

# 关于线图的存储格式及绘图笔行走路径优化算法

薄 钟 禾

(大连工学院)

## 摘 要

本文讨论了一般线图在电子计算机存储器中的存储格式,并运用图论方法,研究了绘图笔的行走路径,提出一种较好的方法。本文介绍的算法已在作者研制的计算机绘图程序GRAPHIC<sup>[1]</sup>中实现。结果表明,算法是成功的,大大提高了图形处理的效率。

## 一、引言

线图是描述几何体的基本方法之一。比如,一根忽略粗细的杆件、绳索等可用一条线段表示。另外,一个多边形或多面体,可以用其边或棱来描述。机械制图及土建工程制图都属于线图。其优点是简单且反映了原几何体的基本特征。线图是计算机绘图中处理的很重要的一类图。

线图反映图形中各顶点之间、顶点与边之间的关系,与图论中研究的图具有相同的拓扑性质。所以,采用图论方法处理它是很方便的。本文中介绍的算法原是为处理结构分析中遇到的线图的,但是一般来说,它们适用于所有线图。下面两部份内容分别介绍了线图的存储格式和绘图笔行走路径的优化算法。

## 二、线图的存储格式

对于计算机绘图的各种算法,首先遇到的就是如何用计算机语言描述和存储几何图形的问题。一般地说,描述和存储方法要考虑到两方面的因素:一是如何正确反映原图形的全部性质;二是要解决计算机存储空间和算法处理等技术问题。

一个几何体的基本性质,由其几何性质与拓扑性质两部分组成。在这里几何性质指图形尺度、坐标等内容,而拓扑性质指图形的构成方式。对于线图,是指各顶点之间的连接关系。一个图当它的各个顶点的坐标及各顶点之间的连接关系确定后,其本身就被唯一确定了。显然,一个图的几何性质与拓扑性质是相互独立的,可对它们分别存储。

本文于1987年5月收到

几何性质的存储比较简单。本文介绍的算法采用三维空间直角坐标系，按照图中的顶点编号，顺序存储其坐标值。这样该图的几何性质信息便存储好了。

拓扑性质的存储要稍复杂些。首先需要寻找一种有利于算法处理的存储形式；另外是使其存储空间尽可能小，我们将看到，它直接关系到算法的生命力。

在图论中，一个图的存储方式有多种。诸如有：关联矩阵、回路矩阵、割集矩阵，点邻接矩阵等方式。每一矩阵反映了该图的某种内在性质，它们可以通过线性变换互相转换。对于我们目前的问题，采用点邻接矩阵（简邻接阵）较为方便。此外，邻接阵有一优点是，其体积较小。邻接阵的构成见附录A。

尽管邻接阵在各种矩阵中体积最小，但若完整地存储它，也几乎是不可能的。设图的顶点数为“ $n$ ”，则邻接阵体积为 $n^2$ ，若 $n=1000$ （这是很普遍的情形），则其体积就是一百万。这在一般的中小型机上是一个很大的数字。尽管可以借助外存储器处理，但要以时间为代价。实际上，这完全没有必要。因为，一般地说，描述几何体的邻接阵是一稀疏阵，当图中顶点数很大时，该阵变得非常稀疏。例如，在结构分析中遇到的情况，当 $n$ 较大时，该阵之非零元素约在 $2n \sim 8n$ 之间，这比 $n^2$ 要小多了。当 $n=1000$ 时，实际至多仅需存8000个字（若存上三角或下三角阵则5000字）就够了。这在微型计算机上都是支付得起的。这只需采用紧缩存储技术就可办到。

采用哪种紧缩存储技术呢？我们选择了线性链存储技术（见附录A）。稍深入一点的观察发现，这使得相应的算法变得相当灵活。邻接阵的具体存储格式见附录A。此外在本算法中，完整地存了邻接阵，这是考虑到后继算法处理方便的一种折衷方案。当存储空间较紧张时，可以只存其上三角（或下三角）阵。

### 三、绘图笔行走路径的优化

当有了图的拓扑与几何信息后，要绘制几何图形已是极容易的了。但是，在绘图时，如果顺序地取一条边绘一条边，则显然，绘图笔将用大量时间在空走，这大大影响其绘图效率。我们知道，计算机的运算速度与笔绘仪的绘图速度要相差若干个数量级。能否让计算机对数据再加工一下，使绘图笔空走路程减少呢？回答是肯定的。图论方法为我们提供了有力的工具。

