Типы в функциональном программировании

Косарев Дмитрий a.k.a. Kakadu

матмех СПбГУ

13 сентября 2018 г.

Вопрос к залу: что такое тип?

Вопрос к залу: что такое тип?

Ну, если x принадлежит типу T, то T определяет, какие значения может принимать x.

Тип T у x – это ~~множество~~ совокупность значений, которые могут быть у x.

Если x :: T, то тип T *населен* иксом.

Если $\nexists$ x, таких что x :: T, то тип T *не населен*.

Синтаксис типов в Haskell (1/2)

Тип функции, действующей из аргумента типа A и возвращающей результат B, обозначается как A->B.

Синтаксис типов в Haskell (1/2)

Тип функции, действующей из аргумента типа A и возвращающей результат B, обозначается как A->B.

Функции, у которых n аргументов ($n > 1$) моделируются как функции возвращающие функцию от $n - 1$ аргументов. Например, A->(B->C).

Синтаксис типов в Haskell (1/2)

Тип функции, действующей из аргумента типа `A` и возвращающей результат `B`, обозначается как `A->B`.

Функции, у которых n аргументов ($n > 1$) моделируются как функции возвращающие функцию от $n - 1$ аргументов. Например, `A->(B->C)`.

Ассоциативность правая:

```
A -> (B -> C)
```

то же самое, что и

```
A -> B -> C
```

Синтаксис типов в Haskell (2/2)

Параметрический полиморфизм – когда один и тот же код, работает для разных типов (generics в Java/C#).

Синтаксис типов в Haskell (2/2)

Параметрический полиморфизм – когда один и тот же код, работает для разных типов (generics в Java/C#).

Ещё бывает *ad-hoc полиморфизм* – работает разный код для разных типов (overloading в C++). Но это потом.

Синтаксис типов в Haskell (2/2)

Параметрический полиморфизм – когда один и тот же код, работает для разных типов (generics в Java/C#).

Ещё бывает *ad-hoc полиморфизм* – работает разный код для разных типов (overloading в C++). Но это потом.

Типовые переменные в типах полиморфных функций пишутся с маленькой буквы. Например, `a -> b` или `a -> b -> c` или `a -> (a -> b)-> b`

Синтаксис типов в Haskell (2/2)

Параметрический полиморфизм – когда один и тот же код, работает для разных типов (generics в Java/C#).

Ещё бывает *ad-hoc полиморфизм* – работает разный код для разных типов (overloading в C++). Но это потом.

Типовые переменные в типах полиморфных функций пишутся с маленькой буквы. Например, `a -> b` или `a -> b -> c` или `a -> (a -> b)-> b`

Имена типов пишутся с заглавной буквы. Например, `Int`, `String`, `Float`.

Синтаксис типов в Haskell (2/2)

Параметрический полиморфизм – когда один и тот же код, работает для разных типов (generics в Java/C#).

Ещё бывает *ad-hoc полиморфизм* – работает разный код для разных типов (overloading в C++). Но это потом.

Типовые переменные в типах полиморфных функций пишутся с маленькой буквы. Например, `a -> b` или `a -> b -> c` или `a -> (a -> b)-> b`

Имена типов пишутся с заглавной буквы. Например, `Int`, `String`, `Float`.

Когда какое-то имя *типизируется как*(*имеет тип*) `T`, то это записывают так: `x :: T`.

Применение типов

Применение типов(type application): `List Int`, `List String`, `List a`, и т.д.

(Тут должна быть картинка)

Чем функции в программировании отличаются от математических?

Чем функции в программировании отличаются от математических?

- Аварийное завершение
- Отсутствие завершения

Примеры параметрического полиморфизма

```
Prelude> let id x = x
Prelude> :t id
id :: p -> p
```

Примеры параметрического полиморфизма

```
Prelude> let id x = x
Prelude> :t id
id :: p -> p

Prelude> :t (id :: String -> String)
(id :: String -> String) :: String -> String
```

Примеры параметрического полиморфизма

```
Prelude> let id x = x
Prelude> :t id
id :: p -> p

Prelude> :t (id :: String -> String)
(id :: String -> String) :: String -> String

Prelude> :t (id :: Int -> Int)
(id :: Int -> Int) :: Int -> Int
```

Примеры параметрического полиморфизма

```
Prelude> let id x = x
Prelude> :t id
id :: p -> p

Prelude> :t (id :: String -> String)
(id :: String -> String) :: String -> String

Prelude> :t (id :: Int -> Int)
(id :: Int -> Int) :: Int -> Int
```

? Каков *наиболее общий тип* для `id`?

