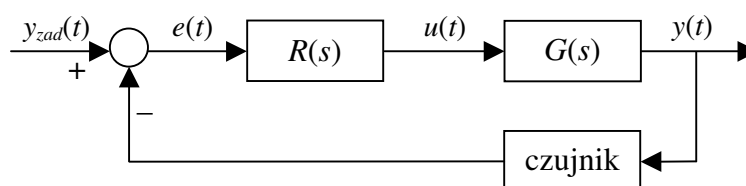


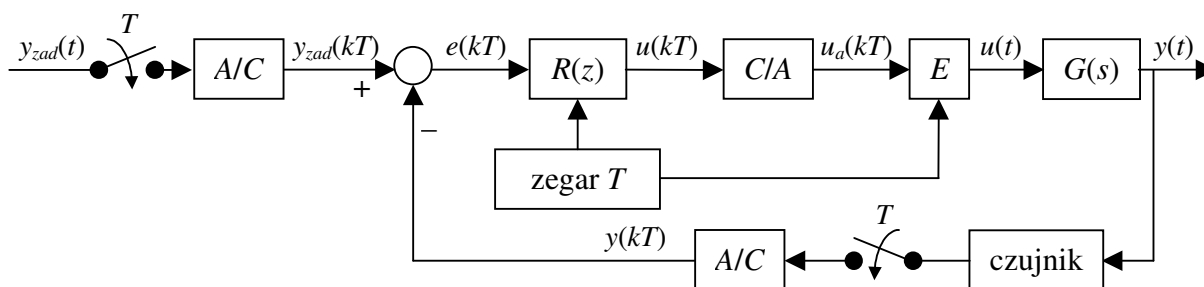
### 3. Dyskretne układy regulacji

W przeszłości stosowano hydrauliczne oraz pneumatyczne regulatory PID, które następnie zostały zastąpione układami elektronicznymi, początkowo lampowymi, a następnie tranzystorowymi. W chwili obecnej powszechnie stosuje się regulatory mikroprocesorowe, które umożliwiają stosowanie bardzo złożonych algorytmów regulacji (zaliczanych do tzw. zaawansowanych technik regulacji), przede wszystkim wielowymiarowych i nieliniowych, na przykład algorytmów regulacji predykcyjnej.

Na rys. 3.1 i rys. 3.2 porównano strukturę dwóch układów regulacji. W pierwszym przypadku zastosowano klasyczny, ciągły regulator, natomiast w drugim przypadku – regulator cyfrowy (dyskretny). W obu przypadkach obiekt regulacji jest ciągły.



Rys. 3.1. Struktura ciągłego układu regulacji

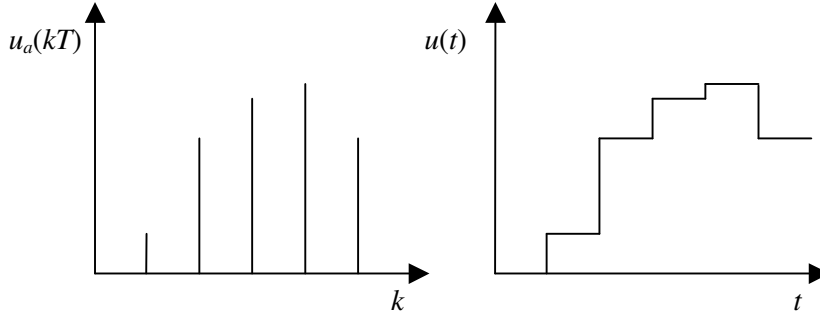


Rys. 3.2. Struktura dyskretnego układu regulacji,  $k=0,1,2,\dots$

W klasycznym ciągłym układzie regulacji pomiar wszystkich wielkości jest ciągły, algorytm regulacji oblicza wartość sygnału sterującego dla dowolnej chwili  $t$ . Zarówno obiekt jak i regulator można opisać ciągłymi równaniami różniczkowymi (lub transmitancjami). W cyfrowym układzie regulacji dokonuje się próbkowania (pomiaru) ciągłego sygnału wyjściowego  $y(t)$  tylko w dyskretnych chwilach  $T, 2T, 3T, \dots$ . Za pomocą przetwornika analogowo-cyfrowego zostaje on zamieniony na odpowiadającą mu reprezentację cyfrową  $y(T), y(2T), y(3T), \dots$ . Aktualizacja pomiarów i konwersja jest powtarzana co stały czas  $T$ , nazywany okresem próbkowania. W niektórych rozwiązaniach stosuje się analogowy sygnał wartości zadanej  $y_{zad}(t)$ , wymaga on więc również próbkowania, przeważnie jednak jego wartość jest zadawana cyfrowo w algorytmie regulacji. Podobnie jak poprzednio, obiekt regulacji jest ciągły, natomiast dyskretny regulator  $R(z)$  opisuje się za pomocą równania różnicowego.

Cyfrowy algorytm regulacji wyznacza wartość sygnału sterującego tylko w dyskretnych chwilach próbkowania  $u(T), u(2T), u(3T), \dots$ , natomiast przetwornik cyfrowo-analogowy zamienia sygnał dyskretny na odpowiadające mu wartości analogowe  $u_a(T), u_a(2T), u_a(3T), \dots$ . Sygnał ten ma postać impulsów Diraca, aby otrzymać ciągły sygnał sterujący proces należy zastosować tzw. ekstrapolator  $E$ . Na rys. 3.3 pokazano zasadę działania najprostszego ekstrapolatora zerowego rzędu (ang. ZOH – Zero Order Holder). Obliczony przez ekstrapolator sygnał ciągły (schodkowy)  $u(t)$  wykorzystuje się do sterowania procesu.

W ogólności istnieją dwie metody projektowania cyfrowego algorytmu regulacji. W pierwszym przypadku, dla danego obiektu ciągłego  $G(s)$  projektuje się ciągły regulator  $R(s)$ , który następnie aproksymuje się za pomocą odpowiedniego równania różnicowego. Do projektowania regulatora można zastosować wszystkie znane metody, a mianowicie podejście klasyczne (kształtowanie charakterystyk częstotliwościowych) lub nowoczesną teorię regulacji. Podejście takie nazywa się emulacją. Można również od razu projektować cyfrowy algorytm regulacji, przy czym bardzo często wykorzystuje się dyskretny model procesu, na przykład w postaci dyskretnej transmitancji. Podejście takie nazywa się bezpośrednim projektowaniem dyskretnego układu regulacji.



Rys. 3.3. Zasada działania ekstrapolatora zerowego rzędu

### 3.1. Transformata Z

Podczas analizy układów ciągłych stosuje się transformatę Laplace'a

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (3.1)$$

Przy zerowych warunkach początkowych

$$L\{\dot{f}(t)\} = sF(s) \quad (3.2)$$

Powyższy wzór umożliwia proste wyznaczenie transmitancji na podstawie równania różniczkowego.

W przypadku układów dyskretnych stosuje się przekształcenie Z zdefiniowane następująco

$$Z\{f(k)\} = F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} \quad (3.3)$$

Przy zerowych warunkach początkowych

$$Z\{f(k-1)\} = z^{-1}F(z) \quad (3.4)$$

Powyższy wzór umożliwia proste wyznaczenie transmitancji dyskretniej na podstawie równania różnicowego. Na przykład równanie

$$y(k) + a_1 y(k-1) + a_0 y(k-2) = b_1 u(k-1) + b_0 u(k-2) \quad (3.5)$$

można zapisać w postaci

$$(1 + a_1 z^{-1} + a_0 z^{-2})Y(z) = (b_1 z^{-1} + b_0 z^{-2})U(z) \quad (3.6)$$

czemu odpowiada transmitancja

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_1 z^{-1} + b_0 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_0 z^{-2}} \quad (3.7)$$

Opóźnienie jednostkowe oznaczane jest symbolem  $z^{-1}$ . Niekiedy stosuje się również symbol  $q^{-1}$ .

Dla układów ciągłych twierdzenie o wartości końcowej, z którego zazwyczaj wyznacza się wzmocnienie statyczne członów dynamicznych lub uchyb ustalony, ma postać

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) \quad (3.8)$$

przy założeniu, że bieguny  $sX(s)$  leżą w lewej półpłaszczyźnie. W przypadku obiektów dyskretnych

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})X(z) \quad (3.9)$$

pod warunkiem, że bieguny  $(1 - z^{-1})X(z)$  leżą w kole jednostkowym. Transformaty Laplace'a oraz Z najpopularniejszych funkcji podano w tabeli 3.1.

Tabela 3.1. Transformaty Laplace'a oraz Z wybranych funkcji ( $T$  – okres próbkowania)

$x(t)$	$X(s)$	$X(z)$
$\delta(t)$	1	1
$\delta(t - lT)$	$e^{-lT}$	$z^{-l}$
1(t)	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$
$t$	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$	$\frac{(1 - e^{-aT})z}{(z-1)(z - e^{-aT})}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\frac{z(z - \cos \omega T)}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$
$te^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\frac{Tze^{-aT}}{(z - e^{-aT})^2}$
$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$\frac{ze^{-aT} \sin \omega T}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos \omega T + e^{-2aT}}$
$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$\frac{z^2 - ze^{-aT} \cos \omega T}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos \omega T + e^{-2aT}}$

**Zadanie**

Obliczyć wzmocnienie statyczne dyskretnego członu dynamicznego

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1,2(z^{-1} + 1)}{1 + 0,2z^{-1}} \quad (3.10)$$

**Rozwiązanie**

Niech  $u(k)=1$  dla  $k \geq 1$ , czyli

$$U(z) = \frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-z^{-1}} \quad (3.11)$$

oraz

$$Y(z) = G(z)U(z) = \frac{1,2(z^{-1} + 1)}{(1-z^{-1})(1+0,2z^{-1})} \quad (3.12)$$

Z twierdzenia o wartości końcowej

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1})Y(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1,2(z^{-1} + 1)}{(1+0,2z^{-1})} = 2 \quad (3.13)$$

A więc w stanie ustalonym dla sygnału wejściowego o wartości 1 na wyjściu otrzymuje się sygnał o wartości 2. Wzmocnienie statyczne wynosi więc 2.

Wzmocnienie statyczne obiektu o danej transmitancji, zarówno ciągłej jak i dyskretniej, można znaleźć również ze wzorów

$$K_{stat} = \lim_{s \rightarrow 0} G(s), \quad K_{stat} = \lim_{z \rightarrow 1} G(z) \quad (3.14)$$

**3.2. Emulacja**

Opracowano wiele skutecznych metod syntezy ciągłych układów regulacji [3, 5, 6, 7, 10, 11]. Do praktycznej implementacji algorytmów stosuje się zazwyczaj sterowniki cyfrowe. Emulacja pozwala wyznaczyć aproksymację ciągłego algorytmu regulacji (opisanego równaniem różniczkowym) za pomocą algorytmu dyskretnego (opisanego równaniem różnicowym).

**3.2.1. Metoda Eulera**

Najprostszą metodą aproksymacji ciągłych równań różniczkowych za pomocą równań różnicowych jest metoda Eulera, w której korzysta się ze wzoru różnicowego

$$\dot{x}(t) \cong \frac{x(k+1) - x(k)}{T} \quad (3.15)$$

gdzie  $T=t(k+1)-t(k)$  jest okresem próbkowania. Powyższe podstawienie może być użyte w miejsce wszystkich pochodnych występujących w ciągłym algorytmie regulacji. Można również wykorzystać różnicę wsteczną

$$\dot{x}(t) \cong \frac{x(k) - x(k-1)}{T} \quad (3.16)$$

**Zadanie**

Dany jest obiekt regulacji

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)} \quad (3.17)$$

oraz regulator

$$R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = 70 \frac{s+2}{s+10} \quad (3.18)$$

Korzystając z metody Eulera znaleźć równanie różnicowe aproksymujące ciągły algorytm regulacji i odpowiadającą mu transmitancję. Do symulacji przyjąć okres próbkowania  $T=0,1$  oraz  $T=0,02$ .

**Rozwiązanie**

Z transmitancji regulatora otrzymuje się ciągłe równanie różniczkowe w postaci operatorowej

$$(s+10)U(s) = 70(s+2)E(s) \quad (3.19)$$

oraz w postaci czasowej

$$\dot{u}(t) + 10u(t) = 70(\dot{e}(t) + 2e(t)) \quad (3.20)$$

Stosując wzór Eulera dla pochodnych sygnałów  $u(t)$  oraz  $e(t)$  oraz wprowadzając czas dyskretny

$$\frac{u(k+1) - u(k)}{T} + 10u(k) = 70 \left( \frac{e(k+1) - e(k)}{T} + 2e(k) \right) \quad (3.21)$$

co można przekształcić do postaci

$$u(k+1) + (10T-1)u(k) = 70e(k+1) + 70(2T-1)e(k) \quad (3.22)$$

Stosując podstawienie  $k:=k-1$  otrzymuje się równanie różnicowe dla bieżącej chwili  $k$

$$u(k) + (10T-1)u(k-1) = 70e(k) + 70(2T-1)e(k-1) \quad (3.23)$$

W postaci operatorowej

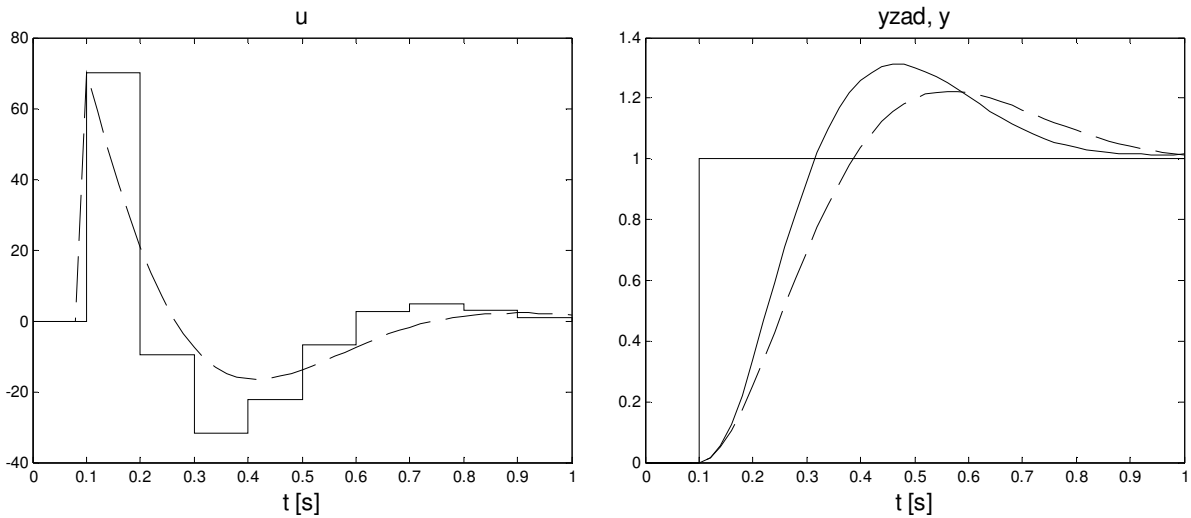
$$(1 + (10T-1)z^{-1})U(z) = 70(1 + (2T-1)z^{-1})E(z) \quad (3.24)$$

Szukana transmitancja regulatora cyfrowego ma więc postać

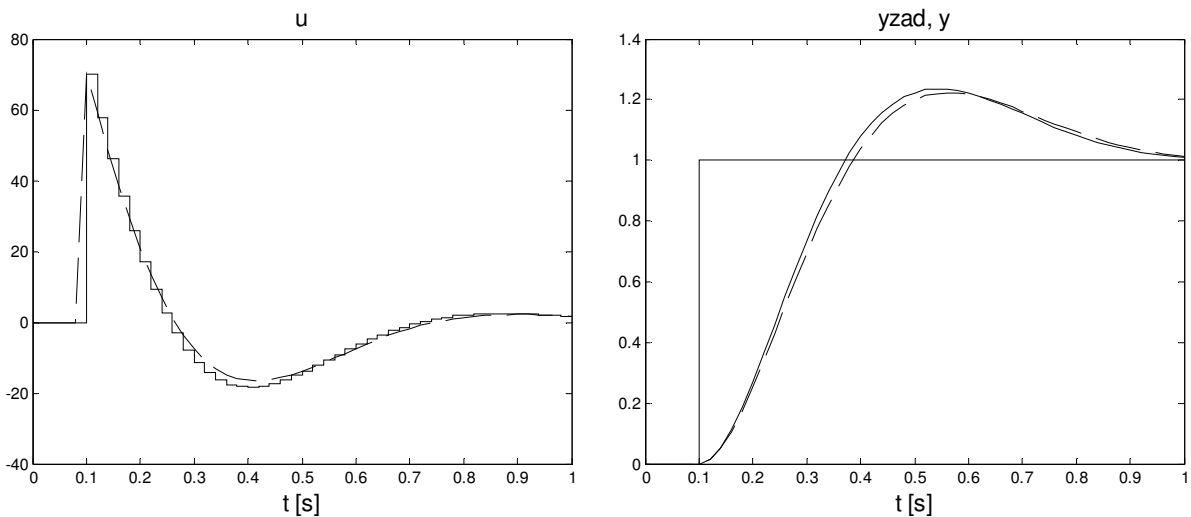
$$R(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = 70 \frac{1 + (2T-1)z^{-1}}{1 + (10T-1)z^{-1}} \quad (3.25)$$

Na rys. 3.4 przedstawiono wyniki symulacji układu regulacji obiektu ciągłego z cyfrowym regulatorem oraz, w celu porównania, układu regulacji z regulatorem ciągłym. Przy zwiększaniu częstotliwości próbkowania (odpowiadające zmniejszaniu okresu próbkowania  $T$ ) aproksymacja sygnału sterującego jest coraz dokładniejsza. Zastosowanie cyfrowego regulatora z odpowiednio krótkim okresem próbkowania umożliwia otrzymanie tak samo dobrej jakości regulacji jak w układzie regulatorem ciągłym.

a)



b)



Rys. 3.4. Wyniki symulacji ciągłego układu regulacji z ciągłym regulatorem (linia przerywana) oraz z cyfrowym regulatorem (linia ciągła): a)  $T=0,1$ , b)  $T=0,02$

### 3.2.2. Całkowanie metodą prostokątów i trapezów

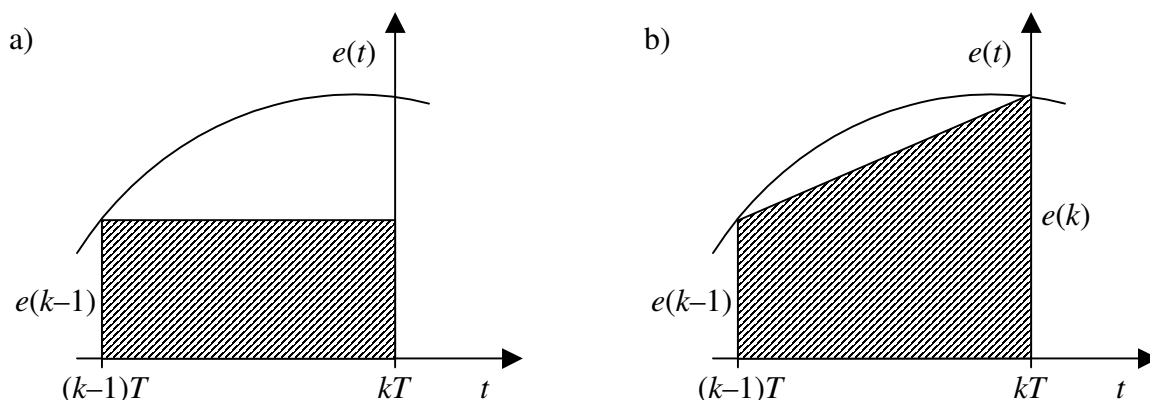
Na rys. 3.5 pokazano zasadę całkowania metodą prostokątów i trapezów. Przyrost sygnału sterującego jest równy polu pod krzywą uchybu

$$u(kT) - u(kT - T) = u(k) - u(k-1) = \int_{kT-T}^{kT} e(\tau) d\tau \quad (3.26)$$

W przypadku całkowania metodą prostokątów

$$u(k) - u(k-1) = T e(k-1) \Rightarrow u(k) = \frac{Tz^{-1}}{1-z^{-1}} e(k) \quad (3.27)$$

Pole pod krzywą  $e(t)$  nie jest wyznaczone dokładnie, a więc określenie sygnału sterującego w chwili  $k$  na podstawie sygnałów z chwili  $k-1$ , może nie być wystarczające.



