第二周知识点回顾

二元函数的连续与偏导数

二元函数的连续性

二元函数在一点处连续

$def.$ 二元函数连续：
$f(x,y)$定义在$D\subset R^2$上$,P_0(x_0,y_0)\in D,$若$\forall\epsilon>0,\exists\delta>0,\forall P(x,y)\in B(P_0,\delta)\cap D,$有$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\epsilon$
$\Rightarrow f$在$P_0(x_0,y_0)$连续$,P_0$为f连续点
即：$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=f(x_0,y_0)$
几个注解：

> 情形1. P_0为聚点 $\Leftrightarrow$ 与点列极限的联系
> 情形2. P_0为非聚点 $\Rightarrow$ 是孤立点

$def.$ 间断点：不连续的点

- 可去间断点：极限存在
- 本性间断点：极限不存在

二元函数在点集上连续

$def.$ 在点集上连续：
f在D中每个点都连续 $\Leftrightarrow f\in C(D)$

二元函数对变量分别连续

$def.$ 对变量连续：
固定一个变量，考虑另一个变量构成的一元函数的连续性

- 注意，【对两个变量连续】与【函数连续】互不蕴含

连续函数的几个性质

- 有界性
- 最值性
- 介值性

二元函数的偏导数

$def.$ 偏导数：
$f(x,y)$在$P_0(x_0,y_0)$的δ内连续, 固定一个变量，得到的一元函数在邻域内可导，导数为f关于这一变量的偏导数
记作$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$

- 注意：二元函数在一点的偏导数存在性与函数连续性互不蕴含

偏导数几何意义

二元函数：R^3中的曲面
固定一个变量：确定在一个切面
求导：曲面与切面交线在该点的切线斜率

可微

与一元函数类似，对于函数一点微扰的线性近似拟合。
$def.$ 全微分
$z=f(x,y),P_0(x_0,y_0),\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=A\Delta x+B\Delta y+o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})$
则称f在P_0处可微，$dz=A\Delta x+B\Delta y$

可微的几个定理

- $A=\frac{\partial z}{\partial x},B=\frac{\partial z}{\partial y}$
- $f(x,y)$在P_0处连续
- 两个偏导数在P_0处均连续 $\Rightarrow$ f在P_0处可微（逆定理不成立！）

可微的条件

- 充要条件：$f(x,y)$在$P_0(x_0,y_0)$可微 $\Leftrightarrow$ f在P_0处全改变量$\Delta f=f'_x(P_0)\Delta x+f'_y(P_0)\Delta y+\epsilon_1\Delta x+\epsilon_2\Delta y$, 其中：$\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\epsilon_i=0$
- 证明可微：充分条件，定义；证明不可微：必要条件

全微分应用——近似计算

设$f(x,y)$在$P_0(x_0,y_0)$处可微，则
$\Delta f=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0$
$=f'_x(P_0)\Delta x+f'_y(P_0)\Delta y+o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})$
当$\Delta x\to 0,\Delta y\to 0:$
$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0)+f'_x(P_0)\Delta x+f'_y(P_0)\Delta y$

复合函数微分

链式法则

二元函数套一元函数

$z=f(x,y)$可微$,x=x(t),y=y(t)$可导,则
$z=f(x(t),y(t))$可导且$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}x'(t)+\frac{\partial f}{\partial y}y'(t)$

推广：n元函数套一元函数

$z=f(x_1,x_2,...,x_n)$可微$,x_i=x_i(t)$可导,则
$z=f(x_1(t),x_2(t),...,x_n(t))$可导且$\frac{dz}{dt}=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}x'_i(t)$

推广：n元函数套m元函数

$z=f(x_1,x_2,...,x_n)$可微, $x_i=x_i(t_1,t_2,...,t_m)$存在偏导, 则
$z=f(x_1(t_1,...,t_n),...,x_n(t_1,...,t_n))$可导且$\frac{\partial z}{\partial t_i}=\sum\limits_{j=1}^{n}(\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{x_j}{t_i})$

高阶偏导数

设$f(x,y)$定义在$D\subset R^2$, $\forall(x,y)\in D$, 有$f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$
$\forall P_0(x_0,y_0)\in D$, $f'_x(x,y)$在P_0关于x偏导数，$fixy=y_0$, 若$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'_x(x,y_0)-f'_x(x_0,y_0)}{x-x_0}$存在，
称之为f在P_0处的二阶偏导，记作$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)$, y同理; 若$f'_x(x,y)$对y求偏导——混合偏导数$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0)$

> 一般来讲，$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\neq\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$
> 但当混合偏导数在$P_0(x_0,y_0)$附近连续，则混合偏导数相等