量子フーリエ変換

9BSP1118 村岡海人

2022 年 6 月 14 日

1　定義

2^n 成分の配列 $\{x_j\}$ に対して、その離散フーリエ変換である配列 $\{y_k\}$ を

$$y_k \equiv \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{j=0}^{2^n-1} x_j e^{i\frac{2\pi kj}{2^n}} \tag{1}$$

で定義する。$(j = 0, \cdots, 2^n - 1)$,$(k = 0, \cdots, 2^n - 1)$

また、量子フーリエ変換アルゴリズムは、入力の量子状態に、

$$|x\rangle \coloneqq \sum_{k=0}^{2^n-1} x_j |j\rangle$$

を

$$|y\rangle \coloneqq \sum_{k=0}^{2^n-1} y_k |k\rangle \tag{2}$$

となるように変換する量子アルゴリズムである。ここで、(1) を (2) に代入する。

$$\begin{aligned} |y\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{k=0}^{2^n-1} \sum_{j=0}^{2^n-1} x_j e^{i\frac{2\pi kj}{2^n}} |k\rangle \\ &= \sum_{j=0}^{2^n-1} x_j \left(\frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{k=0}^{2^n-1} e^{i\frac{2\pi kj}{2^n}} |k\rangle \right) \end{aligned}$$

となる。

よって、量子フーリエ変換は、

$$|j\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{k=0}^{2^n-1} e^{i\frac{2\pi kj}{2^n}} |k\rangle$$

を行う量子回路を見つければよいことになる。

また、この式はさらに変形でき、$k = k_1 \cdot 2^{n-1} + \cdots + k_n \cdot 2^0$、$(k)_{10} = (k_1 k_2 \cdots k_n)_2$ より、

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{2^n-1} e^{i\frac{2\pi kj}{2^n}} |k\rangle &= \sum_{k_1=0}^{1} \sum_{k_2=0}^{1} \cdots \sum_{k_n=0}^{1} e^{i\frac{2\pi j(k_1 2^{n-1} + \cdots + k_n 2^0)}{2^n}} |k_1 \cdots k_n\rangle \\ &= \sum_{k_1=0}^{1} \sum_{k_2=0}^{1} \cdots \sum_{k_n=0}^{1} e^{i2\pi j(k_1 2^{-1} + \cdots + k_n 2^{-n})} |k_1 \cdots k_n\rangle\end{aligned}$$

因数分解して、全体をテンソル積で書き直すと、

$$= \left(\sum_{k_1=0}^{1} e^{2\pi j k_1 2^{-1}} |k_1\rangle\right) \otimes \cdots \otimes \left(\sum_{k_n=0}^{1} e^{2\pi j k_n 2^{-n}} |k_n\rangle\right)$$

10 進数 j は、2 進数で、

$$j = j_1 \cdot 2^{n-1} + j_2 \cdot 2^{n-2} + \cdots + j_{n-1} \cdot 2 + j_n \cdot 2^0$$

なので、2 進小数は、

$$0.j_1 j_2 \cdots j_{n-1} j_n = j_1 \cdot 2^{-1} + j_2 \cdot 2^{-2} + \cdots + j_{n-1} \cdot 2^{-n+1} + j_n \cdot 2^{-n}$$

となるから、これを用いて、括弧内を計算すると、

$$\sum_{k=0}^{2^n-1} e^{i\frac{2\pi kj}{2^n}} |k\rangle = \big(|0\rangle + e^{2\pi 0.j_n} |1\rangle\big) \otimes \big(|0\rangle + e^{2\pi 0.j_{n-1} j_n} |1\rangle\big) \otimes \cdots \otimes \big(|0\rangle + e^{2\pi 0.j_1 j_2 \cdots j_n} |1\rangle\big)$$

となる。

まとめると、量子フーリエ変換は、

$$|j\rangle = |j_1 \cdots j_n\rangle \to \frac{\big(|0\rangle + e^{2\pi 0.j_n} |1\rangle\big) \otimes \cdots \otimes \big(|0\rangle + e^{2\pi 0.j_1 j_2 \cdots j_n} |1\rangle\big)}{\sqrt{2^n}} \tag{3}$$

という変換ができればよい。

2 回路の作成

量子フーリエ変換を実行する回路を作成していく。そのため、アダマールゲート H についての等式、

$$H|M\rangle = \frac{|0\rangle + e^{i2\pi 0.m} |1\rangle}{\sqrt{2}} \qquad (m = 0, 1)$$

と、角度 $\frac{2\pi}{2^l}$ の一般位相ゲート

$$Re = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{2\pi}{2^l}} \end{pmatrix}$$

