

Типы в функциональном программировании

Косарев Дмитрий а.к.а. Kakadu

матмех СПбГУ

6 сентября 2018 г.

Вопрос к залу: что такое тип?

Вопрос к залу: что такое тип?

Ну, если x принадлежит типу T , то T определяет, какие значения может принимать x .

Тип T у x – это множество совокупность значений, которые могут быть у x .

Если $x :: T$, то тип T *населен* *иксом*.

Если $\nexists x$, таких что $x :: T$, то тип T *не населен*.

Синтаксис типов в Haskell (1/2)

Тип функции, действующей из аргумента типа A и возвращающей результат B , обозначается как $A \rightarrow B$.

Синтаксис типов в Haskell (1/2)

Тип функции, действующей из аргумента типа A и возвращающей результат B , обозначается как $A \rightarrow B$.

Функции, у которых n аргументов ($n > 1$) моделируются как функции возвращающие функцию от $n - 1$ аргументов. Например, $A \rightarrow (B \rightarrow C)$.

Синтаксис типов в Haskell (1/2)

Тип функции, действующей из аргумента типа A и возвращающей результат B , обозначается как $A \rightarrow B$.

Функции, у которых n аргументов ($n > 1$) моделируются как функции возвращающие функцию от $n - 1$ аргументов. Например, $A \rightarrow (B \rightarrow C)$.

Ассоциативность правая:

$$A \rightarrow (B \rightarrow C)$$

то же самое, что и

$$A \rightarrow B \rightarrow C$$

Синтаксис типов в Haskell (2/2)

Параметрический полиморфизм – когда один и тот же код, работает для разных типов (generics в Java/C#).

Синтаксис типов в Haskell (2/2)

Параметрический полиморфизм – когда один и тот же код, работает для разных типов (generics в Java/C#).

Ещё бывает *ad-hoc полиморфизм* – работает разный код для разных типов (overloading в C++). Но это потом.

Синтаксис типов в Haskell (2/2)

Параметрический полиморфизм – когда один и тот же код, работает для разных типов (generics в Java/C#).

Ещё бывает *ad-hoc полиморфизм* – работает разный код для разных типов (overloading в C++). Но это потом.

Типовые переменные в типах полиморфных функций пишутся с маленькой буквы. Например, $a \rightarrow b$ или $a \rightarrow b \rightarrow c$ или $a \rightarrow (a \rightarrow b) \rightarrow b$

Синтаксис типов в Haskell (2/2)

Параметрический полиморфизм – когда один и тот же код, работает для разных типов (generics в Java/C#).

Ещё бывает *ad-hoc полиморфизм* – работает разный код для разных типов (overloading в C++). Но это потом.

Типовые переменные в типах полиморфных функций пишутся с маленькой буквы. Например, $a \rightarrow b$ или $a \rightarrow b \rightarrow c$ или $a \rightarrow (a \rightarrow b) \rightarrow b$

Имена типов пишутся с заглавной буквы. Например, Int, String, Float.

Синтаксис типов в Haskell (2/2)

Параметрический полиморфизм – когда один и тот же код, работает для разных типов (generics в Java/C#).

Ещё бывает *ad-hoc полиморфизм* – работает разный код для разных типов (overloading в C++). Но это потом.

Типовые переменные в типах полиморфных функций пишутся с маленькой буквы. Например, $a \rightarrow b$ или $a \rightarrow b \rightarrow c$ или $a \rightarrow (a \rightarrow b) \rightarrow b$

Имена типов пишутся с заглавной буквы. Например, Int, String, Float.

Когда какое-то имя *типизируется как (имеет тип) T*, то это записывают так: $x :: T$.

Применение типов

Применение типов (type application): `List Int`, `List String`, `List a`, и т.д.

(Тут должна быть картинка)

Чем функции в программировании отличаются от математических?

Чем функции в программировании отличаются от математических?

- Аварийное завершение
- Отсутствие завершения

Примеры параметрического полиморфизма

```
Prelude> let id x = x  
Prelude> :t id  
id :: p -> p
```

Примеры параметрического полиморфизма

```
Prelude> let id x = x
```

```
Prelude> :t id
```

```
id :: p -> p
```

```
Prelude> :t (id :: String -> String)
```

```
(id :: String -> String) :: String -> String
```


Примеры параметрического полиморфизма

```
Prelude> let id x = x
```

```
Prelude> :t id
```

```
id :: p -> p
```

```
Prelude> :t (id :: String -> String)
```

```
(id :: String -> String) :: String -> String
```

```
Prelude> :t (id :: Int -> Int)
```

```
(id :: Int -> Int) :: Int -> Int
```

Примеры параметрического полиморфизма

```
Prelude> let id x = x
```

```
Prelude> :t id
```

```
id :: p -> p
```

```
Prelude> :t (id :: String -> String)
```

```
(id :: String -> String) :: String -> String
```

```
Prelude> :t (id :: Int -> Int)
```

```
(id :: Int -> Int) :: Int -> Int
```

? Каков *наиболее общий тип* для `id`?

