

# Lausn á *Upp og niður*

Bergur Snorrason

22. febrúar 2023

- ▶ Gefnar eru  $n \leq 10^5$  ólíkar heiltölur  $a_1, \dots, a_n$ ,  $1 \leq a_j \leq 10^9$ .
- ▶ Finnið heiltölur  $1 \leq i < j < k \leq n$  þannig að  $x_i < x_k < x_j$ .

- ▶ Byrjum á að minnka  $a_j$  þannig að  $a_j \leq n$ , án þess að breyta innbyrðis röðun talnanna.
- ▶ Í grófum dráttum breytum við minnstu tölunni í 0, næst minnstu tölunni í 1 og svo framvegis.
  - ▶ Röðum  $(a_i, i)$  eftir fyrra hnitinu.
  - ▶ Látum nú fyrra hnit  $i$ -ta staksins í tvenndunum (eftir röðun) vera  $i$ .
  - ▶ Röðum eftir seinna hnitinu.
  - ▶ Látum nú  $a_i$  vera fyrra hnit  $i$ -ta staksins af tvenndunum (eftir að raða tvisvar).
- ▶ Með þessari aðferð getum við gert ráð fyrir að  $0 \leq a_j \leq 10^5$ .

```

3 b = [[a[i], i] for i in range(n)]
4 b.sort(key = lambda x: x[0])
5 for i in range(n): b[i][0] = i
6 b.sort(key = lambda x: x[1])
7 for i in range(n): a[i] = b[i][0]

```

- ▶ Festum nú eitthvað  $j$ .
- ▶ Við getum gráðugt valið  $i < j$  sem vísinn á minnsta stakið af fyrstu  $j - 1$  tölunum.
- ▶ Við þurfum svo að geta athugað hvort til sé  $k$  þannig að  $x_i < x_k < x_j$ .
- ▶ Við getum gert þetta með biltréi sem styður...
  - ▶ ...punktuppfærsluna „bætum  $k$  við  $i$ -ta stakið í trénu”.
  - ▶ ...bilfyrirspurnina „hver er summan yfir bil  $[i, j]$ ”.
- ▶ Þetta biltré er eins og fyrsta dæmið í glærunum um biltré.

- ▶ Við byrjum á að láta allar tölurnar  $a_i$  í biltréð (með `update(a[i], 1)`).
- ▶ Við gefum okkur einnig breytu `mn` sem er upphafstillt sem  $\infty$ .
- ▶ Við ítrum síðan í gegnum  $j = 2, 3, \dots, n - 1$  og ...
  - ▶ ...breytum `mn` í  $a_{j-1}$  ef það er minna en `mn`.
  - ▶ ...fjarlægjum  $a_j$  úr biltrénu (með `update(a[j], -1)`).
  - ▶ ...athugum hvort `mn` er minna en  $a_j$  og summan yfir bilið `mn + 1` og  $a_j - 1$  er stærra en núll. Ef svo er erum við komin með vísanna.
- ▶ Við getum nú fundið  $i$  og  $k$  með því að leita línulega.

- ▶ Þegar við upphafstillum biltréð köllum við  $n$  sinnum á `update(...)`.
- ▶ Þetta tekur  $\mathcal{O}(n \log n)$  tíma.
- ▶ Síðan ítrum við í gegnum öll stökin, nema tvö, og fyrir hvert stak köllum við á `update(...)` og `query(...)`.
- ▶ Þetta tekur  $\mathcal{O}(n \log n)$  tíma.
- ▶ Svo heildar tímaflækjan er  $\mathcal{O}(n \log n)$  tíma.

