Talningarfræði

Bergur Snorrason

March 18, 2024

- Talningarfræði er sá angi strjállar stærðfræði sem fjallar um talningar á einhverjum fyrirbærum.
- Þegar við fjölluðum um tæmandi leit kom fram að fjöldi hlutmengja í n staka mengi er 2^n.
- Einnig kom fram að fjöldi umraðana á menginu $\{1, 2, ..., n\}$ er $n!$.
- Bæði eru þetta mikilvægar niðurstöður úr talningarfræði.
- Skerpum aðeins á grunnatriðum.

- Ef við erum með n hluti af einni gerð og m hluti af annari gerð þá getum við valið einn hlut af hvorri gerð á $n \cdot m$ vegu.
- Við þurfum í raun ekki meira en þetta.
- Við notuðum þessa reglu til að sanna niðurstöðurnar á glærunni á undan.
- Í talningarfræði er oft þægilegt að hugsa um endanleg mengi og fjöldatölur þeirra.
- Ef A er mengi þá táknar $|A|$ fjölda staka í A.
- Við getum þá umorðað efsta punktinn sem: Ef A og B eru mengi þá er $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

- Við vitum að það eru 2^n hlutmengi í n staka mengi, en hvað eru mörg hlutmengi af stærð k?
- Þegar við veljum fyrsta stakið höfum við um n stök að velja, síðan $n-1$ stak og svo framvegis.
- Við fáum því $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{k!}$ mengi.
- Hvert mengi er þó talið $(n-k)!$ sinnum, svo loka talan er

$$\frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

- Þessi tala er táknuð með $\binom{n}{k}$.

- Tökum eftir að $|A \cup B| \neq |A| + |B|$ því það gætu verið stök í bæði A og B.
- Ef svo er getum við einfaldlega fjarlægt þau stök sem eru tvítalin, og fáum

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

- Gerum nú ráð fyrir að

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{\substack{J \subset \{1,\ldots,n\} \\ J \neq \emptyset}} (-1)^{|J|-1} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right|.$$

- Þá fæst...

$$
\begin{aligned}
|A_1 \cup \ldots \cup A_{n+1}| &= |A_1 \cup \ldots \cup A_n| + |A_{n+1}| - |(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \cap A_{n+1}| \\
&= \sum_{\substack{J \subset \{1,\ldots,n\} \\ J \neq \emptyset}} (-1)^{|J|-1} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right| + |A_{n+1}| - |(A_1 \cap A_{n+1}) \cup \ldots \cup (A_n \cap A_{n+1})| \\
&= \sum_{\substack{J \subset \{1,\ldots,n\} \\ J \neq \emptyset}} (-1)^{|J|-1} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right| + |A_{n+1}| + \sum_{\substack{J \subset \{1,\ldots,n\} \\ J \neq \emptyset}} (-1)^{|J|} \left| \bigcap_{j \in J} (A_j \cap A_{n+1}) \right| \\
&= \sum_{\substack{J \subset \{1,\ldots,n\} \\ J \neq \emptyset}} (-1)^{|J|-1} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right| + |A_{n+1}| + \sum_{\substack{J \subset \{1,\ldots,n\} \\ J \neq \emptyset}} (-1)^{|J|} \left| \bigcap_{j \in J \cup \{n+1\}} A_j \right| \\
&= \sum_{\substack{J \subset \{1,\ldots,n\} \\ J \neq \emptyset}} (-1)^{|J|-1} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right| + \sum_{J \subset \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|J|} \left| \bigcap_{j \in J \cup \{n+1\}} A_j \right| \\
&= \sum_{\substack{J \subset \{1,\ldots,n+1\} \\ J \neq \emptyset \\ n+1 \notin J}} (-1)^{|J|-1} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right| + \sum_{\substack{J \subset \{1,\ldots,n+1\} \\ n+1 \in J}} (-1)^{|J|-1} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right| \\
&= \sum_{\substack{J \subset \{1,\ldots,n,n+1\} \\ J \neq \emptyset}} (-1)^{|J|-1} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right|
\end{aligned}
$$

- Við höfum því sýnt með þrepun að

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{\substack{J \subset \{1,\ldots,n\} \\ J \neq \emptyset}} (-1)^{|J|-1} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right|.$$

- Vera má að þessi jafna komi spánkst fyrir sjónir en í raun lýsir hún hvernig við fjarlægjum stök sem eru tvítekin, bætum aftur við stökum sem eru þrítekin, fjarlægjum aftur stök sem eru fjórtekin og svo framvegis.
- Þessi jafna er kölluð *lögmálið um fjöldatölu sammengja* (e. *Inclusion-Exclusion principle*).

