# 第三周知识总结

## 混合偏导数

- 定义
- 邻域内均连续，则$f_{xy}^{''}=f_{yx}^{''}$
- $f_x^{'},f_y^{'}$在$\delta$邻域内存在，且$f_{xy}^{''}$在$P_0$连续，则$f_{yx}^{''}(P_0)$存在，且$f_{xy}^{''}(P_0)=f_{yx}^{''}(P_0)$

## 方向导数

$def.$ 方向向量 : $z=f(x,y)$在$B(P_0,\delta)$有定义，$\vec{v}=(v_1,v_2)^T$为直线$l$方向单位向量($\|\vec{v}\|=1$)若$\lim\limits_{t\to0^+}\frac{f(x_0+tv_1,y_0+tv_2)-f(x_0,y_0)}{t}$存在，则称之为$f(x,y)$在$P_0$沿$\vec{v}$方向导数，记作$\frac{\partial f}{\partial\vec{v}}$

- 几何意义：$f(x,y)$在$P_0$沿$\vec{v}$变化率
- 理解：一条相切射线
- 任意方向导数存在$\neq$函数连续，反例 : $y=x^2$时$f(x,y)=1(x>0),else:f(x,y)=0$

### 梯度

$def.$ 梯度$gradf(P_0)=(f_x'(P_0),f_(' P_0))^T$
表示：梯度算子$\nabla=(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y})$
性质：

> 最大(小)方向导数=(-)梯度的长度（与梯度方向相同(反)）
> 方向导数=0 —— 与梯度方向垂直

## 向量值函数

### 映射

一个对一个（确定的左元有唯一右元）

### 向量值函数

映射$F:R^n\to R^m,Y=F(X)$
等价于一个数值函数组

> 连续性
> 极限
> ……

## 一些简单的线性代数知识（相信大家都会）

线性映射与矩阵、矩阵的范数

## 向量值函数微分

$X_0,\Delta\in R^n,F:R^n\to R^m$
若$\Delta F=A\Delta X+\alpha(\Delta X)$
其中$A\in M_{m\times n},\lim\limits_{\|\Delta X\|\in 0}\frac{\|\alpha(\Delta X)\|}{\Delta X}=0$
则称$F$在$X_0$可微$\Leftrightarrow$坐标函数均可微
$A$为$Jacobi$矩阵：$JF(X_0),\frac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}$
微分映射$dF(X_0)=JF(X_0)dX$

## 复合映射微分

$f:R^n\to R^m g:R^m\to R^k$均可微
则$g\circ f$可微，$J(g\circ f)(X_0)=Jg(U_0)\times Jf(X_0)$

# 隐函数微分

## 方程确定隐函数

### 二元方程——一元函数

开集$D\subset R^2,F:D\to R,$有：

- $F(x,y)\in C^1(D)$
- $P(x_0,y_0)\in D,s.t.\ F(x_0,y_0)=0$
- $F_y'(P_0)\neq 0$
  则$\exists$开区域$I\times J\subset D,s.t.(x_0,y_0)\in I\times J:$
- $\forall x\in I,F(x,y)=0$在$J$中有唯一解$y=f(x)$
- $y_0=f(x_0)$

- $f(x) \in C^1(I)$
- $\forall x \in I, f'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y}$

### n+1元函数——n元函数

$n+1$元函数$F(x_1, x_2, ..., x_n, y)$在$P_0(x_1^0, ..., x_n^0, y_0) \in R^{n+1}$邻域$W$中有定义，且:

- $F(P_0) = 0$
- $F \in C^q(W)$
- $F'_y(P_0) \neq 0$
  则$\exists Q_0(x_1^0, ..., x_n^0) \in R^n$的邻域$U \subset R^n$,及定义在$U$上的$n$元函数$y = f(x_1, ..., x_n)$,有:
- $y_0 = f(x_1^0, ..., x_n^0)$
- $f(X_0, y_0) = 0$
- $y = f(X) \in C^q(U)$
- $\forall X \in U, \frac{\partial y}{\partial x_i} = -\frac{F'_{x_i}}{F'_y}$

## 方程组确定隐函数组

$m$个$n+m$元$F_i(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m)$在$P_0(X_0, Y_0)$邻域$W$内有定义，且:

- $F_i(X_0, Y_0) = 0$
- $F_i \in C^q(W)$
- $\frac{\partial(F_1, ..., F_m)}{\partial(y_1, ..., y_m)}(P_0)\ invertible$
  则$\exists Q_0(X_0)$的邻域$U \subset R^n$,及$U$上$m$个$n$元函数$y_i = y_i(X)$满足
- 同上
- 同上
- $\forall (x_1, ..., x_n) \in U, \frac{\partial(y_1, ..., y_m)}{\partial(x_1, ..., x_n)} = -(\frac{\partial(F_1, ..., F_m)}{\partial(y_1, ..., y_m)})^{-1} \frac{\partial(F_1, ..., F_n)}{\partial(x_1, ..., x_n)}$