Lista 3

Zadania 1-4 należy rozwiązać za pomocą oprogramowania:

`https://ampl.com/try-ampl/download-a-free-demo`

We wszystkich zadaniach należy oddzielić dane od modelu. Zadania 5-9 należy rozwiązać odręcznie.

1. Firma produkuje pewien zbiór wyrobów $\boldsymbol{W}$, korzystając ze zbiory komponentów $\boldsymbol{C}$. Jednostka wyrobu $i \in \boldsymbol{W}$ wymaga a_{ij} jednostek komponentu $j \in \boldsymbol{C}$. Cena jednostkowa wyrobu $i \in \boldsymbol{W}$ wynosi p_i a zapas komponentu $j \in \boldsymbol{C}$ wynosi s_j. Rozpatrz przykładowe dane:

	C_1	C_1	C_3	p_i
W_1	2	1	0	20
W_2	1	2	3	30
W_3	3	1	1	25
s_j	300	150	200	

   Przeprowadź pełną analizę wrażliwości uzyskanego rozwiązania optymalnego dla przykładowych danych. Podaj interpretację uzyskanych wyników.

2. Farmer Tom musi zadecydować ile hektarów żyta, pszenicy i kukurydzy obsiać na swoim 100 hektarowym polu. Może sprzedać nie więcej niż 560 ton żyta w cenie 300$ za tonę, nie więcej niż 480 ton pszenicy w cenie 500$ za tonę i nie więcej niż 500 ton kukurydzy w cenie 400$ za tonę. Obsianie hektara żyta wymaga 12 godzin pracy i daje 10 ton zbiorów, obsianie hektara pszenicy wymaga 20 godzin pracy i daje 8 ton zbiorów a obsianie hektara kukurydzy daje 5 ton zbiorów i wymaga 7 godzin pracy. Farmer dysponuje 1400 godzinami pracy. Zbuduj model liniowy dla tego problemu i wyznacz rozwiązanie. Następnie odpowiedz na następujące pytania:

   - Czy farmer powinien obsiać całe pole?
   - Farmer chce dokupić 1 hektar pola. Jaka jest maksymalna cena tego hektara, dla której zakup jest opłacalny? Ile maksymalnie hektarów pola może farmer kupić za tą cenę?
   - O ile wzrośnie zysk farmera jeżeli zakupi dodatkowych 20 hektarów pola w cenie 500$ za hektar?
   - Jaką kwotę opłaca się farmerowi zapłacić za jedną dodatkową godzinę pracy?
   - Z powodu absencji pracowników liczba dostępnych roboczogodzin spadła do 1000. O ile zmniejszy się zysk farmera?
   - Załóżmy, ze cena pszenicy spadnie do 260$ za tonę (ceny pozostałych zbóż nie ulegną zmianie). Czy produkcja pszenicy będzie nadal opłacalna? Jeżeli tak, to i ile zmniejszy się zysk farmera?
   - Farmer rozważa wprowadzenie uprawy owsa. Popyt na owies, wydajność z 1 h. i wymagana praca wynoszą odpowiednio 600, 7 i 10. Jaką minimalną cenę za 1 tonę owsa powinien ustalić farmer żeby produkcja tego zboża była opłacalna?

3. Rozpatrz następującą popularną grę w kamień, papier, nożyce. Dwaj gracze jednocześnie wypowiadają jedno z trzech słów: kamień, papier lub nożyce. W poniższej tabeli pokazane są wypłaty dla gracza 1 (np. jeżeli gracz 1 powie nożyce a gracz 2 powie papier, to gracz 2 płaci graczowi 1 jedną złotówkę).

	kamień	papier	nożyce
kamień	0	-1	1
papier	1	0	-1
nożyce	-1	1	0

Wyznacz optymalne strategie dla obu graczy oraz wartość gry. Pokaż, że model dla gracza 2 jest modelem dualnym modelu gracza 1.

