

# Cálculo de Programas

## Trabalho Prático

### MiEI+LCC — 2018/19

Departamento de Informática  
Universidade do Minho

Junho de 2019

Grupo nr.	99 (preencher)
a11111	Nome1 (preencher)
a22222	Nome2 (preencher)
a33333	Nome3 (preencher)

## 1 Preâmbulo

A disciplina de **Cálculo de Programas** tem como objectivo principal ensinar a programação de computadores como uma disciplina científica. Para isso parte-se de um repertório de *combinadores* que formam uma álgebra da programação (conjunto de leis universais e seus corolários) e usam-se esses combinadores para construir programas *composicionalmente*, isto é, agregando programas já existentes.

Na sequência pedagógica dos planos de estudo dos dois cursos que têm esta disciplina, restringe-se a aplicação deste método à programação funcional em **Haskell**. Assim, o presente trabalho prático coloca os alunos perante problemas concretos que deverão ser implementados em **Haskell**. Há ainda um outro objectivo: o de ensinar a documentar programas, validá-los, e a produzir textos técnico-científicos de qualidade.

## 2 Documentação

Para cumprir de forma integrada os objectivos enunciados acima vamos recorrer a uma técnica de programação dita “**literária**” [?], cujo princípio base é o seguinte:

*Um programa e a sua documentação devem coincidir.*

Por outras palavras, o código fonte e a documentação de um programa deverão estar no mesmo ficheiro.

O ficheiro `cp1819t.pdf` que está a ler é já um exemplo de **programação literária**: foi gerado a partir do texto fonte `cp1819t.lhs`<sup>1</sup> que encontrará no **material pedagógico** desta disciplina descompactando o ficheiro `cp1819t.zip` e executando

```
$ lhs2TeX cp1819t.lhs > cp1819t.tex
$ pdflatex cp1819t
```

em que **lhs2tex** é um pre-processor que faz “pretty printing” de código Haskell em **L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X** e que deve desde já instalar executando

```
$ cabal install lhs2tex
```

Por outro lado, o mesmo ficheiro `cp1819t.lhs` é executável e contém o “kit” básico, escrito em **Haskell**, para realizar o trabalho. Basta executar

```
$ ghci cp1819t.lhs
```

---

<sup>1</sup>O suffixo ‘lhs’ quer dizer *literate Haskell*.

Abra o ficheiro `cp1819t.lhs` no seu editor de texto preferido e verifique que assim é: todo o texto que se encontra dentro do ambiente

```
\begin{code}
...
\end{code}
```

vai ser seleccionado pelo **GHCi** para ser executado.

### 3 Como realizar o trabalho

Este trabalho teórico-prático deve ser realizado por grupos de três alunos. Os detalhes da avaliação (datas para submissão do relatório e sua defesa oral) são os que forem publicados na [página da disciplina](#) na *internet*.

Recomenda-se uma abordagem participativa dos membros do grupo de trabalho por forma a poderem responder às questões que serão colocadas na *defesa oral* do relatório.

Em que consiste, então, o *relatório* a que se refere o parágrafo anterior? É a edição do texto que está a ser lido, preenchendo o anexo **D** com as respostas. O relatório deverá conter ainda a identificação dos membros do grupo de trabalho, no local respectivo da folha de rosto.

Para gerar o PDF integral do relatório deve-se ainda correr os comando seguintes, que actualizam a bibliografia (com **BibTeX**) e o índice remissivo (com **makeindex**),

```
$ bibtex cp1819t.aux
$ makeindex cp1819t.idx
```

e recompilar o texto como acima se indicou. Dever-se-á ainda instalar o utilitário **QuickCheck**, que ajuda a validar programas em **Haskell** e a biblioteca **Gloss** para geração de gráficos 2D:

```
$ cabal install QuickCheck gloss
```

Para testar uma propriedade **QuickCheck** *prop*, basta invocá-la com o comando:

```
> quickCheck prop
+++ OK, passed 100 tests.
```

Qualquer programador tem, na vida real, de ler e analisar (muito!) código escrito por outros. No anexo **C** disponibiliza-se algum código **Haskell** relativo aos problemas que se seguem. Esse anexo deverá ser consultado e analisado à medida que isso for necessário.

### Problema 1

Um compilador é um programa que traduz uma linguagem dita de *alto nível* numa linguagem (dita de *baixo nível*) que seja executável por uma máquina. Por exemplo, o **GCC** compila C/C++ em código objecto que corre numa variedade de arquitecturas.

Compiladores são normalmente programas complexos. Constan essencialmente de duas partes: o *analisador sintático* que lê o texto de entrada (o programa *fonte* a compilar) e cria uma sua representação interna, estruturada em árvore; e o *gerador de código* que converte essa representação interna em código executável. Note-se que tal representação intermédia pode ser usada para outros fins, por exemplo, para gerar uma listagem de qualidade (*pretty print*) do programa fonte.

O projecto de compiladores é um assunto complexo que será assunto de outras disciplinas. Neste trabalho pretende-se apenas fazer uma introdução ao assunto, mostrando como tais programas se podem construir funcionalmente à custa de cata/ana/hilo-morfismos da linguagem em causa.

Para cumprirmos o nosso objectivo, a linguagem desta questão terá que ser, naturalmente, muito simples: escolheu-se a das expressões aritméticas com inteiros, *eg.*  $1+2$ ,  $3*(4+5)$  etc. Como representação interna adopta-se o seguinte tipo polinomial, igualmente simples:

```
data Expr = Num Int | Bop Expr Op Expr
data Op = Op String
```

1. Escreva as definições dos {cata, ana e hilo}-morfismos deste tipo de dados segundo o método ensinado nesta disciplina (recorde módulos como *eg.* `BTree` etc).