Rys. 3.5. Zasada całkowania: a) metodą prostokątów, b) metodą trapezów

W przypadku całkowania metodą trapezów otrzymuje się dokładniejszy rezultat, bowiem sygnał  $u(k)$  zależy od sygnałów  $u(k-1)$ ,  $e(k-1)$  oraz  $e(k)$ , a mianowicie

$$u(k) - u(k-1) = T \frac{e(k-1) - e(k)}{2} \Rightarrow u(k) = \frac{T}{2} \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} e(k) \quad (3.28)$$

Całkowanie metodą trapezów, zwane również metodą Tustina, jest bardzo często wykorzystywane do obliczania transmitancji dyskretnej na podstawie ciągłej. W miejsce wszystkich operatorów  $s$  podstawia się po prostu

$$s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \quad \text{lub} \quad s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} \quad (3.29)$$

### Zadanie

Dany jest regulator

$$R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = 70 \frac{s+2}{s+10} \quad (3.30)$$

Korzystając z całkowania metodą trapezów znaleźć odpowiadającą mu transmitancję dyskretną. Przyjąć okres próbkowania  $T$ .

### Rozwiązanie

Stosując podstawienie Tustina otrzymuje się

$$R(z) = 70 \frac{\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 2}{\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 10} = 70 \frac{T+1+(T-1)z^{-1}}{5T+1+(5T-1)z^{-1}} \quad (3.31)$$

### 3.2.3. Metoda przekształcenia biegunów i zer

W przypadku układów ciągłych, właściwości układu zamkniętego zależą od położenia jego biegunów na płaszczyźnie zmiennej zespolonej  $s$ . Podobnie jest w przypadku układów dyskretnych i płaszczyzny  $z$ , choć obszar stabilności ma nieco inny kształt. Dla przykładu rozważa się sygnał

$$f(t) = e^{-at} \quad t > 0 \quad (3.32)$$

Odpowiadająca mu transformata Laplace'a ma postać

$$F(s) = \frac{1}{s + a} \quad (3.33)$$

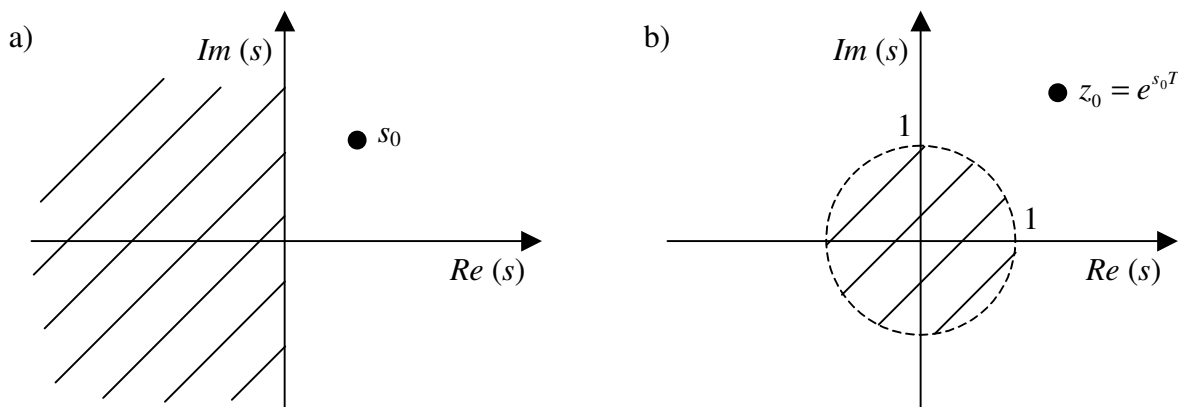
czyli biegun  $s = -a$ . Transformata dyskretna ma postać

$$F(z) = \frac{z}{z - e^{-aT}} \quad (3.34)$$

Biegunowi ciągłemu  $s = -a$  odpowiada biegun dyskretny  $z = e^{-aT}$ . Powyższy rezultat można uogólnić, na podstawie znajomości bieguna  $s_0$  na płaszczyźnie  $s$  można wyznaczyć odpowiadający mu biegun  $z_0$  na płaszczyźnie  $z$

$$z_0 = e^{s_0 T} \quad (3.35)$$

O ile warunkiem stabilności dla układów ciągłych jest położenie biegunów układu zamkniętego w lewej półpłaszczyźnie, to dla układów dyskretnych muszą one leżeć w kole jednostkowym.



Rys. 3.6. Obszar stabilności (zakreskowany) układu ciągłego (a) i dyskretnego (b)

Ze wzoru  $z_0 = e^{s_0 T}$  można wyznaczyć położenie bieguna  $z_0$  na płaszczyźnie zmiennej  $z$  na podstawie położenia bieguna  $s_0$  na płaszczyźnie zmiennej  $s$ . Wzór ten można wykorzystać do aproksymacji transmitancji ciągłej transmitancją dyskretną. Należy znaleźć dyskretne bieguny i zera odpowiadające wszystkim biegunom i zerom występującym w transmitancji ciągłej. Odpowiednikiem transmitancji ciągłej

$$R(s) = \frac{(s - s_1^0)(s - s_2^0) \cdots (s - s_m^0)}{(s - s_1^b)(s - s_2^b) \cdots (s - s_n^b)} \quad (3.36)$$

jest transmitancja dyskretna

$$R(z) = K \frac{(z - z_1^0)(z - z_2^0) \cdots (z - z_m^0)}{(z - z_1^b)(z - z_2^b) \cdots (z - z_n^b)} \quad (3.37)$$

gdzie dyskretne zera i bieguny oblicza się następująco

$$\begin{aligned} z_i^0 &= e^{s_i^0 T} & \text{dla } i = 1, \dots, m \\ z_i^b &= e^{s_i^b T} & \text{dla } i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (3.38)$$



natomiast współczynnik  $K$  dobiera się w taki sposób, aby wzmocnienie statyczne obu członów było jednakowe, czyli

$$K_c = K_d \Leftrightarrow \lim_{s \rightarrow 0} R(s) = \lim_{z \rightarrow 1} R(z) \quad (3.39)$$

### Zadanie

Dany jest regulator

$$R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = 70 \frac{s+2}{s+10} \quad (3.40)$$

Korzystając z metody przekształcenia biegunów i zer znaleźć odpowiadającą mu transmitancję dyskretną. Przyjąć okres próbkowania  $T$ .

### Rozwiązanie

Zeru  $s_0 = -2$  odpowiada zero  $z_0 = e^{-2T}$ , biegunowi  $s_b = -10$  odpowiada biegun  $z_b = e^{-10T}$ . Transmitancja dyskretna ma postać

$$R(z) = K \frac{z - e^{-2T}}{z - e^{-10T}} \quad (3.41)$$

Z twierdzenia o wartości końcowej oblicza się wzmocnienie statyczne regulatora ciągłego

$$K_c = \lim_{s \rightarrow 0} 70 \frac{s+2}{s+10} = 14 \quad (3.42)$$

Dla regulatora dyskretnego

$$K_d = \lim_{z \rightarrow 1} K \frac{z - e^{-2T}}{z - e^{-10T}} = K \frac{1 - e^{-2T}}{1 - e^{-10T}} \quad (3.43)$$

Ponieważ musi zachodzić  $K_d = K_c$ , otrzymuje się

$$K = 14 \frac{1 - e^{-10T}}{1 - e^{-2T}} \quad (3.44)$$

Szukana transmitancja dyskretna ma postać

$$R(z) = 14 \frac{(1 - e^{-10T})(z - e^{-2T})}{(1 - e^{-2T})(z - e^{-10T})} = 14 \frac{(1 - e^{-10T})(1 - z^{-1}e^{-2T})}{(1 - e^{-2T})(1 - z^{-1}e^{-10T})} \quad (3.45)$$

### Zadanie

Dany jest regulator

$$R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = 70 \frac{s+2}{s+10} \quad (3.46)$$

Porównać transmitancję dyskretną przy zastosowaniu metody Eulera, metody trapezów oraz metody przekształcenia biegunów i zer. Przyjąć okres próbkowania  $T=0,1$  oraz  $T=0,02$ .

### Rozwiązanie

Korzystając z wyników trzech ostatnich zadań otrzymuje się transmitancje zebrane w tab. 3.2. Jak łatwo sprawdzić (podstawiając  $z=1$ ), niezależnie od metody aproksymacji regulatora ciągłego, jego wzmocnienie statyczne wynosi 14.

Tabela 3.2. Porównanie transmitancji dyskretnych regulatora otrzymanych różnymi metodami emulacji

Metoda emulacji	$T=0,1$	$T=0,02$
metoda Eulera	$R(z) = 70 \frac{1-0,8z^{-1}}{1}$	$R(z) = 70 \frac{1-0,96z^{-1}}{1-0,8z^{-1}}$
metoda trapezów	$R(z) = 70 \frac{1,1-0,9z^{-1}}{1,5-0,5z^{-1}}$	$R(z) = 70 \frac{1,02-0,98z^{-1}}{1,1-0,9z^{-1}}$
metoda przekształcenia biegunów i zer	$R(z) = 48,8207 \frac{1-0,8187z^{-1}}{1-0,3679z^{-1}}$	$R(z) = 64,7216 \frac{1-0,9608z^{-1}}{1-0,8187z^{-1}}$

Ponieważ ekstrapolator wnosi opóźnienie rzędu  $T/2$ , w wielu przypadkach warto uwzględnić ten czynnik. Korzystając z aproksymacji

$$e^{-T_0 s} \cong \frac{1}{1+T_d s} \quad (3.47)$$

otrzymuje się

$$G_{zOH}(s) \cong \frac{1}{1+0,5Ts} \quad (3.48)$$

### 3.3. Bezpośrednie projektowanie dyskretnych układów regulacji

Oprócz emulacji, do projektowania cyfrowego układu regulacji można zastosować metodę bezpośrednią. W przeciwieństwie do emulacji wykorzystuje się dyskretny model procesu, do którego bezpośrednio dobiera się cyfrowy algorytm regulacji.

Pierwszym etapem prac jest wyznaczenie dyskretnego modelu procesu ciągłego. W ogólności można wyróżnić dwa przypadki. W przeciwieństwie do emulacji, w której stosuje się dyskretną aproksymację ciągłego regulatora, na podstawie modelu ciągłego można dokładnie wyznaczyć model dyskretny. Znajac metodę ekstrapolacji można dokładnie określić sygnał sterujący między kolejnymi chwilami próbkowania  $T$ ,  $2T$ ,  $3T$ ,..., a także sygnał wyjściowy procesu, który jest funkcją sygnału wejściowego i wyjściowego w poprzednich chwilach próbkowania (równanie różnicowe).

Dla obiektu ciągłego  $G(s)$  i ekstrapolatora zerowego rzędu dyskretna transmitancja obiektu obliczana jest ze wzoru

$$G(z) = \left( \frac{z-1}{z} \right) Z \left( \frac{G(s)}{s} \right) \quad (3.49)$$

Czynnik  $s$  w mianowniku wiąże się z faktem, że sygnał sterujący zmienia się skokowo w każdej chwili próbkowania. Reasumując, powyższy związek pozwala zastąpić ciągły obiekt z ekstrapolatorem zerowego rzędu przez obiekt dyskretny, co pokazano na rys. 3.7.

### Rozwiązanie

Korzystając z wyników trzech ostatnich zadań otrzymuje się transmitancje zebrane w tab. 3.2. Jak łatwo sprawdzić (podstawiając  $z=1$ ), niezależnie od metody aproksymacji regulatora ciągłego, jego wzmocnienie statyczne wynosi 14.

Tabela 3.2. Porównanie transmitancji dyskretnych regulatora otrzymanych różnymi metodami emulacji

Metoda emulacji	$T=0,1$	$T=0,02$
metoda Eulera	$R(z) = 70 \frac{1-0,8z^{-1}}{1}$	$R(z) = 70 \frac{1-0,96z^{-1}}{1-0,8z^{-1}}$
metoda trapezów	$R(z) = 70 \frac{1,1-0,9z^{-1}}{1,5-0,5z^{-1}}$	$R(z) = 70 \frac{1,02-0,98z^{-1}}{1,1-0,9z^{-1}}$
metoda przekształcenia biegunów i zer	$R(z) = 48,8207 \frac{1-0,8187z^{-1}}{1-0,3679z^{-1}}$	$R(z) = 64,7216 \frac{1-0,9608z^{-1}}{1-0,8187z^{-1}}$

Ponieważ ekstrapolator wnosi opóźnienie rzędu  $T/2$ , w wielu przypadkach warto uwzględnić ten czynnik. Korzystając z aproksymacji

$$e^{-T_0 s} \cong \frac{1}{1+T_d s} \quad (3.47)$$

otrzymuje się

$$G_{zOH}(s) \cong \frac{1}{1+0,5Ts} \quad (3.48)$$

### 3.3. Bezpośrednie projektowanie dyskretnych układów regulacji

Oprócz emulacji, do projektowania cyfrowego układu regulacji można zastosować metodę bezpośrednią. W przeciwieństwie do emulacji wykorzystuje się dyskretny model procesu, do którego bezpośrednio dobiera się cyfrowy algorytm regulacji.

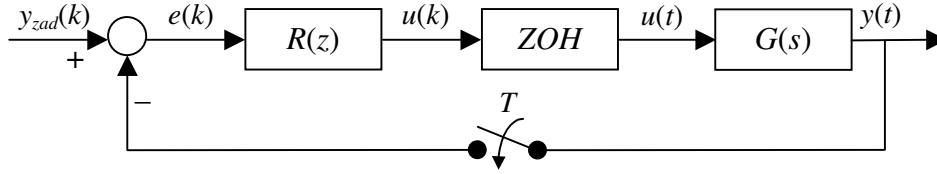
Pierwszym etapem prac jest wyznaczenie dyskretnego modelu procesu ciągłego. W ogólności można wyróżnić dwa przypadki. W przeciwieństwie do emulacji, w której stosuje się dyskretną aproksymację ciągłego regulatora, na podstawie modelu ciągłego można dokładnie wyznaczyć model dyskretny. Znajac metodę ekstrapolacji można dokładnie określić sygnał sterujący między kolejnymi chwilami próbkowania  $T, 2T, 3T, \dots$ , a także sygnał wyjściowy procesu, który jest funkcją sygnału wejściowego i wyjściowego w poprzednich chwilach próbkowania (równanie różnicowe).

Dla obiektu ciągłego  $G(s)$  i ekstrapolatora zerowego rzędu dyskretna transmitancja obiektu obliczana jest ze wzoru

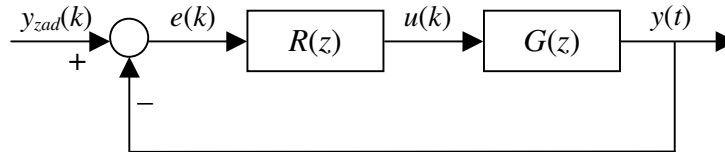
$$G(z) = \left( \frac{z-1}{z} \right) Z \left( \frac{G(s)}{s} \right) \quad (3.49)$$

Czynnik  $s$  w mianowniku wiąże się z faktem, że sygnał sterujący zmienia się skokowo w każdej chwili próbkowania. Reasumując, powyższy związek pozwala zastąpić ciągły obiekt z ekstrapolatorem zerowego rzędu przez obiekt dyskretny, co pokazano na rys. 3.7.

a)



b)



Rys. 3.7. Dyskretny układ regulacji z ekstrapolatorem i ciągłym obiektem (a) oraz odpowiadający mu dyskretny układ regulacji (b)

Do projektowania dyskretnych układów regulacji wykorzystuje się analogiczne metody jak w przypadku układów ciągłych, a więc metody częstotliwościowe oraz metody przestrzeni stanu. Transmitancja układu zamkniętego ma postać

$$G_z(z) = \frac{Y(z)}{Y_{zad}(z)} = \frac{R(z)G(z)}{1 + R(z)G(z)} \quad (3.50)$$

natomiast równanie charakterystyczne układu zamkniętego

$$1 + R(z)G(z) = 0 \quad (3.51)$$

### Zadanie

Dla układu o transmitancji ciągłej

$$G(s) = \frac{0,5}{(s-1)(s+1)} = \frac{0,5}{s^2 - 1} \quad (3.52)$$

znaleźć transmitancję dyskretną. Zastosować ekstrapolator zerowego rzędu, przyjąć okres próbkowania  $T$ . Wyznaczyć równanie różnicowe odpowiadające transmitancji  $G(z)$ .