图论中，定义每一顶点的度数（度数定义为该顶点的所有相邻顶点数）皆为偶数的图为欧拉图。这种图具有一个有趣的性质，即从任一点出发，必定存在某条路径，遍历图中所有边，且经过每条边一次仅一次。而非欧拉图，则一定不存在这样的路径（仅两个顶点度数为奇数的图除外）。如果欲绘制的是欧拉图，则只要找出这一路径，一笔即绘出整个图，显然效率是最高的了。但遗憾的是，一般线图极少是欧拉图。

但这启发我们，是否可以通过添加若干条边，使一般线图转换为欧拉图，然后再处理它呢？可以证明，这总是办得到的。关键问题是，使添加上的边的边长之和为最短。于是，上述求一般线图绘图走笔路径最短问题，就变成下述数学提法：

找一边集合，集合中每一元素（边）连接图中一对度数为奇数的顶点，且元素两两不相同。使得原图中的奇度数顶点由这一边集中所有相应的元素连接后，变为欧拉图。而且该边

集应满足：其所有元素的边长之和在所有可能的边集中为最短。

对于所有添加边的边长之和为最短这一条件，若完全满足，则将导致大量的运算。（注：实际上，这相当于图论中著名的旅行商问题，属于NP困难问题。即：不可能在多项式时间内求得结果。）考虑到效率，只能做某种近似的处理。本文介绍的算法实际上是采用如下判断准则：（一）若两奇度数顶点相邻，则在该两顶点间加一虚拟边；（二）对所有两两不相邻的奇度数顶点，依次取一顶点，然后找出距离该顶点最近的另一个奇度数顶点，在二者间加一虚拟边，并从奇度数顶点集中消去该两顶点。然后再取一奇度数顶点重复上述步骤，直至处理完所有奇度数顶点。此外，做了两个假定：（一）认为相邻顶点间距离大体相同且较非相邻顶点间距离为近；（二）对奇度数顶点，是按其自然存储顺序依次加虚拟边的，这具有一定随机性。

尽管以上准则较为粗糙，但虚拟边基本上都加在了距离较近的奇度数顶点之间，所以效果较好。该算法计算量很小，且大多数是判断与赋值语句。

至此，欧拉图已形成，下面是要寻找那条“总存在”的，遍历图中所有的边的路径。注意，并不是随便怎样走都可以的。该算法用下面两个步骤解决这个问题。

#### （a）形成一组闭链（欧拉子图）

从任一顶点出发，随便按照某种规律走，每经过一个边，便将该边从原图中消去，直到不能继续向前走了为止。即走到了某一顶点处，而与该顶点相接的边已全部走过了。我们可容易地证明（证明见附录B），这样得到的一个链一定是闭合的链。即链头与链尾是同一顶点。经过上述步骤，一般地说，原图中还剩下子图，根据图论中的原理，显然这剩下的子图仍为欧拉图。重复上述做法，直至剩下的子图变为一个空图。这样，便将一个欧拉图分割为一系列闭链，它们的和便是原欧拉图。

#### （b）一组闭链的叠加

首先取某链为基链，再取一链为插入链。在叠加基链中搜索，找到与欲插入链的链头顶点相同的顶点。（当原图为连通图时，总可以找到某个插入链办到这件事。对非连通图只要做相应处理即可。）最后，将欲插入链插入到基链中搜索到的那个顶点之后。再取这个新链为叠加基链，重复上述步骤，直至将所有链全部连接起来为止。