2. Como aplicação do módulo desenvolvido no ponto 1, defina como  $\{\text{cata}, \text{ana ou hilo}\}$ -morfismo a função seguinte:

- $\text{calcula} :: \text{Expr} \rightarrow \text{Int}$  que calcula o valor de uma expressão;

**Propriedade QuickCheck 1** O valor zero é um elemento neutro da adição.

```
prop_neutro1 :: Expr → Bool
prop_neutro1 = calcula · addZero ≡ calcula where
  addZero e = Bop (Num 0) (Op "+") e
prop_neutro2 :: Expr → Bool
prop_neutro2 = calcula · addZero ≡ calcula where
  addZero e = Bop e (Op "+") (Num 0)
```

**Propriedade QuickCheck 2** As operações de soma e multiplicação são comutativas.

```
prop_comuta = calcula · mirror ≡ calcula where
  mirror = cataExpr [Num, g2]
  g2 =  $\widehat{\widehat{\text{Bop}}} \cdot (\text{swap} \times \text{id}) \cdot \text{assocl} \cdot (\text{id} \times \text{swap})$ 
```

3. Defina como  $\{\text{cata}, \text{ana ou hilo}\}$ -morfismos as funções

- $\text{compile} :: \text{String} \rightarrow \text{Codigo}$  - trata-se do compilador propriamente dito. Deverá ser gerado código posfixo para uma máquina elementar de **stack**. O tipo *Codigo* pode ser definido à escolha. Dão-se a seguir exemplos de comportamentos aceitáveis para esta função:

```
Tp4> compile "2+4"
["PUSH 2", "PUSH 4", "ADD"]
Tp4> compile "3*(2+4)"
["PUSH 3", "PUSH 2", "PUSH 4", "ADD", "MUL"]
Tp4> compile "(3*2)+4"
["PUSH 3", "PUSH 2", "MUL", "PUSH 4", "ADD"]
Tp4>
```

- $\text{show}' :: \text{Expr} \rightarrow \text{String}$  - gera a representação textual de uma *Expr* pode encarar-se como o *pretty printer* associado ao nosso compilador

**Propriedade QuickCheck 3** Em anexo, é fornecido o código da função *readExp*, que é “inversa” da função *show'*, tal como a propriedade seguinte descreve:

```
prop_inv :: Expr → Bool
prop_inv =  $\pi_1 \cdot \text{head} \cdot \text{readExp} \cdot \text{show}' \equiv \text{id}$ 
```

**Valorização** Em anexo é apresentado código **Haskell** que permite declarar *Expr* como instância da classe *Read*. Neste contexto, *read* pode ser vista como o analisador sintático do nosso minúsculo compilador de expressões aritméticas.

Analise o código apresentado, corra-o e escreva no seu relatório uma explicação **breve** do seu funcionamento, que deverá saber defender aquando da apresentação oral do relatório.

Exprima ainda o analisador sintático *readExp* como um anamorfismo.

## Problema 2

Pretende-se neste problema definir uma linguagem gráfica “brinquedo” a duas dimensões (2D) capaz de especificar e desenhar agregações de caixas que contêm informação textual. Vamos designar essa linguagem por *L2D* e vamos defini-la como um tipo em **Haskell**:

```
type L2D = X Caixa Tipo
```

onde *X* é a estrutura de dados



Figura 1: Caixa simples e caixa composta.

**data**  $X \ a \ b = Unid \ a \mid Comp \ b \ (X \ a \ b) \ (X \ a \ b)$  **deriving** *Show*

e onde:

**type**  $Caixa = ((Int, Int), (Texto, G.Color))$   
**type**  $Texto = String$

Assim, cada caixa de texto é especificada pela sua largura, altura, o seu texto e a sua cor.<sup>2</sup> Por exemplo,

$((200, 200), ("Caixa \ azul", col\_blue))$

designa a caixa da esquerda da figura 1.

O que a linguagem *L2D* faz é agregar tais caixas tipográficas umas com as outras segundo padrões especificados por vários “tipos”, a saber,

**data**  $Tipo = V \mid Vd \mid Ve \mid H \mid Ht \mid Hb$

com o seguinte significado:

- $V$  - agregação vertical alinhada ao centro
- $Vd$  - agregação vertical justificada à direita
- $Ve$  - agregação vertical justificada à esquerda
- $H$  - agregação horizontal alinhada ao centro
- $Hb$  - agregação horizontal alinhada pela base
- $Ht$  - agregação horizontal alinhada pelo topo

Como *L2D* instancia o parâmetro  $b$  de  $X$  com  $Tipo$ , é fácil de ver que cada “frase” da linguagem *L2D* é representada por uma árvore binária em que cada nó indica qual o tipo de agregação a aplicar às suas duas sub-árvores. Por exemplo, a frase

$ex2 = Comp \ Hb \ (Unid \ ((100, 200), ("A", col\_blue)))$   
 $\quad \quad \quad (Unid \ ((50, 50), ("B", col\_green)))$

deverá corresponder à imagem da direita da figura 1. E poder-se-á ir tão longe quando a linguagem o permita. Por exemplo, pense na estrutura da frase que representa o *layout* da figura 2.

É importante notar que cada “caixa” não dispõe informação relativa ao seu posicionamento final na figura. De facto, é a posição relativa que deve ocupar face às restantes caixas que irá determinar a sua posição final. Este é um dos objectivos deste trabalho: *calcular o posicionamento absoluto de cada uma das caixas por forma a respeitar as restrições impostas pelas diversas agregações*. Para isso vamos considerar um tipo de dados que comporta a informação de todas as caixas devidamente posicionadas (i.e. com a informação adicional da origem onde a caixa deve ser colocada).

<sup>2</sup>Pode relacionar *Caixa* com as caixas de texto usadas nos jornais ou com *frames* da linguagem HTML usada na Internet.



Figura 2: *Layout* feito de várias caixas coloridas.

```
type Fig = [(Origem, Caixa)]
type Origem = (Float, Float)
```

A informação mais relevante deste tipo é a referente à lista de “caixas posicionadas” (tipo  $(Origem, Caixa)$ ). Regista-se aí a origem da caixa que, com a informação da sua altura e comprimento, permite definir todos os seus pontos (consideramos as caixas sempre paralelas aos eixos).

1. Forneça a definição da função *calc\_origems*, que calcula as coordenadas iniciais das caixas no plano:

$$calc\_origems :: (L2D, Origem) \rightarrow X (Caixa, Origem) ()$$

2. Forneça agora a definição da função *agrup\_caixas*, que agrupa todas as caixas e respectivas origens numa só lista:

$$agrup\_caixas :: X (Caixa, Origem) () \rightarrow Fig$$

Um segundo problema neste projecto é *descobrir como visualizar a informação gráfica calculada por desenho*. A nossa estratégia para superar o problema baseia-se na biblioteca **Gloss**, que permite a geração de gráficos 2D. Para tal disponibiliza-se a função

$$crCaixa :: Origem \rightarrow Float \rightarrow Float \rightarrow String \rightarrow G.Color \rightarrow G.Picture$$

que cria um rectângulo com base numa coordenada, um valor para a largura, um valor para a altura, um texto que irá servir de etiqueta, e a cor pretendida. Disponibiliza-se também a função

$$display :: G.Picture \rightarrow IO ()$$

que dado um valor do tipo *G.picture* abre uma janela com esse valor desenhado. O objectivo final deste exercício é implementar então uma função

$$mostra\_caixas :: (L2D, Origem) \rightarrow IO ()$$

que dada uma frase da linguagem *L2D* e coordenadas iniciais apresenta o respectivo desenho no ecrã.

