscheinlichkeit, etc.) hängen ab von mehr als einer Größe, z.B.

- Ort (Längengrad, Breitengrad)
- Zeitpunkt,

aber auch wenn man zu jeder Zahl von 1 bis 5 eins hinzuaddiert, ist das eine Abbildung, und zwar von der Menge $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ in die Menge $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ (oder $\mathbb{N}$) mit Abbildungsvorschrift $f(x) = x + 1$.

Code in der Informatik besteht zu großen Teilen aus Abbildungen/Funktionen, die für gewisse Inputs spezifische Outputs ausspucken.

Motivation Schreibweise

In der Schule hatte man als Definitionsmenge und Zielmenge einer Funktion in der Regel $\mathbb{R}$, und man konnte einfach schreiben $y = f(x) = \ldots$. Wir betrachten jetzt aber ganz allgemeine Abbildungen, deswegen müssen wir dazuschreiben, was Definitionsmenge und Zielmenge sind. Statt einfach nur $f(x) = x + 1$ (für die Abbildung von vorhin) schreiben wir also:

$$\begin{aligned} f\colon \{1, 2, \ldots, 5\} &\longrightarrow \{2, 3, \ldots, 6\} \\ x &\longmapsto x + 1 \end{aligned}$$

wobei die zweite Zeile nichts anderes bedeutet als: $f(x) = x + 1$ oder
"x wird von f auf $x + 1$ abgebildet".

Grund: "was unten steht ist ein Element der Menge drüber"

Alternativ: in einer Zeile $f\colon \{1, 2, \ldots, 5\} \longrightarrow \{2, 3, \ldots, 6\}$, $x \longmapsto x + 1$

Achtung: $g\colon \{1, 2, \ldots, 5\} \longrightarrow \mathbb{N}$, $x \longmapsto x + 1$ ist eine andere Abbildung als f!

Abbildungen

Definition

Seien M und N Mengen, und es sei jedem $x \in M$ genau ein $y \in N$ zugeordnet. Dann heißt diese Zuordnung **Abbildung**.

Abbildungen werden mit kleinen lateinischenen Buchstaben benannt: $f, g, h, \ldots$

Ist $x \in M$, f eine Abbildung, dann wird das x zugeordnete Element mit $f(x)$ bezeichnet. Für die Abb. schreiben wir

$$f : \underbrace{M \longrightarrow N}_{\substack{\uparrow \\ \text{normaler Pfeil} \\ \text{zwischen Mengen}}}, \quad \underbrace{x \longmapsto f(x)}_{\substack{\uparrow \\ \text{Zuordnung} \\ \text{von Elementen}}}$$

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, die Zuordnung $x \longmapsto f(x)$ (bzw. $f(x) = x$) zu definieren:

- als **Vorschrift in einer Liste** für endliche Mengen M:

Student	Anton	Birgit	Michael	...
Note	2	3	1	...

$\Rightarrow f(\text{Birgit}) = 3.$

- als **explizite Vorschrift**:

$$\begin{aligned} g: \quad & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h: \quad & \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ & n \longmapsto n - \text{te Primzahl} \end{aligned}$$

Definition

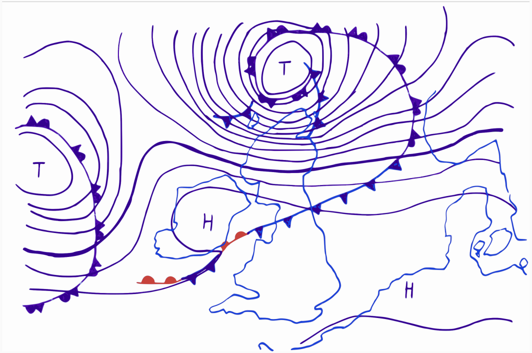
Sei $f : M \longrightarrow N$ eine Abbildung. Dann heißt

- $D(f) := M$ die **Definitionsmenge** von f,
- $x \in M$ die **Argumente von** f,
- N die **Zielmenge von** f,
- $f(M) := \{f(x)|x \in M\}$ die **Bildmenge (bzw. das Bild) von** f
- Gilt $y = f(x)$, dann heißt y das **Bild von** x und x ist **Urbild von** y.
- Ist $U \subset M$ eine Teilmenge, dann ist $f(U) := \{f(x)|x \in u\}$ das **Bild von** U.
- Ist $V \subset N$, dann heißt $f^{-1}(V) := \{x \in M|f(x) \in V\}$ das **Urbild von** V.
- Ist $U \subset M$ dann heißt $f|_U : U \longrightarrow N,\ x \longmapsto f(x)$ die **Einschränkung** von f auf U.

