量子フーリエ変換

9BSP1118 村岡海人

2022 年 6 月 15 日

1　定義

2^n 成分の配列 $\{x_j\}$ に対して、その離散フーリエ変換である配列 $\{y_k\}$ を

$$y_k \equiv \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{j=0}^{2^n-1} x_j e^{i\frac{2\pi kj}{2^n}} \tag{1}$$

で定義する。$(j = 0, \cdots, 2^n - 1)$,$(k = 0, \cdots, 2^n - 1)$

また、量子フーリエ変換アルゴリズムは、入力の量子状態に、

$$|x\rangle \coloneqq \sum_{k=0}^{2^n-1} x_j |j\rangle$$

を

$$|y\rangle \coloneqq \sum_{k=0}^{2^n-1} y_k |k\rangle \tag{2}$$

となるように変換する量子アルゴリズムである。ここで、(1) を (2) に代入する。

$$\begin{aligned} |y\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{k=0}^{2^n-1} \sum_{j=0}^{2^n-1} x_j e^{i\frac{2\pi kj}{2^n}} |k\rangle \\ &= \sum_{j=0}^{2^n-1} x_j \left(\frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{k=0}^{2^n-1} e^{i\frac{2\pi kj}{2^n}} |k\rangle \right) \end{aligned}$$

となる。

よって、量子フーリエ変換は、

$$|j\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{k=0}^{2^n-1} e^{i\frac{2\pi kj}{2^n}} |k\rangle$$

を行う量子回路を見つければよいことになる。

また、この式はさらに変形でき、$k = k_1 \cdot 2^{n-1} + \cdots + k_n \cdot 2^0$、$(k)_{10} = (k_1 k_2 \cdots k_n)_2$ より、

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{2^n-1} e^{i\frac{2\pi kj}{2^n}} |k\rangle &= \sum_{k_1=0}^{1}\sum_{k_2=0}^{1}\cdots\sum_{k_n=0}^{1} e^{i\frac{2\pi j(k_1 2^{n-1}+\cdots+k_n 2^0)}{2^n}} |k_1\cdots k_n\rangle \\ &= \sum_{k_1=0}^{1}\sum_{k_2=0}^{1}\cdots\sum_{k_n=0}^{1} e^{i2\pi j(k_1 2^{-1}+\cdots+k_n 2^{-n})} |k_1\cdots k_n\rangle\end{aligned}$$

因数分解して、全体をテンソル積で書き直すと、

$$= \left(\sum_{k_1=0}^{1} e^{2\pi j k_1 2^{-1}} |k_1\rangle\right) \otimes \cdots \otimes \left(\sum_{k_n=0}^{1} e^{2\pi j k_n 2^{-n}} |k_n\rangle\right)$$

10 進数 j は、2 進数で、

$$j = j_1 \cdot 2^{n-1} + j_2 \cdot 2^{n-2} + \cdots + j_{n-1} \cdot 2 + j_n \cdot 2^0$$

なので、2 進小数は、

$$0.j_1 j_2 \cdots j_{n-1} j_n = j_1 \cdot 2^{-1} + j_2 \cdot 2^{-2} + \cdots + j_{n-1} \cdot 2^{-n+1} + j_n \cdot 2^{-n}$$

となるから、これを用いて、括弧内を計算すると、

$$\sum_{k=0}^{2^n-1} e^{i\frac{2\pi kj}{2^n}} |k\rangle = \left(|0\rangle + e^{2\pi 0.j_n} |1\rangle\right) \otimes \left(|0\rangle + e^{2\pi 0.j_{n-1}j_n} |1\rangle\right) \otimes \cdots \otimes \left(|0\rangle + e^{2\pi 0.j_1 j_2 \cdots j_n} |1\rangle\right)$$

となる。

まとめると、量子フーリエ変換は、

$$|j\rangle = |j_1 \cdots j_n\rangle \to \frac{\left(|0\rangle + e^{2\pi 0.j_n} |1\rangle\right) \otimes \cdots \otimes \left(|0\rangle + e^{2\pi 0.j_1 j_2 \cdots j_n} |1\rangle\right)}{\sqrt{2^n}} \tag{3}$$

という変換ができればよい。

2　回路の作成

量子フーリエ変換を実行する回路を作成していく。そのため、アダマールゲート H についての等式、

$$H|M\rangle = \frac{|0\rangle + e^{i2\pi 0.m} |1\rangle}{\sqrt{2}} \qquad (m = 0, 1)$$

と、角度 $\frac{2\pi}{2^l}$ の一般位相ゲート

$$Re = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{2\pi}{2^l}} \end{pmatrix}$$

を利用する。

まず初めに、状態 $(|0\rangle + e^{i2\pi 0.j_1 j_2 \cdots j_n}|1\rangle)$ の部分を作る。1 番目の量子ビット $|j_1\rangle$ にアダマールゲートを作用させると、

$$|j_1 \cdots j_n\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i2\pi 0.j_1}|1\rangle)|j_2 \cdots j_n\rangle$$

となる。ここで、2 番目のビット $|j_2\rangle$ を制御ビットとする一般位相ゲート R_2 を 1 番目の量子ビットにかけると、$j_2 = 0$ の時は何もせず、$j_2 = 1$ の時は 1 番目の量子ビットの $|1\rangle$ 部分に位相 $2\pi/2^2 = 0.01$(2 進小数) がつくため、

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i2\pi 0.j_1}|1\rangle)|j_2 \cdots j_n\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i2\pi 0.j_1 j_2}|1\rangle)|j_2 \cdots j_n\rangle$$

となる。以下、l 番目の量子ビット $|j_l\rangle$ を制御ビットとする一般位相ゲート R_l をかけると $(l = 3, \cdots, n)$、最終的に、