**Sugestão:** Use a função *G.pictures* disponibilizada na biblioteca **Gloss**.

## Problema 3

Nesta disciplina estudou-se como fazer **programação dinâmica** por cálculo, recorrendo à lei de recursividade mútua.<sup>3</sup>

Para o caso de funções sobre os números naturais ( $\mathbb{N}_0$ , com functor  $F X = 1 + X$ ) é fácil derivar-se da lei que foi estudada uma *regra de algibeira* que se pode ensinar a programadores que não tenham estudado **Cálculo de Programas**. Apresenta-se de seguida essa regra, tomando como exemplo o cálculo do ciclo-for que implementa a função de Fibonacci, recordar o sistema

$$\begin{aligned}fib\ 0 &= 1 \\ fib\ (n + 1) &= f\ n \\ f\ 0 &= 1 \\ f\ (n + 1) &= fib\ n + f\ n\end{aligned}$$

Obter-se-á de imediato

$$\begin{aligned}fib' &= \pi_1 \cdot \text{for loop init where} \\ loop\ (fib, f) &= (f, fib + f) \\ init &= (1, 1)\end{aligned}$$

usando as regras seguintes:

- O corpo do ciclo *loop* terá tantos argumentos quanto o número de funções mutuamente recursivas.
- Para as variáveis escolhem-se os próprios nomes das funções, pela ordem que se achar conveniente.<sup>4</sup>
- Para os resultados vão-se buscar as expressões respectivas, retirando a variável  $n$ .
- Em *init* colecionam-se os resultados dos casos de base das funções, pela mesma ordem.

Mais um exemplo, envolvendo polinómios no segundo grau a  $x^2 + bx + c$  em  $\mathbb{N}_0$ . Seguindo o método estudado nas aulas<sup>5</sup>, de  $f\ x = ax^2 + bx + c$  derivam-se duas funções mutuamente recursivas:

$$\begin{aligned}f\ 0 &= c \\ f\ (n + 1) &= f\ n + k\ n \\ k\ 0 &= a + b \\ k\ (n + 1) &= k\ n + 2\ a\end{aligned}$$

Seguindo a regra acima, calcula-se de imediato a seguinte implementação, em Haskell:

$$\begin{aligned}f'\ a\ b\ c &= \pi_1 \cdot \text{for loop init where} \\ loop\ (f, k) &= (f + k, k + 2 * a) \\ init &= (c, a + b)\end{aligned}$$

Qual é o assunto desta questão, então? Considerem fórmula que dá a série de Taylor da função coseno:

$$\cos x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i)!} x^{2i}$$

Pretende-se o ciclo-for que implementa a função  $\cos' x\ n$  que dá o valor dessa série tomando  $i$  até  $n$  inclusivé:

$$\cos' x = \dots \text{for loop init where } \dots$$

**Sugestão:** Começar por estudar muito bem o processo de cálculo dado no anexo B para o problema (semelhante) da função exponencial.

**Propriedade QuickCheck 4** Testes de que  $\cos' x$  calcula bem o coseno de  $\pi$  e o coseno de  $\pi / 2$ :

$$\begin{aligned}prop\_cos1\ n = n \geq 10 &\Rightarrow abs\ (\cos\ \pi - \cos'\ \pi\ n) < 0.001 \\ prop\_cos2\ n = n \geq 10 &\Rightarrow abs\ (\cos\ (\pi / 2) - \cos'\ (\pi / 2)\ n) < 0.001\end{aligned}$$

<sup>3</sup>Lei (3.94) em [?], página 98.

<sup>4</sup>Podem obviamente usar-se outros símbolos, mas numa primeiraleitura dá jeito usarem-se tais nomes.

<sup>5</sup>Secção 3.17 de [?].

**Valorização** Transliterar *cos'* para a linguagem C; compilar e testar o código. Conseguia, por intuição apenas, chegar a esta função?

## Problema 4

Pretende-se nesta questão desenvolver uma biblioteca de funções para manipular *sistemas de ficheiros* genéricos. Um sistema de ficheiros será visto como uma associação de *nomes* a ficheiros ou *directorias*. Estas últimas serão vistas como sub-sistemas de ficheiros e assim recursivamente. Assumindo que *a* é o tipo dos identificadores dos ficheiros e directorias, e que *b* é o tipo do conteúdo dos ficheiros, podemos definir um tipo indutivo de dados para representar sistemas de ficheiros da seguinte forma:

```
data FS a b = FS [(a, Node a b)] deriving (Eq, Show)
data Node a b = File b | Dir (FS a b) deriving (Eq, Show)
```

Um caminho (*path*) neste sistema de ficheiros pode ser representado pelo seguinte tipo de dados:

```
type Path a = [a]
```

Assumindo estes tipos de dados, o seguinte termo

```
FS [("f1", File "01a"),
    ("d1", Dir (FS [("f2", File "01e"),
                    ("f3", File "01e")
                    ]))
    ]
```

representará um sistema de ficheiros em cuja raiz temos um ficheiro chamado *f1* com conteúdo "01a" e uma directoria chamada "d1" constituída por dois ficheiros, um chamado "f2" e outro chamado "f3", ambos com conteúdo "01e". Neste caso, tanto o tipo dos identificadores como o tipo do conteúdo dos ficheiros é *String*. No caso geral, o conteúdo de um ficheiro é arbitrário: pode ser um binário, um texto, uma colecção de dados, etc.

A definição das usuais funções *inFS* e *recFS* para este tipo é a seguinte:

```
inFS = FS · map (id × inNode)
inNode = [File, Dir]
recFS f = baseFS id id f
```

Suponha que se pretende definir como um *catamorfismo* a função que conta o número de ficheiros existentes num sistema de ficheiros. Uma possível definição para esta função seria:

```
conta :: FS a b → Int
conta = cataFS (sum · map ([1, id] · π₂))
```

O que é para fazer:

1. Definir as funções *outFS*, *baseFS*, *cataFS*, *anaFS* e *hyloFS*.
2. Apresentar, no relatório, o diagrama de *cataFS*.
3. Definir as seguintes funções para manipulação de sistemas de ficheiros usando, obrigatoriamente, catamorfismos, anamorfismos ou hilomorfismos:
  - (a) Verificação da integridade do sistema de ficheiros (i.e. verificar que não existem identificadores repetidos dentro da mesma directoria).

```
check :: FS a b → Bool
```

**Propriedade QuickCheck 5** A integridade de um sistema de ficheiros não depende da ordem em que os últimos são listados na sua directoria:

```
prop_check :: FS String String → Bool
prop_check = check · (cataFS (inFS · reverse)) ≡ check
```

- (b) Recolha do conteúdo de todos os ficheiros num arquivo indexado pelo *path*.