Beispiel für Urbilder

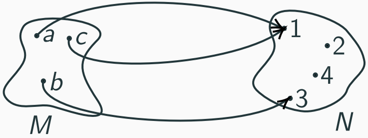
Sei $L(x)$ der Luftdruck abhängig vom Ort x. Tiefdruckgebiet = Orte, wo der Luftdruck unterhalb einer Schwelle s liegt.

Tiefdruckgebiet = alle x mit $L(x) \leq s = f^{-1}(\mathbb{R}_{\leq s})$
Linien = Orte mit konstantem Luftdruck $y = f^{-1}(y)$



Beispiele

1. Für folgende Abbildung von Mengen gilt:



$$f^{-1}(\{1\}) = \{a, c\}$$
$$f(\{a, b\}) = \{1, 3\}$$
$$f(M) = \{1, 3\}$$
$$f^{-1}(\{2\}) = \varnothing$$

2. $$\begin{aligned} f: \quad M = \{\text{Menge aller Studenten}\} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ m &\longmapsto \text{Matrikelnummer} \end{aligned}$$

...	Susi T.	...
	23587901	

3. $$\begin{aligned} f: \quad M &\longrightarrow M \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$ ist die sogenannte **identische Abbildung** auf M.

   Schreibweise: $id : M \longrightarrow M$ oder $id_M : M \longrightarrow M$.

Hintereinanderausführung von Abbildungen

Definition

Gegeben seien zwei Abbildungen:

$$\begin{aligned} f: &\quad M \longrightarrow N \quad x \longmapsto f(x) \\ g: &\quad N \longrightarrow S \quad\; y \longmapsto g(y). \end{aligned}$$

Dann ist auch folgendes eine Abbildung, mit Bezeichnung $g \circ f$

$$\begin{aligned} g \circ f : M &\longrightarrow S \\ x &\longmapsto (g \circ f)(x) = g(f(x)). \end{aligned}$$

Um zwei Abbildungen hintereinander auszuführen, muss das Bild der ersten Abbildung in der Definitionsmenge der zweiten liegen.

Beispiel:

Sei $\mathbb{R}_0^+ := \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$. Gegeben sind zwei Abbildungen:

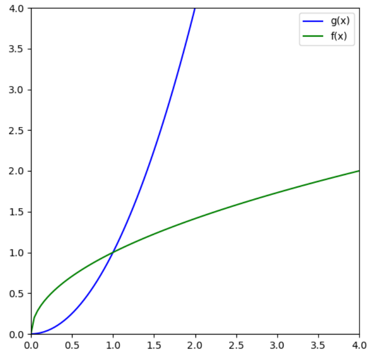
$$g \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_0^+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

$$f: \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_0^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_0^+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

Da $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_0^+$ (genauer $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_0^+$), kann man die Abbildungen hintereinander ausführen:

$$f \circ g: \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_0^+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{x^2} = |x| \end{array}$$

$$g \circ f: \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_0^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_0^+ \\ x & \longmapsto & (\sqrt{x})^2 = x \end{array}$$



Motivation Abbildungseigenschaften

Für Abbildungen interessiert man sich auch in der Informatik oft dafür,

- ob die Abbildung eins-zu-eins ist (zum Beispiel bei key-value-Datenstrukturen); dies nennt man **bijektiv**
- ob die Abbildung jeden Input einem anderen Output zuordnet (wichtig beim Hashing, wenn man Daten unter gewissen IDs möglichst effizient abspeichern will damit man sie schnell wieder findet - hier will man zum Beispiel nicht, dass zwei Datensätze unter derselben ID abgespeichert werden!); dies nennt man **injektiv**
- ob jeder Wert in der Zielmenge mindestens einmal in der Abbildung vorkommt, also "getroffen wird". Das nennt man **surjektiv**.

Definition

Sei $f : M \longrightarrow N$ eine Abbildung. Dann heißt f

- **injektiv,** wenn für alle $x, y \in M$ aus $x \neq y$ auch $f(x) \neq f(y)$ folgt,
- **surjektiv**, falls es für alle $y \in N$ ein $x \in M$ gibt mit $f(x) = y$,
- **bijektiv,** falls f injektiv und surjektiv ist.

