第八周知识回顾

三重积分

直角坐标系

体积微元：$dv = dxdydz$
$V \subset R^3$有界闭区域 $\rightarrow I = \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$

计算：

- 先一后二：
  $V = \{(x,y,z)|\forall(x,y) \in D, z_1(x,y) \leq z \leq z_2(x,y)\}$
  $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$
- 先二后一：
  $V = \{(x,y,z)|z_1 \leq z \leq z_2, (x,y) \in D_z\}$
  $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int_{z_1}^{z_2} dz \iint\limits_{D_z} f(x,y,z)dxdy$

变量代换

$(x,y,z) \in D \rightarrow (u,v,w) \in \Omega$连续可微双射
$\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_\Omega f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))|det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}|dudvdw$
应用：柱坐标变换，球坐标变换

重积分应用

几何应用

曲面面积

$S = \iint\limits_D \sqrt{1+{f_x'}^2+{f_y'}^2}dxdy$
参数方程下，法向量$\vec{n} = (A,B,C), S = \iint\limits_\Omega \sqrt{A^2+B^2+C^2}dxdy$

物理应用

质心计算

位矢关于密度的加权平均

密度函数$\rho(x,y,z)$

$\vec{r}_c = \frac{\iiint\limits_V \vec{r}\rho(x,y,z)dv}{\iiint\limits_V \rho(x,y,z)dv}$

转动惯量

密度函数$\rho(x,y,z)$,与转轴l的距离函数$r(x,y,z)$

$J_l = \iiint\limits_\Omega r^2(x,y,z)\rho(x,y,z)dxdydz$

引力

密度函数$\rho(x,y,z)$,与体外一个质点距离函数$\vec{r}(x,y,z)$

$\vec{F} = \iiint\limits_\Omega G\frac{m\rho\vec{r}}{\|r\|^3}dxdydz$