1 Zadanie numeryczne N11

Szymon Pach

1.1 Opis metody

Zadanie polegało na znalezieniu przybliżeń całki $\int_{-1}^{1} \frac{exp(x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ metodą trapezów, Simpsona, oraz reguły 3⁄8 stosując zagęszczanie przedziałów. Najpierw należy pozbyć się nieskończoności na brzegach przedziału, bo funkcja podcałko-wa nie jest określona dla $x = -1$ i $x = 1$. Ponadto warto zauważyć, że funkcja podcałkowa jest parzysta, więc $\int_{-1}^{1} \frac{exp(x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 2\int_{0}^{1} \frac{exp(x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. Ma to szczególne znaczenie przy obliczeniach numerycznych, bo dzięki temu szybciej znajdziemy przybliżenie z żądaną dokładnością, oraz wykonamy mniej obliczeń m.in. związanych z liczeniem wartości funkcji w punktach.

1.1.1 Zmiana przedziału całkowania

$$\int_{0}^{1} \frac{exp(x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = |dt = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx,\ t = \arcsin(x),\ x = \sin(t)| = \int_{\arcsin 0}^{\arcsin 1} exp(\sin^2 t)\,dt = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} exp(\sin^2 t)\,dt$$

1.1.2 Zagęszczanie przedziałów

Samo zastosowanie wzorów na liczenie kwadratur nie jest trudne, natomiast wyjaśnienia wymaga sposób zagęszczania przedziałów. Dla metody trapezów z każdym kolejnym krokiem wystarczy do połowy wartości całki z poprzedniego kroku dopisywać sumę wartości funkcji w nowych punktach, uzyskanych z długością kroku h dwukrotnie mniejszą. Ob-liczenia kończymy, gdy wartość bezwzględna dwóch kolejnych przybliżeń jest mniejsza od żądanej dokładności. Metoda Simpsona i metoda 3⁄8 są bardziej skomplikowane, bo punkty zagęszczane w nowym kroku mają inne współczynniki mnożenia niż gdybyśmy je liczyli dla poprzedniego kroku, więc trzeba uaktualniać ogólną wartość całki z opóźnieniem jednego kroku, a wartość całki w obecnym kroku liczyć z innymi współczynnikami. Dla metody Simpsona, podobnie jak przy metodzie trapezów, krok całkowania zmniejsza się dwukrotnie, natomiast stosując regułę 3⁄8 krok całko-wania należy zmniejszać trzykrotnie, a co za tym idzie do ogólnego przybliżenia doliczamy wartość przybliżenia z poprzedniego kroku pomniejszoną trzykrotnie.

1.2 Instrukcja uruchomienia

Program został napisany w języku Matlab. W środowisku Matlab należy przejść w zakładce *Current folder* do folderu, w którym znajduje się program o nazwie *main.m*, a następnie wpisać w oknie konsoli *main*, a następnie nacisnąć *enter*.

1.3 Rozwiązanie

Wyniki wywołania funkcji *main*.

Q1 =

5.508429773886107

err1 =

3.947675963900110e-09

iter1 =

4

Q2 =

5.508429773886106

err2 =

1.315892284026177e-09

iter2 =

4

Q3 =

5.508429773886106

err3 =

4.430167495073079e-07

iter3 =

3

Dla wszystkich metod, przy zadanej dokładności 10^{-6} otrzymaliśmy te same wyniki $Q = 5.508430$.