Примеры типов

Тип, который не населен

```
Prelude> :i Data.Void.Void  
data Data.Void.Void -- Defined in 'Data.Void'
```

Тип, у которого только один житель

```
Prelude> :i ()  
data () = () -- Defined in 'GHC.Tuple'  
Prelude> :t ()  
() :: ()
```

Как ведет себя функция с типом

? `Void -> Int`

? `() -> Int`

? `a -> ()`

Как ведет себя функция с типом

? Void → Int

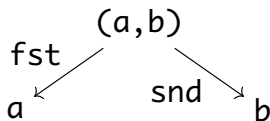
? () → Int

? a → ()

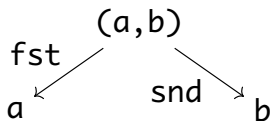
Ответ:

```
unit x = ()  
{- a лучше -}  
unit _ = ()
```

Тип пары (Декартово произведение)



Тип пары (Декартово произведение)



Определим проекции:

```
Prelude> let fst (x,_) = x
```

```
Prelude> :t fst
```

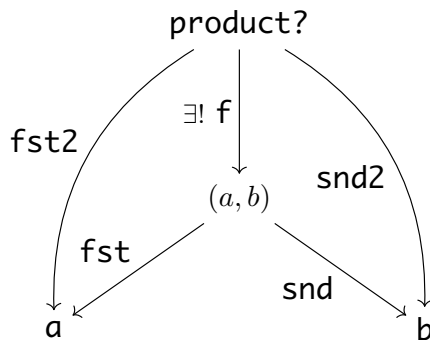
```
fst :: (a, b) -> a
```

```
Prelude> let snd (_,y) = y
```

```
Prelude> :t snd
```

```
snd :: (a, b) -> b
```

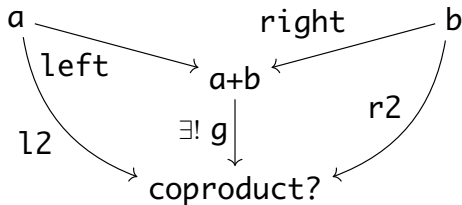
Произведение (product) – обобщение пары



$$\text{fst2} = \text{fst} \circ f$$

$$\text{snd2} = \text{snd} \circ f$$

Coproduct или Either или тип-сумма



$\text{l2} = g \cdot \text{left}$
 $\text{r2} = g \cdot \text{right}$

```
Prelude> :i Either
data Either a b = Left a | Right b
-- Defined in 'Data.Either'
```

Упражнения про произведение и сумму

- Придумайте (науглите) какой-нибудь тип, который похож на произведение? Реализуйте для него функцию f .
- Придумайте (науглите) какой-нибудь тип, который похож на копроизведение? Реализуйте для него функцию g .
- Кто населяет тип (Void, a) для произвольного типа a ?
- Кто населяет тип $((), a)$ для произвольного типа a ?
- Кто населяет тип $\text{Either Void } a$ для произвольного типа a ?
- Кто населяет тип $\text{Either } () a$ для произвольного типа a ?
- В некоторых упражнениях выше можно строить изоморфизм между двумя типами. Сообразите между какими и постройте там, где возможно.

Алгебраические типы данных (1/2)

Синтаксис

```
data TypeName arg1 arg2 ... argk =  
  | C1 t11 t12 ... t1n1  
  | C2 t21 t22 ... t2n2  
  | ...  
  | Cm tm1 tm2 ... tm nm
```

Примеры

- `data Bool = True | False`
- `data Status1 = On | Off`
- `data Maybe a = Just a | Nothing`
- `data Either a b = Left a | Right b`

Алгебраические типы данных (2/2)

? Что такое *связный список*?

Алгебраические типы данных (2/2)

- ? Что такое *связный список*?
- ? А что такое *список* вообще?

Алгебраические типы данных (2/2)

- ? Что такое *связный список*?
- ? А что такое *список* вообще?

Ещё примеры:

- `data [] a = [] | a : [a]`
- `data ListG a r = Nil | Cons a r`
- `data Fix f = Fix (f (Fix f))`

Упражнение: из типов `ListG` и `Fix` можно соорудить что-то похожее на стандартный список Haskell. Предъявите изоморфизм.

Формальные аксиомы

Distinctness: $C_j(x) \neq C_i(y)$, если $j \neq i$

Injectivity: $C_{ij}(x_1, \dots, x_{n_{ij}}) = C_{ij}(y_1, \dots, y_{n_{ij}}) \Rightarrow x_k = y_k$

Exhaustiveness: $x :: \text{ADT} \Rightarrow \exists i, n: x = C_i(y_1, \dots, y_n)$

Selection: $s_{ij}^k(C_{ij}(x_1, \dots, x_{n_{ij}})) = x$

Упражнение. Для типов, указанных выше, можно построить изоморфные к ним, используя только типы `()`, `Void`, `Either a b`, `(a,b)` (ну и ещё либо рекурсию, либо `Fix`). Попробуйте описать эти типы, предъявляя изоморфизм.

Как может работать функция со следующим типом?

? `[a] -> [a]`

? `[a] -> Bool`

? `(a -> b) -> [a] -> [b]`

? `(a -> a -> Bool) -> [a] -> [a]`

? `(a -> a -> Ordering) -> [a] -> [a]`, если

```
Prelude> :i Ordering
```

```
data Ordering = LT | EQ | GT
```

? `(a -> b -> a) -> a -> [b] -> a`

? `Maybe a -> Maybe b -> (a -> b -> c) -> Maybe c`