Примеры типов

Тип, который не населен

```
Prelude> :i Data.Void.Void
data Data.Void.Void -- Defined in 'Data.Void'
```

Тип, у которого только один житель

```
Prelude> :i ()
data () = () -- Defined in 'GHC.Tuple'
Prelude> :t ()
() :: ()
```

Как ведет себя функция с типом

? `Void -> Int`

? `()-> Int`

? `a -> ()`

Как ведет себя функция с типом

? `Void -> Int`

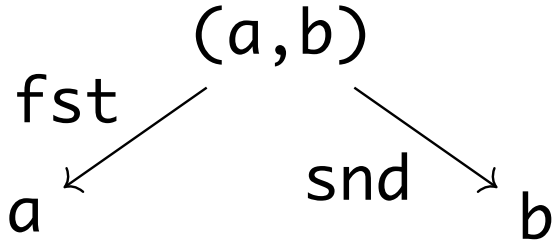
? `()-> Int`

? `a -> ()`

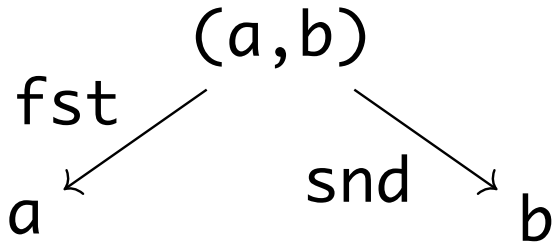
Ответ:

```
unit x = ()
{- а лучше -}
unit _ = ()
```

Тип пары (Декартово произведение)



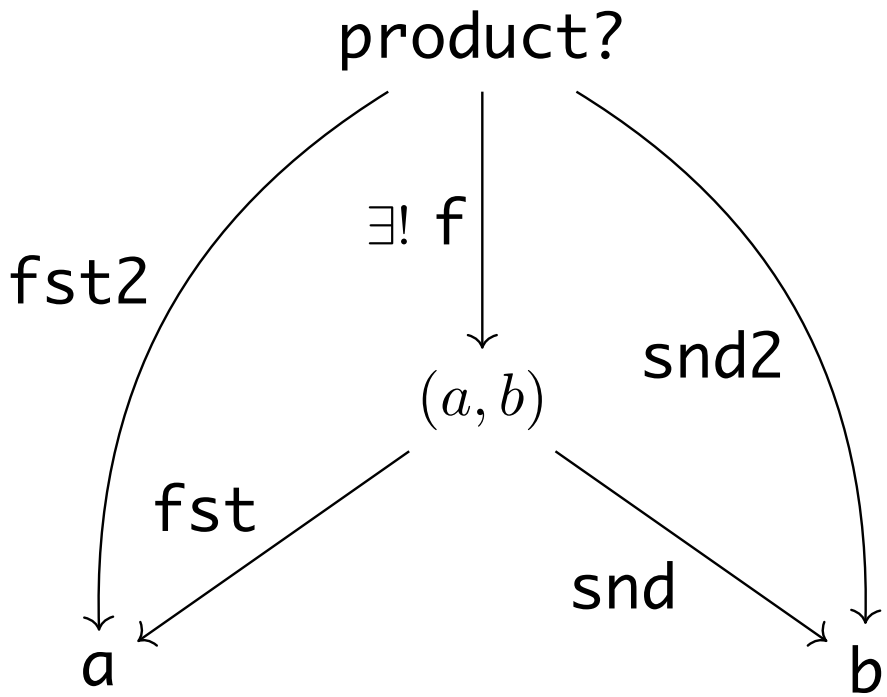
Тип пары (Декартово произведение)



Определим *проекции*:

