Nálægustu punktar í plani

Bergur Snorrason

30. mars 2022

- Gefnir eru n punktar í plani.

- Gefnir eru n punktar í plani.
- Hvaða tveir punktar hafa minnstu fjarlægð sín á milli?

- Gefnir eru n punktar í plani.
- Hvaða tveir punktar hafa minnstu fjarlægð sín á milli?
- Við getum leyst þetta með tæmandi leit í $\mathcal{O}(\quad)$.

- Gefnir eru n punktar í plani.
- Hvaða tveir punktar hafa minnstu fjarlægð sín á milli?
- Við getum leyst þetta með tæmandi leit í $\mathcal{O}(n^2)$.

- Gefnir eru n punktar í plani.
- Hvaða tveir punktar hafa minnstu fjarlægð sín á milli?
- Við getum leyst þetta með tæmandi leit í $\mathcal{O}(n^2)$.
- Við skoðum einfaldlega öll pör punkta.

- Gefnir eru n punktar í plani.
- Hvaða tveir punktar hafa minnstu fjarlægð sín á milli?
- Við getum leyst þetta með tæmandi leit í $\mathcal{O}(n^2)$.
- Við skoðum einfaldlega öll pör punkta.
- Prófum að bæta þetta með því að deila og drottna.

- Röðum punktunum eftir x-hniti og skiptum í helminga.

- Röðum punktunum eftir x-hniti og skiptum í helminga.
- Látum x_0 vera þannig að hann liggi á milli x-hnita helminganna.

- Röðum punktunum eftir x-hniti og skiptum í helminga.
- Látum x_0 vera þannig að hann liggi á milli x-hnita helminganna.
- Leysum svo endurkvæmt fyrir hvorn helming fyrir sig.

- Röðum punktunum eftir x-hniti og skiptum í helminga.
- Látum x_0 vera þannig að hann liggi á milli x-hnita helminganna.
- Leysum svo endurkvæmt fyrir hvorn helming fyrir sig.
- Við þurfum nú að athuga hvort eitthvert par á milli helminganna sé betra en bestu pörin í hvorum helmingnum.

- Röðum punktunum eftir x-hniti og skiptum í helminga.
- Látum x_0 vera þannig að hann liggi á milli x-hnita helminganna.
- Leysum svo endurkvæmt fyrir hvorn helming fyrir sig.
- Við þurfum nú að athuga hvort eitthvert par á milli helminganna sé betra en bestu pörin í hvorum helmingnum.
- Það er of hægt að skoða öll pörin sem liggja á milli, þá verður tímaflækjan $\mathcal{O}(n^2)$.

- Röðum punktunum eftir x-hniti og skiptum í helminga.
- Látum x_0 vera þannig að hann liggi á milli x-hnita helminganna.
- Leysum svo endurkvæmt fyrir hvorn helming fyrir sig.
- Við þurfum nú að athuga hvort eitthvert par á milli helminganna sé betra en bestu pörin í hvorum helmingnum.
- Það er of hægt að skoða öll pörin sem liggja á milli, þá verður tímaflækjan $\mathcal{O}(n^2)$.
- Látum d vera minnstu fjarlægðina sem fannst í hvorum helmingnum fyrir sig.

- Röðum punktunum eftir x-hniti og skiptum í helminga.
- Látum x_0 vera þannig að hann liggi á milli x-hnita helminganna.
- Leysum svo endurkvæmt fyrir hvorn helming fyrir sig.
- Við þurfum nú að athuga hvort eitthvert par á milli helminganna sé betra en bestu pörin í hvorum helmingnum.
- Það er of hægt að skoða öll pörin sem liggja á milli, þá verður tímaflækjan $\mathcal{O}(n^2)$.
- Látum d vera minnstu fjarlægðina sem fannst í hvorum helmingnum fyrir sig.
- Við getum því hunsað þá punkta sem hafa x-hnit utan bilsins $[x_0 - d, x_0 + d]$.