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i2\pi 0.j_1 \cdots j_n}|1\rangle)|j_2 \cdots j_n\rangle$$

が得られる。

次に、状態 $(|0\rangle + e^{i2\pi 0.j_2 \cdots j_n}|1\rangle)$ の部分を作る。先ほどと同様に、2 番目のビット $|j_2\rangle$ にアダマールゲートを作用させると、

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i2\pi 0.j_1 \cdots j_n}|1\rangle)\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i2\pi 0.j_2}|1\rangle)|j_3 \cdots j_n\rangle$$

となる。再び、3 番目の量子ビットを制御ビット $|j_3\rangle$ とする位相ゲート R_2 をかけると、

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i2\pi 0.j_1 \cdots j_n}|1\rangle)\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i2\pi 0.j_2 j_3}|1\rangle)|j_3 \cdots j_n\rangle$$

となる。これを繰り返して、

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i2\pi 0.j_1 \cdots j_n}|1\rangle)\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i2\pi 0.j_2 \cdots j_n}|1\rangle)|j_3 \cdots j_n\rangle$$

となる。

以上のことを、l 番目の量子ビット $|j_l\rangle$ にアダマールゲート・制御位相ゲート $R_l, R_{l+1}, \cdots$ をかけていく $(l = 3, \cdots, n)$。すると、最終的に、

$$|j_1 \cdots j_n\rangle \to \left(\frac{|0\rangle + e^{i2\pi 0.j_1 \cdots j_n}|1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \otimes \left(\frac{|0\rangle + e^{i2\pi 0.j_2 \cdots j_n}|1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \otimes \cdots \otimes \left(\frac{|0\rangle + e^{i2\pi 0.j_n}|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$

となる。

(3) と比較すると、ビットの順番が逆になっているので、SWAP ゲートでビットの順番を反転させてあげれば、量子フーリエ変換を実行する回路が構成でいたことになる。

SWAP ゲートを除いた、量子回路図で書くと、図 1 となる。

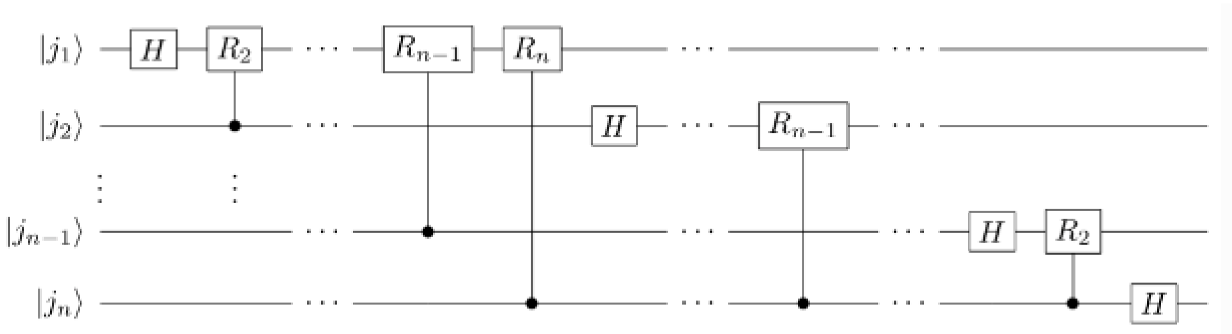

図 1　SWAP ゲートを除いた量子フーリエ変換の量子回路

3　計算量について

量子フーリエ変換の計算量と、古典アルゴリズムである「離散フーリエ変換 (DFT)」と「高速フーリエ変換 (FFT)」の計算量を比較してみる。

まず、DFT の計算量について。DFT は次の式で定義される。

$$y_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} x_j e^{-i\frac{2\pi jk}{N}}$$

ここで､$k = 0, 1, \cdots, N-1$ である。これをコンピュータ上に実装することを考えると､$(x_0, x_1, \cdots)$ を列ベクトルとみなせば、離散フーリエ変換は、$N \times N$ 行列の演算になっているので、DFT の計算量は $\mathcal{O}(N^2)$ である。

次に、FFT の計算量について。代表的な FFT に、Cooley-Tukey 型 FFT というのがある。これは、分割統治法を使ったアルゴリズムで、このアルゴリズムを使うことにより、計算量を $\mathcal{O}(N \log N)$ まで減らすことができる。

最後に、量子フーリエ変換の計算量について。量子フーリエ変換を行うために必要なゲートの操作の回数は、1 番目の量子ビットに n 回、2 番目の量子ビットに $n-1$ 回 ... に、$n-1$ 回最後の量子ビットに 1 回で、合計 $n(n-1)/2$ 回行う。そして、最後の SWAP 操作が約 $n/2$ 回なので、全て合わせると、$\mathcal{O}(n^2)$ 回である。n 量子ビットには 2^n 個のサンプルを埋め込めるので、量子フーリエ変換は $N = 2^n$ 個のサンプルに対して、$\mathcal{O}((\log N)^2)$ となる。

以上より、量子フーリエ変換と、古典アルゴリズムの DFT、FFT の計算量を比較すると、量子フーリエ変換の方が計算量が小さく、高速であることが言える。しかし、フーリエ変換した結果 y_k は量子フーリエ変換後の状態 $|y\rangle$ の確率振幅として埋め込まれているが、この振幅を読み出そうとすると、指数関数的な回数の観測を行わなければならない。つまり、素直に行うと指数関数的な時間がかかってしますため、実用するのは容易ではなく、さまざまな工夫や技術的発展が必要になり、量子フーリエ変換を他のアルゴリズムの一部として用いる方が実用的である。