- Sjáum nú hagnýtingu á þessari jöfnu.
- Munum að gagntæk vörpun $\sigma : \{1, 2, ...n\} \to \{1, 2, ..., n\}$ kallast *umröðun* (e. *permutation*).
- Ef við festum n þá höfum við sýnt að til séu $n!$ umraðanir.
- Næst segjum við að $k \in \{1, 2, ..., n\}$ sé *fastapunktur* σ (e. *fixed point of* σ) ef $\sigma(k) = k$.
- Með öðrum orðum hefur umröðunin ekki áhrif á þennan punkt.
- Hversu margar umraðanir hafa engan fastapunkt?

- Skoðum fyrst þegar $n = 4$:

1 2 3 4	2 1 4 3	3 1 2 4	4 1 2 3
1 2 4 3	2 1 3 4	3 1 4 2	4 1 3 2
1 3 2 4	2 3 1 4	3 2 1 4	4 2 1 3
1 3 4 2	2 3 4 1	3 2 4 1	4 2 3 1
1 4 2 3	2 4 1 3	3 4 1 2	4 3 1 2
1 4 3 2	2 4 3 1	3 4 2 1	4 3 2 1

- Skoðum fyrst þegar $n = 4$:

```
1 2 3 4          2 1 4 3          3 1 2 4          4 1 2 3
^ ^ ^ ^                                 ^

1 2 4 3          2 1 3 4          3 1 4 2          4 1 3 2
^ ^                    ^ ^                              ^

1 3 2 4          2 3 1 4          3 2 1 4          4 2 1 3
^     ^                ^            ^   ^            ^

1 3 4 2          2 3 4 1          3 2 4 1          4 2 3 1
^                                       ^                ^ ^

1 4 2 3          2 4 1 3          3 4 1 2          4 3 1 2
^

1 4 3 2          2 4 3 1          3 4 2 1          4 3 2 1
^   ^                ^
```

- Skoðum fyrst þegar $n = 4$:

2 1 4 3		4 1 2 3
	3 1 4 2	
2 3 4 1		
2 4 1 3	3 4 1 2	4 3 1 2
	3 4 2 1	4 3 2 1

- Við munum frekar telja hversu margar umraðanir hafa fastapunkt.
- Þetta er algengt að gera í talningarfræði.
- Látum nú A_j tákna mengi þeirra umraðana þar sem j er fastapunktur.
- Þá er $\bigcap_{j\in J} A_j$ mengi þeirra umraðana þar sem allir punktar J eru fastapunktar.
- Ef við festum k punkta í umröðuninni getum við raðað restinni á $(n-k)!$ marga vegu.
- Svo $\left|\bigcap_{j\in J} A\right| = (n-|J|)!$.
- Takið eftir að seinni stærðin er bara háð fjölda staka í menginu J.
- Við vitum einnig að fjöldi hlutmengja $\{1,\ldots,n\}$ með k stök er $\binom{n}{k}$.

- Við fáum loks að fjöldi umraðana með einhvern fastapunkt er

$$
\begin{aligned}
|A_1 \cup \ldots \cup A_n| &= \sum_{\substack{J \subset \{1,\ldots,n\} \\ J \neq \emptyset}} (-1)^{|J|-1} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right| \\
&= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \binom{n}{j} (n-j)! \\
&= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \frac{n!}{(n-j)!j!} (n-j)! \\
&= n! \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j+1}}{j!}.
\end{aligned}
$$

- Fjöldi umraðana með engan fastapunkt er því

$$
\begin{aligned}
n! - n! \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j+1}}{j!} &= n! \left(1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j}}{j!} \right) \\
&= n! \left(\frac{(-1)^{0}}{0!} + \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j}}{j!} \right) \\
&= n! \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^{j}}{j!}.
\end{aligned}
$$

- Algengt er að kalla þessa tölu $!n$.
- Takið eftir að $!n/n!$ er n-ta hlutsumma veldaraðar e^x, fyrir $x = -1$.
- Svo $!n/n!$ er að stefna á e^{-1}, þegar n stefnir á ∞.

- Oft er hentugt að geta reiknað

$$\binom{n}{k} \mod m.$$

  fyrir jákvæðar heiltölur $k \leq n < m$.

- Munið að

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

- Ein leið til að gera þetta er að finna fyrst margföldunarandhverfur $(n-k)!$ og $k!$ með tilliti til m.
- Við reiknum svo $n! \cdot ((n-k)!)^{-1} \cdot (k!)^{-1} \mod m$.
- Hér þarf að passa að margföldunarandhverfan sé til.
- Helst þarf m að vera frumtala.

```
26 ll f[MAXN], fm[MAXN];
27 ll prepare_nck(ll m)
28 {
29     ll i;
30     for (i = 0; i < MAXN; i++) f[i] = (i == 0 ? 1 : (f[i - 1]*i)%m);
31     for (i = 0; i < MAXN; i++) fm[i] = mulinv(f[i], m);
32 }
33
34 ll nck(ll n, ll k, ll m)
35 {
36     return (((f[n]*fm[n - k])%m)*fm[k])%m;
37 }
```

- Ef við erum með fast n og m og viljum reikna fyrir q mismunandi gildi á k þá er tímaflækjan á þessari að ferð $\mathcal{O}(n \log m + q)$.

