Tæmandi leit

Bergur Snorrason

23. janúar 2023

Almennar nálganir lausna

- Þegar við leysum dæmi í keppnisforritun notumst við oftast við eina af eftirfarandi aðferðum:

Almennar nálganir lausna

- Þegar við leysum dæmi í keppnisforritun notumst við oftast við eina af eftirfarandi aðferðum:
  - *Ad hoc*,

Almennar nálganir lausna

- Þegar við leysum dæmi í keppnisforritun notumst við oftast við eina af eftirfarandi aðferðum:
  - *Ad hoc*,
  - *Tæmandi leit* eða *ofbeldis aðferðin* (e. *complete search*, *brute force*),

Almennar nálganir lausna

- Þegar við leysum dæmi í keppnisforritun notumst við oftast við eina af eftirfarandi aðferðum:
  - *Ad hoc*,
  - *Tæmandi leit* eða *ofbeldis aðferðin* (e. *complete search*, *brute force*),
  - *Gráðug reiknirit* (e. *greedy algorithms*),

Almennar nálganir lausna

- Þegar við leysum dæmi í keppnisforritun notumst við oftast við eina af eftirfarandi aðferðum:
  - *Ad hoc*,
  - *Tæmandi leit* eða *ofbeldis aðferðin* (e. *complete search, brute force*),
  - *Gráðug reiknirit* (e. *greedy algorithms*),
  - *Deila og drottna* (e. *divide and conquer*),

Almennar nálganir lausna

- Þegar við leysum dæmi í keppnisforritun notumst við oftast við eina af eftirfarandi aðferðum:
  - *Ad hoc*,
  - *Tæmandi leit* eða *ofbeldis aðferðin* (e. *complete search*, *brute force*),
  - *Gráðug reiknirit* (e. *greedy algorithms*),
  - *Deila og drottna* (e. *divide and conquer*),
  - *Kvik bestun* (e. *dynamic programming*).

Almennar nálganir lausna

- Þegar við leysum dæmi í keppnisforritun notumst við oftast við eina af eftirfarandi aðferðum:
  - *Ad hoc*,
  - *Tæmandi leit* eða *ofbeldis aðferðin* (e. *complete search, brute force*),
  - *Gráðug reiknirit* (e. *greedy algorithms*),
  - *Deila og drottna* (e. *divide and conquer*),
  - *Kvik bestun* (e. *dynamic programming*).
- Í síðustu viku fjölluðum við um Ad hoc dæmi.

Almennar nálganir lausna

- Þegar við leysum dæmi í keppnisforritun notumst við oftast við eina af eftirfarandi aðferðum:
  - *Ad hoc*,
  - *Tæmandi leit* eða *ofbeldis aðferðin* (e. *complete search*, *brute force*),
  - *Gráðug reiknirit* (e. *greedy algorithms*),
  - *Deila og drottna* (e. *divide and conquer*),
  - *Kvik bestun* (e. *dynamic programming*).
- Í síðustu viku fjölluðum við um Ad hoc dæmi.
- Í þessari viku fjöllum við um tæmandi leit og gráðug reiknirit.

Tæmandi leit

- Safn allra lausna tiltekis dæmis kallast *lausnarrúm* dæmisins.

Tæmandi leit

- Safn allra lausna tiltekis dæmis kallast *lausnarrúm* dæmisins.
- *Tæmandi leit* felur í sér að leita í gegnum allt lausnarrúmið að bestu lausninni.

Tæmandi leit

- Safn allra lausna tiltekis dæmis kallast *lausnarrúm* dæmisins.
- *Tæmandi leit* felur í sér að leita í gegnum allt lausnarrúmið að bestu lausninni.
- Takið eftir að lausnarrúmið inniheldur líka rangar lausnir.

Tæmandi leit

- Safn allra lausna tiltekis dæmis kallast *lausnarrúm* dæmisins.
- *Tæmandi leit* felur í sér að leita í gegnum allt lausnarrúmið að bestu lausninni.
- Takið eftir að lausnarrúmið inniheldur líka rangar lausnir.
- Tökum dæmi.

Dæmi

- Gefinn er listi `a` af n mismunandi heiltölum á bilinu $[0, m]$.

Dæmi

- Gefinn er listi `a` af n mismunandi heiltölum á bilinu $[0, m]$.
- Hver þeirra er stærst?