### Rozwiązanie

Rozkładając transmitancję  $G(s)$  na ułamki proste otrzymuje się

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{0,5}{(s-1)(s+1)} = \frac{a}{(s-1)} + \frac{b}{(s+1)} \\ &= \frac{a(s+1) + b(s-1)}{(s-1)(s+1)} = \frac{(a+b)s + a-b}{(s-1)(s+1)} \end{aligned} \quad (3.53)$$

Szukane parametry  $a, b$  są rozwiązaniem układu równań liniowych

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a - b = 0,5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0,25 \\ b = -0,25 \end{cases} \quad (3.54)$$

Transmitancję dyskretną wyznacza się ze wzoru

$$\begin{aligned} G(z) &= \left( \frac{z-1}{z} \right) Z \left( \frac{G(s)}{s} \right) = \left( \frac{z-1}{z} \right) Z \left( -0,25 \frac{-1}{s(s-1)} - 0,25 \frac{1}{s(s+1)} \right) \\ &= \left( \frac{z-1}{z} \right) \left( \frac{-0,25(1-e^T)z}{(z-1)(z-e^T)} - \frac{0,25(1-e^{-T})z}{(z-1)(z-e^{-T})} \right) \end{aligned} \quad (3.55)$$

Definiując  $\alpha = e^T$  oraz  $\beta = e^{-T}$  otrzymuje się

$$G(z) = \frac{-0,25(1-\alpha)}{z-\alpha} - \frac{0,25(1-\beta)}{z-\beta} = \frac{0,25(\alpha+\beta-2)z + 0,25(\alpha+\beta-2\alpha\beta)}{z^2 - (\alpha+\beta)z + \alpha\beta} \quad (3.56)$$

co można zapisać w standardowej postaci

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_1 z + b_0}{z^2 + a_1 z + a_0} \quad (3.57)$$

Dla przykładowej wartości  $T=0,1$  otrzymuje się  $b_0=b_1=0,00250208$ ,  $a_0=1$ ,  $a_1=-2,01000834$ .

Równanie różnicowe odpowiadające transmitancji  $G(z)$  w dziedzinie zmiennej  $z$

$$(z^2 + a_1 z + a_0)Y(z) = (b_1 z + b_0)U(z) \quad (3.58)$$

w dziedzinie czasu dyskretnego

$$y(k+2) + a_1 y(k+1) + a_0 y(k) = b_1 u(k+1) + b_0 u(k) \quad (3.59)$$

stosując podstawienie  $k:=k-2$  otrzymuje się równanie różnicowe dla bieżącej chwili  $k$

$$y(k) = b_1 u(k-1) + b_0 u(k-2) - a_1 y(k-1) - a_0 y(k-2) \quad (3.60)$$

## Zadanie

Dla układu o transmitancji ciągłej

$$G(s) = \frac{e^{-5s}}{40s+1} \quad (3.61)$$

znaleźć transmitancję dyskretną. Zastosować ekstrapolator zerowego rzędu, przyjąć okres próbkowania  $T=2,5$  s. Wyznaczyć równanie różnicowe odpowiadające transmitancji  $G(z)$ .

## Rozwiązanie

Daną transmitancję można zapisać w postaci

$$G(s) = G_0(s)e^{-5s}, \quad G_0(s) = \frac{1}{40s+1} \quad (3.62)$$

Transmitancję dyskretną układu bez opóźnienia wyznacza się ze wzoru

$$\begin{aligned} G_0(z) &= \left( \frac{z-1}{z} \right) Z \left( \frac{G(s)}{s} \right) = \\ &= \left( \frac{z-1}{z} \right) Z \left( \frac{0,025}{s(s+0,025)} \right) = \left( \frac{z-1}{z} \right) \frac{(1-e^{-0,025T})z}{(z-1)(z-e^{-0,025T})} = \frac{1-e^{-0,025T}}{z-e^{-0,025T}} \end{aligned} \quad (3.63)$$

Niech  $\alpha = e^{-0,025 \cdot 2,5}$  Ciągłemu opóźnieniu  $e^{-5s}$  odpowiada opóźnienie dyskretne  $z^{-5/T} = z^{-2}$ . Transmitancja układu z opóźnieniem ma więc postać

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = G_0(z)z^{-2} = \frac{(1-\alpha)z^{-2}}{z-\alpha} \quad (3.64)$$

Równanie różnicowe odpowiadające transmitancji  $G(z)$  w dziedzinie zmiennej  $z$

$$(z-\alpha)Y(z) = (1-\alpha)z^{-2}U(z) \quad (3.65)$$

w dziedzinie czasu dyskretnego

$$y(k+1) - \alpha y(k) = (1-\alpha)u(k-2) \quad (3.66)$$

stosując podstawienie  $k:=k-1$  otrzymuje się równanie różnicowe dla bieżącej chwili  $k$

$$y(k) = (1-\alpha)u(k-3) + \alpha y(k-1) \quad (3.67)$$

### 3.4. Cyfrowa realizacja algorytmu PID

Algorytm PID

$$u(t) = (u_p(t) + u_i(t) + u_d(t))e(t) = K \left( 1 + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right) e(t) \quad (3.68)$$

jest bardzo rozpowszechniony w praktyce, istnieją proste, lecz skuteczne metody doboru nastaw (np. metoda Zieglera i Nicholsa). Obecnie do implementacji algorytmu stosuje się sterowniki cyfrowe. Dla członu proporcjonalnego otrzymuje się

$$u_p(t) = Ke(t) \Rightarrow u_p(k) = Ke(k) \quad (3.69)$$

Do dyskretnego całkowania można użyć metody prostokątów

$$u_i(k) = \frac{K}{T_i} T \sum_{j=0}^{k-1} e(j) + u(0) = u_i(k-1) + \frac{K}{T_i} Te(k-1) \quad (3.70)$$

lub metody trapezów

$$u_i(k) = \frac{K}{T_i} \frac{T}{2} \left( \sum_{j=0}^{k-1} e(j) + e(k) \right) + u(0) = u_i(k-1) + \frac{K}{T_i} T \left( \frac{e(k-1) + e(k)}{2} \right) \quad (3.71)$$

Stosując metodę Eulera do dyskretnej aproksymacji członu różniczkującego otrzymuje się

$$u_d(k) = KT_d \left( \frac{e(k) - e(k-1)}{T} \right) \quad (3.72)$$

Reasumując, stosując całkowanie metodą trapezów, równanie różnicowe cyfrowego algorytmu PID ma postać

$$u(k) = K \left[ 1 + \frac{T}{2T_i} \left( \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \right) + \frac{T_d}{T} (1-z^{-1}) \right] e(k) \quad (3.73)$$

czyli

$$u(k) = \frac{r_2 z^{-2} + r_1 z^{-1} + r_0}{1 - z^{-1}} e(k) \quad (3.74)$$

gdzie

$$r_2 = \frac{KT_d}{T}, \quad r_1 = K \left( \frac{T}{2T_i} - 2 \frac{T_d}{T} - 1 \right), \quad r_0 = K \left( 1 + \frac{T}{2T_i} + \frac{T_d}{T} \right) \quad (3.75)$$

### 3.5. Symulacja dyskretnych układów regulacji

Jeżeli znany jest dyskretny model obiektu regulacji, można bardzo łatwo przeprowadzić symulację działania cyfrowego układów regulacji tego obiektu. Wyjaśnione to zostanie na przykładzie.

#### Zadanie

Dyskretny model obiektu regulacji ma postać

$$G(z) = \frac{y(k)}{u(k)} = \frac{b_1 z^{-3} + b_0 z^{-4}}{1 + a_1 z^{-1} + a_0 z^{-2}} \quad (3.76)$$

gdzie  $b_1=0,035$ ,  $b_0=0,0307$ ,  $a_1=-1,6375$ ,  $a_0=0,6703$ , natomiast dyskretny algorytm PID opisany jest przez

$$u(k) = \frac{r_2 z^{-2} + r_1 z^{-1} + r_0}{1 - z^{-1}} e(k) \quad (3.77)$$

gdzie  $r_2=3$ ,  $r_1=-7,14$ ,  $r_0=4,26$ . Napisać program do symulacji algorytmu regulacji, przyjąć okres próbkowania  $T=2$  sek. W chwili  $t=20$  sek. (czemu odpowiada czas dyskretny  $k=10$ ) następuje skokowa zmiana sygnału wartości zadanej od 0 do 1.

#### Rozwiązanie

Równanie różnicowe obiektu ma postać

$$y(k) = b_1 u(k-3) + b_0 u(k-4) - a_1 y(k-1) - a_0 y(k-2) \quad (3.78)$$

natomiast równanie różnicowe regulatora ma postać

$$u(k) = r_2 e(k-2) + r_1 e(k-1) + r_0 e(k) + u(k-1) \quad (3.79)$$

W obiekcie występuje opóźnienie równe czterem okresom próbkowania, a więc symulację można rozpocząć od chwili  $k=5$ . Program symulacyjny (Matlab) jest następujący

```
%inicjalizacja
a1=-1.6375; a0=0.6703; b1=0.035; b0=0.0307;
r2=3; r1=-7.14, r0=4.26;
kk=50; %koniec symulacji

%warunki początkowe
u(1:4)=0; y(1:4)=0;
yzad(1:9)=0; yzad(10:kk)=1;
e(1:4)=0;
```

```

for k=5:kk; %główna pętla symulacyjna
    %symulacja obiektu
    y(k)=b1*u(k-3)+b0*u(k-4)-a1*y(k-1)-a0*y(k-2);

    %uchyb regulacji
    e(k)=yzad(k)-y(k);

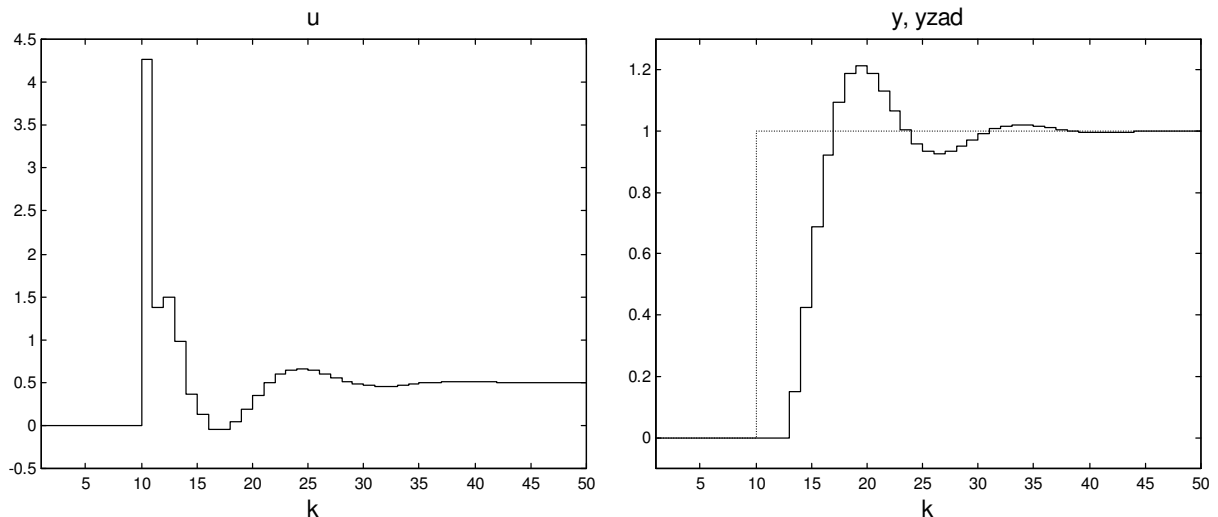
    %sygnał sterujący regulatora PID
    u(k)=r2*e(k-2)+r1*e(k-1)+r0*e(k)+u(k-1);
end;

%wyniki symulacji
figure; stairs(u);
title('u'); xlabel('k');

figure; stairs(y); hold on; stairs(yzad,':');
title('yzad, y'); xlabel('k');

```

Wyniki symulacji cyfrowego algorytmu PID przedstawiono na rys. 3.8.



Rys. 3.8. Wyniki symulacji cyfrowego algorytmu PID

### Zadanie

Zbadać odporność zaprojektowanego układu regulacji na zmiany wzmocnienia statycznego procesu, tzn. przyjąć, że rzeczywisty proces ma transmitancję

$$G(z) = \frac{y(k)}{u(k)} = K \frac{b_1 z^{-3} + b_0 z^{-4}}{1 + a_1 z^{-1} + a_0 z^{-2}} \quad (3.80)$$

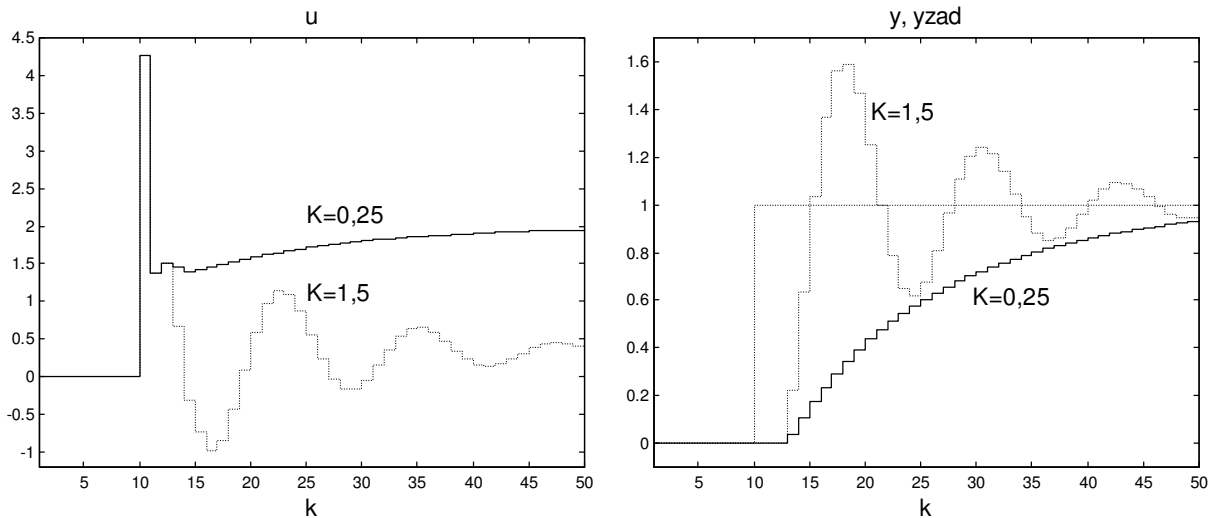
gdzie  $K=0,25$  lub  $K=1,5$ . Wyznaczyć wartość  $K_{gr}$ , przy której w układzie pojawią się drgania niegasnące.

### Rozwiązanie

Wyniki symulacji przedstawiono na rys. 3.9. Przy zwiększaniu wzmocnienia obiektu układ regulacji traci stabilność, zmniejszanie wzmocnienia powoduje spowolnienie regulacji. Wyznaczona eksperymentalnie wartość  $K_{gr}$  wynosi 2,05. Jest rzeczą intuicyjną, że zwiększanie wzmocnienia obiektu (przy niezmiennym regulatorze) prowadzi do powstania oscylacji, w



skrajnym przypadku do oscylacji. Dzieje się tak ponieważ regulator został zaprojektowany dla mniejszego wzmocnienia obiektu, przy zwiększonym wzmocnieniu generuje sterowania zbyt duże, prowadzące do oscylacji.



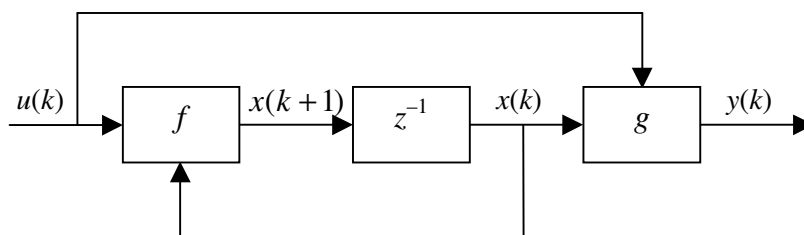
Rys. 3.9. Wyniki symulacji cyfrowego algorytmu PID przy zmianach wzmocnienia obiektu  $K$

### 3.6. Metody przestrzeni stanu

Analogicznie jak dla układów ciągłych, dynamikę układów dyskretnych można również opisać w przestrzeni stanu, ale zamiast równań różniczkowych stosuje się równania różnicowe. Ogólna postać modelu jest następująca

$$\begin{aligned} x(k+1) &= f(x(k), u(k), k) \\ y(k) &= g(x(k), u(k), k) \end{aligned} \quad (3.81)$$

czemu odpowiada schemat blokowy pokazany na rys. 3.10.



Rys. 3.10. Schemat blokowy dyskretnego układu nieliniowego

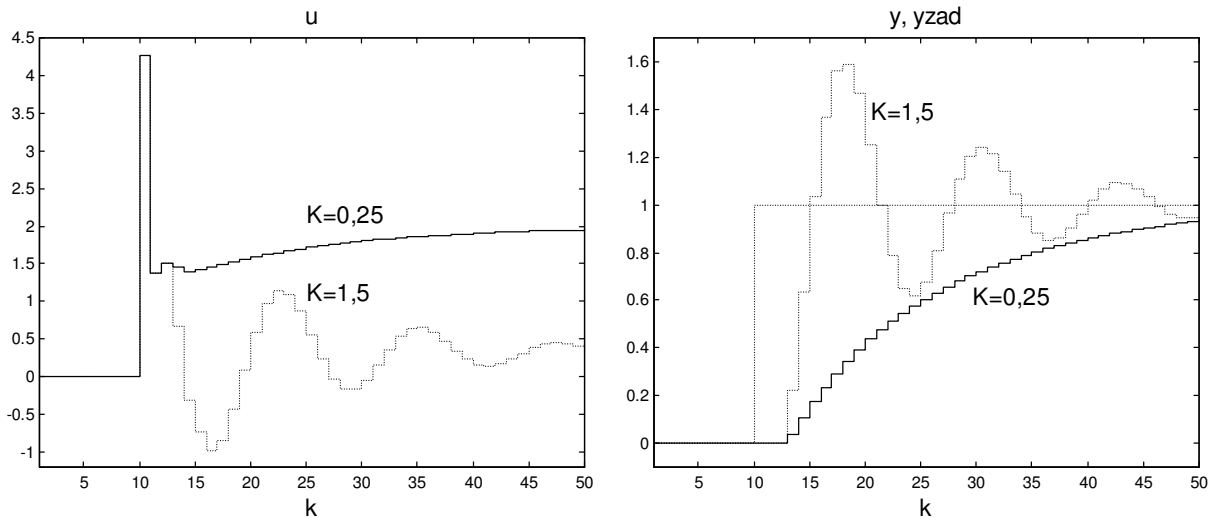
Przyjęto, że okres próbkowania  $T$  jest jednostkowy, dlatego też zastosowano człon opóźnienia jednostkowego.

Podobnie jak w przypadku układów ciągłych, także w klasie układów dyskretnych można wyróżnić układy deterministyczne i stochastyczne, stacjonarne i niestacjonarne, o stałych skupionych i rozłożonych oraz liniowe i nieliniowe.