$tar :: FS\ a\ b \rightarrow [(Path\ a, b)]$

**Propriedade QuickCheck 6** O número de ficheiros no sistema deve ser igual ao número de ficheiros listados pela função *tar*.

$prop\_tar :: FS\ String\ String \rightarrow Bool$   
 $prop\_tar = length \cdot tar \equiv conta$

- (c) Transformação de um arquivo com o conteúdo dos ficheiros indexado pelo *path* num sistema de ficheiros.

$untar :: [(Path\ a, b)] \rightarrow FS\ a\ b$

**Sugestão:** Use a função *joinDupDirs* para juntar directorias que estejam na mesma pasta e que possuam o mesmo identificador.

**Propriedade QuickCheck 7** A composição *tar · untar* preserva o número de ficheiros no sistema.

$prop\_untar :: [(Path\ String, String)] \rightarrow Property$   
 $prop\_untar = validPaths \Rightarrow ((length \cdot tar \cdot untar) \equiv length)$   
 $validPaths :: [(Path\ String, String)] \rightarrow Bool$   
 $validPaths = (\equiv 0) \cdot length \cdot (filter\ (\lambda(a, -) \rightarrow length\ a \equiv 0))$

- (d) Localização de todos os *paths* onde existe um determinado ficheiro.

$find :: a \rightarrow FS\ a\ b \rightarrow [Path\ a]$

**Propriedade QuickCheck 8** A composição *tar · untar* preserva todos os ficheiros no sistema.

$prop\_find :: String \rightarrow FS\ String\ String \rightarrow Bool$   
 $prop\_find = curry \$$   
 $length \cdot \widehat{find} \equiv length \cdot \widehat{find} \cdot (id \times (untar \cdot tar))$

- (e) Criação de um novo ficheiro num determinado *path*.

$new :: Path\ a \rightarrow b \rightarrow FS\ a\ b \rightarrow FS\ a\ b$

**Propriedade QuickCheck 9** A adição de um ficheiro não existente no sistema não origina ficheiros duplicados.

$prop\_new :: ((Path\ String, String), FS\ String\ String) \rightarrow Property$   
 $prop\_new = ((validPath \wedge notDup) \wedge (check \cdot \pi_2)) \Rightarrow$   
 $(checkFiles \cdot \widehat{new})$  **where**  
 $validPath = (\neq 0) \cdot length \cdot \pi_1 \cdot \pi_1$   
 $notDup = \neg \cdot \widehat{elem} \cdot (\pi_1 \times ((fmap\ \pi_1) \cdot tar))$

**Questão:** Supondo-se que no código acima se substitui a propriedade *checkFiles* pela propriedade mais fraca *check*, será que a propriedade *prop\_new* ainda é válida? Justifique a sua resposta.

Como a propriedade *check* é mais fraca do que a propriedade *checkFiles* então para todos os casos em que *checkFiles* é verdadeira, *check* também o será.

É então evidente que *prop\_new* será válida ao fazer a substituição para *check* (assumindo que já o era com *checkFiles*).

**Propriedade QuickCheck 10** A listagem de ficheiros logo após uma adição nunca poderá ser menor que a listagem de ficheiros antes dessa mesma adição.

$prop\_new2 :: ((Path\ String, String), FS\ String\ String) \rightarrow Property$   
 $prop\_new2 = validPath \Rightarrow ((length \cdot tar \cdot \pi_2) \leq (length \cdot tar \cdot \widehat{new}))$  **where**  
 $validPath = (\neq 0) \cdot length \cdot \pi_1 \cdot \pi_1$

- (f) Duplicação de um ficheiro.

$cp :: Path\ a \rightarrow Path\ a \rightarrow FS\ a\ b \rightarrow FS\ a\ b$





Figura 3: Exemplo de um sistema de ficheiros visualizado em Graphviz.

**Propriedade QuickCheck 11** *A listagem de ficheiros com um dado nome não diminui após uma duplicação.*

$$\begin{aligned} \text{prop\_cp} &:: ((\text{Path String}, \text{Path String}), \text{FS String String}) \rightarrow \text{Bool} \\ \text{prop\_cp} &= \text{length} \cdot \text{tar} \cdot \pi_2 \leq \text{length} \cdot \text{tar} \cdot \widehat{\text{cp}} \end{aligned}$$

(g) Eliminação de um ficheiro.

$$\text{rm} :: \text{Path } a \rightarrow \text{FS } a \ b \rightarrow \text{FS } a \ b$$

**Sugestão:** Construir um anamorfismo  $\text{nav} :: (\text{Path } a, \text{FS } a \ b) \rightarrow \text{FS } a \ b$  que navegue por um sistema de ficheiros tendo como base o *path* dado como argumento.

**Propriedade QuickCheck 12** *Remover duas vezes o mesmo ficheiro tem o mesmo efeito que o remover apenas uma vez.*

$$\begin{aligned} \text{prop\_rm} &:: (\text{Path String}, \text{FS String String}) \rightarrow \text{Bool} \\ \text{prop\_rm} &= \widehat{\text{rm}} \cdot \langle \pi_1, \widehat{\text{rm}} \rangle \equiv \widehat{\text{rm}} \end{aligned}$$

**Propriedade QuickCheck 13** *Adicionar um ficheiro e de seguida remover o mesmo não origina novos ficheiros no sistema.*

$$\begin{aligned} \text{prop\_rm2} &:: ((\text{Path String}, \text{String}), \text{FS String String}) \rightarrow \text{Property} \\ \text{prop\_rm2} &= \text{validPath} \Rightarrow ((\text{length} \cdot \text{tar} \cdot \widehat{\text{rm}} \cdot \langle \pi_1 \cdot \pi_1, \widehat{\text{new}} \rangle) \\ &\leq (\text{length} \cdot \text{tar} \cdot \pi_2)) \text{ where} \\ \text{validPath} &= (\neq 0) \cdot \text{length} \cdot \pi_1 \cdot \pi_1 \end{aligned}$$

**Valorização** Definir uma função para visualizar em Graphviz a estrutura de um sistema de ficheiros. A Figura 3, por exemplo, apresenta a estrutura de um sistema com precisamente dois ficheiros dentro de uma directoria chamada "d1".

