第10&11周知识总结

格林公式

闭曲线正向

单连通区域的边界：逆时针为正向
内部的空洞：顺时针为正向
沿封闭曲线积分，积分曲线默认为正向
定理：格林公式
$D \subset R^2$为有界闭区域，$P(x,y),Q(x,y) \in C^1(D)$
$\partial D = l$可求长曲线，则有：
$\oint\limits_{l^+} Pdx + Qdy = \iint\limits_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy$
记忆：行列式法
证明：借助图像，转换成累次积分

应用

- P,Q在D中有奇点——求极限
- 计算开口曲线上的积分
- 计算平面区域面积

曲线积分&积分路径

$Thm.\ D \subset R^2$单连通区域，$P(x,y),Q(x,y) \in C^1(D)$,则下列结论等价：
$[1]\int_{L(A,B)} Pdx + Qdy$与积分路径无关，只与起点$A$、终点$B$有关
$[2]\exists u(x,y), \forall(x,y) \in D, s.t. du = Pdx + Qdy$
$[3]\forall(x,y) \in D \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$
$[4]$对D内任一可求长封闭曲线$l, \oint_l Pdx + Qdy = 0$
在满足上述条件时，即有$[2]$，$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则有：
$\oint_l Pdx + Qdy = u(x_2,y_2) - u(x_1,y_1)$

计算-求原函数

[1]曲线积分法——选择方便计算的积分曲线
[2]不定积分法

- $\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y)$,把$y$当作常数
  $u_1(x,y)=\int P(x,y)dx,u(x,y)=u_1(x,y)+\varphi(y)$
  $Q(x,y)=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u_1}{\partial y}+\varphi'(y)$
  $\varphi(y)=\int(Q(x,y)-\frac{\partial u_1}{\partial y})dy$

[3]凑全微分——熟悉常见全微分形式(见下面)

全微分方程

满足$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$的方程：$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$
通解：$u(x,y)=C$
$d(xy)=ydx+xdy$
$d(\frac{x}{y})=\frac{ydx-xdy}{y^2}$
$d(ln|\frac{x}{y}|)=\frac{ydx-xdy}{xy}$
$d(arctan\frac{x}{y})=\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}$
$d(ln(x^2+y^2))=\frac{2(xdx+ydy)}{x^2+y^2}$
$d(ln|\frac{x-y}{x+y}|)=\frac{2(ydx-xdy)}{x^2-y^2}$

曲面积分

第一型曲面积分——与曲面方向无关

定义：对于渴求面积曲面Σ，$f(x,y,z)def\ on\ \Sigma$
任意分割，对$f(x_i,y_i,z_i)\Delta S_i$求和求极限，极限与分割、取点无关
该极限$I=\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)dS$
封闭曲面：$\oiint$
计算：将dS化为$dxdy$

- $[1]\Sigma:z=f(x,y)\in C^1(D)$
  $dS=\sqrt{1+(f'_x)^2+(f'_y)^2}dxdy$
- $[2]$参数形式$(x,y,z)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v)),(u,v)\in D$
  $dS=\sqrt{A^2+B^2+C^2}dudv$

性质\

- 线性
- 积分曲面可加性
- 积分中值定理
- 对称性

第二型曲面积分——与曲面方向有关

有向曲面：双侧曲面S规定其中一个法向量方向为正（单侧曲面单独讨论）
物理来源：流体流量问题