第四周知识回顾

逆映射微分

$def.\ k$阶连续可微：
$D \subset R^n, C^k(D) \Leftrightarrow D$上$k$阶偏导连续，又称为$k$阶连续可微
设$\Omega \subset R^n, y = f(x) : \Omega \to R^n$连续可微映射，$X_0 \in \Omega$
若$Jf(X_0)$可逆,则$\exists y_0 = f(X_0)$的邻域U及$y = f(X)$的逆映射$X = f^{-1}(y) : U \to R^n$
$\forall y \in U, X = f^{-1}(y), Jf^{-1}(y) = (Jf(X))^{-1}$

多元函数微分学几何应用

空间直线方程

参数方程

l：过$M_0(x_0, y_0, z_0)$,方向向量$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)^T$
$\forall M(x, y, z) \in l, M_0\vec{M} // \vec{v}$即$M_0\vec{M} = t\vec{v}, \forall t \in R, l$参数方程：

$$\begin{cases} x = x_0 + tv_1 \\ y = y_0 + tv_2 \\ z = z_0 + tv_3 \end{cases}$$

点向式方程

$\frac{x-x_0}{v_1} = \frac{y-y_0}{v_2} = \frac{z-z_0}{v_3}$

空间曲线的切线

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

$P_0(x_0, y_0, z_0), x, y, z$可导
切线：
$\frac{x-x_0}{x'(t_0)} = \frac{y-y_0}{y'(t_0)} = \frac{z-z_0}{z'(t_0)}$

切向量：
$\vec{v}=(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))^T$

空间曲面切平面与法线

曲面S一般方程

$F(x,y,z)=0,F$在$M_0(x_0,y_0,z_0)$可微，梯度不为0
S上过M_0任取光滑L，则有
$F'_x(M_0)x'(t_0)+F'_y(M_0)y'(t_0)+F'_z(M_0)z'(t_0)=0$
切面方程$F'_x(M_0)(x-x_0)+F'_y(M_0)(y-y_0)+F'_z(M_0)(z-z_0)=0$
法线$\frac{x-x_0}{F'_x(M_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(M_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(M_0)}$
法向量$\vec{n}=gradF(M_0)$

函数方程

$z=f(x,y)\in C^1,$可转化为上述方程$\Rightarrow f(x,y)-z=0$

参数方程

$$\begin{cases}x=x(u,v)\\y=y(u,v)\\z=z(u,v)\end{cases}$$

切平面一般方程

$fix:u=u_0\ or\ v=v_0,$得到切向量：
$\vec{a}=(x'_u,y'_u,z'_u)^T,\vec{b}=(x'_v,y'_v,z'_v)^T$
法向量$\vec{n}=\vec{a}\times\vec{b}=(A,B,C)$
切平面：$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$
法向量：$\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C}$

空间曲线切线与法平面

参数方程

$$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}$$

上文已有例子

一般方程

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 S_1 \\ G(x,y,z)=0 S_2 \end{cases}$$
S_i切平面法向量$\vec{n}_i = gradF/G(P_0)$
切向量$\vec{\tau}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=(A,B,C)^T$
切线：$\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C}$
法平面：$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

二元函数Taylor公式

二元函数高阶全微分

$$d^n f(x,y)=\sum_{i=0}^{n}=\frac{n!}{i!(n-i)!}\frac{\partial^n f}{\partial x^i\partial y^{n-i}}h^i k^{n-i}=(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k)^n f(x,y)$$

Lagrange余项型

$f(x,y)\in C^{n+1}(D),P_0(x_0,y_0),h=x-x_0,k=y-y_0,\theta\in(0,1)$
$f(x,y)=\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{d^i f(x_0,y_0)}{i!}+\frac{d^{n+1}f(x_0+\theta h,y_0+\theta k)}{(n+1)!}$
最后一项即$Lagrange$余项

Taylor多项式

$$T_f=\sum_{i=0}^{n}\frac{d^i f(x_0,y_0)}{i!}$$

Peano余项型

$$f(x,y)=T_f(x,y)+o((\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2})^n)$$

多元函数极值

$def.$ 极值点:
f在$B(P_0,\delta)$有定义,$P_0(x_0,y_0)\in R^2$
$\forall P\in B(P_0,\delta)$有$f(x,y)\le f(P_0) or\ f(P_0)\le f(x,y)\Rightarrow$
f在P_0取极大(小)值，P_0称为极大(小)值点

> 一定是内点，局部性质
>
> $def.$ 驻点or临界点：
>
> f在P_0处存在偏导数，且$f_x'(P_0) = f_y'(P_0) = 0$
>
> $\Rightarrow P_0$为驻点
>
> 极值点且可微则必为驻点