Para realizar este exercício será necessário apenas escrever o anamorfismo

$$\text{cFS2Exp} :: (a, \text{FS } a \ b) \rightarrow (\text{Exp } () \ a)$$

que converte a estrutura de um sistema de ficheiros numa árvore de expressões descrita em Exp.hs. A função *dotFS* depois tratará de passar a estrutura do sistema de ficheiros para o visualizador.

# Anexos

## A Como exprimir cálculos e diagramas em LaTeX/lhs2tex

Estudar o texto fonte deste trabalho para obter o efeito:<sup>6</sup>

$$\begin{aligned}
 id &= \langle f, g \rangle \\
 &\equiv \{ \text{universal property} \} \\
 &\quad \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 \cdot id = f \\ \pi_2 \cdot id = g \end{array} \right. \\
 &\equiv \{ \text{identity} \} \\
 &\quad \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 = f \\ \pi_2 = g \end{array} \right. \\
 &\square
 \end{aligned}$$

Os diagramas podem ser produzidos recorrendo à *package* L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X *xymatrix*, por exemplo:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{N}_0 & \xleftarrow{\text{in}} & 1 + \mathbb{N}_0 \\
 \downarrow \langle g \rangle & & \downarrow id + \langle g \rangle \\
 B & \xleftarrow{g} & 1 + B
 \end{array}$$

## B Programação dinâmica por recursividade múltipla

Neste anexo dão-se os detalhes da resolução do Exercício 3.30 dos apontamentos da disciplina<sup>7</sup>, onde se pretende implementar um ciclo que implemente o cálculo da aproximação até  $i = n$  da função exponencial  $\exp x = e^x$  via série de Taylor:

$$\exp x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \quad (1)$$

Seja  $e\ x\ n = \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!}$  a função que dá essa aproximação. É fácil de ver que  $e\ x\ 0 = 1$  e que  $e\ x\ (n+1) = e\ x\ n + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ . Se definirmos  $h\ x\ n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$  teremos  $e\ x$  e  $h\ x$  em recursividade mútua. Se repetirmos o processo para  $h\ x\ n$  etc obteremos no total três funções nessa mesma situação:

$$\begin{aligned}
 e\ x\ 0 &= 1 \\
 e\ x\ (n+1) &= h\ x\ n + e\ x\ n \\
 h\ x\ 0 &= x \\
 h\ x\ (n+1) &= x / (s\ n) * h\ x\ n \\
 s\ 0 &= 2 \\
 s\ (n+1) &= 1 + s\ n
 \end{aligned}$$

Segundo a *regra de algibeira* descrita na página 3 deste enunciado, ter-se-á, de imediato:

$$\begin{aligned}
 e'\ x &= prj \cdot \text{for loop init where} \\
 init &= (1, x, 2) \\
 loop\ (e, h, s) &= (h + e, x / s * h, 1 + s) \\
 prj\ (e, h, s) &= e
 \end{aligned}$$

<sup>6</sup>Exemplos tirados de [?].

<sup>7</sup>Cf. [?], página 102.

## C Código fornecido

### Problema 1

Tipos:

```
data Expr = Num Int
          | Bop Expr Op Expr deriving (Eq, Show)
data Op = Op String deriving (Eq, Show)
type Codigo = [String]
```

Functor de base:

```
baseExpr f g = id + (f × (g × g))
```

Instâncias:

```
instance Read Expr where
  readsPrec _ = readExp
```

Read para Exp's:

```
readOp :: String → [(Op, String)]
readOp input = do
  (x, y) ← lex input
  return ((Op x), y)

readNum :: ReadS Expr
readNum = (map (λ(x, y) → ((Num x), y))) · reads

readBinOp :: ReadS Expr
readBinOp = (map (λ((x, (y, z)), t) → ((Bop x y z), t))) ·
  ((readNum 'ou' (pcurvos readExp))
   'depois' (readOp 'depois' readExp))

readExp :: ReadS Expr
readExp = readBinOp 'ou' (
  readNum 'ou' (
    pcurvos readExp))
```

Combinadores:

```
depois :: (ReadS a) → (ReadS b) → ReadS (a, b)
depois _ _ [] = []
depois r1 r2 input = [((x, y), i2) | (x, i1) ← r1 input,
  (y, i2) ← r2 i1]

readSeq :: (ReadS a) → ReadS [a]
readSeq r input
  = case (r input) of
    [] → [([], input)]
    l → concat (map continua l)
    where continua (a, i) = map (c a) (readSeq r i)
      c x (xs, i) = ((x : xs), i)

ou :: (ReadS a) → (ReadS a) → ReadS a
ou r1 r2 input = (r1 input) ++ (r2 input)

senao :: (ReadS a) → (ReadS a) → ReadS a
senao r1 r2 input = case (r1 input) of
  [] → r2 input
  l → l

readConst :: String → ReadS String
readConst c = (filter ((≡ c) · π1)) · lex

pcurvos = parenthesis ' ( ' ' ) '
```

```

prectos = parenthesis ' [ ' ' ] '
chavetas = parenthesis ' { ' ' } '
parenthesis :: Char → Char → (ReadS a) → ReadS a
parenthesis _ _ _ [] = []
parenthesis ap pa r input
= do
  ((-, (x, -)), c) ← ((readConst [ap]) 'depois' (
    r 'depois' (
      readConst [pa]))) input
  return (x, c)

```

## Problema 2

Tipos:

```

type Fig = [(Origem, Caixa)]
type Origem = (Float, Float)

```

“Helpers”:

```

col_blue = G.azure
col_green = darkgreen
darkgreen = G.dark (G.dark G.green)

```

Exemplos:

```

ex1Caixas = G.display (G.InWindow "Problema 4" (400,400) (40,40)) G.white $
  crCaixa (0,0) 200 200 "Caixa azul" col_blue
ex2Caixas = G.display (G.InWindow "Problema 4" (400,400) (40,40)) G.white $
  caixasAndOrigin2Pict ((Comp Hb bbox gbox), (0.0,0.0)) where
    bbox = Unid ((100,200), ("A", col_blue))
    gbox = Unid ((50,50), ("B", col_green))
ex3Caixas = G.display (G.InWindow "Problema 4" (400,400) (40,40)) G.white mtest where
  mtest = caixasAndOrigin2Pict $ (Comp Hb (Comp Ve bot top) (Comp Ve gbox2 ybox2), (0.0,0.0))
  bbox1 = Unid ((100,200), ("A", col_blue))
  bbox2 = Unid ((150,200), ("E", col_blue))
  gbox1 = Unid ((50,50), ("B", col_green))
  gbox2 = Unid ((100,300), ("F", col_green))
  rbox1 = Unid ((300,50), ("C", G.red))
  rbox2 = Unid ((200,100), ("G", G.red))
  wbox1 = Unid ((450,200), ("", G.white))
  ybox1 = Unid ((100,200), ("D", G.yellow))
  ybox2 = Unid ((100,300), ("H", G.yellow))
  bot = Comp Hb wbox1 bbox2
  top = (Comp Ve (Comp Hb bbox1 gbox1) (Comp Hb rbox1 (Comp H ybox1 rbox2)))

