量子位相推定

9BSP1118 村岡海人

2022 年 7 月 6 日

1　概要

量子位相推定アルゴリズムは、アダマールテストの測定側の量子ビットを拡張し、量子フーリエ変換を組み合わせたものである。

アダマールテストでは、固有値の位相 λ は測定結果の確率分布に反映されていた。そのため、測定結果をたくさんサンプルし、λ を推定する必要があった。これを少し工夫することにより、測定結果から位相の情報を直接的に取り出すことができる。それが量子位相推定である。

この量子アルゴリズムは、数多くの量子アルゴリズムの基礎として使われており、量子アルゴリズムの中で最も重要なものの１つである。

1.1　はじめに

まず初めに、$\lambda/2\pi$ を 2 進数に展開する。

$$\frac{\lambda}{2\pi} = \frac{j_1}{2^1} + \frac{j_2}{2^2} + \cdots + \frac{j_k}{2^k} + \cdots \tag{1}$$

j_k は 0 または 1 をとる古典ビットである。λ は $e^{i\lambda}$ の形のみで出てくるので、$0 \leq \lambda < 2\pi$ として一般性を失わない。この 2 進数を、通常の小数の表記にならって、

$$\lambda = (2\pi)0.j_1 j_2 \cdots j_k \cdots \tag{2}$$

と書ける。

1.2　位相推定アルゴリズムの流れ

量子位相推定は以下のような流れで行う。初期化された n 個の q ビットと入力状態 $|\psi\rangle$ を用いてユニタリー演算 U の固有値の位相 λ を求める。

1. $|0\rangle$ に初期化された n 個の補助量子ビットのそれぞれに、アダマールテストと同様、アダマールゲートを作用させる。
2. 再度、n 個の量子ビットのそれぞれに、制御ユニタリー演算を作用させる。ただし、k 番目 $(k = 1, \cdots, n)$ の補助量子ビットには制御 $U^{2^{k-1}}$ 演算をする。

3. n 個の補助量子ビットに逆フーリエ変換 (図 1 の $QFT^{\dagger}$) を作用させる。
4. 最後に、補助量子ビットの測定を行えば、100% の確率で $j_1, j_2 \cdots, j_n$ が得られ、U の固有値の位相 λ が求められる。

上記のことを量子回路で表したのが図 1 である。

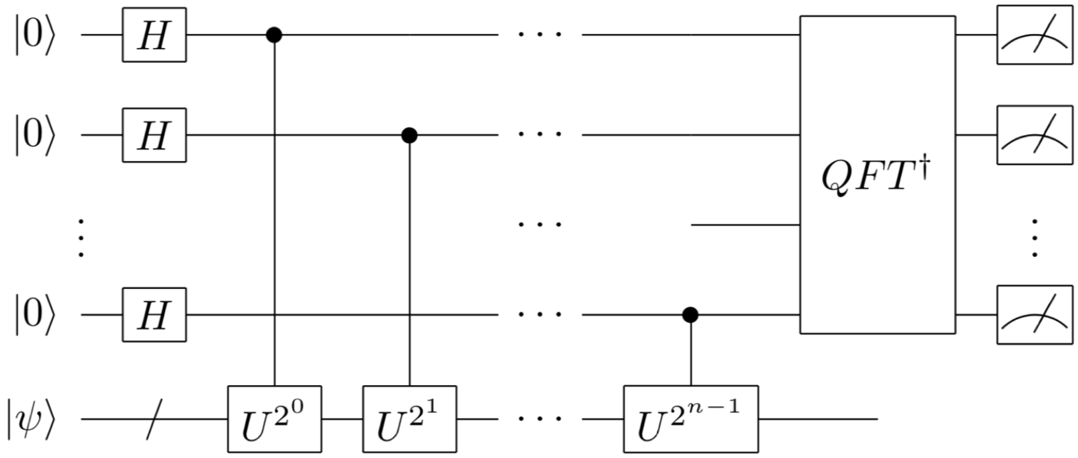

図 1　量子位相推定の量子回路

2　量子位相推定

2.1　入力が固有ベクトルの場合

入力が固有ベクトル $|\psi\rangle$ である場合を考える。また、ここでは位相 λ が n 桁まで 2 進数展開できる特殊な λ であるとする。すると、式（2）より、位相 λ の 2 進数展開は、

$$\lambda = (2\pi)0.j_1j_2\cdots j_n \tag{3}$$

となる。

まず初めに、n 個の $|0\rangle$ に初期化された補助量子ビットのそれぞれに、アダマールゲートと制御ユニタリー演算 $\Lambda(U^{2^{k-1}})$ を作用させる。$U|\psi\rangle = e^{i2\pi\lambda}|\psi\rangle$ なので、k 番目の補助量子ビットには $e^{i2^{k-1}\lambda}$ の位相が獲得される。

$k = 1$ の場合、アダマールテストと同様に、

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + e^{i(2\pi)0.j_1j_2\cdots j_n}|1\rangle\right) \tag{4}$$

となり、$k = 2$ の場合は、

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + e^{i(2\pi)2^1\cdot 0.j_1j_2\cdots j_n}|1\rangle\right) \tag{5}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + e^{i(2\pi)j_1.j_2j_3\cdots j_n}|1\rangle\right) \tag{6}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + e^{i(2\pi)0.j_2j_3\cdots j_n}|1\rangle\right) \tag{7}$$

となる。これを n 回繰り返して、

$$\left(\frac{|0\rangle + e^{i(2\pi)0.j_1\cdots j_n}|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)\otimes\left(\frac{|0\rangle + e^{i(2\pi)0.j_2\cdots j_n}|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)\otimes\cdots\otimes\left(\frac{|0\rangle + e^{i(2\pi)0.j_n}|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)\otimes|\psi\rangle \tag{8}$$