#### 3.6.1. Równania stanu liniowych, dyskretnych układów dynamicznych

Rozważa się deterministyczny, stacjonarny układ dyskretny o jednym wejściu i jednym wyjściu. Jest on opisany zwyczajnymi liniowymi równaniami różnicowymi oraz równaniem

skrajnym przypadku do oscylacji. Dzieje się tak ponieważ regulator został zaprojektowany dla mniejszego wzmocnienia obiektu, przy zwiększonym wzmocnieniu generuje sterowania zbyt duże, prowadzące do oscylacji.



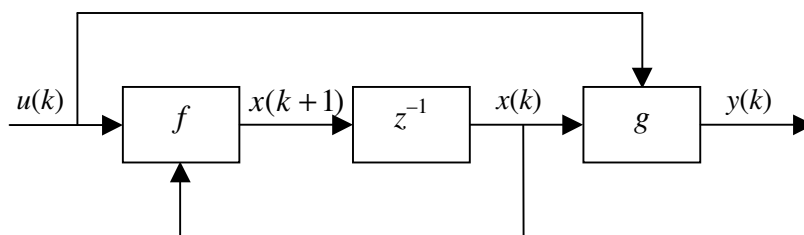
Rys. 3.9. Wyniki symulacji cyfrowego algorytmu PID przy zmianach wzmocnienia obiektu  $K$

### 3.6. Metody przestrzeni stanu

Analogicznie jak dla układów ciągłych, dynamikę układów dyskretnych można również opisać w przestrzeni stanu, ale zamiast równań różniczkowych stosuje się równania różnicowe. Ogólna postać modelu jest następująca

$$\begin{aligned} x(k+1) &= f(x(k), u(k), k) \\ y(k) &= g(x(k), u(k), k) \end{aligned} \quad (3.81)$$

czemu odpowiada schemat blokowy pokazany na rys. 3.10.



Rys. 3.10. Schemat blokowy dyskretnego układu nieliniowego

Przyjęto, że okres próbkowania  $T$  jest jednostkowy, dlatego też zastosowano człon opóźnienia jednostkowego.

Podobnie jak w przypadku układów ciągłych, także w klasie układów dyskretnych można wyróżnić układy deterministyczne i stochastyczne, stacjonarne i niestacjonarne, o stałych skupionych i rozłożonych oraz liniowe i nieliniowe.

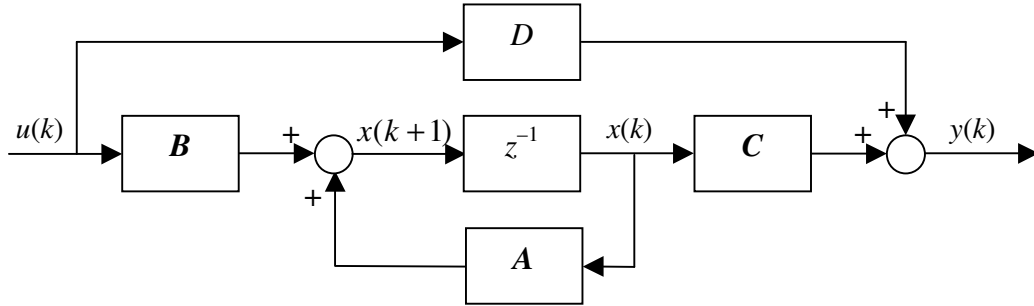
#### 3.6.1. Równania stanu liniowych, dyskretnych układów dynamicznych

Rozważa się deterministyczny, stacjonarny układ dyskretny o jednym wejściu i jednym wyjściu. Jest on opisany zwyczajnymi liniowymi równaniami różnicowymi oraz równaniem

wyjścia

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \mathbf{A}x(k) + \mathbf{B}u(k) \\ y(k) &= \mathbf{C}x(k) + \mathbf{D}u(k) \end{aligned} \quad (3.82)$$

przy czym  $\dim u(k)=1$ ,  $\dim y(k)=1$ ,  $\dim x(k)=n$ , wymiar macierzy jest następujący:  $\mathbf{A}$ :  $n \times n$ ,  $\mathbf{B}$ :  $n \times 1$ ,  $\mathbf{C}$ :  $1 \times n$ ,  $\mathbf{D}$ :  $1 \times 1$ . Powyższym równaniom odpowiada schemat blokowy pokazany na rys. 3.11.



Rys. 3.11. Schemat blokowy dyskretnego układu liniowego

### 3.6.2. Sterowalność i obserwowalność dyskretnych liniowych układów dynamicznych

Analogicznie jak w przypadku układów ciągłych, zagadnienia sterowalności i obserwowalności mają kluczowe znaczenie z punktu widzenia syntezy układu regulacji.

Układ dyskretny jest *sterowalny* w chwili  $k_0$ , jeżeli istnieje takie sterowanie dyskretnie  $u(k)$  dla  $k=k_0, k_0+1, \dots, k_k$ , które spowoduje w skończonym przedziale czasu  $(k_k - k_0)$  zmianę dowolnego stanu początkowego  $x(k_0)$  w dowolny inny stan końcowy  $x(k_k)$ . Jeżeli warunek ten jest spełniony dla dowolnej chwili  $k_0$ , to układ jest *całkowicie sterowalny* (w skrócie po prostu sterowalny).

Układ jest *obserwowalny* w przedziale  $k \in [k_0 - k_k]$ , jeżeli na podstawie dyskretnych sygnałów sterowania  $u(k)$  i wyjścia  $y(k)$  dla  $k=k_0, k_0+1, \dots, k_k$ , można określić początkowy stan układu  $x(k_0)$ . Jeżeli warunek ten jest spełniony dla dowolnej chwili  $k_0$ , to układ jest *całkowicie obserwowalny* (w skrócie po prostu obserwowalny).

Warunki sterowalności i obserwowalności układów dyskretnych są takie same jak w przypadku układów ciągłych. Układ jest *sterowalny* wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} = n \quad (3.83)$$

natomiast jest *obserwowalny* wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} = n \quad (3.84)$$

Dla układów o jednym wejściu i jednym wyjściu warunki sterowalności i obserwowalności sprowadzają się do nieosobliwości odpowiednich macierzy.

**Zadanie**

Zbadać obserwowalność i sterowalność układu

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta \\ \beta \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.85)$$

**Rozwiązanie**

Wyznacznik macierzy sterowalności

$$| \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} \end{bmatrix} | = \begin{vmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \beta \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \beta \end{bmatrix} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta & \alpha\beta \\ \beta & \alpha\beta \end{vmatrix} = 0 \quad (3.86)$$

a więc układ nie jest sterowalny.

Wyznacznik macierzy obserwowalności

$$| \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} | = \begin{vmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (3.87)$$

a więc układ nie jest obserwowalny.

**3.6.3. Wyznaczanie transmitancji dyskretnej na podstawie dyskretnych równań stanu**

Równanie stanu i równanie wyjścia w postaci operatorowej (po zastosowaniu przekształcenia Z), dla zerowych warunków początkowych  $x(0)=0$ , przyjmują postać

$$\begin{aligned} zX(z) &= \mathbf{A}X(z) + \mathbf{B}U(z) \\ Y(z) &= \mathbf{C}X(z) + \mathbf{D}U(z) \end{aligned} \quad (3.88)$$

Dla  $|z\mathbf{I} - \mathbf{A}| \neq 0$  z równania stanu otrzymuje się

$$X(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}U(z) \quad (3.89)$$

po wstawieniu do równania wyjścia

$$Y(z) = (\mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D})U(z) \quad (3.90)$$

Transmitancja dyskretna ma więc postać

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (3.91)$$

**Zadanie**

Znaleźć transmitancję układu o macierzach równania stanu i wyjścia

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [2 \quad 1], \quad D = 0 \quad (3.92)$$

**Rozwiązanie**

Macierz odwrotna ma postać

$$(\mathbf{zI} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{[(\mathbf{zI} - \mathbf{A})^D]^r}{|\mathbf{zI} - \mathbf{A}|} = \frac{1}{s(s+2)+3} \begin{bmatrix} z+2 & 1 \\ -3 & z \end{bmatrix} \quad (3.93)$$

Natomiast transmitancja

$$\begin{aligned} G(z) &= \mathbf{C}(\mathbf{zI} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + D \\ &= [2 \quad 1] \frac{1}{z(z+2)+3} \begin{bmatrix} z+2 & 1 \\ -3 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{z(z+2)+3} [2z+1 \quad z+2] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{z+2}{z(z+2)+3} \end{aligned} \quad (3.94)$$

W programie Matlab do wyznaczenia dyskretnej transmitancji na podstawie macierzy równań stanu służy polecenie `ss2tf`, analogicznie jak w przypadku układów ciągłych.

**3.6.4. Wyznaczanie równań stanu na podstawie transmitancji**

Niech transmitancja dyskretna ma postać

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_{n-1}z^{n-1} + b_{n-2}z^{n-2} \dots + b_1z + b_0}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0} \quad (3.95)$$

Analogicznie jak w przypadku układów ciągłych, istnieje kilka metod wyboru zmiennych stanu i wyznaczania macierzy  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  dla danej transmitancji dyskretnej [7]. W dalszej części pracy omówione zostaną dwa warianty metody bezpośredniej, która jest odpowiednikiem metody bezpośredniej stosowanej w przypadku układów ciągłych. Mnożąc licznik i mianownik transmitancji przez  $z^{-n}$  otrzymuje się

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_{n-1}z^{-1} + b_{n-2}z^{-2} + \dots + b_1z^{1-n} + b_0z^{-n}}{1 + a_{n-1}z^{-1} + \dots + a_1z^{1-n} + a_0z^{-n}} \quad (3.96)$$

Niech

$$E(z) = \frac{U(z)}{1 + a_{n-1}z^{-1} + \dots + a_1z^{1-n} + a_0z^{-n}} \quad (3.97)$$

będzie sygnałem pomocniczym, czyli

$$E(z) = U(z) - (a_{n-1}z^{-1} + \dots + a_1z^{1-n} + a_0z^{-n})E(z) \quad (3.98)$$

Wielkość  $Y(z)$  można zapisać następująco

$$Y(z) = (b_{n-1}z^{-1} + b_{n-2}z^{-2} + \dots + b_1z^{1-n} + b_0z^{-n})E(z) \quad (3.99)$$

Z ostatnich dwóch wzorów wynika model przedstawiony na rys. 3.12.

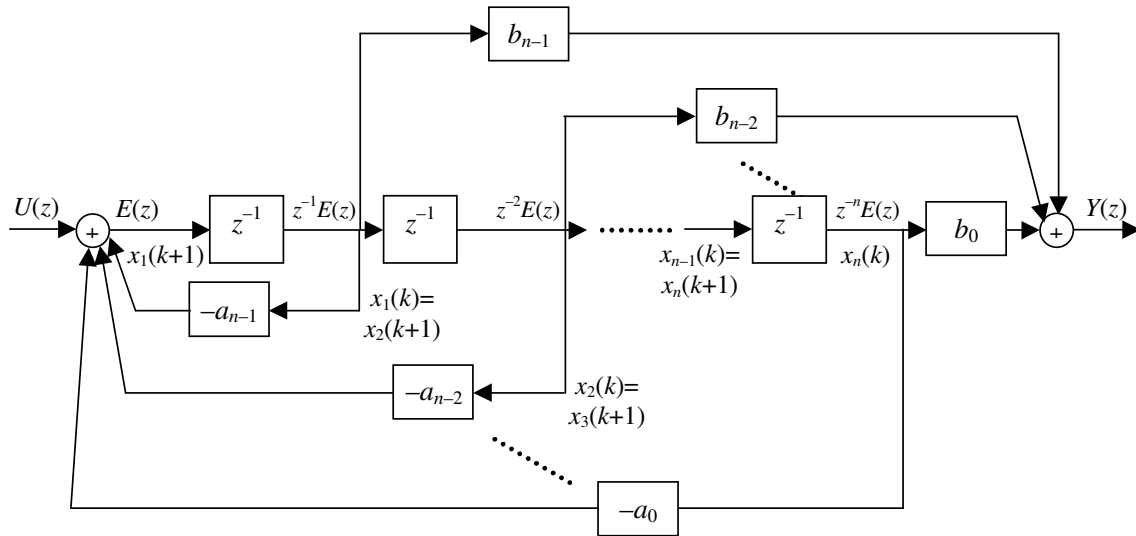
Przyjmując jako zmienne stanu wielkości wyjściowe członów opóźniających, otrzymuje się następujący model w przestrzeni stanu

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= -a_{n-1}x_1(k) - a_{n-2}x_2(k) - \dots - a_1x_{n-1}(k) - a_0x_n(k) + u(k) \\ x_2(k+1) &= x_1(k) \\ &\vdots \\ x_n(k+1) &= x_{n-1}(k) \\ y(k) &= b_{n-1}x_1(k) + b_{n-2}x_2(k) + \dots + b_0x_n(k) \end{aligned} \quad (3.100)$$

Macierze równania stanu i wyjścia mają postać

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & -a_{n-3} & \dots & -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.101)$$

$$\mathbf{C} = [b_{n-1} \quad b_{n-2} \quad \dots \quad b_0], \quad D = 0$$



Rys. 3.12. Model dyskretnego układu dynamicznego w przestrzeni stanu (wariant I)

Można pokazać, że analogicznie jak dla układów ciągłych, również dla układów dyskretnych zachodzi związek między reprezentacją w pierwszym i drugim wariancie metody bezpośredniej [7]

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_2 &= \mathbf{A}_1^T, & \mathbf{B}_2 &= \mathbf{C}_1^T \\ \mathbf{C}_2 &= \mathbf{B}_1^T, & D &= 0 \end{aligned} \quad (3.102)$$

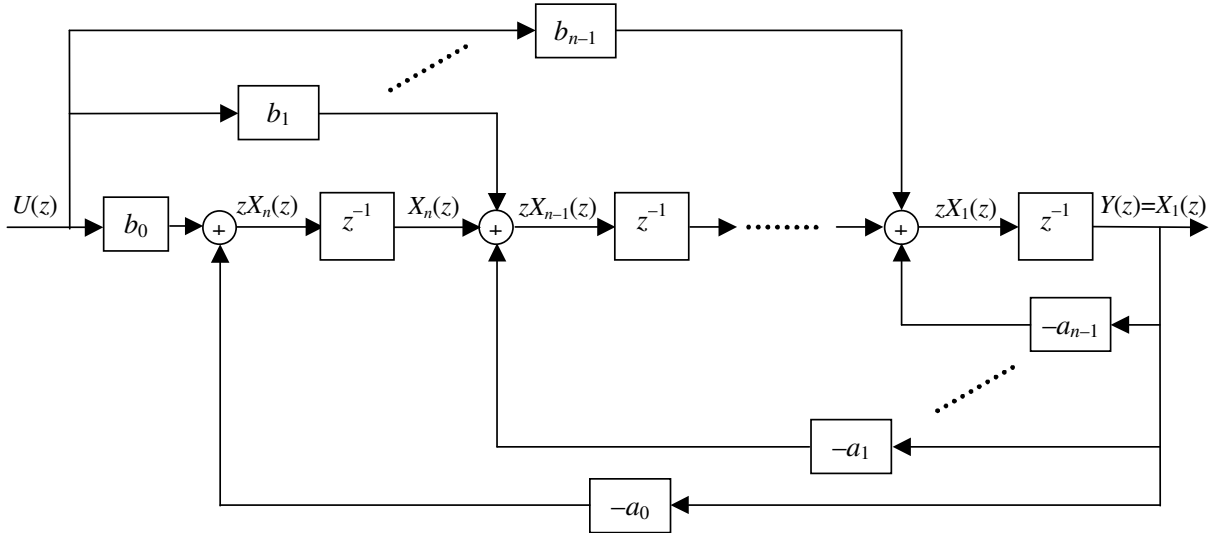
Równania stanu oraz równanie wyjścia mają wówczas postać

$$\begin{aligned}
 x_1(k+1) &= -a_{n-1}x_1(k) + x_2(k) + b_{n-1}u(k) \\
 x_2(k+1) &= -a_{n-2}x_1(k) + x_3(k) + b_{n-2}u(k) \\
 &\vdots \\
 x_{n-1}(k+1) &= -a_1x_1(k) + x_n(k) + b_1u(k) \\
 x_n(k+1) &= -a_0x_1(k) + b_0u(k) \\
 y(k) &= x_1(k)
 \end{aligned} \tag{3.103}$$

Macierze równania stanu i wyjścia mają postać

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ -a_{n-3} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ -a_1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ \vdots \\ b_0 \end{bmatrix} \\
 C &= [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0], \quad D = 0
 \end{aligned} \tag{3.104}$$

Model układu dynamicznego uzyskany w drugim wariancie metody bezpośredniej pokazano na rys. 3.13.



Rys. 3.13. Model dyskretnego układu dynamicznego w przestrzeni stanu (wariant II)

Można zauważyć, że macierze  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  dla przypadku ciągłego i dyskretnego mają taką samą strukturę (ale nie wartości elementów). Odpowiednikiem równań różniczkowych stosowanych w przypadku układów ciągłych są równania różnicowe stosowane w przypadku układów dyskretnych. Dlatego też w reprezentacji graficznej modeli ciągłych stosuje się integratory, w przypadku układów dyskretnych stosuje się bloki opóźniające.

W programie Matlab do wyznaczenia macierzy równań stanu układu dyskretnego na podstawie transmitancji dyskretniej, analogicznie jak w przypadku obiektów ciągłych, służy polecenie `tf2ss`.

**Zadanie**

Odpowiednikiem transmitancji ciągłej

$$G(s) = \frac{0,5}{(s-1)(s+1)} = \frac{0,5}{s^2 - 1} \quad (3.105)$$

jest

$$G(z) = \frac{b_1 z + b_0}{z^2 + a_1 z + a_0} \quad (3.106)$$

gdzie  $b_0=0,25(\alpha+\beta-2)$ ,  $b_1=0,25(\alpha+\beta-2\alpha\beta)$ ,  $a_0=\alpha\beta$ ,  $a_1=-(\alpha+\beta)$ ,  $\alpha=e^T$ ,  $\beta=e^{-T}$ . Wykorzystując dwa warianty metody bezpośredniej znaleźć równanie stanu i wyjścia procesu dyskretnego.