- Röðum punktunum eftir x-hniti og skiptum í helminga.
- Látum x_0 vera þannig að hann liggi á milli x-hnita helminganna.
- Leysum svo endurkvæmt fyrir hvorn helming fyrir sig.
- Við þurfum nú að athuga hvort eitthvert par á milli helminganna sé betra en bestu pörin í hvorum helmingnum.
- Það er of hægt að skoða öll pörin sem liggja á milli, þá verður tímaflækjan $\mathcal{O}(n^2)$.
- Látum d vera minnstu fjarlægðina sem fannst í hvorum helmingnum fyrir sig.
- Við getum því hunsað þá punkta sem hafa x-hnit utan bilsins $[x_0 - d, x_0 + d]$.
- Röðum afgangnum eftir y-hniti.

- Röðum punktunum eftir x-hniti og skiptum í helminga.
- Látum x_0 vera þannig að hann liggi á milli x-hnita helminganna.
- Leysum svo endurkvæmt fyrir hvorn helming fyrir sig.
- Við þurfum nú að athuga hvort eitthvert par á milli helminganna sé betra en bestu pörin í hvorum helmingnum.
- Það er of hægt að skoða öll pörin sem liggja á milli, þá verður tímaflækjan $\mathcal{O}(n^2)$.
- Látum d vera minnstu fjarlægðina sem fannst í hvorum helmingnum fyrir sig.
- Við getum því hunsað þá punkta sem hafa x-hnit utan bilsins $[x_0 - d, x_0 + d]$.
- Röðum afgangnum eftir y-hniti.
- Svo kemur trikkið.

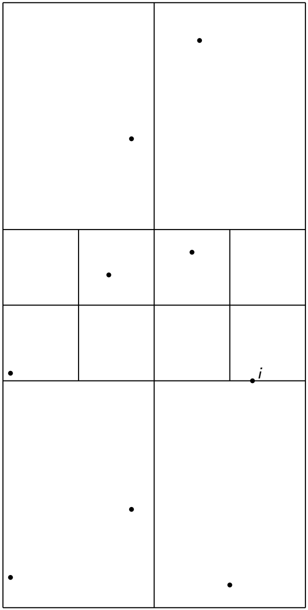
- Röðum punktunum eftir x-hniti og skiptum í helminga.
- Látum x_0 vera þannig að hann liggi á milli x-hnita helminganna.
- Leysum svo endurkvæmt fyrir hvorn helming fyrir sig.
- Við þurfum nú að athuga hvort eitthvert par á milli helminganna sé betra en bestu pörin í hvorum helmingnum.
- Það er of hægt að skoða öll pörin sem liggja á milli, þá verður tímaflækjan $\mathcal{O}(n^2)$.
- Látum d vera minnstu fjarlægðina sem fannst í hvorum helmingnum fyrir sig.
- Við getum því hunsað þá punkta sem hafa x-hnit utan bilsins $[x_0 - d, x_0 + d]$.
- Röðum afgangnum eftir y-hniti.
- Svo kemur trikkið.
- Okkur nægir, fyrir hvern punkt, að skoða fastann fjölda af næstu punktum.

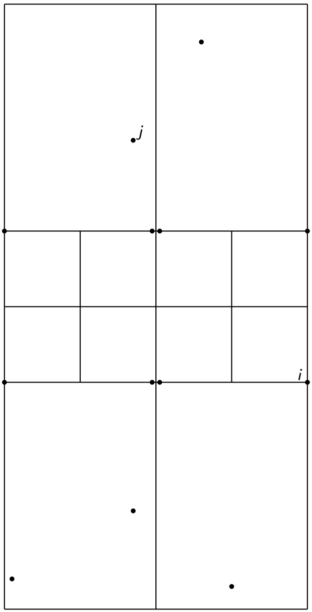
- Skiptum svæðinu fyrir ofan punktinn x_i í átta ferninga, hver með hliðarlengdir $d/2$.

- Skiptum svæðinu fyrir ofan punktinn x_i í átta ferninga, hver með hliðarlengdir $d/2$.
- Ef fjarlægðin milli alla punktana í hvorum helming er ekki minni en d þá getur mest einn punktur verið í hverjum ferningi (þar með talið er x_i).