1.4 Analiza błędów

Obliczenia wykonywałem w pakiecie 32-bitowym. Tak naprawdę uzyskane przybliżenia różnią się tylko liczbą na ostatniej pozycji co pozwala przypuszczać, że dla wszystkich metod uzyskaliśmy wyniki z maksymalną możliwą dokładnością, chociaż uzyskaliśmy błędy bezwzględne pomiędzy kolejnymi krokami na poziomie 10^{-9} dla metody Simpsona i trapezów, oraz 10^{-7} dla reguły 3⁄8. Dla dwóch pierwszych metod wykonaliśmy po 4 iteracje, a dla metody 3⁄8 wykonaliśmy 3 iteracje, żeby uzyskać żądaną dokładność. Trzeba jednak wziąć pod uwagę fakt, że im wyższego rzędu jest kwadratura tym więcej wymaga wywołań funkcji podcałkowej, dlatego w tym przypadku najniższym kosztem policzono całkę metodą trapezów, następnie metodą Simpsona, na samym końcu zostaje reguła 3⁄8, bo chociaż wykonaliśmy o jedną iterację mniej to trzeba było policzyć wartość funkcji znacznie więcej razy, dokładnie z każdym krokiem trzykrotnie więcej, a też metoda prosta wymaga liczenia funkcji w 2 punktach poza krańcami przedziału, więc z każdym krokiem liczymy wartość funkcji ok. 6 razy więcej niż w przypadku pozostałych metod.

1.5 Opis złożoności algorytmu

Dzięki zastosowaniu zagęszczania przedziałów osiągnęliśmy znaczny wzrost wydajności w stosunku do pierwotnej wersji. Reguła 3⁄8 okazała się być niezbyt wydajna, lepiej stosować metodę trapezów lub metodę Simpsona. Metoda trapezów jest rzędu drugiego, natomiast metoda Simpsona i 3⁄8 są rzędu czwartego, więc najlepszym wyborem jest stosowanie złożonej metody Simpsona, bo błąd z każdym krokiem jest nieznacznie mniejszy w porównaniu do metody 3⁄8, natomiast wykonujemy znacznie mniej obliczeń.

1.6 Możliwa optymalizacja

Poza zagęszczaniem przedziałów można by było wykorzystać fakt, że znamy kolejne przybliżenia całki, dzięki czemu można zastosować ekstrapolację Richardsona. W ten sposób dla metody trapezów otrzymalibyśmy metodę Romberga.

Możliwe jest też zastosowanie kwadratur adaptacyjnych, gdzie funkcja jest bardziej zagęszczana w miejscach, w których jest bardziej zmienna.

1.7 Kod źródłowy

```
close all; clear; clc;


tol = 1e-6 / 2;
f = @(x) exp(sin(x) .^ 2);
a = 0;
b = pi/2;


% metoda trapezow
h = (b - a) * 0.5;
Q = (f(a) + f(b)) * h; err =
tol;
iter = 1;


while err >= tol
   Qpre = Q;
   Q = 0.5 * Q + h * sum(f((a + h) : (2*h) : (b - h)));
   h = 0.5 * h;
   err = abs(Q - Qpre);
   iter = iter + 1;
end


Q1 = 2 * Q
err1 = 2 * err
iter1 = iter



% metoda Simpsona
h = (b - a) / 6;
Qt = (f(a) + f(b)) * h; S = 4 *
f((a + b) * 0.5);
```

```
Q = Qt + S * h; %(f(a) + 4 * f((a + b) * 0.5) + f(b)) * h;
err = tol;
iter = 1;
h = (b - a) / 4;

while err >= tol
   Qpre = Q;
   Qt = 0.5 * Qt + S * (h / 6);
   S = 4 * sum(f((a + h) : (2*h) : (b - h)));
   Q = Qt + (h / 3) * S;
   h = h / 2;
   err = abs(Q - Qpre);
   iter = iter + 1;
end

Q2 = 2 * Q
err2 = 2 * err
iter2 = iter



% metoda 3/8
h = (b - a) / 3;
Qt = (f(a) + f(b)) * (3/8 * h);
S = f(a + h) + f(a + 2 * h);
Q = Qt + (9/8 * h) * S;

err = tol;
iter = 1;

while err >= tol
   h = h / 3;
   Qpre = Q;
   Qt = Qt / 3 + (3/4 * h) * S;
   S = sum(f((a + h) : (3*h) : b)) + sum(f((a + 2 * h) : (3*h) : b));
   Q = Qt + (9/8 * h) * S;
```

```
    err = abs(Q - Qpre);
    iter = iter + 1;
end

Q3 = 2 * Q
err3 = 2 * err
iter3 = iter
```