第六周知识回顾

含参积分

二元函数一致连续性

设f定义在$\Omega \subset R^2$上，若$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, s.t. \forall X_1, X_2 \in \Omega$，只要$\|X_1 - X_2\| < \delta, |f(X_1) - f(X_2)| < \varepsilon \Rightarrow f$在$I$上一致连续
$f \in C(D), D$为有界闭集 $\Leftrightarrow f$在D上一致连续

含参定积分

$I \subset R, D = [a,b] \times I, f(x,u) def on D$
$\forall u \in I, f(x,u) \in R[a,b]$,称$\phi(u) = \int_a^b f(x,u)dx$为含参定积分
性质：积分与取极限运算可以交换
在D上连续则积分在I上连续
求导运算：$f'_u(x,u) \in C(D) \Rightarrow \phi'(u) = \int_a^b f'_u(x,u)dx$
积分运算：$f(x,u) \in C(D) \Rightarrow \phi(u) = \int_a^b f(x,u)dx \in R[a,b], \int_\alpha^\beta \phi(u)du = \int_a^b(\int_\alpha^\beta f(x,u)du)dx$(积分的可交换性)
变限求导：$f'_u(x,u) \in C(D), a(u), b(u)$在$[\alpha,\beta]$上可导，$\forall u \in [\alpha,\beta], a(u), b(u) \in [a,b] \Rightarrow \phi'(u) = \int_{a(u)}^{b(u)} f'_u(x,u)dx + b'(u)f(b(u),u) - a'(u)f(a(u),u)$

含参广义积分

$D = [a, +\infty) \times I, f def on D$
$\forall u \in I, \int_a^{+\infty} f(x,u)dx$收敛 $\Rightarrow \phi(u) = \int_a^{+\infty} f(x,u)dx$为含参数$u$无穷积分

一致收敛

$\forall \varepsilon > 0, \exists M > a, \forall A > M, \forall u \in I,$有$|\int_a^A f(x,u)dx - \int_a^{+\infty} f(x,u)dx| < \varepsilon \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x,u)dx$在$I$上一致连续
$Cauchy$一致收敛原理：
$\forall \varepsilon > 0, \exists M > a, \forall A_1, A_2 > M,$及$\forall u \in I,$有$|\int_{A_1}^{A_2} f(x,u)dx| < \varepsilon$
$\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x,u)dx$在$I$上一致收敛
判别：($D = [a, +\infty) \times I$)

- $Weirerstrass: f$关于x在$[a,+\infty)$上连续，$\exists F(x)\in C([a,+\infty)), F(x)\geq 0, s.t. int_a^{+\infty}F(x)dx$, 且$\forall (x,u)\in D, |f(x,u)|\leq F(x)$
  $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x,u)dx$在$I$上一致连续
- $Dirichlet: f, g def on D=[a,+\infty)\times I$满足：
  对充分大的积分上界, f一致有界；
  $\forall u\in I, g(x,u)$关于x单调, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x,u)=0$关于$u$一致成立
  $\Rightarrow fg$一致收敛
- $Abel: f, g def on D=[a,+\infty)\times I$满足：
  $\int_a^{+\infty} f(x,u)dx$在$I$上一致收敛
  $\forall fix u\in I, g(x,u)$关于$x$单调，关于$u\in I$一致有界
  fg一致连续
  局部一致收敛：
  $\forall u_0\in I$, 在u_0的一个邻域内一致收敛
- 连续性：$f(x,u)\in C(D)$, 局部一致收敛 $\Rightarrow \phi(u)=\int_a^{+\infty} f(x,u)dx\in C(I)$
- 可积性：$f(x,u)\in C(D), \phi(u)=\int_a^{+\infty} f(x,u)dx$在$[\alpha,\beta]$上一致收敛 $\Rightarrow \phi(u)\in R[\alpha,\beta]$, 且积分号可交换
- 可微性：$f_u'(x,u)\in C(D)$且$\phi(u)=\int_a^{+\infty} f(x,u)dx$在$\forall u\in I$收敛，$\int_a^{+\infty} f_u'(x,u)dx$关于$u\in I$局部一致收敛 $\Rightarrow \phi(u)\in C^1(I), \phi'(u)=\int_a^{+\infty} f_u'(x,u)dx$
  Γ函数$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx$
  B函数$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^{+\infty} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$