- Skiptum svæðinu fyrir ofan punktinn x_i í átta ferninga, hver með hliðarlengdir $d/2$.
- Ef fjarlægðin milli alla punktana í hvorum helming er ekki minni en d þá getur mest einn punktur verið í hverjum ferningi (þar með talið er x_i).
- Allir punktar utan þessa svæðis eru meira en d fjarlægð frá i-ta punktinum, svo við þurfum ekki að skoða þá.

- Skiptum svæðinu fyrir ofan punktinn x_i í átta ferninga, hver með hliðarlengdir $d/2$.
- Ef fjarlægðin milli alla punktana í hvorum helming er ekki minni en d þá getur mest einn punktur verið í hverjum ferningi (þar með talið er x_i).
- Allir punktar utan þessa svæðis eru meira en d fjarlægð frá i-ta punktinum, svo við þurfum ekki að skoða þá.
- Svo við þurfum bara að skoða fjarlægðina frá x_i í x_j þegar $j - i \leq 7$.


i


j
i

```c
double closest_pair_r(pt* a, pt *b, int n, pt* r1, pt* r2)
{ // Hjálparfall.
    if (n < 2) return 1e16;
    if (n == 2)
    {
        *r1 = a[0], *r2 = a[1];
        return cabs(*r1 - *r2);
    }
    int m = n/2, i, j, k = 0;
    pt r3, r4;
    double p = closest_pair_r(a, b, m, r1, r2);
    double d = closest_pair_r(a + m + 1, b + m + 1, n - m - 1, &r3, &r4);
    if (d < p) p = d, *r1 = r3, *r2 = r4;
    for (i = 0; i < n; i++) if (fabs(creal(a[i] - a[m])) < p) b[k++] = a[i];
    qsort(b, k, sizeof(b[0]), cmpy);
    for (i = 0; i < k; i++)
        for (j = i + 1; cimag(b[j] - b[i]) < p && j < k; j++)
            if (cabs(b[i] - b[j]) < p)
                p = cabs(b[i] - b[j]), *r1 = b[i], *r2 = b[j];
    return p;
}

double closest_pair(pt* a, int n, pt* r1, pt* r2)
{ // Skilar lengd milli nálægustu punkta í a: r1 og r2.
    pt b[n];
    qsort(a, n, sizeof(a[0]), cmpx);
    return closest_pair_r(a, b, n, r1, r2);
}
```

- Hvert endurkvæmt kall er $\mathcal{O}(\qquad)$.

- Hvert endurkvæmt kall er $\mathcal{O}(n \log n)$.

- Hvert endurkvæmt kall er $\mathcal{O}(n \log n)$.
- Svo tímaflækjan á þessari útfærslu er $\mathcal{O}(\qquad\qquad)$, sem er bæting.

- Hvert endurkvæmt kall er $\mathcal{O}(n \log n)$.
- Svo tímaflækjan á þessari útfærslu er $\mathcal{O}(n \log^2 n)$, sem er bæting.

- Hvert endurkvæmt kall er $\mathcal{O}(n \log n)$.
- Svo tímaflækjan á þessari útfærslu er $\mathcal{O}(n \log^2 n)$, sem er bæting.
- Eina ástæðan fyrir því að hvert endurkvæmt kall sé $\mathcal{O}(n \log n)$ er að við röðum í hvert skipti.

- Hvert endurkvæmt kall er $\mathcal{O}(n \log n)$.
- Svo tímaflækjan á þessari útfærslu er $\mathcal{O}(n \log^2 n)$, sem er bæting.
- Eina ástæðan fyrir því að hvert endurkvæmt kall sé $\mathcal{O}(n \log n)$ er að við röðum í hvert skipti.
- Það er óþarfi því við erum alltaf að raða sömu punktunum aftur og aftur.

- Hvert endurkvæmt kall er $\mathcal{O}(n \log n)$.
- Svo tímaflækjan á þessari útfærslu er $\mathcal{O}(n \log^2 n)$, sem er bæting.
- Eina ástæðan fyrir því að hvert endurkvæmt kall sé $\mathcal{O}(n \log n)$ er að við röðum í hvert skipti.
- Það er óþarfi því við erum alltaf að raða sömu punktunum aftur og aftur.
- Það eru fleiri en ein leið til að þurfa ekki að raða oft.