```

A seguinte função cria uma caixa a partir dos seguintes parâmetros: origem, largura, altura, etiqueta e cor de preenchimento.

```

crCaixa :: Origem → Float → Float → String → G.Color → G.Picture
crCaixa (x,y) w h l c = G.Translate (x + (w / 2)) (y + (h / 2)) $ G.pictures [caixa, etiqueta] where
  caixa = G.color c (G.rectangleSolid w h)
  etiqueta = G.translate calc_trans_x calc_trans_y $
    G.Scale calc_scale calc_scale $ G.color G.black $ G.Text l
  calc_trans_x = -((fromIntegral (length l)) * calc_scale) / 2 * base_shift_x
  calc_trans_y = (-calc_scale / 2) * base_shift_y
  calc_scale = bscale * (min h w)
  bscale = 1 / 700

```

```
base_shift_y = 100
base_shift_x = 64
```

Função para visualizar resultados gráficos:

```
display = G.display (G.InWindow "Problema 4" (400,400) (40,40)) G.white
```

## Problema 4

Funções para gestão de sistemas de ficheiros:

```
concatFS = inFS ·  $\widehat{(\text{++})}$  · (outFS × outFS)
mkdir (x, y) = FS [(x, Dir y)]
mkfile (x, y) = FS [(x, File y)]
joinDupDirs :: (Eq a) ⇒ (FS a b) → (FS a b)
joinDupDirs = anaFS (prepOut · (id × proc) · prepIn) where
  prepIn = (id × (map (id × outFS))) · sls · (map distr) · outFS
  prepOut = (map undistr) ·  $\widehat{(\text{++})}$  · ((map i1) × (map i2)) · (id × (map (id × inFS)))
  proc = concat · (map joinDup) · groupByName
  sls = ⟨lefts, rights⟩
joinDup :: [(a, [b])] → [(a, [b])]
joinDup = cataList [nil, g] where g = return · ⟨π1 · π1, concat · (map π2) ·  $\widehat{(\text{·})}$ ⟩
createFSfromFile :: (Path a, b) → (FS a b)
createFSfromFile ([a], b) = mkfile (a, b)
createFSfromFile (a : as, b) = mkdir (a, createFSfromFile (as, b))
```

Funções auxiliares:

```
checkFiles :: (Eq a) ⇒ FS a b → Bool
checkFiles = cataFS ( $\widehat{(\text{·})}$  · ⟨f, g⟩) where
  f = nr · (fmap π1) · lefts · (fmap distr)
  g = and · rights · (fmap π2)
groupByName :: (Eq a) ⇒ [(a, [b])] → [[(a, [b])]]
groupByName = (groupBy (curry p)) where
  p =  $\widehat{(\text{·})}$  · (π1 × π1)
filterPath :: (Eq a) ⇒ Path a → [(Path a, b)] → [(Path a, b)]
filterPath = filter · (λp → λ(a, b) → p ≡ a)
```

Dados para testes:

- Sistema de ficheiros vazio:

```
efs = FS []
```

- Nível 0

```
f1 = FS [("f1", File "hello world")]
f2 = FS [("f2", File "more content")]
f00 = concatFS (f1, f2)
f01 = concatFS (f1, mkdir ("d1", efs))
f02 = mkdir ("d1", efs)
```

- Nível 1

```
f10 = mkdir ("d1", f00)
f11 = concatFS (mkdir ("d1", f00), mkdir ("d2", f00))
f12 = concatFS (mkdir ("d1", f00), mkdir ("d2", f01))
f13 = concatFS (mkdir ("d1", f00), mkdir ("d2", efs))
```

- Nível 2

```
f20 = mkdir ("d1", f10)
f21 = mkdir ("d1", f11)
f22 = mkdir ("d1", f12)
f23 = mkdir ("d1", f13)
f24 = concatFS (mkdir ("d1", f10), mkdir ("d2", f12))
```

- Sistemas de ficheiros inválidos:

```
ifs0 = concatFS (f1, f1)
ifs1 = concatFS (f1, mkdir ("f1", efs))
ifs2 = mkdir ("d1", ifs0)
ifs3 = mkdir ("d1", ifs1)
ifs4 = concatFS (mkdir ("d1", ifs1), mkdir ("d2", f12))
ifs5 = concatFS (mkdir ("d1", f1), mkdir ("d1", f2))
ifs6 = mkdir ("d1", ifs5)
ifs7 = concatFS (mkdir ("d1", f02), mkdir ("d1", f02))
```

Visualização em **Graphviz**:

```
dotFS :: FS String b → IO ExitCode
dotFS = dotpict · bmap "_" id · (cFS2Exp "root")
```

## Outras funções auxiliares

Lógicas:

```
infixr 0 ⇒
(⇒) :: (Testable prop) ⇒ (a → Bool) → (a → prop) → a → Property
p ⇒ f = λa → p a ⇒ f a

infixr 0 ⇔
(⇔) :: (a → Bool) → (a → Bool) → a → Property
p ⇔ f = λa → (p a ⇒ property (f a)) .&&. (f a ⇒ property (p a))

infixr 4 ≡
(≡) :: Eq b ⇒ (a → b) → (a → b) → (a → Bool)
f ≡ g = λa → f a ≡ g a

infixr 4 ≤
(≤) :: Ord b ⇒ (a → b) → (a → b) → (a → Bool)
f ≤ g = λa → f a ≤ g a

infixr 4 ∧
(∧) :: (a → Bool) → (a → Bool) → (a → Bool)
f ∧ g = λa → ((f a) ∧ (g a))
```

Compilação e execução dentro do interpretador:<sup>8</sup>

```
run = do { system "ghc cp1819t"; system "./cp1819t" }
```

## D Soluções dos alunos

Os alunos devem colocar neste anexo as suas soluções aos exercícios propostos, de acordo com o “layout” que se fornece. Não podem ser alterados os nomes ou tipos das funções dadas, mas pode ser adicionado texto e/ou outras funções auxiliares que sejam necessárias.

<sup>8</sup>Pode ser útil em testes envolvendo **Gloss**. Nesse caso, o teste em causa deve fazer parte de uma função *main*.

