第12周知识回顾

第二型曲面积分

物理来源——流体流量问题

流体流量：$\vec{F}(M)=(P(M),Q(M),R(M))$,双侧曲面$S$
求单位时间流体从S一侧流向另一侧的流量
对S分割$T(S_1,S_2,...,S_N)$,单位法向量$\vec{n}_i$
$V=\lim\limits_{|T|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\vec{F}(M_i)\cdot\vec{n}_i\varDelta S_i$

定义

$\vec{F}(M)=(P(M),Q(M),R(M))$定义在双侧曲面$S$上
若上述极限存在且与划分方式和选点方式无
则称这个极限为$\vec{F}$沿S一侧的第二型曲面积分，记作：
$\iint\limits_{S^+}Pdy\Lambda dz+Qdz\Lambda dx+Rdx\Lambda dy$
$\iint\limits_{S^+}\vec{F}\cdot\vec{n}dS=\iint\limits_{S^+}\vec{F}\cdot d\vec{S}$
$\iint\limits_{S^+}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS$

计算

- $S:\ z=f(x,y)\in C^1(D),D\subset R^2$有界闭区域
  $\iint\limits_{S^+}Pdy\Lambda dz+Qdz\Lambda dx+Rdx\Lambda dy$
  $=\iint\limits_{S^+}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS$
  $=\pm\iint\limits_{D}(P(x,y,f(x,y))f'_x+Q(x,y,f(x,y))f'_y-R(x,y,f(x,y)))dxdy$
- $S:(x,y,z)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v)),x,y,z\in C^(D),(u,v)\in D$有界闭区域
  $\iint\limits_{S^+}Pdy\Lambda dz+Qdz\Lambda dx+Rdx\Lambda dy$
  $=\iint\limits_{S^+}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS$
  $=\pm\iint\limits_{D}(P(x,y,z)A+Q(x,y,z)B+R(x,y,z)C)dudv$

Gauss公式

$Thm.V \subset R^3$有界闭域，由可求面积的封闭曲面S围成
若$P,Q,R \in C^1(V)$,则：
$\oiint\limits_{S^+} Pdy\Lambda dz + Qdz\Lambda dx + Rdx\Lambda dy = \iiint\limits_V (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z})dxdydz$
证明类似于Green公式（三维延拓）

应用

- P,Q,R在V内有奇点——切除奇点
- 计算开口曲面积分——补上一块易于计算的部分变为封闭曲面
- 计算空间区域的体积——Gauss公式逆向使用

Stokes公式

曲面$S \to$ 边界曲线L，通过右手定则给定方向（在曲面方向规定的前提下）
$Thm.S$光滑双侧曲面，边界L是可求长封闭曲线
$P,Q,R \in C^1(S), C^1(L)$, 则：
$\oint_{L^+} Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_{S^+} (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})dy\Lambda dz + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})dz\Lambda dx + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dx\Lambda dy$
$Stokes$公式与曲面形状无关