Dæmi

- Gefinn er listi `a` af n mismunandi heiltölum á bilinu $[0, m]$.
- Hver þeirra er stærst?
- Til að nota tæmandi leit þurfum við að byrja á að ákvarða lausnarrúmið.

Dæmi

- Gefinn er listi `a` af n mismunandi heiltölum á bilinu $[0, m]$.
- Hver þeirra er stærst?
- Til að nota tæmandi leit þurfum við að byrja á að ákvarða lausnarrúmið.
- Hér er það einfaldlega heiltölurnar á bilinu $[0, m]$.

Dæmi

- Gefinn er listi `a` af n mismunandi heiltölum á bilinu $[0, m]$.
- Hver þeirra er stærst?
- Til að nota tæmandi leit þurfum við að byrja á að ákvarða lausnarrúmið.
- Hér er það einfaldlega heiltölurnar á bilinu $[0, m]$.
- Okkur nægir að ítra öfugt í gegnum heiltölurnar á bilinu $[0, m]$ þangað til við lendum á tölu sem er í `a`.

Dæmi

- Gefinn er listi `a` af n mismunandi heiltölum á bilinu $[0, m]$.
- Hver þeirra er stærst?
- Til að nota tæmandi leit þurfum við að byrja á að ákvarða lausnarrúmið.
- Hér er það einfaldlega heiltölurnar á bilinu $[0, m]$.
- Okkur nægir að ítra öfugt í gegnum heiltölurnar á bilinu $[0, m]$ þangað til við lendum á tölu sem er í `a`.
- Við getum athugað hvort tiltekin tala sé í a með því að ítra í gegnum `a`, sem tekur $\mathcal{O}(\quad)$ tíma.

Dæmi

- Gefinn er listi `a` af n mismunandi heiltölum á bilinu $[0, m]$.
- Hver þeirra er stærst?
- Til að nota tæmandi leit þurfum við að byrja á að ákvarða lausnarrúmið.
- Hér er það einfaldlega heiltölurnar á bilinu $[0, m]$.
- Okkur nægir að ítra öfugt í gegnum heiltölurnar á bilinu $[0, m]$ þangað til við lendum á tölu sem er í `a`.
- Við getum athugað hvort tiltekin tala sé í a með því að ítra í gegnum `a`, sem tekur $\mathcal{O}(n)$ tíma.

Dæmi

- Gefinn er listi `a` af n mismunandi heiltölum á bilinu $[0, m]$.
- Hver þeirra er stærst?
- Til að nota tæmandi leit þurfum við að byrja á að ákvarða lausnarrúmið.
- Hér er það einfaldlega heiltölurnar á bilinu $[0, m]$.
- Okkur nægir að ítra öfugt í gegnum heiltölurnar á bilinu $[0, m]$ þangað til við lendum á tölu sem er í `a`.
- Við getum athugað hvort tiltekin tala sé í a með því að ítra í gegnum `a`, sem tekur $\mathcal{O}(\ n\ )$ tíma.
- Þessi aðferð er því $\mathcal{O}(\qquad)$.

Dæmi

- Gefinn er listi `a` af n mismunandi heiltölum á bilinu $[0, m]$.
- Hver þeirra er stærst?
- Til að nota tæmandi leit þurfum við að byrja á að ákvarða lausnarrúmið.
- Hér er það einfaldlega heiltölurnar á bilinu $[0, m]$.
- Okkur nægir að ítra öfugt í gegnum heiltölurnar á bilinu $[0, m]$ þangað til við lendum á tölu sem er í `a`.
- Við getum athugað hvort tiltekin tala sé í a með því að ítra í gegnum `a`, sem tekur $\mathcal{O}(\ n\ )$ tíma.
- Þessi aðferð er því $\mathcal{O}(n \cdot m)$.

Dæmi

- Gefinn er listi `a` af n mismunandi heiltölum á bilinu $[0, m]$.
- Hver þeirra er stærst?
- Til að nota tæmandi leit þurfum við að byrja á að ákvarða lausnarrúmið.
- Hér er það einfaldlega heiltölurnar á bilinu $[0, m]$.
- Okkur nægir að ítra öfugt í gegnum heiltölurnar á bilinu $[0, m]$ þangað til við lendum á tölu sem er í `a`.
- Við getum athugað hvort tiltekin tala sé í a með því að ítra í gegnum `a`, sem tekur $\mathcal{O}(\ n\ )$ tíma.
- Þessi aðferð er því $\mathcal{O}(n \cdot m)$.
- Hvaða gagnagrind úr síðasta fyrirlestri mætti nota til að bæta þessa tímaflækju?