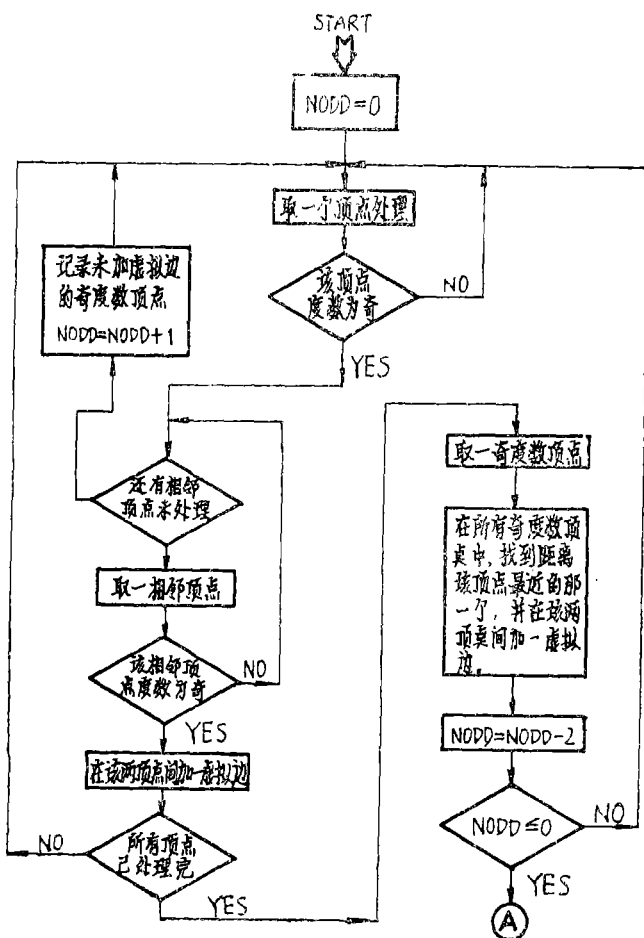
绘图笔行走路径优化算法的框图，详见下面的（图—a）和（图—b）。

## 四、结论

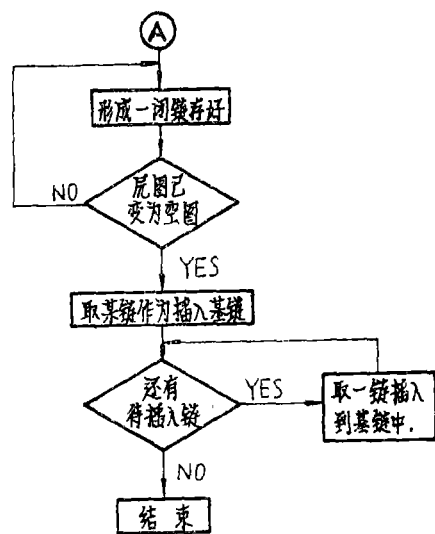
本文介绍的两个算法已在作者研制的绘图程序GRAPHIC上实现，该程序作为结构分析程序的一部分，是在IBM-4341计算机与Cal-Comp-960型笔绘仪上调试的，现已并入大连工学院工程力学所研制的结构分析程序系统JIGFEX中运行，取得了较好的效果。算法有如下两个优点：

（1）采用邻接阵与链式紧缩存储技术后，不但占用较小的内存空间，而且使整个算法变得相当简洁、灵活。

（2）经过走笔路径优化后，使绘图笔的空走路程大为减少。其效率分析大致可从这样两个方面考查：首先，算法使笔在绘线过程中尽可能地走得长，只是在不得不空走的地方，才

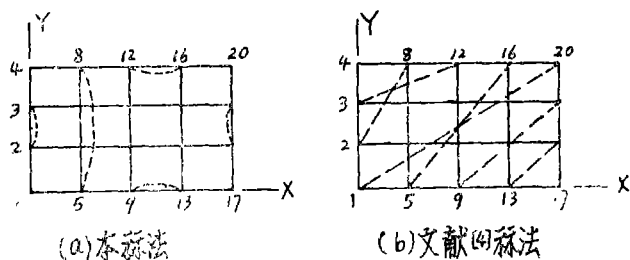


(图一a)



(图一b)

空走至下一绘线起点; 其次, 对于不得不空走的路程亦进行了一定的优化。对于一般的图, 实绘线路程与空走路程的比值大约是5:1, 平均顶点度数高(或顶点数多)的图, 这一比值趋于下降, 否则相反。而对于未经任何处理, 顺序取一边绘一边的算法, 该比值大都在1:1以上。文献(4)中对线段稍加排列的算法, 该比值为2:1左右。在下面(图二)给出的例子中, 该比值对本算法是23%, 文献(4)的算法是60%。应注意的是, 当网格数加大时, 比如网格数是 $10 \times 10$ , 则对本算法的该比值将仅仅是13%左右。



(图二)

本文介绍的线图存储格式算法,适用于任何线图。绘图笔行走路径优化算法,原是针对结构分析中遇到的图(主要是有限元网格图)设计的。该类图有这样一个特点,其各个边的边长相差不很大,比值大都在四以内。不具有这样特点的图,对算法的近似程度稍有影响,但算法的效果仍是不错的。

