第一周知识点回顾

点集拓扑与多元函数

点集拓扑

距离概念引入

线性空间R^n中：

$$def.\text{内积}:\forall X(x_1,x_2,...,x_n),Y(y_1,y_2,...,y_n)\in R^n,<X,Y>=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$$

> 性质:
> [1] 非负性
> [2] 对称性
> [3] 线性

进一步地

$$def.\ n\text{维欧氏空间}:\text{定义了内积的}R^n\text{空间}$$
$$def.\text{欧式范数}:\forall X\in R^n,\|X\|=\sqrt{<X,X>}$$

> 性质：
> [1] 非负性
> [2] 数乘线性
> [3] 三角不等式（以及Cauchy-Schwarz 不等式）

推广

$$def.\text{范数}:\text{定义在}R^n\text{上的，满足上述三条性质的函数}$$

基于范数，有

1. 距离：

- 点与点$\forall X(x_1,x_2,...,x_n),Y(y_1,y_2,...,y_n)$：
  $d(X,Y)=\|X-Y\|$
- 点与点集
  $X\in R^n,\Omega\subset R^n$：
  $d(X,\Omega)=inf\{\|X-Y\||\forall Y\in\Omega\}$

- 点集与点集
  $\Omega, \Lambda \subset R^n:$
  $d(\Omega, \Lambda) = inf\{\|X - Y\| | \forall X \in \Omega, \forall Y \in \Lambda\}$

2. 点集的直径
   $\Omega \subset R^n : diam(\Omega) = sup\{\|X - Y\| | \forall X, Y \in \Omega\}$

邻域

对于$X_0 \in R^n, \forall \delta > 0$
$def.\ \delta - $邻域：
$B(X_0, \delta) = \{X \in R^n | \|X - X_0\| < \delta\}$
$def.$ 去心$\delta -$ 邻域：
$B_0(X_0, \delta) = \{X \in R^n | 0 < \|X - X_0\| < \delta\}$

点与点集关系

- 点的位置
  $def.$ 内点：
  $\exists \delta > 0, s.t.\ B(X, \delta) \subset \Omega$
  $\Rightarrow \Omega$内点集合构成内部($\mathring{\Omega}$)
  $def.$ 外点：
  $\exists \delta > 0, s.t.\ B(X, \delta) \cap \Omega = \emptyset$
  $\Rightarrow \Omega$外点集合构成外部
  余集$\Omega^c = R^n \backslash \Omega$
  $\diamond$余集中的点不一定是外点，外点是余集中的点
  $def.$ 边界点：
  任意邻域内同时含有内点与外点
- 稠密性
  $def.$ 聚点：
  $\forall \delta > 0, B_0(X, \delta) \cap \Omega \neq \emptyset$
  $\Rightarrow \Omega$聚点集合构成Ω导集(Ω')
  $\Rightarrow cl(\Omega) = \bar{\Omega} = \Omega \cup \Omega'$为闭包
  $def.$ 孤立点：
  $\exists \delta > 0, s.t. B(X, \delta) \cap \Omega = \{X\}$

开集&闭集

对于$\Omega \subset R^n$
$\mathring{\Omega} = \Omega \rightarrow$ 开集
$\bar{\Omega} = \Omega \rightarrow$ 闭集

约定$R^n,\emptyset$既开又闭
任意多开集的并是开集
有限个开集的交是开集
任意多闭集的交是闭集
有限个闭集的并是闭集（迪摩根律）

有界集

$\Omega\subset R^n,\exists r>0,s.t.\Omega\subset B(0,r),$称$\Omega$是有界集

点列收敛

$n\to\infty,\|X_n-X_0\|\to 0$
$\Rightarrow$ 收敛于X_0
按各个坐标分量收敛
收敛点集有界

完备性

基本列：高维柯西列
定理：

- Cauchy收敛定理：基本列等价于收敛列
- 闭集Ω的收敛子点列的极限属于Ω
- R^n是完备的：R^n中基本列收敛到R^n
- 七个等价结论（与一元函数类似）

连通集

道路连通：两点可由一条内部折线联结
连通集：任意两点道路连通

区域

- R^n中连通非空开集称为开区域
- 开区域的闭包就是闭区域

多元函数

$def.$ 多元数值函数：
$\Omega\subset R^n,$映射$\Omega\xrightarrow{f}u,$称f为定义在Ω上的n元函数
掌握几个典型二元函数例子

二元函数极限

在一点处极限（二重极限）

$def.$ 二重极限：聚点$P_0(x_0,y_0)\in\Omega\subset R^2, f(x,y)$在$B_0(P_0,\delta_0)\cap\Omega$上有定义$, a(const)\in R$
若$\forall\epsilon>0,\exists\delta>0(\delta_0>\delta), s.t.\forall P(x,y)\in B_0(P_0,\delta)\cap\Omega:$
$|f(P)-a|<\epsilon$
称$P\to P_0$时$, f(P)$有极限a

计算：换元、夹逼（很常用，正负想不明白时可以加绝对值）

推论：两条路径极限不同，则极限不存在

累次极限

- 定义略（先取x/y的极限,后取y/x的极限，另一个作为参数）
- 前提是第一重极限（关于参数的函数）存在

累次极限与二重极限关系

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$
   且$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)=B$,则$A=B$
2. 进一步地，若二重极限和两个累次极限都存在，则三者相等
3. 若两个累次极限存在但不相等，则二重极限不存在

- 注意，累次极限、二重极限的存在性之间没有直接依赖关系