**Rozwiązanie**

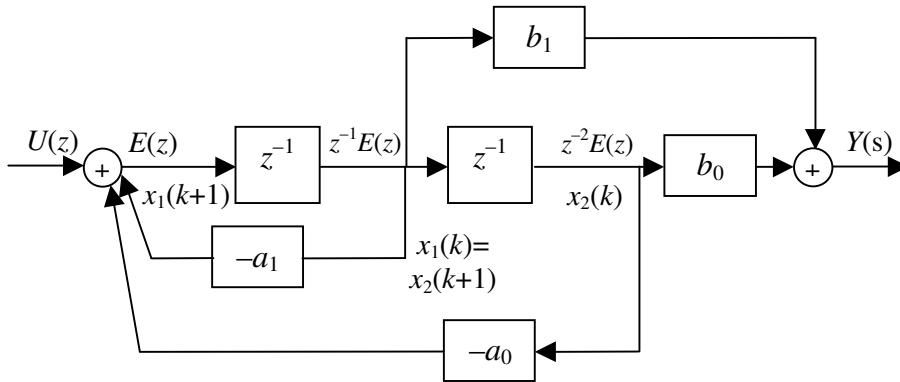
Mnożąc licznik i mianownik  $G(z)$  przez  $z^{-n}=z^{-2}$

$$G(z) = \frac{b_1 z^{-1} + b_0 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_0 z^{-2}} \quad (3.107)$$

Otrzymuje się

$$\begin{aligned} E(z) &= U(z) - (a_1 z^{-1} + a_0 z^{-2})E(z) \\ Y(z) &= (b_1 z^{-1} + b_0 z^{-2})E(z) \end{aligned} \quad (3.108)$$

Model zamieszczony na rys. 3.14 odpowiada pierwszemu wariantowi metody bezpośredniej.



Rys. 3.14. Model dyskretnego układu dynamicznego w przestrzeni stanu (wariant I)

Równania dyskretnie w przestrzeni stanu są następujące

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} b_1 & b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.109)$$

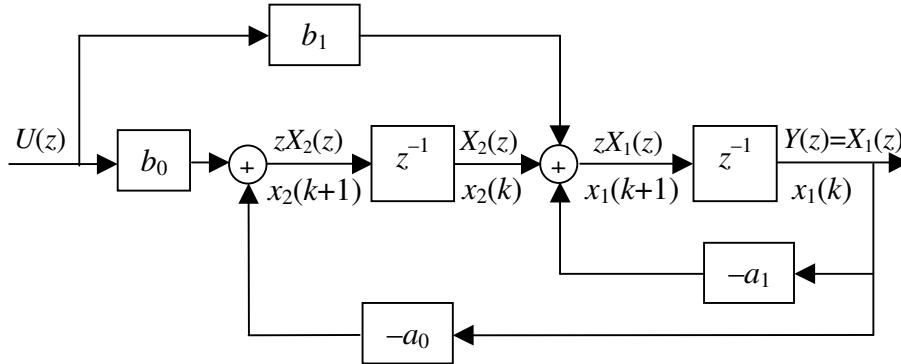


W drugim wariancie metody bezpośredniej równania w przestrzeni stanu są następujące

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 \\ -a_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$
(3.110)

czemu odpowiada model zamieszczony na rys. 3.15.



Rys. 3.15. Model dyskretnego układu dynamicznego w przestrzeni stanu (wariant II)

W programie Matlab do konwersji między układem ciągłym a dyskretnym służą polecenia `c2d` oraz `c2dm`. Możliwa jest konwersja modeli w przestrzeni stanu

$$[A_d, B_d, C_d, D_d] = c2dm(A, B, C, D, T, 'metoda')$$

oraz transmitancyjnych

$$[1_d, m_d] = c2dm(1, m, T, 'metoda')$$

Układ ciągły opisany jest macierzami  $A, B, C, D$  lub transmitancją o współczynnikach licznika i mianownika  $1, m$ , *metoda* określa metodę dyskretyzacji. Najczęściej stosuje się `zoh` (ekstrapolator zerowego rzędu), `foh` (ekstrapolator pierwszego rzędu) lub `tustin` (aproksymację biliniową). Wynikiem są macierze lub współczynniki transmitancji modelu dyskretnego.

### 3.6.5. Wyznaczanie dyskretnych równań stanu na podstawie ciągłych równań stanu

Rozwiązanie ciągłego liniowego układu równań różniczkowych  $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$  ma postać

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$
(3.111)

Powyższy wzór można wykorzystać do wyznaczenia dyskretnych równań stanu na podstawie równań ciągłych. Podstawiając dla czasu dyskretnego  $t=kT+T$ ,  $t_0=kT$ , otrzymuje się

$$x(kT+T) = e^{AT} x(kT) + \int_{kT}^{kT+T} e^{A(kT+T-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$
(3.112)

Dla ekstrapolatora zerowego rzędu

$$u(\tau) = u(kT) \quad \text{dla} \quad kT \leq \tau \leq kT+T$$
(3.113)

Wprowadzając dodatkową zmienną  $\eta = kT + T - \tau$ , otrzymuje się

$$x(kT + T) = e^{AT} x(kT) + \left( \int_0^T e^{A\eta} d\eta \right) B u(kT) \quad (3.114)$$

Definiując macierze

$$A_d = e^{AT}, \quad B_d = \left( \int_0^T e^{A\eta} d\eta \right) B \quad (3.115)$$

ciągłe równanie stanu można zapisać w postaci dyskretnej

$$x(k+1) = A_d x(k) + B_d u(k) \quad (3.116)$$

Rozwinięcie w szereg

$$A_d = e^{AT} = I + AT + \frac{A^2 T^2}{2!} + \frac{A^3 T^3}{3!} + \dots \quad (3.117)$$

można zapisać jako

$$A_d = e^{AT} = I + AT\Psi \quad (3.118)$$

gdzie

$$\Psi = I + \frac{AT}{2!} + \frac{A^2 T^2}{3!} + \dots \quad (3.119)$$

Macierz  $B_d$  oblicza się ze wzoru

$$B_d = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k T^{k+1}}{(k+1)!} B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k T^k}{(k+1)!} TB = \Psi TB \quad (3.120)$$

natomiast macierze dyskretnej równania wyjścia są takie same jak macierze równania ciągłego ( $C_d=C$ ,  $D_d=D$ ).

### Zadanie

Wyznaczyć wersję dyskretną ciągłego równania stanu

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (3.121)$$

### Rozwiązanie

Ponieważ  $A^n=0$  dla  $n \geq 2$ , otrzymuje się

$$\Psi = I + \frac{AT}{2!} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0,5T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0,5T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.122)$$

oraz

$$\begin{aligned} A_d &= I + AT\Psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + T \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0,5T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ B_d &= \Psi TB = T \begin{bmatrix} 1 & 0,5T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5T^2 \\ T \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.123)$$

### 3.6.6. Projektowanie dyskretnych układów regulacji metodą sprzężenia od stanu

Do projektowania dyskretnych układów regulacji wykorzystuje się metody analogiczne do tych, które stosowane są dla układów ciągłych. W dalszej części pracy krótko omówiono regulator ze sprzężeniem od stanu oraz obserwator pełnego i zredukowanego rzędu.

Analogicznie jak w przypadku regulatora ciągłego, sygnał sterujący jest funkcją liniową zmiennych stanu

$$u(k) = -Kx(k) = -[k_1 \quad \dots \quad k_n] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} \quad (3.124)$$

Położenie biegunów układu zamkniętego kształtuje się odpowiednio dobierając wartości współczynników  $k_1, \dots, k_n$ . Równanie charakterystyczne układu zamkniętego

$$x(k+1) = Ax(k) - BKx(k) = (A - BK)x(k) \quad (3.125)$$

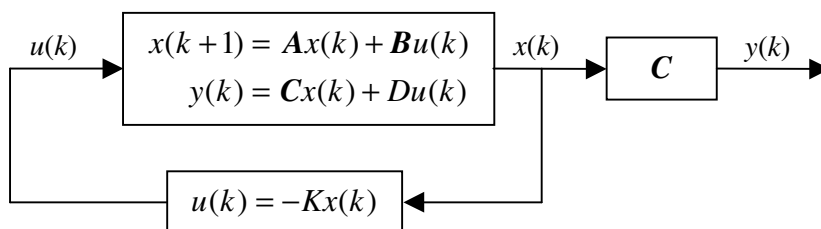
ma postać

$$|zI - (A - BK)| = 0 \quad (3.126)$$

Wektor  $K$  dobiera się w taki sposób, aby pierwiastki równania charakterystycznego miały zadane z góry wartości  $z_1, \dots, z_n$

$$(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n) = 0 \quad (3.127)$$

O ile w przypadku układów ciągłych pierwiastki równania charakterystycznego (bieguny układu zamkniętego) muszą leżeć w lewej półpłaszczyźnie, to w przypadku dyskretnym warunkiem stabilności jest ulokowanie pierwiastków w kole jednostkowym (rys. 3.6).



Rys. 3.16. Przesuwanie biegunów układu zamkniętego obiektu dyskretnego

oraz

$$\begin{aligned} A_d &= I + AT\Psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + T \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0,5T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ B_d &= \Psi TB = T \begin{bmatrix} 1 & 0,5T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5T^2 \\ T \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.123)$$

### 3.6.6. Projektowanie dyskretnych układów regulacji metodą sprzężenia od stanu

Do projektowania dyskretnych układów regulacji wykorzystuje się metody analogiczne do tych, które stosowane są dla układów ciągłych. W dalszej części pracy krótko omówiono regulator ze sprzężeniem od stanu oraz obserwator pełnego i zredukowanego rzędu.

Analogicznie jak w przypadku regulatora ciągłego, sygnał sterujący jest funkcją liniową zmiennych stanu

$$u(k) = -Kx(k) = -[k_1 \quad \dots \quad k_n] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} \quad (3.124)$$

Położenie biegunów układu zamkniętego kształtuje się odpowiednio dobierając wartości współczynników  $k_1, \dots, k_n$ . Równanie charakterystyczne układu zamkniętego

$$x(k+1) = Ax(k) - BKx(k) = (A - BK)x(k) \quad (3.125)$$

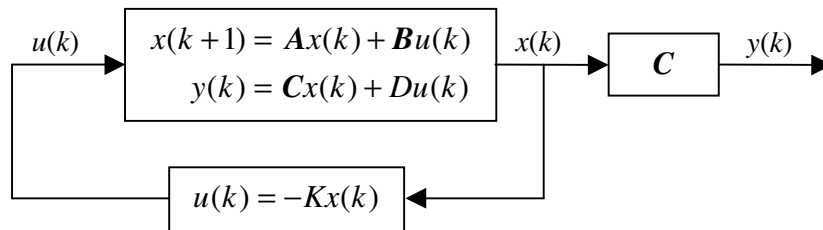
ma postać

$$|zI - (A - BK)| = 0 \quad (3.126)$$

Wektor  $K$  dobiera się w taki sposób, aby pierwiastki równania charakterystycznego miały zadane z góry wartości  $z_1, \dots, z_n$

$$(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n) = 0 \quad (3.127)$$

O ile w przypadku układów ciągłych pierwiastki równania charakterystycznego (bieguny układu zamkniętego) muszą leżeć w lewej półpłaszczyźnie, to w przypadku dyskretnym warunkiem stabilności jest ulokowanie pierwiastków w kole jednostkowym (rys. 3.6).



Rys. 3.16. Przesuwanie biegunów układu zamkniętego obiektu dyskretnego

**Zadanie**

Dla obiektu

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -a_1 & 1 \\ -a_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.128)$$

gdzie  $b_0=0,25(\alpha+\beta-2)$ ,  $b_1=0,25(\alpha+\beta-2\alpha\beta)$ ,  $a_0=\alpha\beta$ ,  $a_1=-(\alpha+\beta)$ ,  $\alpha=e^T$ ,  $\beta=e^{-T}$ , w taki sposób dobrać wektor sprzężenia zwrotnego  $K$ , aby bieguny układu zamkniętego miały wartości  $z_1$ ,  $z_2$ . Przyjąć stan początkowy  $x(0)=[1 \ -1]^T$ , przeprowadzić symulacje dla biegunów dyskretnych a)  $z_1=z_2=0,5$ , b)  $z_1=z_2=0,75$ , przyjąć okres próbkowania  $T=0,1$ .

**Rozwiązanie**

Równanie charakterystyczne układu zamkniętego ma postać

$$\begin{aligned} |zI - (A - BK)| &= \left| \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -a_1 & 1 \\ -a_0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \right| \\ &= \left| \begin{bmatrix} z + a_1 + b_1 k_1 & b_1 k_2 - 1 \\ a_0 + b_0 k_1 & z + b_0 k_2 \end{bmatrix} \right| \\ &= z^2 + (b_0 k_2 + a_1 + b_1 k_1)z + (a_1 b_0 - a_0 b_1)k_2 + a_0 + b_0 k_1 \end{aligned} \quad (3.129)$$

Żąda się, aby miało ono pierwiastki  $z_1$ ,  $z_2$

$$(z - z_1)(z - z_2) = z^2 - (z_1 + z_2)z + z_1 z_2 \quad (3.130)$$

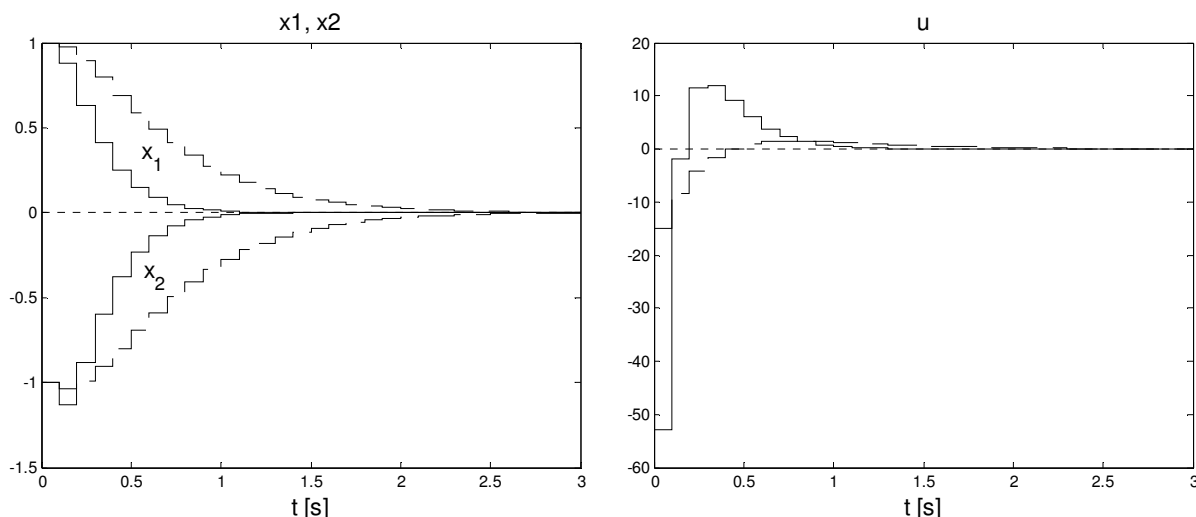
Z porównania współczynników przy odpowiednich potęgach zmiennej  $s$  otrzymuje się

$$\begin{cases} (a_1 b_0 - a_0 b_1)k_2 + a_0 + b_0 k_1 = z_1 z_2 \\ b_0 k_2 + a_1 + b_1 k_1 = -(z_1 + z_2) \end{cases} \quad (3.131)$$

oraz

$$\begin{aligned} k_1 &= -\frac{1}{b_1}(z_1 + z_2 + a_1 + b_0) \\ k_2 &= -\frac{z_1 z_2 - a_0 + \frac{b_0}{b_1}(z_1 + z_2) + \frac{a_1 b_0}{b_1}}{a_1 b_0 - a_0 b_1 - \frac{b_0^2}{b_1}} \end{aligned} \quad (3.132)$$

Dla biegunów  $z_1=z_2=0,5$  wektor  $K=[228,2515 \ 175,4153]$ , dla biegunów  $z_1=z_2=0,75$  wektor  $K=[109,3978 \ 94,4356]$ . Wyniki symulacji przedstawiono na rys. 3.17. Można zauważyć, że im mniejszy moduł, tym otrzymane przebiegi są szybsze. W bardzo prosty sposób można to wytłumaczyć, pamiętając, że ciągłemu biegunowi  $s_0$  odpowiada biegun dyskretny  $z_0 = e^{s_0 T}$  (rys. 3.6). Zwiększaniu modułu leżącego w lewej półpłaszczyźnie bieguna ciągłego odpowiada zmniejszanie odpowiadającego mu bieguna dyskretnego.



Rys. 3.17. Trajektorie stanu układu zamkniętego i sygnał sterujący przy biegunach  $z_1=z_2=0,5$ , (linia ciągła) oraz  $z_1=z_2=0,75$  (linia przerywana)

Niech macierze  $A$  oraz  $B$  równania stanu mają strukturę odpowiadającą pierwszemu wariantowi metody bezpośredniej. Dla układu dyskretnego o równaniu charakterystycznym

$$\begin{aligned} |zI - (A - BK)| &= (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n) \\ &= z^n + \alpha_{n-1}z^{n-1} + \dots + \alpha_1z + \alpha_0 = 0 \end{aligned} \quad (3.133)$$

gdzie  $z_1, \dots, z_n$  są zadanymi z góry biegunami układu zamkniętego, współrzędne wektora sprzężeń zwrotnych oblicza się ze wzoru

$$k_i = \alpha_{n-i} - a_{n-i} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.134)$$

lub też, analogicznie jak w przypadku układów ciągłych, ze wzoru Ackermana (2.67).

