**N1** *Zadanie numeryczne*
Napisz program obliczający wartości:

$$I_k = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{T_k(\cos(x_n))}{1 + 25\cos^2(x_n)}, \qquad x_n = \frac{\pi}{N}\left(n + \frac{1}{2}\right), \tag{1}$$

dla $k = 0..N-1$ oraz $N = 20$.

$$T_k(x) = \cos(k \arccos(x)), \tag{2}$$

są wielomianami Chebysheva, spełniającymi również relację rekurencyjną:

$$T_1(x) = 1, \qquad T_2(x) = x, \qquad T_{k+2}(x) = 2xT_{k+1}(x) - T_k(x). \tag{3}$$

W opracowaniu (w pliku `txt` lub `pdf`, nie w programie) należy podać:

(a) wynik (10 cyfr znaczących),

(b) ilość obliczeń zdefiniowaną jako sumę
- obliczeń arytmetycznych (mnożeń, dzieleń, dodawań i odejmowań) **+1**,
- wywołanie (nie obliczenie) własnej funkcji **+1**,
- wywołanie funkcji matematycznej np. `cos, pow` **+30**,
- operacja logiczna (np. warunek w pętli) **+1**,
- operacja bitowa **+0.5**,
- operator '=' **+0.5**,
- operatory typu '+=' **+1**,
- wypisywanie (poza ostatecznym wynikiem) (`printf` **+50**, `cout` **+200**),
- w językach skryptowych parsowanie każdej instrukcji/linijki (bez obliczeń) **+50**.

(c) opis optymalizacji.

oraz podać złożoność obliczeniową w zależności od $N$ dla przypadku obliczania jednej wartości $I_k$ oraz w przypadku wszyskich.

**N2** *Zadanie numeryczne*
Napisz program obliczający wartości:

$$Df = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h}. \tag{4}$$

Z jaką maksymalną dokładnością można uzyskać wynik i dla jakiego $h$ licząc bezposrednio z powyższego wzoru? Jak można go zmodyfikować aby otrzymać wynik dokładniejszy?

**N3** *Zadanie numeryczne*
rozwiąż układ równań postaci $A\mathbf{u} = \mathbf{g}$, gdzie macierz $A$ jest macierzą trójdiagonalną,

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{bmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{bmatrix} f_0 - 2f_1 + f_2 \\ f_1 - 2f_2 + f_3 \\ f_2 - 2f_3 + f_4 \\ \vdots \\ f_{N-3} - 2f_{N-2} + f_{N-1} \\ f_{N-2} - 2f_{N-1} + f_N \end{bmatrix}, \tag{5}$$

gdzie $h = 2/N$, $f_k = f(x_k)$, $x_k = -1 + kh$

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}. \tag{6}$$

Proszę zrobić wykres zależności $(x_k, u_k)$ dla $N = 1000$ oraz podać ilość obliczeń.

**N4** *Zadanie numeryczne*
rozwiąż układ równań postaci $A\mathbf{u} = \mathbf{g}$, gdzie macierz $A$ jest *prawie* macierzą trójdiagonalną,

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & & & & & 1 \\ 1 & 4 & 1 & & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & 1 & 4 & 1 \\ 1 & & & & & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{bmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{bmatrix} f_0 - 2f_1 + f_2 \\ f_1 - 2f_2 + f_3 \\ f_2 - 2f_3 + f_4 \\ \vdots \\ f_{N-3} - 2f_{N-2} + f_{N-1} \\ f_{N-2} - 2f_{N-1} + f_N \end{bmatrix}, \tag{7}$$

gdzie $h = 2/N$, $f_k = f(x_k)$, $x_k = -1 + kh$

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}. \tag{8}$$

Proszę zrobić wykres zależności $(x_k, u_k)$ dla $N = 1000$ oraz podać ilość obliczeń.
*Wskazówka:* proszę skorzystać ze wzoru Shermana-Morrisona.

