30.10.23

Prädikatenlogik:

- Für $x \in \mathbb{N}$: $A(x) = \begin{cases} w & \text{falls } x \text{ prim} \\ f & \text{sonst} \end{cases}$

$A(x)$: " x ist prim"

$\forall$: "für alle" $\quad\exists$: "es existiert"

$\underbrace{\forall x : A(x)}_{\text{Aussage}}$ = "alle natürlichen Zahlen sind prim"
$\longrightarrow$ falsch

$\underbrace{\exists x : A(x)}_{\text{Aussage}}$ = "es existiert (mind.) eine natürliche Zahl, die prim ist"
$\longrightarrow$ wahr, z.B. $x = 2$, oder $x = 5$.

- Für $x, y \in \mathbb{R}$: $A(x,y) = \begin{cases} w & \text{falls } x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \\ f & \text{sonst} \end{cases}$

$A(x,y)$: " $x^2 - 2xy + y^2$ ist größer oder gleich 0".

$x = 1 \quad y = 1$: $\quad 1^2 - 2 + 1 = 0$

$\underbrace{\forall x, y : A(x,y)}_{\text{Aussage}}$: " Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ ist $\underbrace{x^2 - 2xy + y^2}_{(x-y)^2} \geq 0$".

ist wahr da $(x-y)^2 \geq 0$ als Quadrat einer reellen Zahl.

- Für $x, y \in \mathbb{R}$: $A(x,y)$: " $x^2 > y$"

$\underbrace{\forall x : A(x,y)}_{\text{einstelliges Prädikat}}$: " Für alle reellen x ist $x^2 > y$"
= " Das Quadrat jeder rellen Zahl ist größer als y"

$\underbrace{\forall x : A(x, 10)}_{\text{Aussage}}$: "Das Quadrat jeder reellen Zahl ist größer als 10"

→ falsch

$\underbrace{\exists x : A(x, 10)}_{\text{Aussage}}$ "es gibt eine reelle Zahl der Quadrat größer ist als 10"

→ wahr z. B. $x = 4$

$\forall x : A(10, y)$ eigentlich Unsinn

$\underbrace{\exists y : [\forall x : A(x, y)]}_{\text{Aussage}}$: "es gibt eine reelle Zahl, die kleiner ist als alle Quadrate reeller Zahlen"

y

→ wahr z. B. $y = -1$.

$\forall x : x^2 > -1$.

$\exists y \, \forall x : x^2 > y$

$\underbrace{\exists z : A(x, y, z)}$

2-stelliges Prädikat mit freien Variablen: x, y.

$\underbrace{\forall x \, \exists z : A(x, y, z)}$

1-stelliges Prädikat mit freier Variablen y.

$x \in \mathbb{R}$: $\exists x : x \notin \mathbb{Q}$ "es existiert eine reelle Zahl, die nicht rational ist".

Die Verneinung wäre "alle reellen Zahlen sind rational"

$\forall x : x \in \mathbb{Q}$.

$\neg(\exists x : A(x)) = \forall x : \neg A(x)$

---

teilt nicht

$x \in P = \{\text{Primzahlen}\}$ $\forall x : 2 \nmid x$ "alle Primzahlen sind ungerade"

$\exists x : 2 \mid x$ "es existiert eine gerade Primzahl"

teilt / $\Rightarrow \neg(\forall x : A(x)) = \exists x : \neg A(x)$

~~die~~ Beweismethoden:

- direkter Beweis: "Sind $\overbrace{a, b \in \mathbb{Z} \text{ gerade}}^{= A}$, so ist $\underbrace{a+b \text{ gerade}}_{= B}$."

Bew: $\overbrace{a, b \in \mathbb{Z} \text{ sind gerade}}^{A}$ $\Rightarrow$ es gibt $m, n \in \mathbb{Z}$,
$\underbrace{\text{so dass } a = 2 \cdot m \text{ und } b = 2 \cdot n}_{\text{"}C_1\text{"}}$.

$\Rightarrow$ $\underbrace{a+b = 2 \cdot m + 2 \cdot n = 2 \cdot (m+n) \text{ für } m, n \in \mathbb{Z}}_{\text{"}C_2\text{"}}$

$\Rightarrow$ Weil 2 ein Teiler von $a+b$ ist, $\underbrace{\text{ist } a+b \text{ gerade}}_{B}$

- indirekter Beweis: "Sei $n \in \mathbb{Z}$. Wenn $\underbrace{n^2 \text{ gerade ist}}_{\hat{=} A}$,
ist auch $\underbrace{n \text{ gerade}}_{= B}$"

Bew.: Angenommen $\underbrace{n \text{ ist ungerade}}_{\neg B}$

$\Rightarrow$ $\exists\, m \in \mathbb{Z}: n = 2m+1$

$\Rightarrow$ $n^2 = (2m+1)^2 = 4m^2 + 4m + 1$
$= \underbrace{4(m^2+m)}_{\text{gerade Zahl}} + 1$

$\Rightarrow$ $\underbrace{n^2 \text{ ist ungerade}}_{\neg A}$.

(Haben gezeigt: $\neg B \Rightarrow \neg A$ und dies ~~heißt ist~~ bedeutet $A \Rightarrow B$).