## Problema 1

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{g} & Int + (Op \times (A \times A)) \\
 \downarrow \llbracket g \rrbracket & & \downarrow id + (id \times (\llbracket g \rrbracket \times \llbracket g \rrbracket)) \\
 Expr & \xrightleftharpoons[inExpr]{outExpr} & Int + (Op \times (Expr \times Expr)) \\
 \downarrow \llbracket g \rrbracket & & \downarrow id + (id \times (\llbracket g \rrbracket \times \llbracket g \rrbracket)) \\
 B & \xleftarrow{h} & Int + (Op \times (B \times B))
 \end{array}$$

$inExpr :: Int + (Op, (Expr, Expr)) \rightarrow Expr$

$inExpr = [Num, in2Expr]$

**where**

$in2Expr (o, (e, e')) = Bop\ e\ o\ e'$

$outExpr :: Expr \rightarrow Int + (Op, (Expr, Expr))$

$outExpr (Num\ x) = i_1\ x$

$outExpr (Bop\ e\ o\ e') = i_2\ (o, (e, e'))$

$inOp :: String \rightarrow Op$

$inOp\ s = Op\ s$

$outOp :: Op \rightarrow String$

$outOp (Op\ s) = s$

$recExpr = baseExpr\ id$

$cataExpr\ g = g \cdot recExpr\ (cataExpr\ g) \cdot outExpr$

$anaExpr\ g = inExpr \cdot recExpr\ (anaExpr\ g) \cdot g$

$bopTable = [ ("+", (\widehat{+}), "ADD")$   
 $, ("-", (\widehat{-}), "SUB")$   
 $, ("*", (\widehat{*}), "MUL")$   
 $]$

$bop2Func = fmap\ \pi_1 \cdot flip\ lookup\ bopTable$

$bop2St = fmap\ \pi_2 \cdot flip\ lookup\ bopTable$

$bopExtr\ f = fromJust \cdot f \cdot outOp$

$calcula :: Expr \rightarrow Int$

$calcula = cataExpr\ [id, Cp.ap \cdot (bopExtr\ bop2Func \times id)]$

$show' :: Expr \rightarrow String$

$show' = cataExpr\ [show, showBop]$

**where**

$showBop (op, (es, es')) = concat\ \$$

$[ " (", es, " ", outOp\ op, " ", es', " ) " ]$

$compile :: String \rightarrow Codigo$

$compile = cataExpr\ [printPush, printBop] \cdot read$

**where**

$printPush = pure \cdot (++)\ "PUSH\ " \cdot show$

$printBop (op, (es, es')) = concat\ [es, es', [bopExtr\ bop2St\ op]]$

$readExpr' :: String \rightarrow Expr$

$readExpr' = anaExpr\ g \cdot filter\ (\neq\ ' \ ')$

**where**

$g :: String \rightarrow Int + (Op, (String, String))$

$g\ s = head\ \$$

$(map\ i_2 \cdot concat\ \$$   
 $[findParen\ findOps\ s$   
 $, findOps\ s]$

$) ++$

$(map\ i_1 \cdot concat\ \$$

```

    [findNum s
     ,findParen findNum s
    ] ++
    [errorWithoutStackTrace "no parse."]
findParen :: (String → [a]) → String → [a]
findParen f (' (' : str) = f $ findParen' (str, []) 1
  where
    findParen' :: (String, String) → Int → String
    findParen' ([], xs') 0 = if last xs' ≡ ' ' then init xs' else []
    findParen' ([], _) _ = []
    findParen' (' (' : xs, xs') n = findParen' (xs, xs' ++ " (") (n + 1)
    findParen' (' ' : xs, xs') n = findParen' (xs, xs' ++ " ") (n - 1)
    findParen' (x : xs, xs') n = findParen' (xs, xs' ++ [x]) n
findParen _ _ = []
findNum :: String → [Int]
findNum = map π1 · reads
findOps :: String → [(Op, (String, String))]
findOps s = concat [findOp "+" s
                    ,findOp "-" s
                    ,findOp "*" s]
findOp :: String → String → [(Op, (String, String))]
findOp op str = findOp' op (str, []) 0
  where
    findOp' op ([], _) _ = []
    findOp' op (' (' : xs, xs') n = findOp' op (xs, xs' ++ " (") (n + 1)
    findOp' op (' ' : xs, xs') n = findOp' op (xs, xs' ++ " ") (n - 1)
    findOp' op (xs@(x : xs), xs') n
      | validMatch = [(Op op, (xs', drop (length op) xs))]
      | otherwise = findOp' op (xs, xs' ++ [x]) n
    where
      validMatch = isPrefixOf op xs ∧ n ≡ 0
      ∧ ¬ (null xs) ∧ ¬ (null xs')

```

## Problema 2

$$\begin{array}{ccc}
 C & \xrightarrow{g} & A + (B \times (C \times C)) \\
 \text{\scriptsize $\llbracket g \rrbracket$} \downarrow & & \downarrow \text{\scriptsize $id + (id \times (\llbracket g \rrbracket \times \llbracket g \rrbracket))$} \\
 X \ A \ B & \xrightleftharpoons[\text{\scriptsize $outL2D$}]{\text{\scriptsize $inL2D$}} & A + (B \times (X \ A \ B \times X \ A \ B)) \\
 \text{\scriptsize $\llbracket g \rrbracket$} \downarrow & & \downarrow \text{\scriptsize $id + (id \times (\llbracket g \rrbracket \times \llbracket g \rrbracket))$} \\
 D & \xleftarrow{h} & A + (B \times (D \times D))
 \end{array}$$

```

inL2D :: a + (b, (X a b, X a b)) → X a b
inL2D (i1 sb) = Unid sb
inL2D (i2 (ty, (cb, cb'))) = Comp ty cb cb'
outL2D :: X a b → a + (b, (X a b, X a b))
outL2D (Unid sb) = i1 sb
outL2D (Comp ty cb cb') = i2 (ty, (cb, cb'))
recL2D f = id + id × (f × f)
cataL2D g = g · recL2D (cataL2D g) · outL2D
anaL2D g = inL2D · recL2D (anaL2D g) · g
collectLeafs = cataL2D [pure, conc · π2]

