量子フーリエ変換

9BSP1118 村岡海人

2022 年 6 月 14 日

1　定義

2^n 成分の配列 $\{x_j\}$ に対して、その離散フーリエ変換である配列 $\{y_k\}$ を

$$y_k \equiv \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{j=0}^{2^n-1} x_j e^{i\frac{2\pi kj}{2^n}} \tag{1}$$

で定義する。$(j = 0, \cdots, 2^n - 1)$,$(k = 0, \cdots, 2^n - 1)$

また、量子フーリエ変換アルゴリズムは、入力の量子状態に、

$$|x\rangle \coloneqq \sum_{k=0}^{2^n-1} x_j |j\rangle$$

を

$$|y\rangle \coloneqq \sum_{k=0}^{2^n-1} y_k |k\rangle \tag{2}$$

となるように変換する量子アルゴリズムである。ここで、(1) を (2) に代入する。

$$\begin{aligned}
|y\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{k=0}^{2^n-1} \sum_{j=0}^{2^n-1} x_j e^{i\frac{2\pi kj}{2^n}} |k\rangle \\
&= \sum_{j=0}^{2^n-1} x_j \left(\frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{k=0}^{2^n-1} e^{i\frac{2\pi kj}{2^n}} |k\rangle \right)
\end{aligned}$$

となる。

よって、量子フーリエ変換は、

$$|j\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{k=0}^{2^n-1} e^{i\frac{2\pi kj}{2^n}} |k\rangle$$

を行う量子回路を見つければよいことになる。

また、この式はさらに変形でき、$k = k_1 \cdot 2^{n-1} + \cdots + k_n \cdot 2^0$、$(k)_{10} = (k_1 k_2 \cdots k_n)_2$ より、

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{2^n-1} e^{i\frac{2\pi kj}{2^n}} |k\rangle &= \sum_{k_1=0}^{1}\sum_{k_2=0}^{1}\cdots\sum_{k_n=0}^{1} e^{i\frac{2\pi j(k_1 2^{n-1}+\cdots+k_n 2^0)}{2^n}} |k_1 \cdots k_n\rangle \\ &= \sum_{k_1=0}^{1}\sum_{k_2=0}^{1}\cdots\sum_{k_n=0}^{1} e^{i2\pi j(k_1 2^{-1}+\cdots+k_n 2^{-n})} |k_1 \cdots k_n\rangle\end{aligned}$$

因数分解して、全体をテンソル積で書き直すと、

$$= \left(\sum_{k_1=0}^{1} e^{2\pi j k_1 2^{-1}} |k_1\rangle\right) \otimes \cdots \otimes \left(\sum_{k_n=0}^{1} e^{2\pi j k_n 2^{-n}} |k_n\rangle\right)$$

10 進数 j は、2 進数で、

$$j = j_1 \cdot 2^{n-1} + j_2 \cdot 2^{n-2} + \cdots + j_{n-1} \cdot 2 + j_n \cdot 2^0$$

なので、2 進小数は、

$$0.j_1 j_2 \cdots j_{n-1} j_n = j_1 \cdot 2^{-1} + j_2 \cdot 2^{-2} + \cdots + j_{n-1} \cdot 2^{-n+1} + j_n \cdot 2^{-n}$$

となるから、これを用いて、括弧内を計算すると、

$$\sum_{k=0}^{2^n-1} e^{i\frac{2\pi kj}{2^n}} |k\rangle = \left(|0\rangle + e^{2\pi 0.j_n} |1\rangle\right) \otimes \left(|0\rangle + e^{2\pi 0.j_{n-1}j_n} |1\rangle\right) \otimes \cdots \otimes \left(|0\rangle + e^{2\pi 0.j_1 j_2 \cdots j_n} |1\rangle\right)$$

となる。

まとめると、量子フーリエ変換は、

$$|j\rangle = |j_1 \cdots j_n\rangle \to \frac{\left(|0\rangle + e^{2\pi 0.j_n} |1\rangle\right) \otimes \cdots \otimes \left(|0\rangle + e^{2\pi 0.j_1 j_2 \cdots j_n} |1\rangle\right)}{\sqrt{2^n}}$$

という変換ができればよい。