- Almennt fáum við að ef lausnarrúmið er af stærð S og við getum athugað hverja lausn í $\mathcal{O}(T(k))$ þá er tæmandi leit $\mathcal{O}(S \cdot T(k))$.

- Almennt fáum við að ef lausnarrúmið er af stærð S og við getum athugað hverja lausn í $\mathcal{O}(T(k))$ þá er tæmandi leit $\mathcal{O}(S \cdot T(k))$.
- Gildin $n!$ og 2^n eru algengar stærðir á lausnarrúmum.

- Almennt fáum við að ef lausnarrúmið er af stærð S og við getum athugað hverja lausn í $\mathcal{O}(T(k))$ þá er tæmandi leit $\mathcal{O}(S \cdot T(k))$.
- Gildin $n!$ og 2^n eru algengar stærðir á lausnarrúmum.
- Þar af leiðandi eru $\mathcal{O}(n \cdot n!) = \mathcal{O}((n+1)!)$ og $\mathcal{O}(n2^n)$ algengar tímaflækjur.

- Almennt fáum við að ef lausnarrúmið er af stærð S og við getum athugað hverja lausn í $\mathcal{O}(T(k))$ þá er tæmandi leit $\mathcal{O}(S \cdot T(k))$.
- Gildin $n!$ og 2^n eru algengar stærðir á lausnarrúmum.
- Þar af leiðandi eru $\mathcal{O}(n \cdot n!) = \mathcal{O}((n+1)!)$ og $\mathcal{O}(n2^n)$ algengar tímaflækjur.
- Oft má á þægilegan hátt breyta slíkum lausnum í $\mathcal{O}(n!)$ og $\mathcal{O}(2^n)$.

Tæmandi leit, öll hlutmengi

- Dæmið hér á undan gæti leitt ykkur til að halda að tæmandi leit sé einföld.

Tæmandi leit, öll hlutmengi

- Dæmið hér á undan gæti leitt ykkur til að halda að tæmandi leit sé einföld.
- Svo er ekki alltaf.

Tæmandi leit, öll hlutmengi

- Dæmið hér á undan gæti leitt ykkur til að halda að tæmandi leit sé einföld.
- Svo er ekki alltaf.
- Tökum annað dæmi.

Tæmandi leit, öll hlutmengi

- Dæmið hér á undan gæti leitt ykkur til að halda að tæmandi leit sé einföld.
- Svo er ekki alltaf.
- Tökum annað dæmi.
- Gefin er runa af n tölum. Hver er lengsta vaxandi hlutruna gefnu rununnar?

Tæmandi leit, öll hlutmengi

- Dæmið hér á undan gæti leitt ykkur til að halda að tæmandi leit sé einföld.
- Svo er ekki alltaf.
- Tökum annað dæmi.
- Gefin er runa af n tölum. Hver er lengsta vaxandi hlutruna gefnu rununnar?
- Ef við viljum leysa þetta dæmi með tæmandi leit þá þurfum við að skoða sérhvert hlutmengi gefnu rununnar.

Útúrdúr um hlutmengi

- Ef við erum með endanlegt mengi A af stærð n getum við númerað öll stökin með tölunum $1, 2, ..., n$.

Útúrdúr um hlutmengi

- Ef við erum með endanlegt mengi A af stærð n getum við númerað öll stökin með tölunum $1, 2, \ldots, n$.
- Sérhvert hlutmengi einkennist af því hvort stak k sé í hlutmenginu eða ekki, fyrir öll k í $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Útúrdúr um hlutmengi

- Ef við erum með endanlegt mengi A af stærð n getum við númerað öll stökin með tölunum $1, 2, ..., n$.
- Sérhvert hlutmengi einkennist af því hvort stak k sé í hlutmenginu eða ekki, fyrir öll k í $\{1, 2, ..., n\}$.
- Við fáum því gagntæka samsvörun milli mengi allra hlutmengja A og mengisins $\{0, 1\}^n$.