- Önnur leið til að reikna $\binom{n}{k}$ mod m byggir á kvikri bestun.
- Sjáum fyrst að ef $n > 1$ og $1 < k < n$ þá

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!k!} \\
&= \frac{k(n-1)!}{(n-k)!k!} + \frac{(n-k)(n-1)!}{(n-k)!k!} \\
&= \frac{k(n-1)! + n(n-1)! - k(n-1)!}{(n-k)!k!} \\
&= \frac{n(n-1)!}{(n-k)!k!} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!k!} \\
&= \binom{n}{k}.
\end{aligned}$$

- Látum því

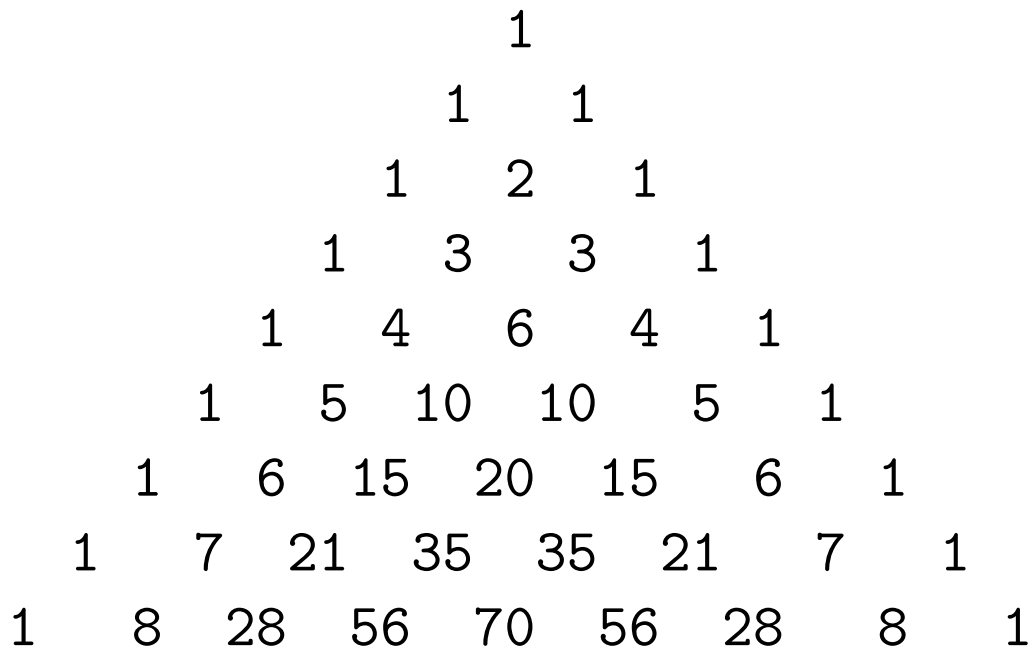
$$f(n,k) = \begin{cases} 0, & \text{ef } n < 1 \\ 0, & \text{ef } k < 0 \\ 0, & \text{ef } k > n \\ 1, & \text{ef } k = 0 \text{ eða } k = n \\ f(n-1,k-1) + f(n-1,k) & \text{annars.} \end{cases}$$

- Við höfum svo að $f(n,k) = \binom{n}{k}$.
- Útfærslan notar ofansækna kvika bestun.

```
5  ll d[MAXN][MAXN], m;
6  ll dp_lookup(ll x, ll y)
7  {
8      if (x < 0 || y < 0 || y > x) return 0;
9      if (d[x][y] != -1) return d[x][y];
10     if (y == 0 || y == x) return 1;
11     return d[x][y] = (dp_lookup(x - 1, y - 1) + dp_lookup(x - 1, y))%m;
12 }
```

- Sjáum að það eru n^2 stöður.
- Við reiknum hverja stöðu í $\mathcal{O}(1)$ tíma, svo við getum svarað q fyrirspurnum í $\mathcal{O}(n^2 + q)$ tíma.
- Það sem forritið okkar er í rauninni að gera er að reikna gildin í þríhyrningin Pascals.
- Þekkt er að k-ta talan í n-tu línu þríhyrnings Pascals er $\binom{n}{k}$.

Þríhyrningur Pascals



Fjöldi umhverfinga í umröðun

- Látum σ vera umröðun á $\{1, ..., n\}$.
- Þá kallast heiltölupar (i, j) þannig að $1 \leq i < j \leq n$ og $\sigma(i) > \sigma(j)$, *umhverfing* (e. *inversion*) í σ.
- Látum `a` tákna n staka lista þannig að j-ta stak listans sé $\sigma(j)$.
- Svona táknum við iðulega umraðanir þegar við útfærum þær í tölvu.
- Gerum nú ráð fyrir að eina leiðin okkar til að breyta `a` er að skipta á aðlægum stökum.
- Hvað tekur það minnst margar aðgerðir að raða listanum?
- Það vill svo til að fjöldi umhverfinga í umröðununni er einmitt fjöldi aðgerða sem þarf til að raða listanum.
- Við getum notað okkur þetta til að finna fjölda umhverfinga.