Podobnie jak w przypadku układów ciągłych, w programie Matlab do przesuwania biegunów układu zamkniętego służą polecenia `acker` i `place`. Dla obiektu o jednym wejściu i jednym wyjściu można wykorzystać polecenie

`K=acker(A,B,[z1 ... zn])`

W przypadku obiektów wielowymiarowych stosuje się polecenie

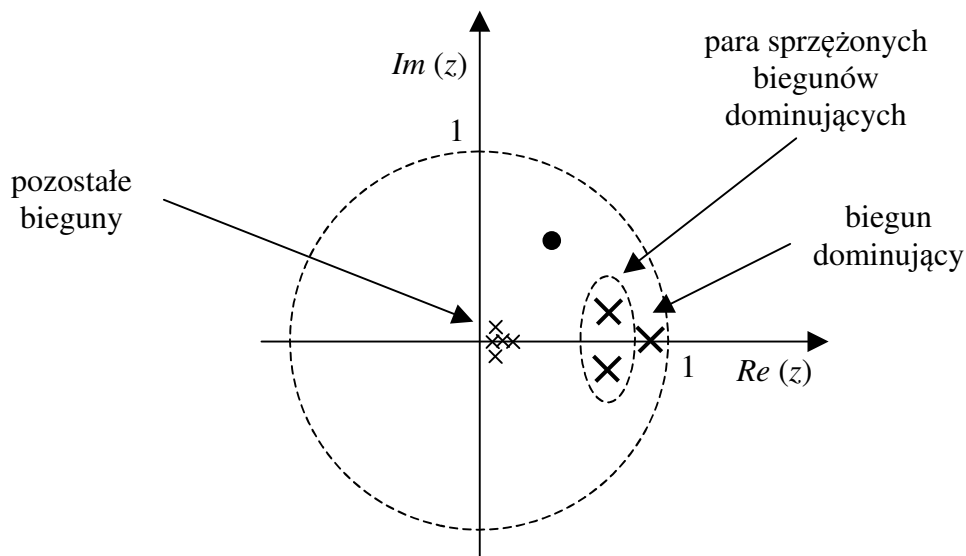
`K=place(A,B,[z1 ... zn])`

### 3.6.7. Dobór biegunów układu zamkniętego

W odróżnieniu od przypadku ciągłego, gdzie konieczne jest położenie biegunów w lewej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej  $s$ , warunkiem stabilności układów dyskretnych jest położenie biegunów układu zamkniętego w okręgu jednostkowym na płaszczyźnie  $z$ . Jeżeli w układzie ciągłym występują bieguny zespolone, prowadzą one do oscylacyjnych przebiegów przejściowych. W układzie dyskretnym oscylacje pojawią się wówczas, jeżeli układ ma ujemne bieguny rzeczywiste. Bieguny takie nazywa się czasami *biegunami dzwoniącymi*. Dlatego też, mimo tego, że wszystkie bieguny położone w okręgu jednostkowym są stabilne, należy wybierać bieguny o dodatniej części rzeczywistej.

Podobnie jak w przypadku doboru biegunów ciągłego układu regulacji (podrozdział 2.1.7), również w przypadku dyskretnym można zastosować biegun dominujący, co przedstawiono na rys. 3.18. Aby uniknąć biegunów dzwoniących, leży on w prawej części okręgu jednost-

kowego. Ponieważ ma on największy wpływ na działanie zamkniętego układu regulacji, w porównaniu z innymi biegunami biegun dominujący ma największą część rzeczywistą. Pozostałe bieguny położone są blisko środka okręgu. Jeżeli zamiast pojedynczego bieguna dominującego występuje parę biegunów sprzężonych, mają one największą część rzeczywistą. Zakłada się, że wszystkie pozostałe bieguny mają znacznie mniejszy (pomijalny) wpływ na działanie układu regulacji. Ułatwieniem w zrozumieniu może być zastosowanie przekształcenia bieguna ciągłego  $s_0$  w biegun dyskretny  $z_0 = e^{s_0 T}$  (rys. 3.6). „Szybkie” bieguny ciągłe mają dużą, oczywiście ujemną, część rzeczywistą. Odpowiadające im bieguny dyskretny mają więc mały moduł, są położone blisko środka okręgu.



Rys. 3.18. Koncepcja dyskretnego bieguna dominującego

Precyzyjne zalecenia projektowe dotyczące doboru biegunów ciągłych zamkniętego układu regulacji, można również sformułować dla przypadku dyskretnego [16]. Jeżeli zamknięty układ regulacji ma pojedynczy rzeczywisty biegun dominujący  $z_0 = \sigma$  ( $\sigma > 0, |\sigma| > 0$ ), to związany z nim przebieg czasowy  $d(k)$  jest malejącym szeregiem potęgowym  $\{d(k)\} = \{a\sigma^k\}$ . Jeżeli dyskretną chwilę praktycznego zaniknięcia przebiegu ( $k_p$ ) określi się tak samo jak dla przebiegu z czasem ciągłym, czyli jako chwilę, dla której  $d(k_p) = \Delta a$ , gdzie  $\Delta$  jest pewną małą liczbą (np. 0,05), to wybrany biegun dominujący musi spełniać warunek  $(\sigma^0)^{k_p} = \Delta$ , czyli

$$\sigma^0 = \Delta^{\frac{1}{k_p}} \quad (3.135)$$

Przyjmując  $\Delta = 0,05$ , dla  $k_p = 10$  otrzymuje się  $\sigma^0 = 0,7411$ , dla  $k_p = 100$  otrzymuje się  $\sigma^0 = 0,9705$ , natomiast dla  $k_p = 1000$  otrzymuje się  $\sigma^0 = 0,9970$ .

Jeżeli zamknięty układ regulacji ma parę sprzężonych biegunów dominujących  $z_0 = |z_0| e^{\pm j\beta}$  ( $|z_0| < 1$ ,  $\text{Im}(z_0) \neq 0$ ,  $\beta = \text{arccotg} \frac{\text{Re}(z_0)}{|\text{Im}(z_0)|}$ ,  $0 < \beta < \pi$ ), to związany z nimi przebieg czasowy  $d(k)$  jest następujący

$$\{d(k)\} = \{a |z_0|^k \cos(\beta k + \psi)\} = \{A(k) \cos(\beta k + \psi)\} \quad (3.136)$$

Dla tego przebiegu można określić współczynnik tłumienia amplitudy  $t \rightarrow A(t) = a |z_0|^t$  jego ciągłej obwiedni za okres  $2\pi/\beta$  jako

$$\xi = \frac{A(t) - A\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right)}{A(t)} = 1 - |z_0|^{\frac{2\pi}{\beta}} \quad (3.137)$$

Analogicznie jak w przypadku biegunów ciągłych, przyjmując pewną wartość żadanego tłumienia  $\xi^0$  (np. 0,98) można wyznaczyć gwarantujący to tłumienie związek między modulem bieguna  $|z_0|$  a jego argumentem  $\beta$ . Związek ten ma postać

$$|z_0| = (1 - \xi^0)^{\frac{\beta}{2\pi}} \quad (3.138)$$

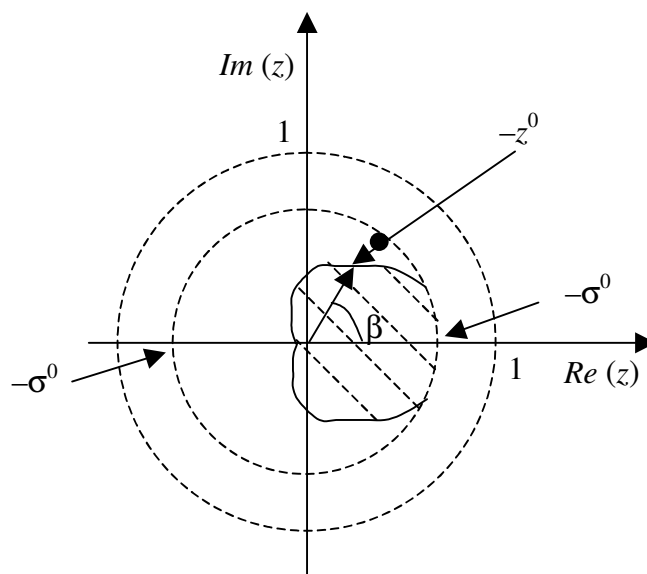
Bieguny zapewniające żadane tłumienie  $\xi^0$  mają więc postać

$$z_0 = |z_0| e^{\pm j\beta} = (1 - \xi^0)^{\frac{\beta}{2\pi}} e^{\pm j\beta}, \quad 0 \leq \beta \leq \pi \quad (3.139)$$

Powyższy warunek ma prostą interpretację geometryczną. Bieguny sprzężone powinny leżeć na symetrycznych względem osi rzeczywistej spiralach logarytmicznych (rys. 3.19).

Reasumując powyższe rozważania, można sformułować następujące zalecenia projektowe dla układów dyskretnych:

- Bieguny powinny być co do modułu mniejsze od jedności i mieć dodatnie części rzeczywiste, a więc powinny być położone w prawej części okręgu jednostkowego.
- Dobrze jest, gdy biegun leżący najbliżej punktu  $1 + j0$  jest jednokrotny i rzeczywisty.
- Jeżeli zadany jest czas praktycznego zaniknięcia przebiegu  $k_p^0$  oraz tłumienie ma być większe niż  $\xi^0$ , to para sprzężonych biegunów dominujących powinna leżeć w obszarze przedstawionym na rys. 3.19 (obszar zakreskowany), gdzie  $\sigma^0$  określona jest wzorem (3.135), natomiast  $z^0 = (1 - \xi^0)^{\frac{\beta}{2\pi}} e^{\pm j\beta}$ ,  $0 \leq \beta \leq \pi$ .



Rys. 3.19. Położenie pary sprzężonych dyskretnych biegunów dominujących



Analogicznie jak w przypadku ciągłym, do doboru biegunów regulatora dyskretnego można wykorzystać metody polegające na minimalizacji wybranych wskaźników jakości regulacji. W regulacji liniowo-kwadratowej wektor sprzężeń zwrotnych  $K$  dobiera się w taki sposób, aby minimalizowany był wskaźnik jakości (w ogólności dla układu o wielu wejściach i wielu wyjściach)

$$J = \sum_{k=1}^{\infty} (x^T(k)Qx(k) + u^T(k)Ru(k) + 2x^T(k)Nu(k)) \quad (3.140)$$

gdzie  $Q$ ,  $R$  oraz  $N$  są macierzami wagowymi. Macierz sprzężeń zwrotnych obliczana jest z

$$K = (B^T S B + R)^{-1} (B^T S A + N^T) \quad (3.141)$$

gdzie  $S$  jest rozwiązaniem macierzowego równania Riccatiego

$$A^T S A - S - (A^T S B + N)(B^T S B + R)^{-1} (B^T S A + N^T) + Q = 0 \quad (3.142)$$

W programie Matlab do wyznaczenia regulatora minimalizującego wskaźnik jakości (3.140) służy polecenie:

```
[K, S, E]=dlqr(A, B, Q, R, N)
```

przy czym wektor  $E$  zawiera wartości własne macierzy układu zamkniętego  $(A - BK)$ .

Alternatywnie, można przyjąć wskaźnik jakości

$$J = \sum_{k=1}^{\infty} (y^T(k)Qy(k) + u^T(k)Ru(k)) \quad (3.143)$$

W programie Matlab do wyznaczenia regulatora minimalizującego powyższy wskaźnik jakości służy polecenie:

```
[K, S, E]=dlqry(A, B, Q, R, N)
```

### 3.6.8. Dyskretne obserwatory stanu pełnego rzędu

Do estymacji niedostępnych pomiarowo zmiennych stanu, analogicznie jak w przypadku układów ciągłych, stosuje się obserwatory stanu. W dalszej części pracy krótko omówiono dyskretne obserwatory pełnego rzędu i zredukowane. Strukturę dyskretnego obserwatora pełnego rzędu pracującego w pętli zamkniętej pokazano na rys. 3.20. Obserwator jest opisany równaniem

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) &= A\hat{x}(k) + Bu(k) + L(y(k) - \hat{y}(k)) \\ &= A\hat{x}(k) + Bu(k) + L(y(k) - C\hat{x}(k)) \end{aligned} \quad (3.144)$$

gdzie

$$L = \begin{bmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix} \quad (3.145)$$

Równanie charakterystyczne obserwatora dyskretnego ma postać

$$|zI - (A - LC)| = 0 \quad (3.146)$$

Wektor  $L$  dobiera się w taki sposób, aby pierwiastki równania charakterystycznego obserwa-

Analogicznie jak w przypadku ciągłym, do doboru biegunów regulatora dyskretnego można wykorzystać metody polegające na minimalizacji wybranych wskaźników jakości regulacji. W regulacji liniowo-kwadratowej wektor sprzężeń zwrotnych  $K$  dobiera się w taki sposób, aby minimalizowany był wskaźnik jakości (w ogólności dla układu o wielu wejściach i wielu wyjściach)

$$J = \sum_{k=1}^{\infty} (x^T(k)Qx(k) + u^T(k)Ru(k) + 2x^T(k)Nu(k)) \quad (3.140)$$

gdzie  $Q$ ,  $R$  oraz  $N$  są macierzami wagowymi. Macierz sprzężeń zwrotnych obliczana jest z

$$K = (B^T S B + R)^{-1} (B^T S A + N^T) \quad (3.141)$$

gdzie  $S$  jest rozwiązaniem macierzowego równania Riccatiego

$$A^T S A - S - (A^T S B + N)(B^T S B + R)^{-1} (B^T S A + N^T) + Q = 0 \quad (3.142)$$

W programie Matlab do wyznaczenia regulatora minimalizującego wskaźnik jakości (3.140) służy polecenie:

```
[K, S, E]=dlqr(A, B, Q, R, N)
```

przy czym wektor  $E$  zawiera wartości własne macierzy układu zamkniętego  $(A - BK)$ .

Alternatywnie, można przyjąć wskaźnik jakości

$$J = \sum_{k=1}^{\infty} (y^T(k)Qy(k) + u^T(k)Ru(k)) \quad (3.143)$$

W programie Matlab do wyznaczenia regulatora minimalizującego powyższy wskaźnik jakości służy polecenie:

```
[K, S, E]=dlqry(A, B, Q, R, N)
```

### 3.6.8. Dyskretnie obserwatory stanu pełnego rzędu

Do estymacji niedostępnych pomiarowo zmiennych stanu, analogicznie jak w przypadku układów ciągłych, stosuje się obserwatory stanu. W dalszej części pracy krótko omówiono dyskretnie obserwatory pełnego rzędu i zredukowane. Strukturę dyskretnego obserwatora pełnego rzędu pracującego w pętli zamkniętej pokazano na rys. 3.20. Obserwator jest opisany równaniem

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) &= A\hat{x}(k) + Bu(k) + L(y(k) - \hat{y}(k)) \\ &= A\hat{x}(k) + Bu(k) + L(y(k) - C\hat{x}(k)) \end{aligned} \quad (3.144)$$

gdzie

$$L = \begin{bmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix} \quad (3.145)$$

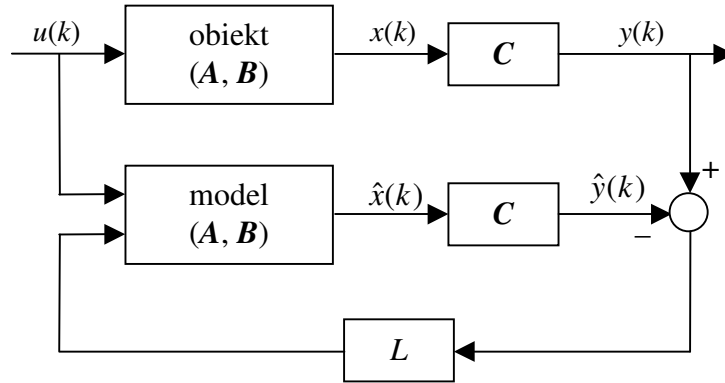
Równanie charakterystyczne obserwatora dyskretnego ma postać

$$|zI - (A - LC)| = 0 \quad (3.146)$$

Wektor  $L$  dobiera się w taki sposób, aby pierwiastki równania charakterystycznego obserwa-

torą miały zadane z góry wartości  $s_1, \dots, s_n$

$$(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n) = 0 \quad (3.147)$$



Rys. 3.20. Struktura obserwatora pełnego rzędu

### Zadanie

Dla obiektu

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 \\ -a_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \quad (3.148)$$

gdzie  $b_0 = 0,25(\alpha + \beta - 2)$ ,  $b_1 = 0,25(\alpha + \beta - 2\alpha\beta)$ ,  $a_0 = \alpha\beta$ ,  $a_1 = -(\alpha + \beta)$ ,  $\alpha = e^T$ ,  $\beta = e^{-T}$ , wyznaczyć obserwator pełnego rzędu o biegunach  $z_{o1}$ ,  $z_{o2}$ . Przyjąć: a)  $z_{o1} = z_{o2} = 0,75$ , b)  $z_{o1} = z_{o2} = 0,1$ .

### Rozwiązanie

Równanie charakterystyczne obserwatora ma postać

$$\begin{aligned} |zI - (A - LC)| &= \left| \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -a_1 & 1 \\ -a_0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \right| \\ &= \left| \begin{bmatrix} z + a_1 + l_1 & -1 \\ l_2 + a_0 & z \end{bmatrix} \right| = z^2 + (l_1 + a_1)z + l_2 + a_0 \end{aligned} \quad (3.149)$$

Żąda się, aby miało ono pierwiastki  $z_1$ ,  $z_2$

$$(z - z_{o1})(z - z_{o2}) = z^2 - (z_{o1} + z_{o2})z + z_{o1}z_{o2} \quad (3.150)$$

Z porównania współczynników przy odpowiednich potęgach zmiennej  $s$  otrzymuje się

$$\begin{cases} l_1 + a_1 = -(z_{o1} + z_{o2}) \\ l_2 + a_0 = z_{o1}z_{o2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l_1 = -(z_{o1} + z_{o2}) - a_1 \\ l_2 = z_{o1}z_{o2} - a_0 \end{cases} \quad (3.151)$$

Dla biegunów obserwatora  $z_{o1} = z_{o2} = 0,75$  wektor  $L = [0,51 \ -0,4375]$ , dla  $z_{o1} = z_{o2} = 0,1$  wektor  $L = [1,8100 \ -0,9900]$ .

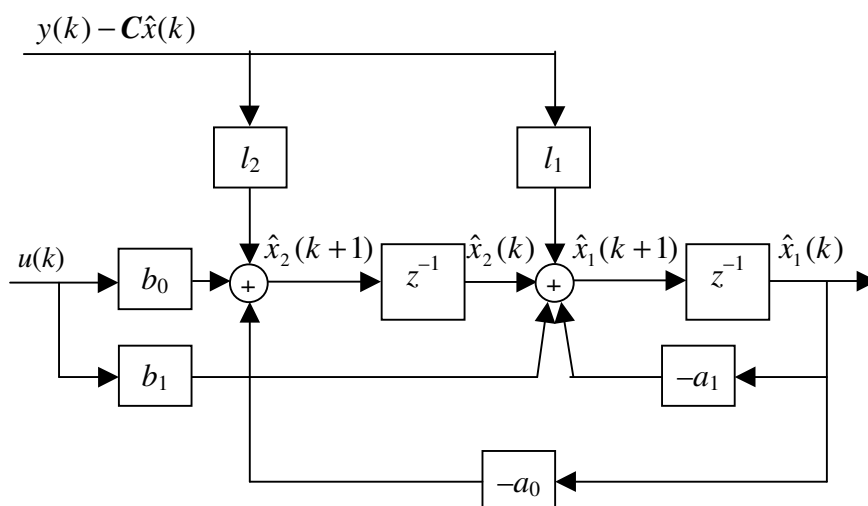
Równanie stanu obserwatora jest następujące

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k) + L(y(k) - C\hat{x}(k)) \quad (3.152)$$

czyli

$$\begin{aligned} \hat{x}_1(k+1) &= -a_1\hat{x}_1(k) + \hat{x}_2(k) + b_1u(k) + l_1(y(k) - C\hat{x}(k)) \\ \hat{x}_2(k+1) &= a_0\hat{x}_1(k) + b_0u(k) + l_2(y(k) - C\hat{x}(k)) \end{aligned} \quad (3.153)$$

Struktura obserwatora została pokazana na rys. 3.21.



