レポートタイトル

9BSP1118 村岡海人

2022 年 11 月 24 日

1　任意角度のスピンと 1 量子ビットの状態

任意のユニタリ回転ゲートを作成する。x, y, z 軸の周りに 1 量子ビットを回転させる行列は、次のように、パウリ演算子 X, Y, Z から求められる。

$$R_x(\theta) = e^{-i\theta X/2} = \cos\frac{\theta}{2} I - i\sin\frac{\theta}{2} X = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -i\sin\frac{\theta}{2} \\ -i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$R_y(\theta) = e^{-i\theta Y/2} = \cos\frac{\theta}{2} I - i\sin\frac{\theta}{2} Y = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -i\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$R_z(\theta) = e^{-i\theta Z/2} = \cos\frac{\theta}{2} I - i\sin\frac{\theta}{2} Y = \begin{pmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{pmatrix} \tag{3}$$

そして、1 量子ビットの任意のユニタリ回転ゲートは、これらの $Z - Y$ 回転行列で分解できる。実数 $\gamma, \phi, \theta, \lambda$ を用いて、

$$U(\theta, \phi, \lambda) \quad = e^{i\gamma} R_z(\phi) R_y(\theta) R_z(\lambda) = e^{i(\gamma - \frac{\theta}{2} - \frac{\phi}{2})} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -e^{i\lambda}\sin\frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2} & e^{i(\lambda+\phi)\cos\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix} \tag{4}$$

上記で用いられる $e^{i(\gamma - \frac{\theta}{2} - \frac{\phi}{2})}$ は、全体位相と呼ばれ、ブロッホ球上の回転操作や回転角に直接関わることなく、また実際に観測される量ではないため、実際の任意の回転行列は、

$$U(\theta, \phi, \lambda) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -e^{i\lambda}\sin\frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2} & e^{i(\lambda+\phi)}\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \tag{5}$$

となる。

このユニタリ回転ゲートを用いいると、アダマール演算子 H は、

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & (6) \\
&= \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -e^{i\pi}\sin\frac{\pi}{4} \\ e^{i0}\sin\frac{\pi}{4} & e^{i\pi}\cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} & (7) \\
&= U(\frac{1}{2}\pi, 0, \pi) & (8)
\end{aligned}
$$

となる。