- Ein leið til að gera þetta er að færa fyrst minnsta stakið fremst, síðan næst minnsta stakið næst fremst og svo framvegis.
- Þetta tekur $\mathcal{O}(n^2)$ tíma.
- Þetta er því of hægt ef $n > 10^4$.
- Við getum þó notað biltré til að gera þetta hraðara.
- Tökum eftir að þegar við höfum sett stak á sinn stað getum við hætt að hugsa um það.
- Við þurfum í raun að geta sagt til um hversu mörg stök í listanum eru fyrir framan það stak sem við viljum færa (við teljum ekki þau stök sem eru komin á sinn stað).
- Við byrjum því með 1 í hverju staki í biltrénu okkar.
- Þegar við höfum fært stak á sinn stað setjum við tilheyrandi gildi sem 0.
- Summa fyrstu $j - 1$ stakanna í trénu er því fjöldi staka sem j-ta stakið í listanum þarf að sipta á til að komast á sinn stað.

Hæga aðferðin

```
4 1 6 5 7 3 2

Svar:  0
```

Hæga aðferðin

```
4 1 6 5 7 3 2
  ^

Svar:  0
```

Hæga aðferðin

```
1 4 6 5 7 3 2
^

Svar:  1
```

Hæga aðferðin

```
1 4 6 5 7 3 2
            ^

Svar:  1
```

Hæga aðferðin

```
1 4 6 5 7 2 3
          ^

Svar:  2
```

Hæga aðferðin

```
1 4 6 5 2 7 3
        ^

Svar:  3
```

Hæga aðferðin

```
1 4 6 2 5 7 3
      ^

Svar:  4
```

Hæga aðferðin

```
1 4 2 6 5 7 3
    ^

Svar:  5
```

Hæga aðferðin

```
1 2 4 6 5 7 3
  ^

Svar:  6
```

Hæga aðferðin

```
1 2 4 6 5 7 3
            ^

Svar:  6
```

Hæga aðferðin

```
1 2 4 6 5 3 7
          ^

Svar:  7
```

Hæga aðferðin

```
1 2 4 6 3 5 7
        ^

Svar:  8
```

Hæga aðferðin

```
1 2 4 3 6 5 7
      ^

Svar:  9
```

Hæga aðferðin

```
1 2 3 4 6 5 7
      ^

Svar: 10
```

Hæga aðferðin

```
1 2 3 4 6 5 7
      ^

Svar: 10
```

Hæga aðferðin

```
1 2 3 4 6 5 7
          ^

Svar: 10
```

Hæga aðferðin

```
1 2 3 4 5 6 7
        ^

Svar: 11
```

Hæga aðferðin

```
1 2 3 4 5 6 7
          ^

Svar: 11
```

Hæga aðferðin

```
1 2 3 4 5 6 7
              ^

Svar: 11
```

Hæga aðferðin

```
1 2 3 4 5 6 7

Svar: 11
```

Hraða aðferðin

```
Listinn: 4 1 6 5 7 3 2

Biltréð: 1 1 1 1 1 1 1

        Svar:  0
```

Hraða aðferðin

```
Listinn: 4 1 6 5 7 3 2
           ^
Biltréð: 1 1 1 1 1 1 1

         Svar:  0
```

Hraða aðferðin

```
Listinn: 4 1 6 5 7 3 2
            ^
Biltréð: 1 1 1 1 1 1 1
         | |
          Svar:  0
```

Hraða aðferðin

```
Listinn: 4 x 6 5 7 3 2

Biltréð: 1 0 1 1 1 1 1

        Svar:  1
```

Hraða aðferðin

```
Listinn: 4 x 6 5 7 3 2
                     ^
Biltréð: 1 0 1 1 1 1 1

         Svar:  1
```

Hraða aðferðin

```
Listinn: 4 x 6 5 7 3 2
                     ^

Biltréð: 1 0 1 1 1 1 1
         |           |
          Svar:  1
```

Hraða aðferðin

```
Listinn: 4 x 6 5 7 3 x

Biltréð: 1 0 1 1 1 1 0

        Svar:  6
```

Hraða aðferðin

```
Listinn: 4 x 6 5 7 3 x
                   ^
Biltréð: 1 0 1 1 1 1 0

         Svar:  6
```

Hraða aðferðin

```
Listinn: 4 x 6 5 7 3 x
                    ^

Biltréð: 1 0 1 1 1 1 0
         |         |
          Svar:  6
```

Hraða aðferðin

```
Listinn: 4 x 6 5 7 x x

Biltréð: 1 0 1 1 1 0 0

        Svar: 10
```

Hraða aðferðin

```
Listinn: 4 x 6 5 7 x x
         ^
Biltréð: 1 0 1 1 1 0 0

         Svar: 10
```

