量子位相推定

9BSP1118 村岡海人

2022 年 7 月 13 日

1　概要

量子位相推定アルゴリズムは、アダマールテストの測定側の量子ビットを拡張し、量子フーリエ変換を組み合わせたものである。

アダマールテストでは、固有値の位相 λ は測定結果の確率分布に反映されていた。そのため、測定結果をたくさんサンプルし、λ を推定する必要があった。これを少し工夫することにより、測定結果から位相の情報を直接的に取り出すことができる。それが量子位相推定である。

この量子アルゴリズムは、数多くの量子アルゴリズムの基礎として使われており、量子アルゴリズムの中で最も重要なものの１つである。

1.1　はじめに

まず初めに、$\lambda/2\pi$ を 2 進数に展開する。

$$\frac{\lambda}{2\pi} = j = \frac{j_1}{2^1} + \frac{j_2}{2^2} + \cdots + \frac{j_k}{2^k} + \cdots \tag{1}$$

j_k は 0 または 1 をとる古典ビットである。λ は $e^{i\lambda}$ の形のみで出てくるので、$0 \leq \lambda < 2\pi$ として一般性を失わない。この 2 進数を、通常の小数の表記にならって、

$$\lambda = (2\pi)0.j_1 j_2 \cdots j_k \cdots \tag{2}$$

と書ける。

1.2　位相推定アルゴリズムの流れ

量子位相推定は以下のような流れで行う。初期化された n 個の q ビットと入力状態 $|\psi\rangle$ を用いてユニタリー演算 U の固有値の位相 λ を求める。

1. $|0\rangle$ に初期化された n 個の補助量子ビットのそれぞれに、アダマールテストと同様、アダマールゲートを作用させる。
2. 再度、n 個の補助量子ビットによってコントロールされた制御ユニタリー演算を固有ベクト

ル $|\psi\rangle$ に作用させる。ただし、k 番目 $(k=1,\cdots,n)$ の補助量子ビットには制御 $U^{2^{k-1}}$ 演算をする。

3. n 個の補助量子ビットに逆フーリエ変換 (図 1 の $QFT^{\dagger}$) を作用させる。
4. 最後に、補助量子ビットの測定を行えば、100% の確率で $j_1, j_2\cdots, j_n$ が得られ、U の固有値の位相 λ が求められる。

上記のことを量子回路で表したのが図 1 である。

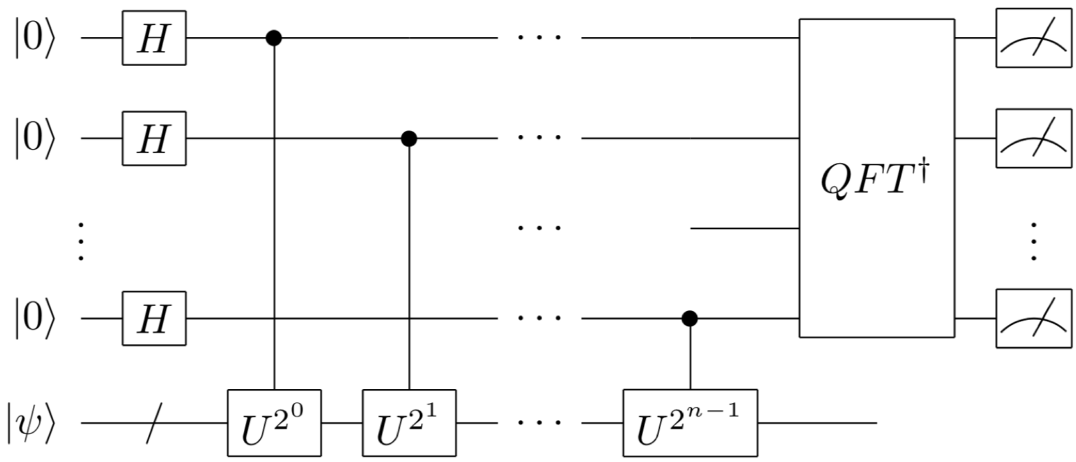

図 1　量子位相推定の量子回路

2　量子位相推定

2.1　入力が固有ベクトルの場合

入力が固有ベクトル $|\psi\rangle$ である場合を考える。また、ここでは位相 λ が n 桁まで 2 進数展開できる特殊な λ であるとする。すると、式（2）より、位相 λ の 2 進数展開は、

$$\lambda = (2\pi)0.j_1 j_2 \cdots j_n \tag{3}$$

となる。

まず初めに、n 個の $|0\rangle$ に初期化された補助量子ビットのそれぞれに、アダマールゲートと制御ユニタリー演算 $\Lambda(U^{2^{k-1}})$ を作用させる。$U|\psi\rangle = e^{i2\pi\lambda}|\psi\rangle$ なので、k 番目の補助量子ビットには $e^{i2^{k-1}\lambda}$ の位相が獲得される。