Rys. 3.21. Struktura dyskretnego obserwatora stanu pełnego rzędu (przykład)

### Zadanie

Dla obiektu

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -a_1 & 1 \\ -a_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.154)$$

gdzie  $b_0=0,25(\alpha+\beta-2)$ ,  $b_1=0,25(\alpha+\beta-2\alpha\beta)$ ,  $a_0=\alpha\beta$ ,  $a_1=-(\alpha+\beta)$ ,  $\alpha=e^T$ ,  $\beta=e^{-T}$ , przeprowadzić symulację układu regulacji z obserwatorem pełnego rzędu o biegunach  $z_{o1}$ ,  $z_{o2}$ , przy czym a)  $z_{o1}=z_{o2}=0,75$ , b)  $z_{o1}=z_{o2}=0,1$ . Stan początkowy procesu  $x(0) = [1 \ -1]^T$ , przyjąć stan początkowy obserwatora  $\hat{x}(0) = [0 \ 0]^T$ . Przyjęto bieguny regulatora  $z_1=z_2=0,75$ , czemu odpowiada wektor sprzężeń zwrotnych  $K=[109,3978 \ 94,4356]$ , przyjąć okres próbkowania  $T=0,1$ .

### Rozwiązanie

Na rys. 3.22 przedstawiono trajektorie stanu procesu w dwóch przypadkach: gdy regulator korzysta z rzeczywistego (mierzonego) stanu procesu i gdy pomiar stanu zastąpiony jest jego estymacją za pomocą obserwatora pełnego rzędu. Analogicznie jak w przypadku ciągłym, na skutek zerowych warunków początkowych obserwatora w drugiej konfiguracji układu regulacji przebiegi przejściowe mają znacznie większą amplitudę, sprowadzenie procesu do punktu równowagi trwa dłużej, szczególnie dla wolniejszych biegunów obserwatora  $z_{o1}=z_{o2}=0,75$ .

Zgodnie z oczekiwaniami, zmniejszenie modułu biegunów obserwatora przyspiesza zbieżność stanu procesu.

Niech macierze  $A$  oraz  $C$  opisu w przestrzeni stanu mają strukturę odpowiadającą drugiemu wariantowi metody bezpośredniej. Dla obserwatora dyskretnego o równaniu charakterystycznym

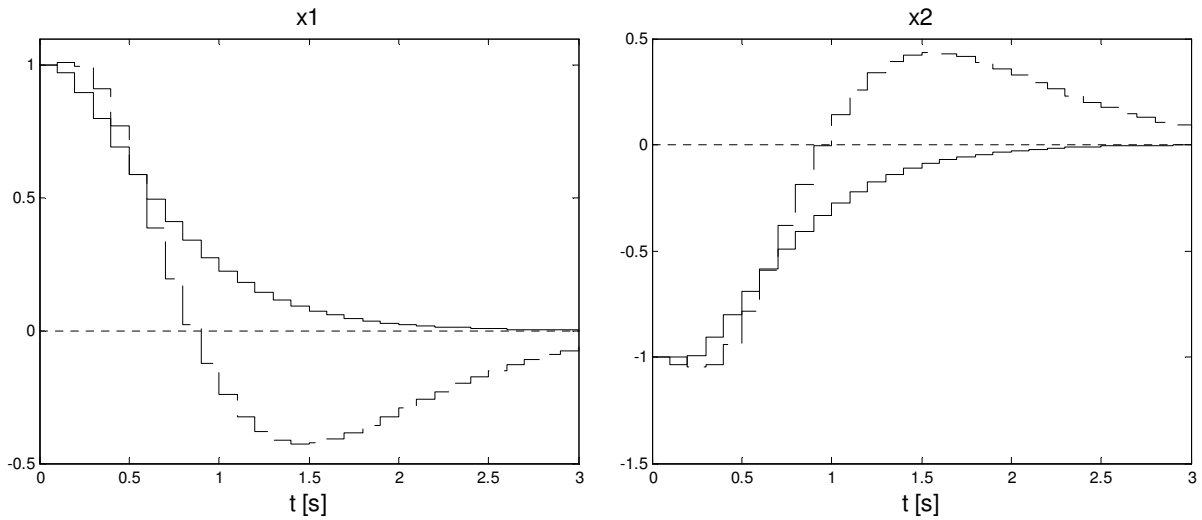
$$\begin{aligned} |zI - (A - LC)| &= (z - z_{o1})(z - z_{o2}) \dots (z - z_{on}) \\ &= z^n + \beta_{n-1}z^{n-1} + \dots + \beta_1z + \beta_0 = 0 \end{aligned} \quad (3.155)$$

gdzie  $z_1, \dots, z_n$  są zadanymi z góry biegunami układu zamkniętego, współrzędne wektora  $L$  oblicza się ze wzoru

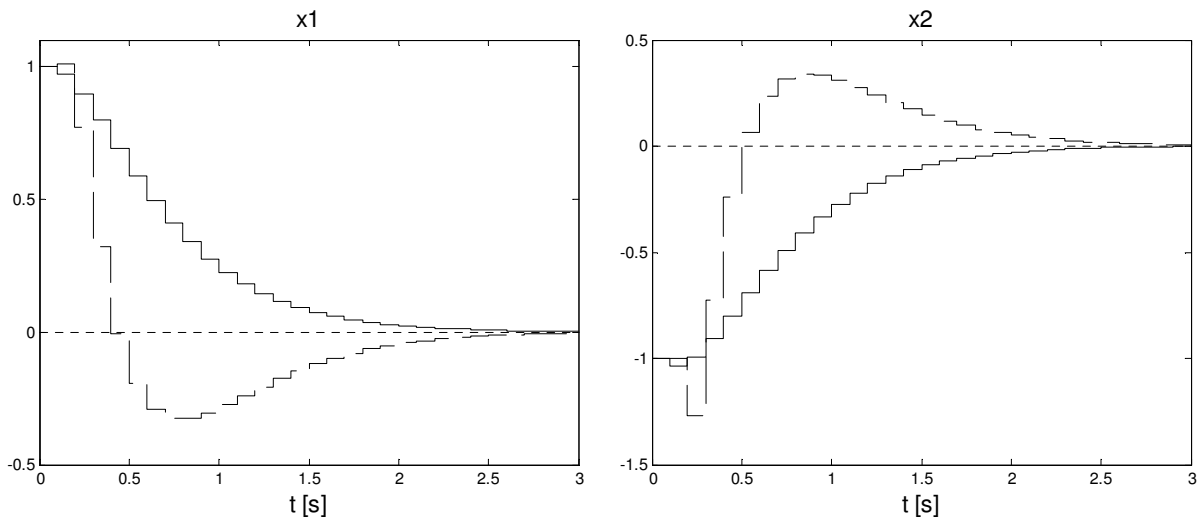
$$l_i = \beta_{n-i} - a_{n-i} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.156)$$

lub też, analogicznie jak w przypadku układów ciągłych, ze wzoru Ackermana (2.121).

a)



b)



Rys. 3.22. Porównanie trajektorii stanu w układzie regulacji ze sprzężeniem zwrotnym: regulator korzysta ze stanu rzeczywistego (linia ciągła) i estymowanego  $\hat{x}_1(k)$ ,  $\hat{x}_2(k)$  (linia przerywana), bieguny obserwatora: a)  $z_{o1}=z_{o2}=0,75$ , b)  $z_{o1}=z_{o2}=0,1$

Analogicznie jak w przypadku układów ciągłych, wektor obserwatora  $L$  dobiera się tak, aby pierwiastki równania  $|sI - (A - LC)|$  miały zadane wartości. W programie Matlab wektor  $L$  można obliczyć następująco

```
L=acker(A',C', [z_o1 ... z_on])
L=place(A',C', [z_o1 ... z_on])
```

### 3.6.9. Dyskretne obserwatory zredukowanego rzędu

Wyprowadzenie równań dyskretnego obserwatora zredukowanego rzędu jest bardzo podobne do przypadku ciągłego. Zakłada się, że macierz wyjścia ma strukturę odpowiadającą drugiemu wariantowi metody bezpośredniej

$$C = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \quad (3.157)$$

Jeżeli macierz  $C$  nie ma żądanej postaci, stosuje się liniowe przekształcenie zmiennych stanu (2.123). Korzystając ze struktury macierzy  $C$ , wektor stanu można przedstawić w postaci

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ w(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(k) \\ w(k) \end{bmatrix} \quad (3.158)$$

przy czym  $w(k)$  jest  $n-1$  wektorem bezpośrednio niedostępnych zmiennych stanu. Zadaniem obserwatora zredukowanego jest odtworzenie składowych tego wektora.

Równanie stanu układu

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (3.159)$$

można zapisać w postaci

$$\begin{aligned} y(k+1) &= A_{11}y(k) + A_{12}w(k) + B_1u(k) \\ w(k+1) &= A_{21}y(k) + A_{22}w(k) + B_2u(k) \end{aligned} \quad (3.160)$$

gdzie

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad (3.161)$$

Wymiar macierzy jest następujący:  $A_{11}$ :  $1 \times 1$ ,  $A_{12}$ :  $1 \times (n-1)$ ,  $A_{21}$ :  $(n-1) \times 1$ ,  $A_{22}$ :  $(n-1) \times (n-1)$ ,  $B_1$ :  $1 \times 1$ ,  $B_2$ :  $(n-1) \times 1$ . Mnożąc lewostronnie pierwsze z równań stanu przez wektor  $L$  o długości  $n-1$  i odejmując od drugiego równania otrzymuje się

$$w(k+1) = (A_{22} - LA_{12})w(k) + (A_{21} - LA_{11})y(k) + (B_2 - LB_1)u(k) + Ly(k+1) \quad (3.162)$$

Aby uniknąć konieczności wykorzystania sygnału  $y(k+1)$  definiuje się dodatkowy stan

$$z(k) = w(k) - Ly(k) \quad (3.163)$$

Obserwator zredukowany dla stanu  $z(t)$  opisany jest więc równaniem

$$z(k+1) = (A_{22} - LA_{12})(z(k) + Ly(k)) + (A_{21} - LA_{11})y(k) + (B_2 - LB_1)u(k) \quad (3.164)$$

Strukturę obserwatora pokazano na rys. 3.23.

Analogicznie jak w przypadku układów ciągłych, wektor obserwatora  $L$  dobiera się tak, aby pierwiastki równania  $|sI - (A - LC)|$  miały zadane wartości. W programie Matlab wektor  $L$  można obliczyć następująco

```
L=acker(A',C', [z_o1 ... z_on])
L=place(A',C', [z_o1 ... z_on])
```

### 3.6.9. Dyskretne obserwatory zredukowanego rzędu

Wyprowadzenie równań dyskretnego obserwatora zredukowanego rzędu jest bardzo podobne do przypadku ciągłego. Zakłada się, że macierz wyjścia ma strukturę odpowiadającą drugiemu wariantowi metody bezpośredniej

$$C = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \quad (3.157)$$

Jeżeli macierz  $C$  nie ma żądanej postaci, stosuje się liniowe przekształcenie zmiennych stanu (2.123). Korzystając ze struktury macierzy  $C$ , wektor stanu można przedstawić w postaci

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ w(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(k) \\ w(k) \end{bmatrix} \quad (3.158)$$

przy czym  $w(k)$  jest  $n-1$  wektorem bezpośrednio niedostępnych zmiennych stanu. Zadaniem obserwatora zredukowanego jest odtworzenie składowych tego wektora.

Równanie stanu układu

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (3.159)$$

można zapisać w postaci

$$\begin{aligned} y(k+1) &= A_{11}y(k) + A_{12}w(k) + B_1u(k) \\ w(k+1) &= A_{21}y(k) + A_{22}w(k) + B_2u(k) \end{aligned} \quad (3.160)$$

gdzie

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad (3.161)$$

Wymiar macierzy jest następujący:  $A_{11}$ :  $1 \times 1$ ,  $A_{12}$ :  $1 \times (n-1)$ ,  $A_{21}$ :  $(n-1) \times 1$ ,  $A_{22}$ :  $(n-1) \times (n-1)$ ,  $B_1$ :  $1 \times 1$ ,  $B_2$ :  $(n-1) \times 1$ . Mnożąc lewostronnie pierwsze z równań stanu przez wektor  $L$  o długości  $n-1$  i odejmując od drugiego równania otrzymuje się

$$w(k+1) = (A_{22} - LA_{12})w(k) + (A_{21} - LA_{11})y(k) + (B_2 - LB_1)u(k) + Ly(k+1) \quad (3.162)$$

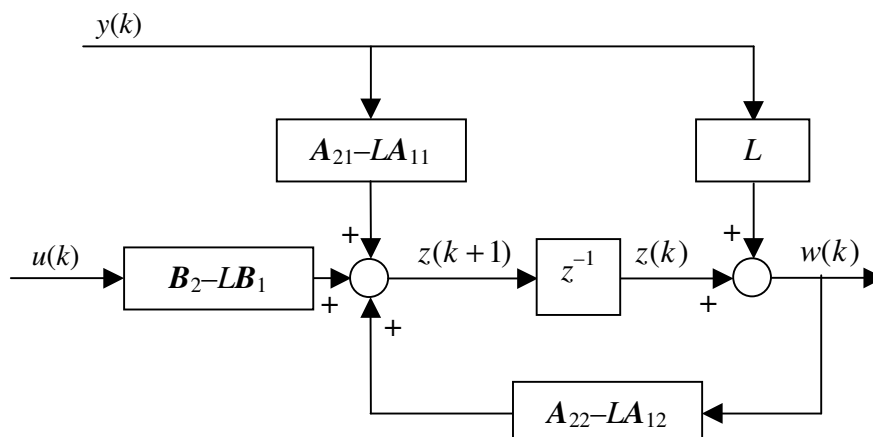
Aby uniknąć konieczności wykorzystania sygnału  $y(k+1)$  definiuje się dodatkowy stan

$$z(k) = w(k) - Ly(k) \quad (3.163)$$

Obserwator zredukowany dla stanu  $z(t)$  opisany jest więc równaniem

$$z(k+1) = (A_{22} - LA_{12})(z(k) + Ly(k)) + (A_{21} - LA_{11})y(k) + (B_2 - LB_1)u(k) \quad (3.164)$$

Strukturę obserwatora pokazano na rys. 3.23.



Rys. 3.23. Struktura dyskretnego obserwatora zredukowanego rzędu

Równanie charakterystyczne obserwatora zredukowanego rzędu ma postać

$$|zI - (A_{22} - LA_{12})| = 0 \quad (3.165)$$

Wektor  $L$  dobiera się w taki sposób, aby macierz  $A_{22} - LA_{12}$  miała z góry zadane stabilne wartości własne (leżące w okręgu jednostkowym), rzeczywiste lub zespolone parami sprzężone.

Wektor  $L$  oblicza się porównując współczynniki przy odpowiednich potęgach zmiennej  $z$  wielomianu charakterystycznego. Dla układów o wyższych rzędach warto skorzystać z programu Matlab. Szukaną wielkość  $L$  znajduje się następująco

$$L = \text{acker}(A_{22}', A_{12}', [z_{o2} \dots z_{on}])$$

### Zadanie

Dla obiektu

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -a_1 & 1 \\ -a_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.166)$$

gdzie  $b_0 = 0,25(\alpha + \beta - 2)$ ,  $b_1 = 0,25(\alpha + \beta - 2\alpha\beta)$ ,  $a_0 = \alpha\beta$ ,  $a_1 = -(\alpha + \beta)$ ,  $\alpha = e^T$ ,  $\beta = e^{-T}$ , zaprojektować obserwator zredukowany o biegunie  $z_o$ .

### Rozwiązanie

Macierz wyjścia ma postać  $[0 \ 1]$ , a więc nie jest konieczne dodatkowe przekształcenie zmiennych stanu. Mierzona jest pierwsza zmienna stanu (wyjście), zadaniem obserwatora jest odtworzenie wielkości  $x_2(k)$

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(k) \\ w(k) \end{bmatrix} \quad (3.167)$$

Niech

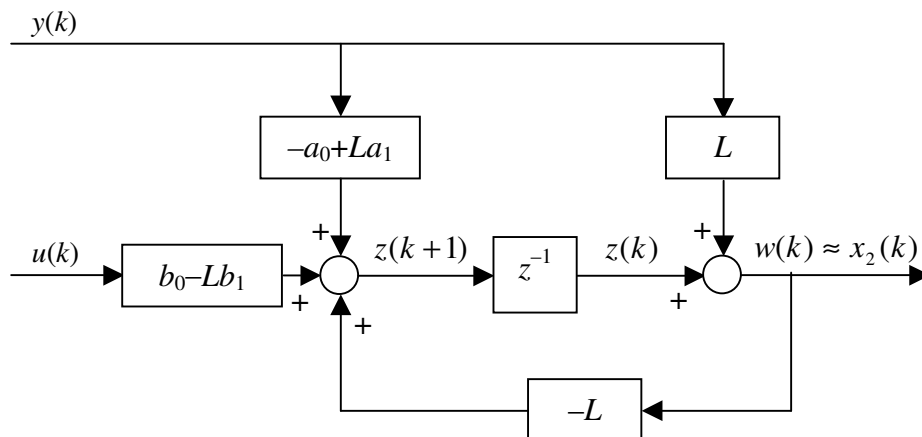
$$\begin{aligned} z(k) &= w(k) - Ly(k) \\ &= x_2(k) - Lx_1(k) \end{aligned} \quad (3.168)$$



Podstawiając  $A_{11}=-a_1$ ,  $A_{12}=1$ ,  $A_{21}=-a_0$ ,  $A_{22}=0$ ,  $B_1=b_1$ ,  $B_2=b_1$  otrzymuje się

$$z(k+1) = -L(z(k) + Ly(k)) + (-a_0 + La_1)y(k) + (b_0 - Lb_1)u(k) \quad (3.169)$$

Strukturę obserwatora pokazano na rys. 3.24.



Rys. 3.24. Struktura obserwatora zredukowanego rzędu odtwarzającego wartość  $x_2(k)$

Równanie charakterystyczne obserwatora zredukowanego rzędu ma postać

$$|zI - (A_{22} - LA_{12})| = |z + L| = 0 \quad (3.170)$$

Ponieważ projektowany obserwator ma mieć biegun równy  $z_o$ , czyli  $L = -z_o$ .