Hraða aðferðin

```
Listinn: 4 x 6 5 7 x x
          ^
Biltréð: 1 0 1 1 1 0 0
         |
          Svar: 10
```

Hraða aðferðin

```
Listinn: x x 6 5 7 x x

Biltréð: 0 0 1 1 1 0 0

        Svar: 10
```

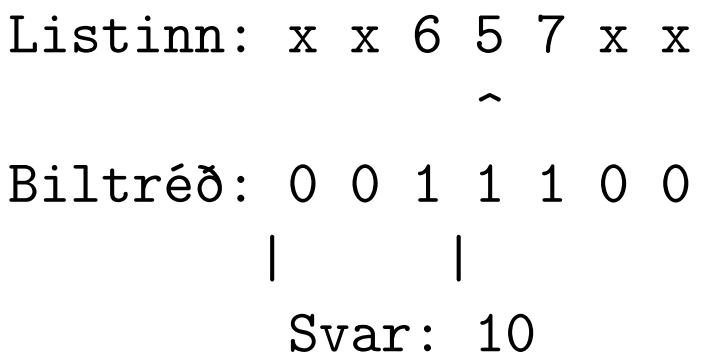
Hraða aðferðin

```
Listinn: x x 6 5 7 x x
                 ^

Biltréð: 0 0 1 1 1 0 0

        Svar: 10
```

Hraða aðferðin



Hraða aðferðin

```
Listinn: x x 6 x 7 x x

Biltréð: 0 0 1 0 1 0 0

        Svar: 11
```

Hraða aðferðin

```
Listinn: x x 6 x 7 x x
             ^
Biltréð: 0 0 1 0 1 0 0

        Svar: 11
```

Hraða aðferðin

```
Listinn: x x 6 x 7 x x
                ^
Biltréð: 0 0 1 0 1 0 0
         |   |
          Svar: 11
```

Hraða aðferðin

```
Listinn: x x x x 7 x x

Biltréð: 0 0 0 0 1 0 0

        Svar: 11
```

Hraða aðferðin

```
Listinn: x x x x 7 x x
                 ^

Biltréð: 0 0 0 0 1 0 0

        Svar: 11
```

Hraða aðferðin

```
Listinn: x x x x 7 x x
                 ^

Biltréð: 0 0 0 0 1 0 0
         |       |
          Svar: 11
```

Hraða aðferðin

```
Listinn: x x x x x x x

Biltréð: 0 0 0 0 0 0 0

        Svar: 11
```

- Hvað gerum við þó ef tölurnar sem eru gefnar eru ekki í $\{1, 2, ..., n\}$ (líkt og í dæminu *Ultra-QuickSort*)?
- Þá virkar oft að skipta minnstu tölunni út fyrir 1, næst minnstu fyrir 2 og svo framvegis.
- Ef það eru endurtekningar þarf að passa að öllum eins tölum sé breytt í eins tölur.
- Þetta má gera með því að raða.
- Við röðum fyrst tvenndunum (a_j, j), þar sem a_j táknar j-ta stakið í listanum okkar, eftir fyrsta stakinu.
- Við getum þá labbað í gegn og breytt öllum tölunum.
- Að lokum röðum tvenndunum aftur eftir seinna stakinu.

```
33 typedef struct {ll x, y;} ii;
34 int cmpx(const void* p1, const void* p2)
35 {
36     if (((ii*)p1)->x == ((ii*)p2)->x) return ((ii*)p1)->y - ((ii*)p2)->y;
37     return ((ii*)p1)->x - ((ii*)p2)->x;
38 }
39
40 void compress(ll* a, ll n)
41 {
42     ii b[n];
43     for (ll i = 0; i < n; i++) b[i].x = a[i], b[i].y = i;
44     qsort(b, n, sizeof(b[0]), cmpx);
45     for (ll i = 0; i < n; i++) a[b[i].y] = i;
46 }
47
48 long long teljum_umhverfingar(ll* a, ll n)
49 {
50     ll p[5*n], b[n], i; long long r = 0;
51     compress(a, n);
52     st_init(p, n);
53     for (i = 0; i < n; i++) st_update(p, i, 1);
54     for (i = 0; i < n; i++) b[a[i]] = i;
55     for (i = 0; i < n; i++)
56         r += b[i] != 0 ? st_query(p, 0, b[i] - 1) : 0, st_update(p, b[i], 0);
57     return r;
58 }
```

- Það tekur $\mathcal{O}(n \log n)$ tíma að smækka tölurnar.
- Hver aðgerð á biltrénu er framkvæmd í $\mathcal{O}(\log n)$ tíma.
- Við finnum því fjölda umhverfinga í $\mathcal{O}(n \log n)$ tíma.
- Svo við getum auðveldlega fundið fjölda umhverfinga fyrir $n < 10^6$.
- Takið þó eftir að fjöldinn gæti orðið $n \cdot (n-1)/2$, svo það þarf alltaf að nota `long long`.

