1　量子特異値変換

任意の行列が与えられた時に任意の特異値分解ができる。
特異値とは、任意の行列 A はユニタリー行列 W, V を用いて、

$$A = W\Sigma V^\dagger \tag{1}$$

と表される。ただし、Σ は対角行列。
量子特異値変換は、(1) のように分解できる行列 A がある際に、

$$U = Wf(\Sigma)V^\dagger \tag{2}$$

のようなユニタリー演算子を作ることができる。量子特異値変換の目的は、特異値を好きな関数へ変換することにある。

2　量子特異値変換の重要な要素

量子特異値変換を構成する重要な要素は、以下の 3 つである。

- 量子信号処理 (Quantum signal processing)
- 量子ビット化 (Qubitization)
- ブロック埋め込み (Block encoding)

がある。

3　量子信号処理

NMR における信号強度を上げるための合成パルスに由来

4　1 量子ビットの回転ゲート

4.1　パウリ行列

量子計算に必要となる量子ビットに対する演算子を定義する。最も重要な演算子に**パウリ演算子**がある。

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

4.2　回転ゲート

ブロッホ球上で x, y, z 軸に θ 回転するゲートである。

$$
\begin{aligned}
R_A(\theta) &= e^{-i(\theta/2)A} && (4)\\
&= \cos(\theta/2)I - i\sin(\theta/2)A && (5)
\end{aligned}
$$

5　量子信号処理 (Quantum signal processing)

5.1　信号演算子

信号 a に依存した x 軸回転である。

$$
W(a) = \begin{pmatrix} a & i\sqrt{i-a^2} \\ i\sqrt{1-a^2} & a \end{pmatrix} = R_X(-2\cos^{-1}(a)) \tag{6}
$$

5.1.1　証明

以下証明である。

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a & i\sqrt{1-a^2} \\ i\sqrt{1-a^2} & a \end{pmatrix} =& aI + i\sqrt{1-a^2} && (7)\\
=& \cos\big(\cos^{-1}(a)\big)I + i\sin\big(\cos^{-1}(a)\big)X && (8)\\
=& \cos\left(\frac{2\cos^{-1}(a)}{2}\right)I - i\left(-i\sin\left(\frac{2\cos^{-1}(a)}{2}\right)\right)X && (9)\\
=& \cos\left(\frac{-2\cos^{-1}(a)}{2}\right)I - i\sin\left(\frac{-2\cos^{-1}(a)}{2}\right)X && (10)\\
=& e^{-i(\frac{-2\cos^{-1}a}{2})X} && (11)\\
=& R_X(-2\cos^{-1}a) && (12)
\end{aligned}
$$

5.2　信号処理演算子

信号 a を処理するために、z 軸に対する -2ϕ の回転として、

$$
S(\phi) = e^{i\phi Z} \tag{13}
$$

と定義する。

5.3　量子信号処理操作 (QSP)

これらを d 回繰り返して定義

量子信号処理は、x 軸と z 軸を d 回、繰り返し作用させる。

$$U_{\vec{\phi}} = e^{i\phi_0 Z} \prod_{k=1}^{d} W(a) e^{i\phi_k Z} \tag{14}$$

ϕ は上手く人間側が上手く設定することによって、信号 a を処理する。

5.4　量子信号処理：一般論

量子信号処理とは、ある条件を満たす多項式 $P(a)$ と $Q(a)$ に対して、

$$U_{\vec{\phi}} = e^{i\phi_0 Z} \prod_{k=1}^{d} W(a) e^{i\phi_k Z} = \begin{pmatrix} P(a) & iQ(a)\sqrt{1-a^2} \\ iQ^*(a)\sqrt{1-a^2} & P^*(a) \end{pmatrix} \tag{15}$$

を満たすような $\vec{\phi}$ が存在する。x 軸と z 軸回転を繰り返した 1 量子ビットの回転ゲート。z 軸回転は好きに決めて良い。

ただし、多項式 $P(a), Q(a)$ には以下の条件が課せられる。

- $P(a)$ は d 次以下、$Q(a)$ は $(d-1)$ 次以下の多項式
- $P(a)$ のパリティは $d \mod 2$、$Q(a)$ のパリティは $(d-1) \mod 2$
- $|P|^2 + (1-a^2)|Q|^2 = 1$

また、θ を適切に選べば、条件を満たす関数であれば、必ず式 (15) は成り立つ。

6　量子ビット化 (Qubitization)

複雑な系でも 2 次元の部分空間を考えると、あたかも量子ビットの操作として議論できる。

振幅増幅アルゴリズムを見ながら、量子ビット化の考え方を見ていく。

6.1　振幅増幅アルゴリズム

あるユニタリ、$U, U^\dagger$、および入力 A_ϕ と出力 B_ϕ

$$A_\phi = e^{i\phi |A_0\rangle\langle A_0|}, B_\phi = e^{i\phi |B_0\rangle\langle B_0|} \tag{16}$$

が与えられているときに、

$$|\langle A_0| Q |B_0\rangle|^2 \to 1 \tag{17}$$

となる Q を構成する。ただし、$\langle A_0| U |B_0\rangle$ は非ゼロとする。