### Zadanie

Dla obiektu

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -a_1 & 1 \\ -a_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.171)$$

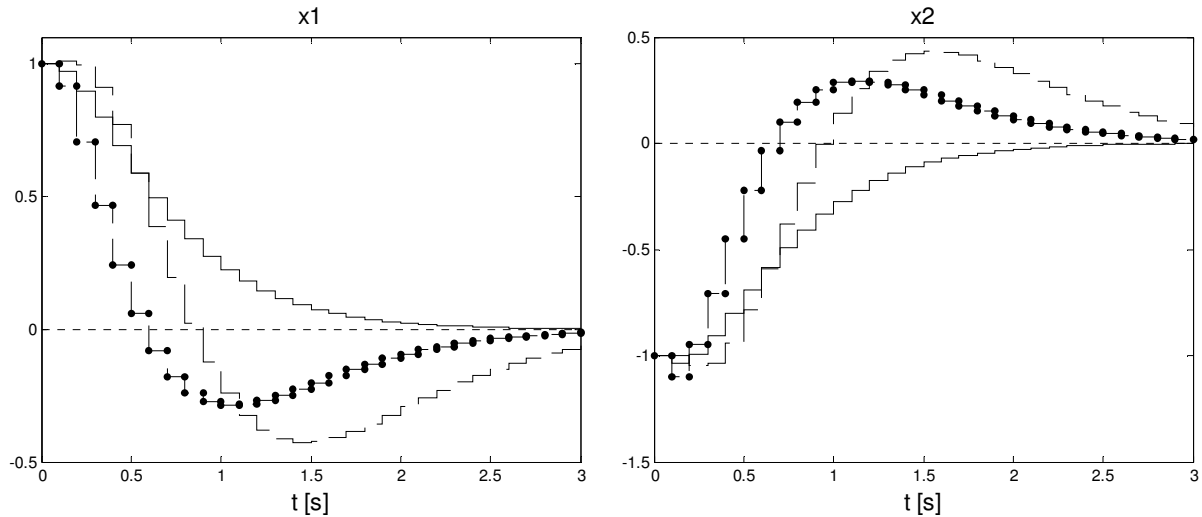
gdzie  $b_0=0,25(\alpha+\beta-2)$ ,  $b_1=0,25(\alpha+\beta-2\alpha\beta)$ ,  $a_0=\alpha\beta$ ,  $a_1=-(\alpha+\beta)$ ,  $\alpha=e^T$ ,  $\beta=e^{-T}$ , przeprowadzić symulacje układu regulacji z obserwatorem zredukowanego rzędu o biegunie  $z_o$ , przy czym a)  $z_o=0,75$ , b)  $z_o=0,1$ , stan estymowany wykorzystać w regulacji, stan początkowy procesu  $x(0)=[1 \ -1]^T$ , stan początkowy obserwatora  $\hat{x}_2(k)=0$ , przyjąć bieguny regulatora  $z_1=z_2=0,75$ , czemu odpowiada wektor sprzężeń zwrotnych  $K=[109,3978 \ 94,4356]$ .

### Rozwiązanie

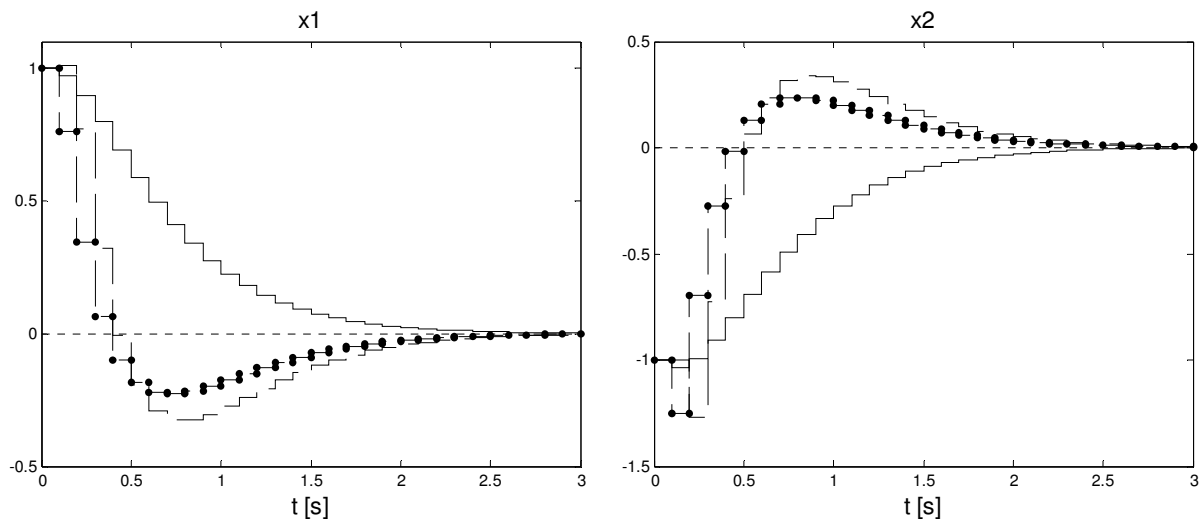
Na rys. 3.22 porównano trajektorie stanu uzyskane w trzech strukturach układu regulacji ze sprzężeniem zwrotnym. W pierwszym przypadku regulator korzysta ze stanu rzeczywistego (linia ciągła). W drugim przypadku zastosowano obserwator pełnego rzędu – regulator korzysta ze stanu estymowanego  $\hat{x}_1(k)$  oraz  $\hat{x}_2(k)$  (linia przerywana). W trzecim przypadku zastosowano obserwator zredukowany – regulator korzysta ze stanu rzeczywistego  $x_1(k)$  i estymowanego  $\hat{x}_2(k)$  (linia przerywana kropkowana). Biegun(y) obserwatora przyjęto jako a) 0,75, b) 0,1. Zgodnie z oczekiwaniami, zmniejszenie modułu biegunów obserwatora przyspiesza

zbieżność stanu procesu. Można zauważyć, analogicznie jak w przypadku ciągłym, że przebiegi uzyskane w układzie regulacji z obserwatorem zredukowanym są nieco lepsze niż w przypadku zastosowania obserwatora pełnego rzędu. Jest to spowodowane tym, że obserwator zredukowany korzysta z pomiaru pierwszej zmiennej stanu.

a)



b)



Rys. 3.25. Porównanie trajektorii stanu w układzie regulacji ze sprzężeniem zwrotnym: regulator korzysta ze stanu rzeczywistego (linia ciągła), estymowanego  $\hat{x}_1(k)$ ,  $\hat{x}_2(k)$  (linia przerywana), rzeczywistego  $x_1(k)$  i estymowanego  $\hat{x}_2(k)$  (linia przerywana kropkowana), bieżący  $y$  obserwatora: a) 0,75, b) 0,1

### 3.6.10. Wymuszanie zerowego uchybu ustalonego

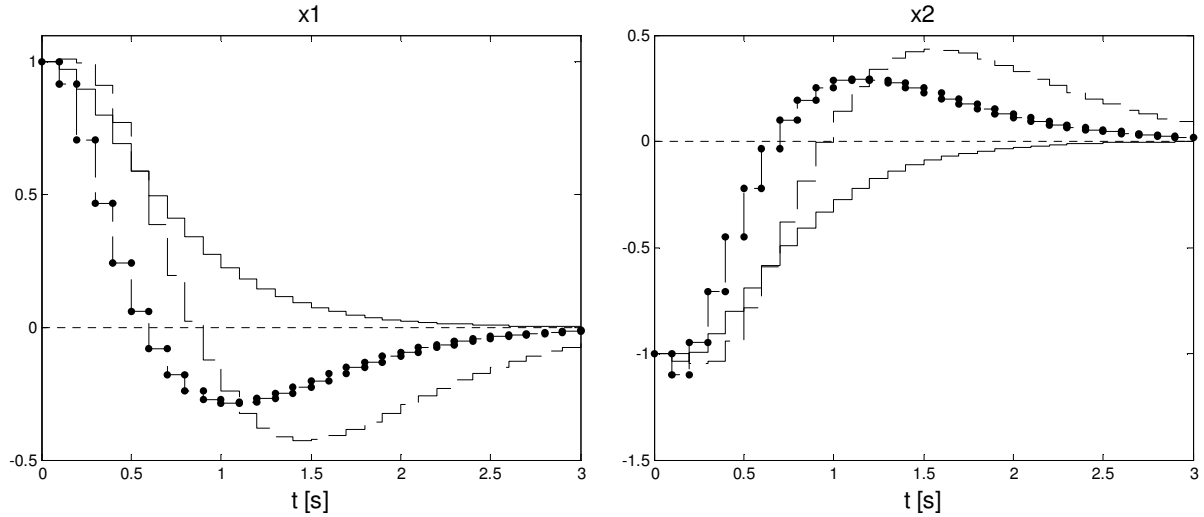
Analogicznie jak w przypadku układów ciągłych, dotychczas przedstawione układy regulacji warto uzupełnić o możliwość uwzględnienia niezerowej wartości zadanej i wprowadzić całkowanie, dzięki czemu wymuszony zostaje uchyb ustalony.

Niech  $v(k)$  będzie sygnałem zakłócającym. Równania stanu i wyjścia mają postać

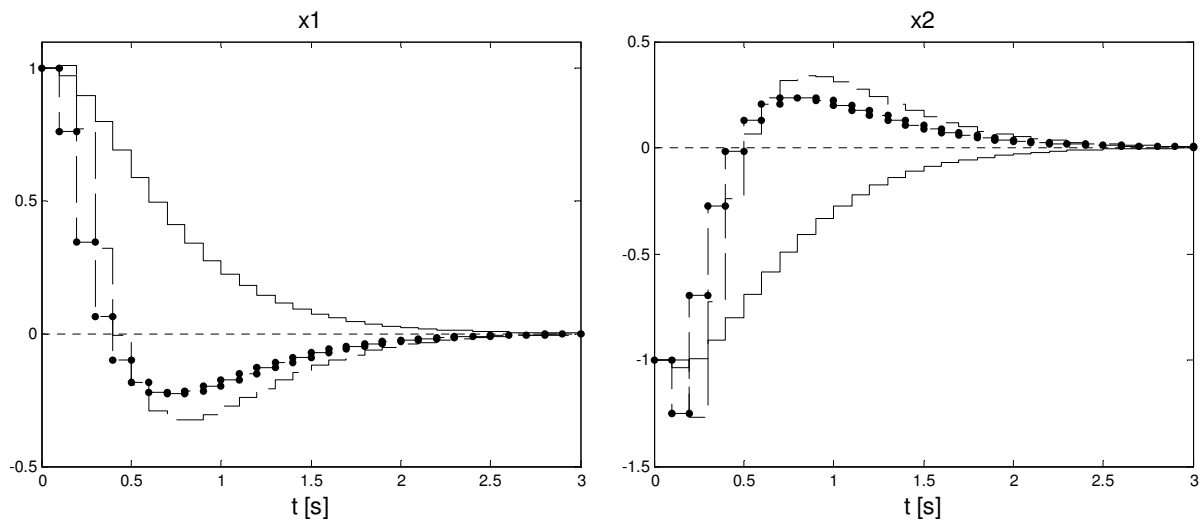
$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) + B_v v(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned} \quad (3.172)$$

zbieżność stanu procesu. Można zauważyć, analogicznie jak w przypadku ciągłym, że przebiegi uzyskane w układzie regulacji z obserwatorem zredukowanym są nieco lepsze niż w przypadku zastosowania obserwatora pełnego rzędu. Jest to spowodowane tym, że obserwator zredukowany korzysta z pomiaru pierwszej zmiennej stanu.

a)



b)



Rys. 3.25. Porównanie trajektorii stanu w układzie regulacji ze sprzężeniem zwrotnym: regulator korzysta ze stanu rzeczywistego (linia ciągła), estymowanego  $\hat{x}_1(k)$ ,  $\hat{x}_2(k)$  (linia przerywana), rzeczywistego  $x_1(k)$  i estymowanego  $\hat{x}_2(k)$  (linia przerywana kropkowana), bieżący(y) obserwatora: a) 0,75, b) 0,1

### 3.6.10. Wymuszanie zerowego uchybu ustalonego

Analogicznie jak w przypadku układów ciągłych, dotychczas przedstawione układy regulacji warto uzupełnić o możliwość uwzględnienia niezerowej wartości zadanej i wprowadzić całkowanie, dzięki czemu wymuszony zostaje uchyb ustalony.

Niech  $v(k)$  będzie sygnałem zakłócającym. Równania stanu i wyjścia mają postać

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) + B_v v(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned} \quad (3.172)$$

Niech  $e(k) = y(k) - y^{zad}(k)$  będzie różnicą między sygnałem wyjściowym a zadany. Definiuje się dodatkową zmienną stanu  $x_e(k)$

$$x_e(k+1) = e(k) = \mathbf{C}x(k) - y^{zad}(k) \quad (3.173)$$

czyli

$$x_e(k) = \sum e \quad (3.174)$$

Rozszerzone równanie stanu ma postać

$$\begin{bmatrix} x_e(k+1) \\ x(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{C} \\ 0 & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e(k) \\ x(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} u(k) - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} y^{zad}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{B}_v \end{bmatrix} v(k) \quad (3.175)$$

Prawo regulacji ma postać

$$u(k) = -\begin{bmatrix} K_e & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e(k) \\ x(k) \end{bmatrix} \quad (3.176)$$

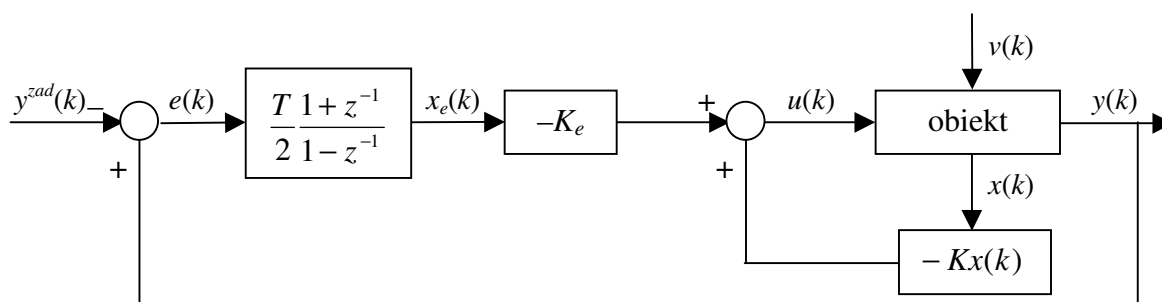
przy czym elementy wektora sprzężeń zwrotnych  $[K_e \ K]$  oblicza się w taki sposób, aby równanie charakterystyczne  $|z\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})| = 0$  miało zadane z góry pierwiastki. Można to zrobić porównując współczynniki odpowiednich wielomianów lub wykorzystać polecenie programu Matlab

`L=acker(Ar,Br, [ze zo1 ... zon])`

gdzie

$$\mathbf{A}_r = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{C} \\ 0 & \mathbf{A} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_r = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (3.177)$$

Struktura uzyskanego układu regulacji z całkowaniem pokazana została na rys. 3.26, przy czym zastosowano całkowanie metodą trapezów oraz pomiar stanu. Oczywiście, otrzymany układ regulacji może być również wykorzystany w sytuacji zastosowania obserwatora pełnego lub zredukowanego rzędu.



Rys. 3.26. Struktura układu regulacji z całkowaniem

**Zadanie**

Dla obiektu

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -a_1 & 1 \\ -a_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.178)$$

gdzie  $b_0=0,25(\alpha+\beta-2)$ ,  $b_1=0,25(\alpha+\beta-2\alpha\beta)$ ,  $a_0=\alpha\beta$ ,  $a_1=-(\alpha+\beta)$ ,  $\alpha=e^T$ ,  $\beta=e^{-T}$ , zaprojektować układ regulacji z całkowaniem. Przyjąć potrójny biegun  $z_0$ . Zakłócenie  $v(t)$  działa na wejście procesu. Przeprowadzić symulacje dla a)  $z_0=0,75$ , b)  $z_0=0,1$ , przyjmując zerowe warunki początkowe  $x_1(k)=x_2(k)=0$ .

**Rozwiązanie**

Ponieważ zakłócenie działa na wejście procesu, rozszerzone równanie stanu ma postać

$$\begin{bmatrix} x_e(k+1) \\ x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -a_1 & 1 \\ 0 & -a_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e(k) \\ x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} (u(t) + v(t)) - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} y^{zad}(t) \quad (3.179)$$

Równanie charakterystyczne układu zamkniętego

$$\begin{aligned} |z\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{BK})| &= \left| \begin{bmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -a_1 & 1 \\ 0 & -a_0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_e & k_1 & k_2 \end{bmatrix} \right| \\ &= \left| \begin{bmatrix} z & -1 & 0 \\ b_1 k_e & z + a_1 + b_1 k_1 & -1 + b_1 k_2 \\ b_0 k_e & a_0 + b_0 k_1 & z + b_0 k_2 \end{bmatrix} \right| \\ &= z^3 + (b_1 k_1 + a_1 + b_0 k_2) z^2 + (b_1 k_e + b_0 k_1 + a_1 b_0 k_2 + a_0 - b_1 k_2 a_0) z + b_0 k_e \end{aligned} \quad (3.180)$$

Żąda się, aby równanie charakterystyczne miało potrójny pierwiastek  $z_0$

$$(z - z_0)^3 = z^3 - 3z_0 z^2 + 3z_0^2 z - z_0^3 \quad (3.181)$$

Z porównania współczynników przy odpowiednich potęgach zmiennej  $s$  otrzymuje się

$$\begin{cases} k_1 = \frac{a_1^2 b_0 - a_1 b_1 a_0 + b_1 z_0^3 - a_0 b_0 + 3z_0^2 b_0 + 3z_0 a_1 b_0 - 3z_0 b_1 a_0}{-b_0^2 + a_1 b_0 b_1 - b_1^2 a_0} \\ k_2 = \frac{a_1 b_0^2 + 3b_0^2 z_0 + b_1^2 z_0^3 - b_1 a_0 b_0 + 3z_0^2 b_0 b_1}{b_0(-b_0^2 + a_1 b_0 b_1 - b_1^2 a_0)} \\ k_e = -\frac{z_0^3}{b_0} \end{cases} \quad (3.182)$$

Dla  $z_0=0,75$  otrzymuje się  $k_1=38,5711$ ,  $k_2=-134,4878$ ,  $k_e=-168,6094$ , dla  $z_0=0,1$  otrzymuje się  $k_1=416,4240$ ,  $k_2=267,0096$ ,  $k_e=-0,3997$ .

Prawo regulacji ma postać

$$u(k) = -[k_e \quad k_1 \quad k_2] \begin{bmatrix} x_e(k) \\ x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \quad (3.183)$$