を利用する。

まず初めに、状態 $(|0\rangle + e^{i2\pi 0.j_1j_2\cdots j_n}|1\rangle)$ の部分を作る。1 番目の量子ビット $|j_1\rangle$ にアダマールゲートを作用させると、

$$|j_1\cdots j_n\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i2\pi 0.j_1}|1\rangle)|j_2\cdots j_n\rangle$$

となる。ここで、2 番目のビット $|j_2\rangle$ を制御ビットとする一般位相ゲート R_2 を 1 番目の量子ビットにかけると、$j_2 = 0$ の時は何もせず、$j_2 = 1$ の時は 1 番目の量子ビットの $|1\rangle$ 部分に位相 $2\pi/2^2 = 0.01$(2 進小数) がつくため、

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i2\pi 0.j_1}|1\rangle)|j_2\cdots j_n\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i2\pi 0.j_1j_2}|1\rangle)|j_2\cdots j_n\rangle$$

となる。以下、l 番目の量子ビット $|j_l\rangle$ を制御ビットとする一般位相ゲート R_l をかけると $(l = 3, \cdots, n)$、最終的に、

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i2\pi 0.j_1\cdots j_n}|1\rangle)|j_2\cdots j_n\rangle$$

が得られる。

次に、状態 $(|0\rangle + e^{i2\pi 0.j_2\cdots j_n}|1\rangle)$ の部分を作る。先ほどと同様に、2 番目のビット $|j_2\rangle$ にアダマールゲートを作用させると、

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i2\pi 0.j_1\cdots j_n}|1\rangle)\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i2\pi 0.j_2}|1\rangle)|j_3\cdots j_n\rangle$$

となる。再び、3 番目の量子ビットを制御ビット $|j_3\rangle$ とする位相ゲート R_2 をかけると、

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i2\pi 0.j_1\cdots j_n}|1\rangle)\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i2\pi 0.j_2j_3}|1\rangle)|j_3\cdots j_n\rangle$$

となる。これを繰り返して、

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i2\pi 0.j_1\cdots j_n}|1\rangle)\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i2\pi 0.j_2\cdots j_n}|1\rangle)|j_3\cdots j_n\rangle$$

となる。

以上のことを、l 番目の量子ビット $|j_l\rangle$ にアダマールゲート・制御位相ゲート $R_l, R_{l+1}, \cdots$ をかけていく $(l = 3, \cdots, n)$。すると、最終的に、

$$|j_1\cdots j_n\rangle \to \left(\frac{|0\rangle + e^{i2\pi 0.j_1\cdots j_n}|1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \otimes \left(\frac{|0\rangle + e^{i2\pi 0.j_2\cdots j_n}|1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \otimes \cdots \otimes \left(\frac{|0\rangle + e^{i2\pi 0.j_n}|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$

となる。

(3) と比較すると、ビットの順番が逆になっているので、SWAP ゲートでビットの順番を反転させてあげれば、量子フーリエ変換を実行する回路が構成でいたことになる。

SWAP ゲートを除いた、量子回路図で書くと、図 1 となる。

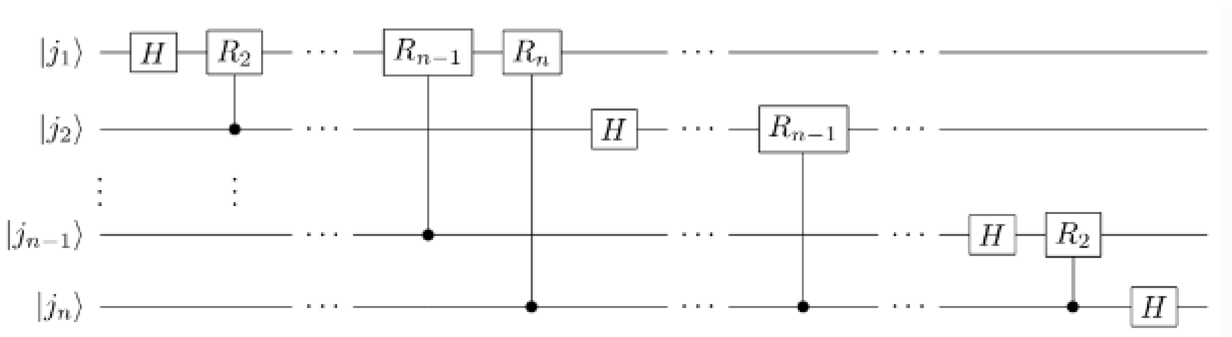

図１　SWAP ゲートを除いた量子フーリエ変換の量子回路