$k=1$ の場合、アダマールテストと同様に、

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + e^{i(2\pi)0.j_1 j_2\cdots j_n}|1\rangle\right) \tag{4}$$

となり、$k=2$ の場合は、

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + e^{i(2\pi)2^1 \cdot 0.j_1 j_2 \cdots j_n}|1\rangle\right) \tag{5}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + e^{i(2\pi)j_1.j_2 j_3 \cdots j_n}|1\rangle\right) \tag{6}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + e^{i(2\pi)0.j_2 j_3 \cdots j_n}|1\rangle\right) \tag{7}$$

となる。これを n 回繰り返して、

$$\left(\frac{|0\rangle + e^{i(2\pi)0.j_1 \cdots j_n}|1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \otimes \left(\frac{|0\rangle + e^{i(2\pi)0.j_2 \cdots j_n}|1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \otimes \cdots \otimes \left(\frac{|0\rangle + e^{i(2\pi)0.j_n}|1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \otimes |\psi\rangle \tag{8}$$

という状態が得られる。つまり、固有値の位相を 2 進小数表示で 1 ビットずつシフトしたのもが式 (8) のように各補助量子ビットの位相に格納される。

式 (8) の形は、量子フーリエ変換の結果の式と同じ形をしている。そのため、次は逆量子フーリエ変換 ($QFT^\dagger$) を補助量子ビットに作用させると、

$$\left(\frac{|0\rangle + e^{i(2\pi)0.j_1 \cdots j_n}|1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \otimes \left(\frac{|0\rangle + e^{i(2\pi)0.j_2 \cdots j_n}|1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \otimes \cdots \otimes \left(\frac{|0\rangle + e^{i(2\pi)0.j_n}|1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \to |j_1 \cdots j_n\rangle \tag{9}$$

となる。

この段階で補助量子ビットの測定を行えば、100% の確率で、$j_1, j_2, \cdots, j_n$ が得られ、U の固有値の位相 λ が求められる。

測定を除いた回路全体を位相推定のためのユニタリー演算 W とすると、

$$W|0\cdots 0\rangle|\psi\rangle = |j_1 \cdots j_n\rangle|\psi\rangle \tag{10}$$

となる W を構成できた。

まとめると、位相推定アルゴリズムによって、対応する固有ベクトル $|\psi\rangle$ で与えられるユニタリーオペレータ U の固有値の位相 λ を推定できる。この手続きの核心を成す重要な点は次の変換を実行する逆量子フーリエ変換にある。式 (7) より、

$$\left(\frac{|0\rangle + e^{i(2\pi)0.j_1 \cdots j_n}|1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \otimes \cdots \otimes \left(\frac{|0\rangle + e^{i(2\pi)0.j_n}|1\rangle}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2^{n/2}}\sum_{k=0}^{2^n-1} e^{2\pi ijk}|k\rangle \tag{11}$$

とすると、

$$\frac{1}{2^{n/2}}\sum_{k=0}^{2^n-1} e^{2\pi ijk}|k\rangle|\psi\rangle \to |\tilde{j}\rangle|\psi\rangle \tag{12}$$

ここで、$|\tilde{j}\rangle$ は測定さえれたとき j の良い測定量を与える状態を表す。

2.2 λ が n 桁の 2 進数で表せられない場合

λ が 2 進数で表せない場合について、位相推定アルゴリズムがどのような状態を返すのか考える。式 (12) より、n ビットでは高い確率で λ のかなり良い近似を与えることを明らかにした。λ が

2 進数で表記できない場合、つまり λ が 2 進数で表記する際に n 桁より大きくなる場合、最後の測定の際に若干のエラーが生じる。このエラーは測定を繰り返せば克服することができる。

では、高い確率で λ を推定するにはどうすれば良いか考える。b を 0 から 2^n-1 の範囲の整数として、$b/2^t=0.b_1b_2\cdots b_n$ が、j より小さく j の最良の n ビット近似になるように選ぶとする。つまり、j と $b/2^n$ の差 $\delta\equiv j-b/2^n$ は、$0\leq\delta\leq 2^{-t}$ を満たす。

逆量子フーリエ変換を式 (11) に適用すると、

$$\frac{1}{2^n}\sum_{k,l=0}^{2^n-1}e^{\frac{-2\pi ikl}{2^n}}e^{2\pi ijk}\left|l\right\rangle \tag{13}$$

α_l を $|(b+l)(mod2^t)\rangle$ の振幅とすると、

$$\alpha_l\equiv\frac{1}{2^t}\sum_{k=0}^{2^t-1}\left(e^{2\pi i(j-(b+l)/2^t)}\right) \tag{14}$$