- Önnur leið til að telja umhverfingar er að deila og drottna.
- Við getum raðað tölunum með `mergesort` og talið í leiðinni hvað við þurfum að færa tölurnar um mörg sæti.
- Þegar við erum að sameina erum við með tvo raðaða lista.
- Við fjarlægjum síðan minnsta stakið sem er í listunum.
- Ef við fjarlægjum stak úr vinstri listanum færist það um ekkert sæti.
- Ef við fjarlægjum stak úr hægri listanum færist það um eitt sæti fyrir hvert stak sem er eftir í vinstri listanum.
- Við getum útfærst þetta neðansækið og ofansækið.

```
 5 ll merge(ll* a, ll *b, ll l, ll m, ll r)
 6 {
 7     ll i = l, j = m, c = i, z = 0;
 8     while (i < m || j < r)
 9         if (i == m || (j < r && a[j] < a[i])) z += m - i, b[c++] = a[j++];
10         else b[c++] = a[i++];
11     for (i = l; i < r; i++) a[i] = b[i];
12     return z;
13 }
14
15 ll mergesort(ll* a, ll *b, ll l, ll r)
16 {
17     if (r - l < 2) return 0;
18     ll m = (l + r)/2, z = mergesort(a, b, l, m) + mergesort(a, b, m, r);
19     return z + merge(a, b, l, m, r);
20 }
21
22 ll teljum_umhverfingar(ll* a, ll n)
23 {
24     ll b[n];
25     return mergesort(a, b, 0, n);
26 }
```

```
 6 ll teljum_umhverfingar(ll* a, ll n)
 7 {
 8     ll t = 0, z = 0, i, j, c, e, l, m, r, b[2][n];
 9     for (i = 0; i < n; i++) b[t][i] = a[i];
10     for (e = 1; e < n; e *= 2, t = 1 - t) for (l = 0; l < n; l += 2*e)
11     {
12         i = c = l, j = m = min(l + e, n), r = min(l + 2*e, n);
13         while (i < m || j < r)
14             if (i == m || (j < r && b[t][j] < b[t][i]))
15                 z += m - i, b[1 - t][c++] = b[t][j++];
16             else b[1 - t][c++] = b[t][i++];
17     }
18     return z;
19 }
```

- Bæði reikniritin hafa sömu tímaflækju og `mergesort`, það er að segja $\mathcal{O}(n \log n)$.

- Mörg talningarfræði dæmi má smækka á þægilegan máta.
- Ef við látum, til dæmis, $f(n)$ tákna fjölda hlutmengja í mengin $\{1, 2, ..., n\}$ þá höfum við að

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{ef } n = 0 \\ 2 \cdot f(n-1), & \text{annars.} \end{cases}$$

- Þetta gildir því það eru $f(n-1)$ hlutmengi sem innihalda n og $f(n-1)$ hlutmengi sem innihalda ekki n.
- Ef við getum smækkað dæmin á þennan máta má svo nota kvika bestun til að leysa þau.
- Oft þarf að bæta við vídd til að halda utan um önnur gögn.
- Tökum dæmi.

- Gerum ráð fyrir að þú sért með n spilastokka.
- Hver stokkur inniheldur k spil, númeruð frá 1 og upp í k.
- Á hversu marga vegu getur þú valið eitt spil úr hverjum stokk þannig að summa spilanna sé nákvæmlega m?
- Þar sem þessi tala getur verið mjög stór svo reikna skal hana mod $10^9 + 7$.

- Festum fyrsta spilið sem x.
- Við eigum þá eftir $n-1$ stokk og viljum fá summuna $m-x$ úr þeim.
- Með öðrum orðum höfum við smækkað dæmið.
- Við skilgreinum því

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{ef } n = 0 \text{ og } y = 0 \\ 0, & \text{ef } n = 0 \text{ og } y \neq 0 \\ \sum_{j=1}^{k} f(x-1, y-j), & \text{annars.} \end{cases}$$

- Nú gildir að $f(x,y)$ er fjöldi leiða til að fá summuna y með x stokkum.
- Við getum svo útfært þetta eins of við höfum verið að útfæra kvikva bestun.

```
 6 ll dp_lookup(ll x, ll y)
 7 {
 8     if (y < 0) return 0;
 9     if (d[x][y] != -1) return d[x][y];
10     if (x == 0) return y == 0 ? 1 : 0;
11     d[x][y] = 0;
12     for (ll i = 0; i < k; i++)
13         d[x][y] = (d[x][y] + dp_lookup(x - 1, y - i - 1))%MOD;
14     return d[x][y];
15 }
```

- Við höfum $n \cdot m$ stöður og hverja stöðu má reikna í $\mathcal{O}(\, k \,)$ tíma.
- Svo tímaflækjan er $\mathcal{O}(n \cdot m \cdot k)$.
- Nú getur m ekki verið stærra en $n \cdot k$ svo við fáum $\mathcal{O}(n^2 \cdot k^2)$.