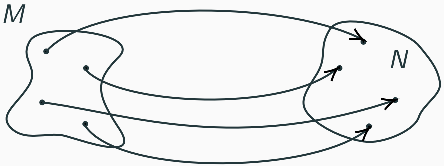
Bemerkung: Bei Abbildungen $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (wie in der Schule):

- injektiv heißt, dass derselbe y-Wert nicht zweimal angenommen wird, z.B. $f(x) = x^3$ auf $\mathbb{R}$
- surjektiv heißt, dass jeder Wert auf der y-Achse mindestens einmal angenommen wird, z.B. $f(x) = x^3$ mit Definitionsmenge $\mathbb{R}$, aber nicht mit Definitionsmenge $\mathbb{R}_{>0}$.
- bijektiv heißt, dass jeder Wert auf der y-Achse genau einmal angenommen wird.

Beispiele

- $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; x \longmapsto x^2$ ist nicht injektiv, nicht surjektiv, nicht bijektiv.
- $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}; x \longmapsto x^2$ ist injektiv, nicht surjektiv, nicht bijektiv.
- $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}; x \longmapsto x^2$ ist injektiv, surjektiv, und deswegen bijektiv. Diese Abbildung ist 1-zu-1 und deswegen umkehrbar! (Wurzelfunktion)
- $$\begin{aligned} f:\quad & M = \text{Studenten} \longrightarrow \mathbb{N} \\ & m \longrightarrow \text{Matrikelnummer von } m \end{aligned}$$
  - f ist injektiv, da keine zwei Studenten die gleiche Matrikelnummer haben
  - f ist nicht surjektiv, da es nur endlich viele Studenten, aber unendlich viele natürliche Zahlen gibt.
- $$\begin{aligned} g:\quad & \mathbb{N} \longrightarrow \{0, 1, \ldots, 4\} \\ & n \longmapsto \text{Rest von } n \text{ beim Teilen durch } 5 \end{aligned}$$
  - ist nicht injektiv, da $g(3) = g(8)$,
  - aber surjektiv, da $g(\{0, 1, 2, 3, 4\}) = \{0, 1, \ldots, 4\}$

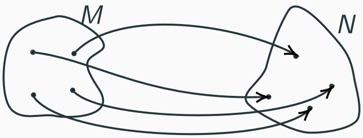
- $id_M : M \longrightarrow M, \quad x \longmapsto x$ ist bijektiv.
- $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x^2$ ist
    - nicht injektiv (da $f(-3) = (-3)^2 = 3^2 = f(3)$, aber $-3 \neq 3$), und
    - nicht surjektiv (da $x^2 \neq -1$ für all $x \in \mathbb{R}$), also liegt -1 nicht im Bild von f.
- Sei $f : M \longrightarrow N$ eine Abbildung zwischen endlichen Mengen M, N:



    - Falls f injektiv ist, ist die Anzahl der Elemente in $M \leq$ die Anzahl der Elemente in N.
    - Falls f surjektiv ist, ist die Anzahl der Elemente in $M \geq$ die Anzahl der Elemente in N.

- **Beweis.** für die erste der beiden Aussagen: Wir schreiben $M = \{m_1, \ldots, m_i\}$ und $N = \{n_1, \ldots, n_j\}$. Angenommen, die Anzahl der Elemente in M i wäre gößer als die Anzahl der Elemente in N j, also $i > j$. Die i Bilder von M unter f sind $f(m_1), \ldots, f(m_i)$ und liegen alle in der Menge $N = \{n_1, \ldots, n_j\}$, und da $i > j$ angenommen wurde, müssen dann mindestens zwei verschiedene der Bildpunkte $f(x_k)$ und $f(x_l)$ dasselbe Element in N sein, also $f(x_k) = f(x_l)$ für $x_k \neq x_l$. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass f injektiv ist. Also ist die Annahme falsch. ∎

Sei $f : M \longrightarrow N$ eine bijektive Abbildung, das heißt die Abbildung ist eins zu eins. Mit anderen Worten hat jedes Element in der Zielmenge genau ein Urbild. Wir können die Abbildung also auch umdrehen und eine Abbildung definieren, die einem $n \in N$ das eindeutige Urbild in M zuordnet, die sogenannte **Umkehrabbildung**.