- Widerspruchsbeweis: wie oben.

$A(n+1)$: linke S. $= \sum_{i=1}^{n+1} i = \underbrace{1+2+\ldots+n}_{\text{laut } A(n) \,=\, \frac{n(n+1)}{2}} + (n+1)$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{nach Induktionsvoraussetzung}}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+2)\cdot(n+1)}{2}$$

rechte Seite $= \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}$

$\Rightarrow$ linke Seite = rechte Seite $\Rightarrow$ $A(n+1)$ $\square$

<u>Beh:</u> Sei $q \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, dann gilt $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$A(n):\ \underbrace{1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n}_{= \sum_{i=0}^{n} q^i} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

<u>Bew. mit vollständiger Induktion:</u>

<u>Induktionsanfang</u>: $n = 1$: li.S. $= 1+q$

re. S. $= \frac{1-q^2}{1-q} = \frac{(1+q)(1-q)}{1-q} \overset{q \neq 1}{=} 1+q$

$\Rightarrow$ linke Seite = rechte Seite $\Rightarrow$ $A(1)$ gilt.

<u>Induktionsvoraussetzung</u>: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte $A(n)$, also:

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

<u>Induktionsschritt</u>: $n \to n+1$, d.h.

<u>z.z.:</u> $\sum_{i=0}^{n+1} q^i = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$ $\leftarrow$ $= (n+1)+1$

<u>hierzu:</u> linke Seite $= \sum_{i=0}^{n} q^i + q^{n+1} \overset{\text{nach Induktionsvoraussetzung}}{=} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1}$

$$= \frac{1-q^{n+1} + q^{n+1}\cdot(1-q)}{1-q} = \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q} \quad \square$$

$\sum_{i=1}^{100} i$:

```
Sum = 0
for i in {1, ..., 100}:
    sum = sum + i
```

1. Schritt: $i=1$ $sum = 0 + 1 = 1$
2. Schritt $i=2$ $sum = \underset{sum}{1} + \underset{i}{2} = 3$
3. Schritt $i=3$ $sum = 3 + 3 = 6$
4. Schritt $i=4$ $sum = 6 + 4 = 10 \ldots$

$$1 + 3 + 5 + \ldots + 99 = \sum_{\substack{i=1 \\ 2+i}}^{100} i = \sum_{i=1}^{50} (2i-1)$$

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 99 = \prod_{\substack{i=1 \\ 2+i}}^{100} i = \prod_{i=1}^{50} (2i-1)$$

Vollständige Induktion

$n \in \mathbb{N}$:

Beh: $A(n)$: $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

Bew: Induktionsanfang: Sei $n = 1$:

linke Seite: 1
rechte Seite: $\frac{1 \cdot (1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$\Big\}$ li. S. = re. S. $\Rightarrow A(1)$ ist wahr.

Induktionsvoraussetzung: $A(n)$ gilt, also:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Induktionsschritt: $n \longrightarrow n+1$:

z.z.: $A(n+1)$: $\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2}$

z.B.:
$A(2)$: $1+2 = \frac{2(2+1)}{2}$
$A(3)$: $1+2+3 = \frac{3 \cdot (3+1)}{2}$

Beispiel: z.B. $n = 2 \longrightarrow n+1 = 3$

Ang. wir wissen: $1 + 2 = \frac{2(2+1)}{2}$

$A(2)$. Dann ist li.S. $= (1+2) + 3 = \frac{2(2+1)}{2} + 3 = \frac{2(2+1) + 2 \cdot 3}{2} = \frac{3 \cdot 4}{2}$

Verallgemeinerte Induktion:

Beh: Für die Fibonacci-Folge

$a_1 = 1 \quad a_2 = 1, \quad a_3 = a_1 + a_2 = 1+1 = 2, \quad a_4 = a_2 + a_3 = 3$ usw.

also: $a_1 = 1, \quad a_2 = 1$ und $a_{n+2} := a_{n+1} + a_n$ für $n \geq 1$

gilt:

$$A(n): a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right)$$

Bew: mit dem allgemeinen Induktionsprinzip:

Induktionsanfang: $a_1 = 1, \quad \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 \right) =$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5} - 1 + \sqrt{5}}{2} \right) = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = 1$$

$\Rightarrow A(1)$ gilt. ✓

$$a_2 = 1, \quad \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{(1+\sqrt{5})^2 - (1-\sqrt{5})^2}{4} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5 - (1 - 2\sqrt{5} + 5)}{4}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5 - 1 + 2\sqrt{5} - 5}{4} = \frac{4\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = 1. ✓$$

$\Rightarrow A(2)$ gilt.

Induktionsvoraussetzung: für alle i mit $1 \leq i \leq n$ gilt:

$A(i)$, also $a_i = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^i - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^i \right)$

Induktionsschritt: z.z.: $A(n+1)$ gilt, also

$$a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \right).$$

Es gilt: $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$

Nach Induktionsvor. gilt:

$$\textcircled{*} \quad a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

$$\textcircled{**} \quad a_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \right)$$

$$\Rightarrow \quad a_{n+1} = a_n + a_{n-1} =$$

$$\overset{\textcircled{*}}{\underset{\textcircled{**}}{=}} \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right) \quad \square$$

siehe vollst. Skript