Flykjaaðgerðir

- Í stærðfræði þýðir „fylki" annað en í tölvunarfræði.
- Í stærðfræði er *fylki* (e. *matrix*) tvívíð uppröðun á tölum.
- Fylkið er sagt vera $n \times m$ ef það hefur n línur og m dálka.
- Dæmi um 2×3 fylki er

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 14 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Við táknum yfirleitt stakið í línu j og dálki k í fylki A með A_{jk}.
- Flyki í stærfræði er því eins og tvívítt fylki í tölvunarfærði.

- Þegar við viljum geyma stærðfræði fylki í tölvu notum við oftast tvívítt tölvunarfræði fylki.
- Við höfum þá að A_{jk} svarar til `a[j][k]`.
- Ef A er $n \times m$ fylki getum við líka geymt það með einvíðu tölvunarfræði fylki með samsvöruninni A_{jk} við `a[j*m + k]`.

- Við getum lagt saman fylki af sömu stærð stakvíst, það er að segja $(A+B)_{jk} = A_{jk} + B_{jk}$.
- Frádráttur virkar eins.
- Við margföldum saman fylki af stærð $n \times m$ og $m \times r$ með

$$(A \cdot B)_{jk} = \sum_{l=1}^{m} A_{jl} \cdot B_{lk}.$$

- Oftast erum við að vinna með fylki sem eru af stærð $n \times n$.
- Slík fylki kallast *ferningsfylki*.
- Takið eftir að ferningsfylkið I, gefið með $I_{jk} = 0$ ef $j \neq k$ og $I_{jk} = 1$ annars, er margföldunarhlutleysa.

```
 4 void addto(int* a, int* b, int n)
 5 { // a += b
 6     int i, j;
 7     for (i = 0; i < n; i++) for (j = 0; j < n; j++) a[i*n + j] += b[i*n + j];
 8 }
 9
10 void subfrom(int* a, int* b, int n)
11 { // a -= b
12     int i, j;
13     for (i = 0; i < n; i++) for (j = 0; j < n; j++) a[i*n + j] -= b[i*n + j];
14 }
15
16 void multo(int* a, int* b, int n)
17 { // a *= b
18     int i, j, k, c[n][n];
19     for (i = 0; i < n; i++) for (j = 0; j < n; j++) c[i][j] = 0;
20     for (i = 0; i < n; i++) for (j = 0; j < n; j++) for (k = 0; k < n; k++)
21         c[i][j] += a[i*n + k]*b[k*n + j];
22     for (i = 0; i < n; i++) for (j = 0; j < n; j++) a[i*n + j] = c[i][j];
23 }
```

- Takið eftir að `multo(...)` hefur tímaflækju $\mathcal{O}(n^3)$.
- Ef A er $n \times n$ ferningsfylki getum við reinkað A^p.
- Með því að nota deila og drottna aðferð, líkt og við gerðum í síðustu viku, getum við reiknað A^p í $\mathcal{O}(n^3 \log p)$ tíma.
- Þetta má nýta mikið í talningarfræði.
- Tökum dæmi.

- Látum $G = (V, E)$ vera net og A vera nágrannflyki G.
- Við munum nú leyfa netinu að hafa fleiri en einn veg á milli tveggja hnúta.
- Þá segir A_{uv} hversu margir vegir liggja frá hnúta u til hnúts v.
- Sýna má með þrepuna að $(A^p)_{uv}$ segir okkur þá hversu margir vegir liggja á milli hnúts u og hnúts v, sem eru af lengd nákvæmlega p.
- Takið eftir að við getum leyst þetta dæmi fyrir mjög stór p.
- Til dæmis væri lausnin okkar leifturhröð fyrir $n = 50$ og $p = 10^{18}$.

Úrvinnsla línulegra rakningarvensl

- Runa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kallast *k-ta stigs línulega rakningarvensl* ef til eru $c_1, \ldots, c_k$ þannig að

$$a_n = \sum_{j=1}^{k} c_j \cdot a_{n-j},$$

  fyrir öll n þannig að $n - k \in \mathbb{N}$.
- Munið, til dæmis, að Fiboncci tölurnar eru gefnar með línulegu rakningarvenslunum þar sem $a_1 = a_2 = c_1 = c_2 = 1$.
- Látum k-ta stigs línuleg rakningarvensl vera gefnin, líkt og að ofan.

- Skilgreinum nú flykið

$$M = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{k-1} & c_k \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Takið eftir að

$$M \cdot \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ \vdots \\ a_{n-k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{k} c_j \cdot a_{n-j} \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ \vdots \\ a_{n-k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ \vdots \\ a_{n-k+1} \end{pmatrix}.$$

- Svo við getum notað fylkið M til að fá næstu tölu í rakningarvenslunum.