4. Wykorzystaj model z Zadania 3 do rozwiązania następujących gier:

   (a) Gracz 1 ma czarnego Asa i czerwoną ósemkę. Gracz 2 ma ma czerwoną dwójkę i czarną siódemkę. Gracze jednocześnie wybierają jedną kartę. Jeżeli karty mają taki sam kolor, to wygrywa gracz 1. W przeciwnym wypadku wygrywa gracz 2. Wygrana jest równa sumie liczb na zagranych kartach (As liczy się jako 1). Wyznacz optymalne strategie dla obu graczy i wartość gry.

   (b) Gracze Nieparzysty i Parzysty jednocześnie wypowiadają jedną z liczb 1 lub 2. Nieparzysty wygrywa jeżeli suma wypowiedzianych liczb jest nieparzysta. W przeciwnym wypadku wygrywa Parzysty. Przegrany płaci zwycięscy kwotę równą sumie wypowiedzianych liczb. Którym z graczy chciałbyś być (spróbuj odpowiedzieć na to pytanie przed rozwiązaniem gry)? Wyznacz optymalne strategie dla obu graczy i wartość gry.

5. Rozwiąż model z Zadania 1 (Lista 1) stosując algorytm sympleksowy. Dla każdej tablicy sympleksowej wskaż wierzchołek zbioru dopuszczalnych rozwiązań (metoda graficzna), który odpowiada tej tablicy.

6. Rozwiąż następujący problem za pomocą algorytmu sympleksowego. Zapisz model dualny i podaj optymalne rozwiązanie modelu dualnego.

$$\begin{aligned} \max z = \quad & 3x_1 + 2x_2 + x_3 \\ & x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1 - x_2 + x_3 \leq 4 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

7. Dla pewnego problemu maksymalizacji otrzymano następującą ostatnią tablicę sympleksową:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
z	6	0	0	0	11	32
x_4	-3	-1	0	1	2	2
x_3	2	2	1	0	1	4

   Czy istnieje alternatywne rozwiązanie optymalne? Jeżeli tak to wyznacz je.

8. Stosując metodę dwóch faz pokaż, że poniższy model jest sprzeczny (**wskazówka**: obliczenia powinny być bardzo proste, skorzystaj ze struktury tego problemu!). Zapisz model dualny. Jakie będzie jego rozwiązanie?

$$\begin{aligned} \max z = \quad & 2x_1 + 5x_2 \\ & 3x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

9. HiDec produkuje dwa elementy elektroniczne, które używają rezystorów, kondensatorów i kostek czipowych. Dane do problemu znajdują się w następującej tablicy:

	Wymagania jednostkowe		
Zasoby	Element 1	Element 2	Dostępność zasobu
Rezystory	2	3	1200
Kondensatory	2	1	1000
Kostki czipowe	0	4	800
Cena jednostkowa ($)	3	4	

Model oraz ostatnia tablica sympleksowa są podane poniżej (dodatkowe zmienne s_1, s_2, s_3 odpowiadają odpowiednio ograniczeniom na rezystory, kondensatory i kostki czipowe).

$$
\begin{array}{rll}
\max z = & 3x_1 + 4x_2 & \\
 & 2x_1 + 3x_2 \leq 1200 & \text{[Rezystory]} \\
 & 2x_1 + x_2 \leq 1000 & \text{[Kondensatory]} \\
 & 4x_2 \leq 800 & \text{[Kostki czipowe]}
\end{array}
$$

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
z	0	0	5/4	1/4	0	1750
x_1	1	0	-1/4	3/4	0	450
s_3	0	0	-2	2	1	400
x_2	0	1	1/2	-1/2	0	100

- Oblicz ceny dualne (shadow prices) ograniczeń oraz odpowiednie zakresy dla których te ceny są obowiązujące. Podaj interpretację obliczonych wielkości w tym problemie.
- HiDec chce zakupić 100 jednostek rezystorów w cenie 1$ za sztukę. Czy ten zakup jest opłacalny? O ile wzrośnie zysk firmy po dokonaniu zakupu?
- Załóżmy, że cena jednostkowa elementu 2 może się zmienić. Dla jakich wartości ceny jednostkowej elementu 2 otrzymane rozwiązanie pozostanie optymalne?
- Załóżmy, że cena jednostkowa elementu 2 spadła do 2$. O ile zmniejszy się zysk firmy HiDec?