Definition

Für eine bijektive Abbildung $f\colon M \longrightarrow N$ definieren wir die **Umkehrabbildung** f^{-1} wie folgt:

$$\begin{aligned} f^{-1}\colon N &\longrightarrow M, \\ y &\longmapsto x = f^{-1}(y) \quad (\text{d.h. } f(x) = y). \end{aligned}$$

Dann gilt:

$f^{-1} \circ f = id_M : M \longrightarrow M \quad x \longmapsto x$

$f \circ f^{-1} = id_N : N \longrightarrow N \quad y \longmapsto y$

1.4 Mächtigkeit von Mengen

Motivation

Bei Mengen interessiert man sich natürlicherweise für die Anzahl der Elemente. Dies nennt man ihre **Mächtigkeit**. Was aber, wenn die Menge unendlich groß ist? Wie z.B. die Menge von möglichen Problemen, die man in der Informatik hat (=“Sprache”, siehe theoretische Informatik), und die Menge von möglichen klassischen Algorithmen? Es stellt sich leider raus: Es gibt zwar von beiden unendlich viele, aber leider trotzdem unendlich viel mehr Probleme als klassische Algorithmen!

Man nennt die Mächtigkeit der Menge von Problemen **überabzählbar** (so wie es überabzählbar viele reelle Zahlen gibt, wie wir sehen werden), und die Mächtigkeit der Menge von Algorithmen **abzählbar** (so wie es abzählbar viele natürliche Zahlen gibt).

Mächtigkeit von Mengen

Definition

- Mächtigkeit = Anzahl der Elemente in einer Menge $|M|$ = Mächtigkeit von M
- Sei M eine endliche Menge. Dann sagen wir "M hat **Kardinalität** $k \in \mathbb{N}$", falls es eine bijektive Abbildung zwischen M und $\{1, 2, \ldots, k\}$ gibt.
- Wir sagen, dass zwei Mengen **gleichmächtig** sind, wenn es eine bijektive Abbildung zwischen ihnen gibt (Konzept gilt auch für unendliche Mengen). Wir schreiben für Mengen M, N, dass $|M| = |N|$ falls M und N gleichmächtig sind.
- N heißt mächtiger als M ($|N| > |M|$) genau dann, wenn
    - $|M| \neq |N|$, d.h. es gibt keine bijektive Abbildung zwischen M und N,
    - es gibt eine bijektive Abbildung zwischen M und einer Teilmenge von N.
- Wir führen noch folgende Bezeichnung ein: $|\mathbb{N}| =: \chi_0$ (Alef = hebräischer Buchstabe)

Bei endlichen Mengen kann man die Anzahl der Elemente durch Abzählen bestimmen.

Beispiel:

- $|\mathbb{N}_0| = |\mathbb{N}|$, also $|\{0, 1, 2, 3, \dots, \}| = |\{1, 2, 3, \dots\}|$.

  Beweis. Betrachte die Abbildung $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}_0, x \longmapsto x - 1$ (also $1 \longmapsto 0,\ 2 \longmapsto 1,\ 3 \longmapsto 2, \dots$). Diese Abb. ist bijektiv, also gilt $|\mathbb{N}_0| = |\mathbb{N}|$. ∎

- $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$

  Beweis. Wir betrachten folgende Abbildung:

$$f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad x \longmapsto \begin{cases} 2 \cdot x \text{ fall } x \text{ positiv} \\ 2 \cdot (-x) + 1 \text{ falls } x \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 0 & , & 1 & , & -1 & , & 2 & , & -2 & , & 3 & , & -3 & , & \dots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & 6 & & 7 & & \end{array}$$

Diese Abbildung ist bijektiv, also ist $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$. ∎

Frage: Wann ist eine Menge gleichmächtig wie $\mathbb{N}$, also $|M| \stackrel{?}{=} |\mathbb{N}|$?

Satz

Ist M unendlich groß und existiert eine surjektive Abb. $f : \mathbb{N} \longrightarrow M$, dann gilt $|M| = |\mathbb{N}|$.

Beweis. Ist f surjektiv, dann existiert eine Teilmenge N von $\mathbb{N}$ mit $f(N) = M$. Da M unendlich groß ist, muss N unendlich sein. Wir können nun die Elemente von N der Größe nach sortieren, d.h. $N = \{n_1, n_2, n_3, \ldots,\}$ mit $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$

$\Rightarrow$ Die Abbildung $g : \mathbb{N} \longrightarrow N, \quad i \longmapsto n_i$ ist bijektiv, und somit ist es auch die Komposition

$g \circ f : \mathbb{N} \longrightarrow M, i \longmapsto n_i \longmapsto f(n_i)$. Also folgt die Behauptung. ∎