- Við þurfum þó ekki að hætta þar.
- Við getum notað M^p til að fá a_{k+p}.
- Þetta getum við reinkað í $\mathcal{O}(k^3 \log p)$ tíma.
- Við getum, til dæmis, notað þetta til að reikna n-tu Fibonacci töluna í $\mathcal{O}(\log n)$ tíma.
- Það er meira en nógu hratt fyrir $n < 10^{18}$.

```
14 void matpow(ll* a, ll p, ll n)
15 { // a = a^p
16     ll r[n][n], i, j;
17     for (i = 0; i < n; i++) for (j = 0; j < n; j++) r[i][j] = 0;
18     for (i = 0; i < n; i++) r[i][i] = 1;
19     while (p > 0)
20     {
21         if (p%2 == 1) multo(*r, a, n);
22         p /= 2;
23         multo(a, a, n);
24     }
25     for (i = 0; i < n; i++) for (j = 0; j < n; j++) a[i*n + j] = r[i][j];
26 }
27
28 int fib(ll n)
29 {
30     ll a[2][2] = {{1, 1}, {1, 0}};
31     if (n == 1 || n == 2) return 1;
32     matpow(*a, n - 2, 2);
33     return (a[0][0] + a[0][1])%MOD;
34 }
```

- Í dæmum sem beita má þessari aðferð er oft erfitt að finna rakningarvenslin (þegar þau eru ekki gefin beint).
- Þá má nota netafræðina í staðinn.
- Tökum dæmi.

- Þú vilt leggja flísar á ganginn þinn þannig að hver flís er annað hvort svört eða hvít, og engar tvær aðliggjandi flísar mega vera hvítar.
- Gerum ráð fyrir að gangurinn sé þrjár flísar á breidd og n flísar á lengd.
- Á hversu marga vegu getur þú lagt flísarnar?
- Flísar sem snertast horn í horn teljast ekki aðliggjandi.

- Hægt er að setja þessa talningu fram með fjórða stigs línulegum rakningarvenslum.
- Það er þó ekki auðséð hverjir stuðlarnir í þessum venslum erum.
- En hvað ef við breytum þessu í net.
- Látum hnútana í netinu vera mögulegir dálkar á ganginum:

```
Hnútur: 0   1   2   3   4   5   6   7

        0   0   0   0   1   1   1   1
Gangur: 0   0   1   1   0   0   1   1
        0   1   0   1   0   1   0   1
```

- Við bætum svo við legg á milli hnútanna u og v ef dálkarnir mega liggja hliðina á hvorum öðrum á ganginum.
- Látum `1` tákna hvítar flísar.
- Takið eftir að stöður `3`, `6` og `7` eru alfarið ólöglegar.

- Við fáum þá nágrannafylkið:

```
    0  1  2  3  4  5  6  7
  +-----------------------
0 | 1  1  1  0  1  1  0  0
1 | 1  0  1  0  1  0  0  0
2 | 1  1  0  0  1  1  0  0
3 | 0  0  0  0  0  0  0  0
4 | 1  1  1  0  0  0  0  0
5 | 1  0  1  0  0  0  0  0
6 | 0  0  0  0  0  0  0  0
7 | 0  0  0  0  0  0  0  0
```

- Köllum þetta fylki A.
- Við þurfum síðan að leggja saman $(A^{p-1})_{uv}$ fyrir öll u og v þar sem u er löglegur dálkur.
- Þá eru við að leggja saman alla vegi í netinu af lengd p sem byrja í löglegum dálki.
- Við þurfum ekki að passa að síðasti hnúturinn sé löglegur því það liggur enginn leggur í ólöglegan hnút.

```
28 int main()
29 {
30     ll i, j, n, r = 0, a[8][8] =
31     {
32         {1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0},
33         {1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0},
34         {1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0},
35         {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
36         {1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0},
37         {1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0},
38         {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
39         {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}
40     };
41     scanf("%lld", &n);
42     matpow(*a, n - 1, 8);
43     for (i = 0; i < 8; i++) for (j = 0; j < 8; j++)
44         if (i != 3 && i != 6 && i != 7) r = (r + a[i][j])%MOD;
45     printf("%lld\n", r);
46     return 0;
47 }
```

Gauss-eyðing

- Umræða um fylkjaaðgerðir er ekki fullkláruð fyrr en minnst er á Gauss-eyðingu.
- Þið munið eflaust eftir henni úr línulegri algebru.
- Hún er nytsamlega til að, til dæmis, leysa jöfnuhneppi eða finna andhverfur fylkja.

```
 5 int gauss(double* a, int s, int n, int m)
 6 {
 7     int i, j, k, t, r = 0;
 8     for (i = 0; i < n; i++)
 9     {
10         for (t = 0; t < s && fabs(a[i*m + t]) < 1e-9; t++);
11         if (t == s) continue;
12         for (r++, j = m - 1; j >= t; j--) a[i*m + j] = a[i*m + j]/a[i*m + t];
13         for (j = 0; j < n; j++) if (i != j) for (k = m - 1; k >= t; k--)
14             a[j*m + k] = a[j*m + k] - a[i*m + k]*a[j*m + t];
15     }
16     return r;
17 }
```