**N5** *Zadanie numeryczne*

(a) Znaleźć rozwiązanie układu równań

$$\begin{cases} u_n - \dfrac{u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}}{h^2} = 0, & n = 2, \ldots, N-1, \\ u_1 = 1, & \\ u_N = 1. & \end{cases} \tag{9}$$

a następnie narysować wykres $(x_n = (n-1)h, u_n)$, dla $h = \frac{1}{N-1}$, oraz $N = 1001$. W opracowaniu proszę podać złożoność oraz uzasadnić wybór metody.

(b) Ostatnie równanie proszę zastąpić równaniem

$$-3u_1 + 4u_2 - u_3 = 0\,. \tag{10}$$

Proszę wykonać te same polecenia co w podpunkcie poprzednim.

**N6** *Zadanie numeryczne*
Zaimplementować metodę:

- relaksacyjną
$$x^{(n+1)} = x^{(n)} + \gamma\left(b - Ax^{(n)}\right),$$
- Jacobiego:
$$x^{(n+1)} = D^{-1}\left(b - Rx^{(n)}\right),$$
- Gausa-Seidla
$$x^{(n+1)} = L^{-1}\left(b - Ux^{(n)}\right),$$
- Successive OverRelaxation
$$x_i^{(n+1)} = (1-\omega)x_i^{(n)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j<i} a_{ij}x_j^{(n+1)} - \sum_{j>i} a_{ij}x_j^{(n)}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, N\,.$$

Znaleźć rozwiązania układu z zadania N5 z dokładnością $10^{-10}$. Która metoda jest najszybsza? Proszę uwzględnić strukturę układu równań.
*Uwaga:* w razie problemów z wykorzystaniem macierzy z zadania N5 można skorzystać z macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

i walczyć o 3 punkty.

**N7** *Zadanie numeryczne*
Zaimplementować metodę gradientów sprzężonych dla układu z zadania 6 z poprzedniego zestawu.

**N8*** *Zadanie numeryczne*
Na płaszczyźnie $(x, y)$ wybieramy $N \times N = N^2$ równo oddalonych punktów $(x_n, y_m) = (hn, hm)$, $h = 10.0/(N-1)$, $n, m = 0 \dots N-1$. Znaleźć wartości $u_{n,m}$ w zadanych punktach spełniające następujące warunki:

$$u_{n,m} = \begin{cases} 0 & \text{dla } n = 0, n = N-1, m = N-1, \\ 1 - |x_n - 5|/5 & \text{dla } m = 0, \\ 1 & \text{dla } (x_n-3)^2 + (y_m-7)^2 < 0.2, \\ 2 & \text{dla } (x_n-8)^2 + (y_m-7)^2 < 0.2, \\ \left(u_{n+1,m} + u_{n-1,m} + u_{n,m+1} + u_{n,m-1}\right)/4 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

**Uwaga:** tak naprawdę to mamy układ $N^2$ równań na $N^2$ niewiadomych, zatem szukany wektor będzie miał długość $N^2$.
Proszę wybrać spore $N \sim 100 - 1000$.
Rozwiązanie przedstawić w postaci wykresu.
*Wskazówka:* Układ można zapisać jedynie dla punktów wewnętrznych $(0 < n < N-1, 0 < m < N-1)$, a punkty z brzegu ($n = 0$,$m = 0$, $n = N-1$, $m = N-1$) można przenieść na prawą stronę jako wyrazy wolne. Powstała w ten sposób macierz będzie symetryczna i dodatnio określona.