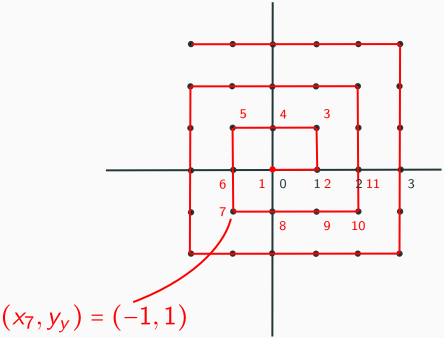
Bemerkung: Eine Menge M ist gleichmächtig zu $\mathbb{N}$, wenn man die Menge "durchnummerieren" kann mit 1,2,3, oder einer Teilmenge von $\mathbb{N}$, z.B. 2,4,6, ... Das ist genau dann der Fall, wenn man alle Elemente von M in eine (unendliche) Liste aufschreiben kann.

Anwendungsbeispiel des letzten Satzes: $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$

$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$=Gitterpunkte im $\mathbb{R}^2$

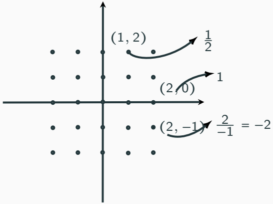
Der Weg rechts definiert eine bijektive Abbildung zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, wir nennen hier den n-ten Gitterpunkt auf diesem Weg (x_n, y_n). Weil dieser Weg irgendwann jeden Punkt im Gitter genau einmal erreicht, ist die folgende Abbildung bijektiv:

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, n \longrightarrow (x_n, y_n).$$



Weil man jede rationale Zahl als Bruch $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$ schreiben kann, ist die folgende Abbildung surjektiv:

$$\begin{aligned} g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Q} \\ (x, y) &\longmapsto \begin{cases} \frac{x}{y} & \text{falls} \quad y \neq 0 \\ 1 & \text{falls} \quad y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$



Somit ist $f \circ g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}, \quad n \longmapsto (x_n, y_n) \longmapsto \frac{x_n}{y_n}$ surjektiv. Wegen dem Satz vorhin folgt $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$.

Frage: Kann man die reellen Zahlen in einer (unendlichen) Liste aufschreiben, d.h. ist $|\mathbb{R}| = |\mathbb{N}|$?

Satz

$|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$.

Beweis. Wir zeigen, dass sogar $\big|[0,1]\big| > |\mathbb{N}|$. Angenommen man könnte alle Zahlen in $[0,1]$ in einer Liste aufführen, s.u. Behauptung: In dieser Liste kommen gewisse Zahlen $x \in [0,1]$ nicht vor. Das würde bedeuten, dass die entsprechende Abbildung zwischen $\mathbb{N}$ und $[0,1]$ nicht surjektiv ist.

$\mathbb{N}$	$[0,1]$
1	$0,\ \boxed{2}\ 4\ 8\ 1\ 3\ \dots$
2	$0,\ 1\ \boxed{5}\ 1\ 3\ 4\ \dots$
3	$0,\ a_{31}\ a_{32}\ \boxed{a_{33}}\ \dots$
4	$0,\ a_{41}\ a_{42}\ a_{43}\ \boxed{a_{44}}\ \dots$
5	$\vdots$ $\searrow$
n	$0,\ a_{n1}\ a_{n2}\ \dots\dots\dots\ a_{n,n-1}\ \boxed{a_{nn}}\ \dots$
$\vdots$	

Wir betrachten die Zahl $x := 0, b_1 b_2 b_3 \dots$ wobei b_i so gewählt ist, dass $b_i \neq a_{ii}$. Angenommen x würde in der obigen Liste an m-ter Stelle vorkommen, dann müsste $0, b_1 b_2 \dots$ gleich $0, a_{m1} a_{m2} \dots$ sein, also insbesondere $b_m = a_{mm}$ $\Rightarrow$ Widerspruch. Wir haben also gezeigt, dass $|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$. ■

Definition

Wir nennen $C := |\mathbb{R}|$ das sogenannte **Kontinuum**.

Man kann auch zeigen, dass $|P(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$. (geht auch mit dem obigen "Trick" $=$ Cantorsches Diagonalverfahren)

Frage: Gibt es Mengen M mit $\chi_0 < |M| < C$?

Cantorsches Kontinuumshypothese (Vermutung): Es gibt keine solche Menge.

Überraschendes Ergebnis: Obigen Hypothese kann weder bewiesen nach widerlegt werden:

1938 Gödel: "Es gibt Sätze, die unentscheidbar sind."

1963 Paul Cohen: Kontinuumshypothese ist unentscheidbar.