第五周知识回顾

极值

临界点（驻点）

$def.$ 驻点：
$f(x,y),P_0(x_0,y_0)$处存在偏导数，若$f'_x(P_0)=0,f'_y(P_0)=0$，称P_0为驻点
极值点若存在偏导数则一定是驻点

极值充分条件

P_0为f的一个驻点，$f\in C^2(B(P_0,\delta))$
$A=f''_{xx}(P_0),B=f''_{xy}(P_0),C=f''_{yy}(P_0),\Delta=AC-B^2$
$(Hesse$矩阵$)$
$\Delta>0,A>(<)0,C>(<)0,$则P_0为$f(x,y)$极小(大)值点
$\Delta<0,P_0$一定不是极值点
$\Delta=0,$不能直接确定
$\forall P\in B(P_0,\delta),H_f(P)$正(负)定$or$半正(负)定$,P_0$极小(大)
同理推广到n元函数
应用：最小二乘法

条件极值

一个约束条件

目标函数：$z=f(x,y)$
约束条件：$\phi(x,y)=0$
$\Rightarrow Lagrange$乘子法：
$L(x,y)=f(x,y)-\lambda\phi(x,y)$

- 解方程：$L'=0$
- 求出驻点
- 判断在P_0是否为极值 $\rightarrow$ 条件极值点
- $H_L(P_0)$正(负)定，则P_0为$f(x,y)$为条件极小值点

n元函数m个约束条件

$$L(x_1, x_2, ..., x_n) = f - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \phi_i$$

其余部分同上

几何解释

1. 一个约束条件

- $\phi(x, y) = 0$表示了一条曲线l
- 转换为一个关于t的参数方程，带回目标函数，找极值点

2. 两个约束条件

- $\phi_1(x, y, z) = 0, \phi_2(x, y, z) = 0$表示了一条曲线
- 转化为参数方程后同上

极值应用

- 有界闭区域最值
- 证明或建立不等式