```



```

calcDim V = λ(w, h) (w', h') → (max w w', h + h')
calcDim Ve = λ(w, h) (w', h') → (max w w', h + h')
calcDim H = λ(w, h) (w', h') → (w + w', max h h')
calcDim Hb = λ(w, h) (w', h') → (w + w', max h h')
calcDim _ = λ(w, h) (w', h') → (w + w', h + h')

dimen :: X Caixa Tipo → (Float, Float)
dimen = (fromIntegral × fromIntegral)
    · cataL2D [π1, joinDimen]
where
    joinDimen = Cp.ap · (⋈ · calcDim) × id

calcOrigins :: ((X Caixa Tipo), Origem) → X (Caixa, Origem) ()
calcOrigins = anaL2D g
where
    g = (id + calcOrig) · distl · (outL2D × id)
    calcOrig ((t, (l2d, l2d')), o) =
        (((), ((l2d, o), (l2d', calc t o $ dimen l2d)))

calc :: Tipo → Origem → (Float, Float) → Origem
calc t (o1, o2) (w, h) = case t of
    Hb → (o1 + w, o2)
    H → (o1 + w, o2 + h / 2)
    Ve → (o1, o2 + h)
    V → (o1 + w / 2, o2 + h)
    otherwise → (o1 + w, o2 + h)

agrup_caixas :: X (Caixa, Origem) () → Fig
agrup_caixas = cataL2D [pure · swap, conc · π2]

caixasAndOrigin2Pict :: ((X Caixa Tipo), Origem) → G.Picture
caixasAndOrigin2Pict = G.Pictures
    · map (λ(o, ((w, h), (t, c))) → crCaixa o (fromIntegral w) (fromIntegral h) t c)
    · agrup_caixas
    · calcOrigins

```

### Problema 3

Solução:

$$\begin{aligned}
 \cos x \ n &= \sum_{i=0}^n \frac{(-x^2)^i}{(2i)!} \\
 \cos x \ 0 &= x^i \\
 \cos x \ (n+1) &= \frac{(-x^2)^i}{(2n+2)!} + \cos x \ n = h \ x \ n + \cos x \ n \\
 h \ x \ n &= \frac{(-x^2)^{n+1}}{(2n+2)!} \\
 h \ x \ 0 &= \frac{-x^2}{2} \\
 h \ x \ (n+1) &= \frac{(-x^2)^{n+2}}{(2n+4)!} = \frac{-x^2}{(2n+4) \cdot (2n+3)} * h \ x \ n = \frac{-x^2}{f \ n} * h \ x \ n \\
 f \ n &= 4n^2 + 12n + 8
 \end{aligned}$$

```

cos' x = prj · for loop init where
    init = (1, (-x ↑ 2) / 2, 12, 18)
    loop (cos, h, f, k) = (h + cos, ((-x ↑ 2) / f) * h, f + k, k + 8)
    prj (cos, h, f, g) = cos

```

```

double cos(double x, int n){
    double r=1;
    double h=-pow(x, 2) / 2;
    double f=12;
    double k=18;
    for(int i=0; i<n; i++){
        r+=h;
        h=(-pow(x, 2) / f) * h;
    }
}

```

```

        f+=k;
        k+=8;
    }
    return r;
}

```

## Problema 4

Triologia “ana-cata-hilo”:

$$\begin{array}{ccc}
 C & \xrightarrow{g} & (A \times (B + C))^* \\
 \downarrow \llbracket g \rrbracket & & \downarrow (id \times (id + \llbracket g \rrbracket))^* \\
 FS\ A\ B & \xrightleftharpoons[inFS]{outFS} & (A \times (B + FS\ A\ B))^* \\
 \downarrow \llbracket g \rrbracket & & \downarrow (id \times (id + \llbracket g \rrbracket))^* \\
 D & \xleftarrow{h} & (A \times (B + D))^*
 \end{array}$$

```

outFS (FS l) = map (id × outNode) l
outNode (File b) = i1 b
outNode (Dir n) = i2 n
baseFS f g h = map (f × (g + h))
cataFS :: [(a, b + c)] → c → FS a b → c
cataFS g = g · recFS (cataFS g) · outFS
anaFS :: (c → [(a, b + c)]) → c → FS a b
anaFS g = inFS · recFS (anaFS g) · g
hyloFS g h = cataFS h · anaFS g

```

Outras funções pedidas:

```

cataFSdist f = cataFS (f · partitionEithers · map distr)
check :: (Eq a) ⇒ FS a b → Bool
check = cataFS g
  where
    g = (∧) · ⟨¬ · hasRepeated · map π1, and · rights · map π2⟩
    hasRepeated = (≠) · ⟨id, nub⟩
tar :: FS a b → [(Path a, b)]
tar = cataFSdist (conc · (map (pure × id) × concat · map addPath))
  where
    addPath (a, fs) = map ((a:) × id) fs
untar :: (Eq a) ⇒ [(Path a, b)] → FS a b
untar = anaFS (map undistr
  · uniteEithers
  · (map (id × π2) × collectEq)
  · partition (null · π1 · π2)
  · map (λ((a : as), b) → (a, (as, b))))
  where
    uniteEithers (l, r) = map i1 l ++ map i2 r
    collectEq l = [(a, [b | (−, b) ← filter ((≡ a) · π1) l]) | a ← nub $ map π1 l]
find :: (Eq a) ⇒ a → FS a b → [Path a]
find a = cataFSdist (conc · (findLeft × findRight))
  where
    findLeft = map pure · filter (≡ a) · map π1
    findRight = concat · map (λ(a, pths) → map (a:) pths)

```

```

new :: (Eq a) => Path a -> b -> FS a b -> FS a b
new = (curry · curry) (anaFS g)
  where
    g =  $\widehat{dist} \cdot (id \times outFS)$ 
    dist [] = map (id × second (λfs → ([], fs)))
    dist [a] = ((a, i1 b):) · dist []
    dist (a : as, b) = map (undistr · second (λ(a', fs) → (a', ((if a ≡ a' then as else [], b), fs)))) · distr

cp :: (Eq a) => Path a -> Path a -> FS a b -> FS a b
cp p p' = untar
  · Cp.ap
  · ⟨maybe id (:) · searchFile, id⟩
  · tar
  where
    searchFile = liftM ⟨p', id⟩ · lookup p

rm :: (Eq a) => (Path a) -> (FS a b) -> FS a b
rm = curry (anaFS g)
  where
    g =  $\widehat{dist} \cdot (id \times outFS)$ 
    dist [] = map (id × second (λfs → ([], fs)))
    dist [a] = filter (λ(a', bfs) → [(a ≢ a'), true] bfs) · dist []
    dist (a : as) = map (undistr · second (λ(a', fs) → (a', ((if a ≡ a' then as else []), fs)))) · distr

auxJoin :: [(a, b + c)], d) -> [(a, b + (d, c))]
auxJoin (l, d) = map (id × (id + λc → (d, c))) l

cFS2Exp :: a -> FS a b -> (Exp () a)
cFS2Exp = curry (anaExp g)
  where
    g = i2 · (id × (map ([id × (FS []), id] · distr) · outFS))

```