という状態が得られる。つまり、固有値の位相を 2 進小数表示で 1 ビットずつシフトしたのもが各補助量子ビットの位相に格納される。

式 (8) の形は、量子フーリエ変換の結果の式と同じ形をしている。そのため、次は逆量子フーリエ変換 ($QFT^\dagger$) を補助量子ビットに作用させると、

$$\left(\frac{|0\rangle + e^{i(2\pi)0.j_1\cdots j_n}|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)\otimes\left(\frac{|0\rangle + e^{i(2\pi)0.j_2\cdots j_n}|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)\otimes\cdots\otimes\left(\frac{|0\rangle + e^{i(2\pi)0.j_n}|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)\to|j_1\cdots j_n\rangle \tag{9}$$

となる。

この段階で補助量子ビットの測定を行えば、100% の確率で、$j_1, j_2, \cdots, j_n$ が得られ、U の固有値の位相 λ が求められる。

測定を除いた回路全体を位相推定のためのユニタリー演算 W とすると、

$$W|0\cdots 0\rangle|\psi\rangle = |j_1\cdots j_n\rangle|\psi\rangle \tag{10}$$

となる W を構成できた。

まとめると、位相推定アルゴリズムによって、対応する固有ベクトル $|\psi\rangle$ で与えられるユニタリーオペレータ U の固有値の位相 λ を推定できる。この手続きの核心を成す重要な点は次の変換を実行する逆量子フーリエ変換にある。式 (7) より、

$$\left(\frac{|0\rangle + e^{i(2\pi)0.j_1\cdots j_n}|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)\otimes\cdots\otimes\left(\frac{|0\rangle + e^{i(2\pi)0.j_n}|1\rangle}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2^{n/2}}\sum_{k=0}^{2^n-1} e^{2\pi ijk}|k\rangle \tag{11}$$

とすると、

$$\frac{1}{2^{n/2}}\sum_{k=0}^{2^n-1} e^{2\pi ijk}|k\rangle|\psi\rangle \to |\tilde{j}\rangle|\psi\rangle \tag{12}$$

ここで、$|\tilde{\lambda}\rangle$ は測定さえれたとき λ の良い測定量を与える状態を表す。

2.2　λ が n 桁の 2 進数で表せられない場合

λ が 2 進数で表せない場合について、位相推定アルゴリズムがどのような状態を返すのか考える。

式 (12) より、係数を

$$a(k) = e^{2\pi ijk} \tag{13}$$

とすると、$a(k)$ は、k に対して j という振動数を持って振動していることがわかる。そのため、フーリエ変換後には j に対応する $|j\rangle$ の振幅だけが残る。フーリエ変換の性質から、 λ がちょうど n 桁の 2 進数で表せなくても、近似値にあたる $|\tilde{j}\rangle$ 周辺の振幅が大きくなる。

では、高い確率で λ を推定するにはどうすれば良いか考える。b を 0 から 2^n-1 の範囲の整数として、$b/2^t = 0.b_1b_2\cdots b_n$ が、j より小さく j の最良の n ビット近似になるように選ぶとする。つまり、j と $b/2^n$ の差 $\delta \equiv j - b/2^n$ は、$0 \leq \delta \leq 2^{-t}$ を満たす。

逆量子フーリエ変換を式 (11) に適用すると、

$$\frac{1}{2^n}\sum_{k,l=0}^{2^n-1} e^{\frac{-2\pi ikl}{2^n}} e^{2\pi ijk}\,|l\rangle \tag{14}$$

α_l を $|(b+l)(mod2^t)\rangle$ の振幅とすると、

$$\alpha_l \equiv \frac{1}{2^t}\sum_{k=0}^{2^t-1}\left(e^{2\pi i(j-(b+l)/2^t)}\right) \tag{15}$$

これは幾何級数なので

$$\alpha_l = \frac{1}{2^n}\left(\frac{1-e^{2\pi i(2^n j-(b+l))}}{1-e^{2\pi i(\delta-l/2^n)}}\right) \tag{16}$$

$$= \frac{1}{2^n}\left(\frac{1-e^{2\pi i(2^n\delta-l)}}{1-e^{2\pi i(\delta-l/2^t)}}\right) \tag{17}$$

最終測定結果を m とする。我々の目的が $|m-b|>e$ となる値 m を得る確率の限界を与えることである。ここで、e は所望の許容誤差を特徴づける正の整数である。そのような m を観測する確率は

$$p(|m-b|>e) = \sum_{-2^{t-1}<l\leq-(e+1)}|\alpha_l|^2 + \sum_{e+1\leq l\leq 2^{t-1}}|\alpha_l|^2 \tag{18}$$

で与えられる。しかし、任意の実数 θ に対して $|1-e^{i\theta}|\leq 2$ なので、

$$|\alpha_l| \leq \frac{2}{2^t|1-e^{2\pi i(\delta-l/2^t)}|} \tag{19}$$

$-\pi \leq \theta \leq \pi$ ならば常に $|1-\exp(i\theta)| \geq 2|\theta|/\pi$ である。しかし、$-2^{t-1} < l \leq 2^{t-1}$ のときに $-\pi \leq 2\pi(\delta - l/2^t) \leq \pi$ となる。したがって、

$$|\alpha_l| \leq \frac{1}{2^{n+1}(\delta-l/2^n)} \tag{20}$$

式 (18) と式 (20) を組み合わせると、

$$p(|m-b|>e) \leq \frac{1}{4}\left[\sum_{l=-2^{n-1}+1}^{-(e+1)}\frac{1}{(l-2^n\delta)^2}\sum_{l=e+1}^{2^t-1}\frac{1}{(l-2^n\delta)^2}\right] \tag{21}$$