これは幾何級数なので

$$\begin{aligned}\alpha_l &= \frac{1}{2^n}\left(\frac{1-e^{2\pi i(2^nj-(b+l))}}{1-e^{2\pi i(\delta-l/2^n)}}\right) &(15)\\ &= \frac{1}{2^n}\left(\frac{1-e^{2\pi i(2^n\delta-l)}}{1-e^{2\pi i(\delta-l/2^t)}}\right) &(16)\end{aligned}$$

最終測定結果を m とする。我々の目的が $|m-b|>e$ となる値 m を得る確率の限界を与えることである。ここで、e は所望の許容誤差を特徴づける正の整数である。そのような m を観測する確率は

$$p(|m-b|>e)=\sum_{-2^{t-1}<l\leq-(e+1)}|\alpha_l|^2+\sum_{e+1\leq l\leq 2^{t-1}}|\alpha_l|^2 \tag{17}$$

で与えられる。しかし、任意の実数 θ に対して $|1-e^{i\theta}|\leq 2$ なので、

$$|\alpha_l|\leq\frac{2}{2^t|1-e^{2\pi i(\delta-l/2^t)}|} \tag{18}$$

$-\pi\leq\theta\leq\pi$ ならば常に $|1-\exp(i\theta)|\geq 2|\theta|/\pi$ である。しかし、$-2^{t-1}<l\leq 2^{t-1}$ のときに $-\pi\leq 2\pi(\delta-l/2^t)\leq\pi$ となる。したがって、

$$|\alpha_l|\leq\frac{1}{2^{n+1}(\delta-l/2^n)} \tag{19}$$

式 (17) と式 (19) を組み合わせると、

$$p(|m-b|>e)\leq\frac{1}{4}\left[\sum_{l=-2^{n-1}+1}^{-(e+1)}\frac{1}{(l-2^n\delta)^2}\sum_{l=e+1}^{2^t-1}\frac{1}{(l-2^n\delta)^2}\right] \tag{20}$$

となる。$0\leq\delta\leq 2^{-n}$ より、$0\leq 2^{-n}\delta\leq 1$ から、

$$p(|m-b|>e) \leq \frac{1}{4}\left[\sum_{l=-2^{n-1}+1}^{-(e+1)}\frac{1}{l^2}+\sum_{l=e+1}^{2^n-1}\frac{1}{(l-2^n\delta)^2}\right] \tag{21}$$

$$\leq \quad \frac{1}{2}\sum_{l=e}^{2^{n-1}-1}\frac{1}{l^2} \tag{22}$$

$$\leq \quad \frac{1}{2}\int_{e-1}^{2^{n-1}-1} dl\frac{1}{l^2} \tag{23}$$

$$= \quad \frac{1}{2(e-1)} \tag{24}$$

精度 2^{-t} で j を近似する。つまり、$e = 2^{n-t} - 1$ と選ぶ。位相推定アルゴリズムで $n = t + p$ 個の q ビットを使用すると、式 (24) から、この精度で正し近似を得る確率は少なくとも $1 - 1/2(2^p - 2)$ であることがわかる。したがって、t ビット精度で少なくとも $1 - \epsilon$ の成功確率で正確に j をえるには、

$$n = t + \left\lceil \log\left(2 + \frac{1}{2\epsilon}\right)\right\rceil \tag{25}$$

2.3　入力が固有ベクトルではない場合

先ほどの 2.1 では、入力が固有ベクトルである場合を考えた。そのため、次は一般的な量子状態 $|\psi\rangle$ が与えられた場合を考える。U の固有ベクトル $|eigen_l\rangle$ とし、対応する固有値を $e^{i\lambda_l}$ とする。ある一般的な量子状態 $|\psi\rangle$ が与えられた場合、これは必ず固有ベクトルで展開することができるので、

$$|\psi\rangle = \sum_l c_l |eigen_l\rangle \tag{26}$$

となる。c_l は複素数の集合である。

このときの位相推定アルゴリズムは、n 個の補助量子ビットを用いて、入力状態を

$$|00\cdots 0\rangle |\psi\rangle \rightarrow \sum_l c_l |\lambda_l\rangle |eigen_l\rangle \tag{27}$$

のように変換するアルゴリズムのことである。ここで、λ_l の 2 進数の表示が n 桁で終わると仮定して、$|\lambda_l\rangle$ は固有値の位相 λ_l の 2 進数表示、$lambda_l = (2\pi)0.j_1^{(l)}\cdots j_n^{(l)}$ に対応する量子状態 $|j_1^{(l)}\cdots j_n^{(l)}\rangle$ である。つまり、位相推定アルゴリズムは、$|\psi\rangle$ の重ね合わせにあるそれぞれの固有ベクトルに対応した固有値を n 個数の補助量子ビットへと取り出すアルゴリズムである。この状態に対して補助量子ビットの測定をすると、確率、

$$p_l = |c_l|^2 \tag{28}$$

で、どれか１つの固有ベクトル $|eigen_l\rangle$ とその固有値 λ_l が乱択される。