第七周知识回顾

二重积分

积分定义

设$D \subset R^2$为有界区域，$f(x,y)$定义在D上
对D的任意分割T，$|T| = maxd(\Delta D_i)|i = 1,2...n$
$\lim\limits_{|T|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta\sigma_i = \iint\limits_D f(x,y)d\sigma$
$f \in R(D)$——可积函数族全体
$\iint\limits_D d\sigma = S(D)$——面积

可积必要条件

$f \in R(D) \Rightarrow f$在D上有界

可积充分条件

D有界闭域, $f \in C(D) \Rightarrow f \in R(D)$

可积充要条件

达布上和 $=$ 达布下和 $\Leftrightarrow f \in R(D)$
D有界闭域, f有界且间断点集是一个零面积集 $\Leftrightarrow f \in R(D)$

性质

- 线性
- 积分区域可加性
- 保序性
- 绝对可积性
- 积分中值定理
- 对称性（计算常用）

计算

直角坐标系

$d\sigma = dxdy$

- 矩形区域$D = [a, b] \times [c, d], \iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)dx$
- $D = \{(x, y)|a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}, \iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int_a^b dy \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dx$
- 参数方程$D \in xoy, \Omega \in uov, x = x(u, v), y = y(u, v)$为可逆双射，则$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \iint\limits_\Omega f(x(u, v), y(u, v))|det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}|dudv$