- Hvert endurkvæmt kall er $\mathcal{O}(n \log n)$.
- Svo tímaflækjan á þessari útfærslu er $\mathcal{O}(n \log^2 n)$, sem er bæting.
- Eina ástæðan fyrir því að hvert endurkvæmt kall sé $\mathcal{O}(n \log n)$ er að við röðum í hvert skipti.
- Það er óþarfi því við erum alltaf að raða sömu punktunum aftur og aftur.
- Það eru fleiri en ein leið til að þurfa ekki að raða oft.
- Ein leið er að gera það sama og er gert í mergesort.

- Hvert endurkvæmt kall er $\mathcal{O}(n \log n)$.
- Svo tímaflækjan á þessari útfærslu er $\mathcal{O}(n \log^2 n)$, sem er bæting.
- Eina ástæðan fyrir því að hvert endurkvæmt kall sé $\mathcal{O}(n \log n)$ er að við röðum í hvert skipti.
- Það er óþarfi því við erum alltaf að raða sömu punktunum aftur og aftur.
- Það eru fleiri en ein leið til að þurfa ekki að raða oft.
- Ein leið er að gera það sama og er gert í mergesort.
- Þá erum við í raun að raða, en við gerum það í línulegum tíma.

```c
void merge(pt* a, pt *b, int m, int r)
{ // Úr D&D glærunum.
    int i = 0, j = m, c = 0;
    while (i < m && j < r) b[c++] = a[cimag(a[j]) < cimag(a[i]) ? j++ : i++];
    while (i < m || j < r) b[c++] = a[j < r ? j++ : i++];
    for (i = 0; i < r; i++) a[i] = b[i];
}

double closest_pair_r(pt *a, pt *b, pt *c, int n, pt *r1, pt *r2)
{ // Hjálparfall
    if (n < 2) { b[0] = a[0]; return 1e16; }
    if (n == 2)
    {
        *r1 = b[0] = a[0], *r2 = b[1] = a[1], merge(b, c, 1, 2);
        return cnorm(*r1 - *r2);
    }
    int m = n/2, i, j, k = 0;
    pt r3, r4;
    double p = closest_pair_r(a, b, c, m, r1, r2), d;
    b[m] = a[m];
    d = closest_pair_r(a + m + 1, b + m + 1, c + m + 1, n - m - 1, &r3, &r4);
    if (d < p) p = d, *r1 = r3, *r2 = r4;
    merge(b, c, m, m + 1), merge(b, c, m + 1, n);
    for (i = 0; i < n; i++) if (fabs(creal(b[i] - a[m])) < p) c[k++] = b[i];
    for (i = 0; i < k; i++)
        for (j = i + 1; cimag(c[j] - c[i]) < p && j < k; j++)
            if (cabs(c[i] - c[j]) < p)
                p = cabs(c[i] - c[j]), *r1 = c[i], *r2 = c[j];
    return p;
}

double closest_pair(pt *a, int n, pt *r1, pt *r2)
{ // Skilar lengd milli nálægustu punkta í a: r1 og r2.
    pt b[n], c[n];
    qsort(a, n, sizeof(a[0]), cmpx);
    return closest_pair_r(a, b, c, n, r1, r2);
}
```

- Hvert endurkvæmt kall er nú $\mathcal{O}(\quad)$.

- Hvert endurkvæmt kall er nú $\mathcal{O}(n)$.

- Hvert endurkvæmt kall er nú $\mathcal{O}(\ n\ )$.
- Svo tímaflækjan á þessari útfærslu er $\mathcal{O}(\qquad\qquad)$.

- Hvert endurkvæmt kall er nú $\mathcal{O}(n)$.
- Svo tímaflækjan á þessari útfærslu er $\mathcal{O}(n \log n)$.

- Hvert endurkvæmt kall er nú $\mathcal{O}(\,n\,)$.
- Svo tímaflækjan á þessari útfærslu er $\mathcal{O}(n \log n)$.
- Þetta má síðan bæta með slembnum reikniritum, en verður annars ekki betra.