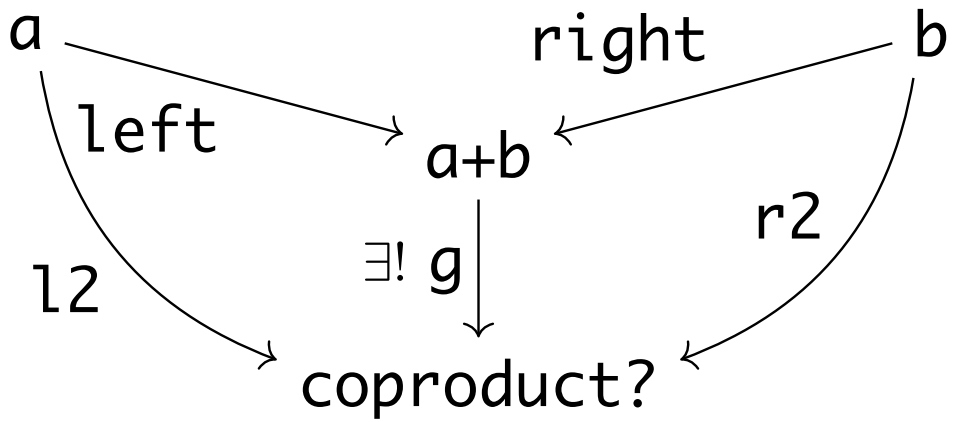
```
Prelude> let fst (x,_) = x
Prelude> :t fst
fst :: (a, b) -> a

Prelude> let snd (_,y) = y
Prelude> :t snd
snd :: (a, b) -> b
```

Произведение (product) – обобщение пары




```
fst2 = fst . f
snd2 = snd . f
```

Coproduct или Either или тип-сумма




```
l2 = g . left
r2 = g . right

Prelude> :i Either
data Either a b = Left a | Right b
-- Defined in 'Data.Either'
```

Упражнения про произведение и сумму

- Придумайте (нагуглите) какой-нибудь тип, который похож на произведение? Реализуйте для него функцию f.
- Придумайте (нагуглите) какой-нибудь тип, который похож на копроизведение? Реализуйте для него функцию g.
- Кто населяет тип `(Void, a)` для произвольного типа `a`?
- Кто населяет тип `((), a)` для произвольного типа `a`?
- Кто населяет тип `Either Void a` для произвольного типа `a`?
- Кто населяет тип `Either () a` для произвольного типа `a`?
- В некоторых упражнениях выше можно строить изоморфизм между двумя типами. Сообразите между какими и постройте там, где возможно.

Алгебраические типы данных (1/2)

Синтаксис

$$\begin{aligned}&\textbf{data}\ \text{TypeName}\ arg_1\ arg_2\ \ldots\ arg_k\ =\\ &\quad |\ C_1\ t_{11}\ t_{12}\ \ldots\ t_{1n_1}\\ &\quad |\ C_2\ t_{21}\ t_{22}\ \ldots\ t_{2n_2}\\ &\quad |\ \ldots\\ &\quad |\ C_m\ t_{m1}\ t_{m2}\ \ldots\ t_{mn_m}\end{aligned}$$

Примеры

- `data Bool = True | False`
- `data Status1 = On | Off`
- `data Maybe a = Just a | Nothing`
- `data Either a b = Left a | Right b`

Алгебраические типы данных (2/2)

? Что такое *связный список*?

Алгебраические типы данных (2/2)

? Что такое *связный список*?
? А что такое *список* вообще?

Алгебраические типы данных (2/2)

❓ Что такое *связный список*?
❓ А что такое *список* вообще?

Ещё примеры:

- `data [] a = [] | a : [a]`
- `data ListG a r = Nil | Cons a r`
- `data Fix f = Fix (f (Fix f))`

Упражнение: из типов `ListG` и `Fix` можно соорудить что-то похожее на стандартный список Haskell. Предъявите изоморфизм.

Формальные аксиомы

Distinctness: $C_j(x) \neq C_i(y)$, если $j \neq i$

Injectivity: $C_{ij}(x_1, ..., x_{n_{ij}}) = C_{ij}(y_1, ..., y_{n_{ij}}) \Rightarrow x_k = y_k$

Exhaustiveness: `x :: ADT` $\Rightarrow \exists i, n$: $x = C_i(y_1, ..., y_n)$

Selection: $s^k_{ij}(C_{ij}(x_1, ..., x_{n_{ij}}) = x$

Упражнение. Для типов, указанных выше, можно построить изоморфные к ним, используя только типы `()`, `Void`, `Either a b`, `(a,b)` (ну и ещё либо рекурсию, либо `Fix`). Попробуйте описать эти типы, предъявляя изоморфизм.

Как может работать функция со следующим типом?

- ? `[a] -> [a]`
- ? `[a] -> Bool`
- ? `(a -> b)-> [a] -> [b]`
- ? `(a -> a -> Bool)-> [a] -> [a]`
- ? `(a -> a -> Ordering)-> [a] -> [a]`, если

```
Prelude> :i Ordering
data Ordering = LT | EQ | GT
```

- ? `(a -> b -> a)-> a -> [b] -> a`
- ? `Maybe a -> Maybe b -> (a -> b -> c)-> Maybe c`