论文工作曾得到杨名生付教授、钟万勰教授、张述庆付教授的帮助,在此致谢。

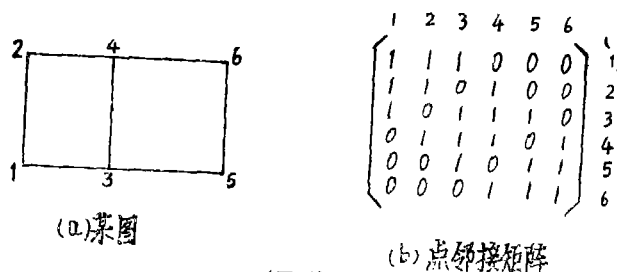
### 参 考 文 献

- (1) 杨名生, JIGFEX程序的绘图系统(I), 大连工学院学报 vol.21, No.3, Sept. 1982。
- (2) 薄钟禾, 大连工学院一九八四年硕士毕业论文。
- (3) 大连工学院工程力学所, 近代程序设计基础, 上、下册。
- (4) 楼世博、金晓龙、李鸿祥, 图论及其应用, 1982年。

附录A:

#### 1. 点邻接矩阵的定义:

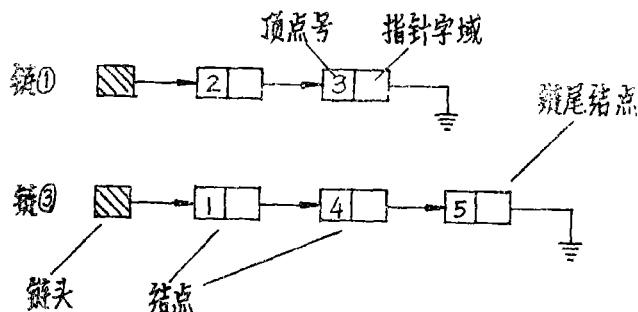
设点邻接阵为(A), 元素用 $a_{ij}$ 表示, 行号“i”与列号“j”分别对应顶点号。若 $a_{ij}=1$ 则表示第i号顶点与第j号顶点相邻(相邻意味着两顶点间有边相连), 否则, 若 $a_{ij}=0$ , 则表示i, j两顶点不相邻。因而邻接阵是一对称方阵。(图三)是一个例子。



(图三)

#### 2. 邻接阵的线性链存储方式:

设线图顶点数为 $n$ , 则首先需设置 $n$ 个链头, 每条链存储邻接阵的一行, 链头顺序放在链头区内。链中结点存两个字, 一个字存顶点号, 一个字存该行下一非零元素的存储地址。链尾结点用指针字赋给一特殊值(比如“0”)的方法表示。这样, 从链头结点可以顺序找到链中所有结点, 也即找到该行的所有非零元素。(图四)表示出(图三)点邻接矩阵的链存



(图四)

储形式，此处仅写出了第一、三行，其它行以此类推。

附录B：

定理：设某图为欧拉图。从该图任一点出发，以任何方式每走过一边便从原图中消去该边，并将这些边顺序连接起来形成一条链。则无论怎样走，最后一定要回到其起始点。即如此形成的一条链必为闭链。

证明：

由欧拉图定义，图中所有顶点的度数皆为偶数。

设想，从某顶点出发，走向其相邻顶点，因为每走过一条边便从原图中消去该边。显然，在余下的子图中，当目前所在顶点不是起始点时，起始顶点与目前所在顶点的度数为奇数，其它顶点的度数皆为偶数。

假设最后不回到起始顶点，则可知，目前所在的顶点的度数必为奇数，且不可能小于零。这就产生了矛盾，因为此时该顶点度数大于零，即仍有边与之相连，故可从该顶点继续走下去。所以，如此走过一边便删去一边的走法，最后必定回到起始顶点处。即形成的链必定是闭链。而且剩下的子图亦为欧拉图。

证毕

## A Storage Form of Line Drawing in Computer And a Algorithm of Optimal Path of Plotter Pen

### Abstract

In this paper, a storage form of line drawing in computer is discussed, a algorithm of optimal path of plotter pen is studied by using graph theory techniques, and a better method is given. The algorithms are carried out in a program called GRAPHIC produced by author. According to the results of the program operation, the algorithms proved to be successful, the efficiency of graph operating is greatly increased.