グローバーのアルゴリズム

9BSP1118 村岡海人

2022 年 11 月 17 日

1　概要

このグローバーのアルゴリズムは以下のような流れで行う。N 個のデータに対して、$\Omega(\sqrt{N})$ 回の計算量で回を見出すことができる。古典的な探索アルゴリズムにも同じ計算量を持つ 2 分探索があるが、2 分探索アルゴリズムは事前にソートされているデータを扱うため、ソートされていないデータの探索アルゴリズムではグローバーのアルゴリズムの方が高速である。

このグローバーのアルゴリズムは以下のような流れで行う。n を量子ビット数とすると、$N = 2^n$ の要素からなるデータベースから M 個の解を探索する問題を考え、要素のラベルを n 桁のビット列 $x = x_1 \cdots x_n$ とする。

- 全ての状態の重ね合わせ状態 $|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_x |x\rangle$ を用意する
- 演算子 U_w(解に対する反転操作) を作用させる
- 演算子 U_s（$|s\rangle$ を対称軸にした反転操作) を作用させる
- 2、3 を k 回繰り返す

2　アルゴリズムの流れ

まず初めに、全ての状態の重ね合せ状態 $|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_x |x\rangle$ を用意する。TODO: この内容を入れるかどうか検討する初期状態 $|0\rangle^{\otimes n}$ に対して全ての量子ビットにアダマール演算をかけると、

$$
\begin{aligned}
|s\rangle &= H^{\otimes n}|0\rangle^{\otimes n} \\
&= (H \otimes \cdots \otimes H)|0 \cdots 0\rangle \\
&= \frac{1}{(\sqrt{2^n})}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes \cdots \otimes (|0\rangle + |1\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2^n}}(|00\cdots 00\rangle + |00\cdots 01\rangle + \cdots + |11\cdots 10\rangle + |11\cdots 11\rangle) \\
|s\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{x=0}^{2^n-1}|x\rangle
\end{aligned} \tag{1}
$$

のように計算できる。

次に解に対する反転操作を作用させる。入力 $|x\rangle$ に対して x が解なら、-1 を掛けて位相を反転し、解でないなら 1 を掛ける。つまり、ゲートを以下のように定義する。

$$
\begin{cases}
U_w|x\rangle = |x\rangle\,(x \neq w) \\
U_w|w\rangle = -|w\rangle
\end{cases} \tag{2}
$$

$$
U_w = I - 2\sum_{w \in \text{解}}|w\rangle\langle w| \tag{3}
$$

これを用いると、$|s\rangle$ は、

$$
\begin{aligned}
U_w|s\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{x=0,x\neq w}^{2^n-1}U_w|x\rangle + \frac{1}{\sqrt{2^n}}U_w|x\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{x=0,x\neq w}^{2^n-1}|x\rangle - \frac{1}{\sqrt{2^n}}|w\rangle \\
&= \left(|s\rangle - \frac{1}{\sqrt{2^n}}|w\rangle\right) - \frac{1}{\sqrt{2^n}}|w\rangle \\
U_w|s\rangle &= |s\rangle - \frac{2}{\sqrt{2^n}}|w\rangle
\end{aligned} \tag{4}
$$

のように計算できる。