**N9** *Zadanie numeryczne*
Znaleźć wartości własne macierzy z dokładnością $10^{-8}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & -1 \end{bmatrix},$$

korzystając z metody potęgowej, Rayleigha i metody iteracyjnej QR:

$$B^{(0)} = A,$$
$$Q^{(n)}R^{(n)} = B^{(n)},$$
$$B^{(n+1)} := R^{(n)}Q^{(n)}.$$

**N10** *Zadanie numeryczne*
Znajdź interpolację funkcji

$$f_1(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{ oraz } f_2(x) = e^{-x^2}$$

na przedziale $x \in [-5, 5]$

- dla $N$ równoodległych punktów. Dla jakiego $N$ otrzymamy najmniejszy błąd przybliżenia $\sigma = \max\left|f(x) - f_{approx}(x)\right|$? Dlaczego z funkcją $f_1$ są takie problemy?
Narysuj wykresy (również poza punktami interpolacji!) dla $N$ minimalizującego błąd. *2 ptk.*
- dla $N$ punktów $x_n = 5\cos\left(\frac{n\pi}{N-1}\right)$. Jaką teraz można uzyskać dokładność? Dlaczego? *2 ptk.*
- Wykonaj aproksymację przy użyciu splajnów kubicznych dla $N$ równoodległych punktów. Ile punktów by musiało być aby osiągnąć dokładność taką jak w poprzednim podpunkcie? *2 ptk.*
- Wykonaj aproksymację przy użyciu funkcji sinc, przyjmując, że poza zakresem funkcja przyjmuje wartość 0. Ile punktów by musiało być aby osiągnąć dokładność taką jak w poprzednim podpunkcie? *2 ptk.*

**Uwaga:** w tym zadaniu najważniejsza jest właściwa analiza i wnioski i to one stanowią podstawę oceny.

**N10** *Zadanie numeryczne*
Obliczyć całkę

$$\int_{-1}^{1} \frac{\exp(x^2)\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

z dokładnością do $10^{-6}$ za pomocą złożonej metody trapezów, Simpsona i reguły 3/8, stosując iteracyjne zagęszczanie podprzedziałów.
**Uwaga**: za liczenie dwukrotnie (lub więcej) wartości funkcji w obrębie jednej metody przy zagęszczaniu będą odejmowane punkty.
*Wskazówka:* zmienić zmienne tak aby pozbyć się nieskończoności na brzegach przedziału.

**N12** *Zadanie numeryczne*
Znajdź wszystkie miejsca zerowe funkcji

$$f(x) = \sin\left(x^2 + \ln(x)\right) + \operatorname{tg}(x) \tag{11}$$

w przedziale $x \in [0.01, 10]$ z dokładnością $10^{-10}$ co najmniej dwoma metodami (jedną iteracyjną np. Newtona, drugą zawężającą przedział np. *regula falsi*).

**N13** *Zadanie numeryczne*
Znajdź wszystkie rozwiązanie układu równań

$$\begin{cases} x^2 - \sin(y^2) & = 0, \\ \ln\left[(x+1)^2 + (y-1)^2\right] & = 0.98. \end{cases} \tag{12}$$

w przedziale $x \in [-3, 3]$, $y \in [-3, 3]$ metodą Newtona.
**Bonus+2pkt**. Narysuj baseny atrakcji (zaznacz różnymi kolorami punkty startowe metody Newtona prowadzące do różnych rozwiązań) oraz zidentifikuj ewentualne dwucykle.

**N14** *Zadanie numeryczne*
Znajdź rozwiązanie układu równań (z dokładnością $\sim 10^{-6}$)

$$\begin{cases} \dfrac{u_{n-1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} + 2u_n(u_n^2 - 1) & = 0, \qquad n = 1, \ldots, N-1 \\ u_0 & = 0, \\ u_N & = 1, \end{cases} \tag{13}$$

gdzie $N \sim 100 - 1000$, $h = 20/(N-1)$. Narysuj wykres rozwiązania.

**Terminy oddawania** Poniżej podano pierwotny termin oddawania zadań. Po tym terminie zadania również będę przyjmowane, ale oceniane będą surowiej. Ponadto im później oddane zadania, tym mniej czasu na ocenienie i ewentualną poprawę.

**N1-N4** 30.11.2017

**N5-N6,N7** 06.12.2017

**N8,N9** 10.01.2017

**N10?,N11?** 17.01.2018