Útúrdúr um hlutmengi

- Ef við erum með endanlegt mengi A af stærð n getum við númerað öll stökin með tölunum $1, 2, \ldots, n$.
- Sérhvert hlutmengi einkennist af því hvort stak k sé í hlutmenginu eða ekki, fyrir öll k í $\{1, 2, \ldots, n\}$.
- Við fáum því gagntæka samsvörun milli mengi allra hlutmengja A og mengisins $\{0, 1\}^n$.
- Svo fjöldi hlutmengja í A er 2^n.

Útúrdúr um bitaframsetingu talna

- Fyrir hlutmengi H í A er til ótvírætt ákvörðuð tala b sem hefur 1 í k-ta sæti bitaframsetningar sinnar þá og því aðeins að k-ta stak A sé í H.

Útúrdúr um bitaframsetingu talna

- Fyrir hlutmengi H í A er til ótvírætt ákvörðuð tala b sem hefur 1 í k-ta sæti bitaframsetningar sinnar þá og því aðeins að k-ta stak A sé í H.
- Þetta gefur okkur gagntæka samsvörun milli hlutmengja A og talnanna $0, 1, ..., 2^n - 1$.

Útúrdúr um bitaframsetingu talna

- Fyrir hlutmengi H í A er til ótvírætt ákvörðuð tala b sem hefur 1 í k-ta sæti bitaframsetningar sinnar þá og því aðeins að k-ta stak A sé í H.
- Þetta gefur okkur gagntæka samsvörun milli hlutmengja A og talnanna $0, 1, \ldots, 2^n - 1$.
- Talan b er vanalega kölluð *bitakennir* eða *kennir* (e. *bitmask*, *mask*) hlutmengisins H.

Útúrdúr um bitaframsetingu talna

- Fyrir hlutmengi H í A er til ótvírætt ákvörðuð tala b sem hefur 1 í k-ta sæti bitaframsetningar sinnar þá og því aðeins að k-ta stak A sé í H.
- Þetta gefur okkur gagntæka samsvörun milli hlutmengja A og talnanna $0, 1, ..., 2^n - 1$.
- Talan b er vanalega kölluð *bitakennir* eða *kennir* (e. *bitmask*, *mask*) hlutmengisins H.
- Sem dæmi, ef $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ og $H = \{1, 3, 5, 6\}$ þá er $b = 110101_2 = 53$.

Útúrdúr um bitaframsetingu talna

- Fyrir hlutmengi H í A er til ótvírætt ákvörðuð tala b sem hefur 1 í k-ta sæti bitaframsetningar sinnar þá og því aðeins að k-ta stak A sé í H.
- Þetta gefur okkur gagntæka samsvörun milli hlutmengja A og talnanna $0, 1, ..., 2^n - 1$.
- Talan b er vanalega kölluð *bitakennir* eða *kennir* (e. *bitmask*, *mask*) hlutmengisins H.
- Sem dæmi, ef $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ og $H = \{1, 3, 5, 6\}$ þá er $b = 110101_2 = 53$.
- Kennir tómamengisins er alltaf $0 = 00\ldots00_2$ og kennir A er $2^n - 1 = 11\ldots11_2$.

- Þegar kemur að því að nota bitakenni í forritun notum við okkur eftirfarandi:

- Þegar kemur að því að nota bitakenni í forritun notum við okkur eftirfarandi:

Kennir *k*-ta einstökungs	`1 << k`
Kennir fyllimengis kennis	`~A`
Kennir samengis tveggja kenna	`A|B`
Kennir sniðmengis tveggja kenna	`A&B`
Kennir samhverfs mismunar tveggja kenna	`A^B`
Kennir mismunar tveggja kenna	`A&(~B)`

- Þegar kemur að því að nota bitakenni í forritun notum við okkur eftirfarandi:

Kennir *k*-ta einstökungs	`1 << k`
Kennir fyllimengis kennis	`~A`
Kennir samengis tveggja kenna	`A|B`
Kennir sniðmengis tveggja kenna	`A&B`
Kennir samhverfs mismunar tveggja kenna	`A^B`
Kennir mismunar tveggja kenna	`A&(~B)`

- NB: Vegna forgangs aðgerða í flestum forritunarmálum er góður vani að nota nóg af svigum þegar unnið er með bitaaðgerðir.

- Þegar kemur að því að nota bitakenni í forritun notum við okkur eftirfarandi:

Kennir *k*-ta einstökungs	`1 << k`
Kennir fyllimengis kennis	`~A`
Kennir samengis tveggja kenna	`A|B`
Kennir sniðmengis tveggja kenna	`A&B`
Kennir samhverfs mismunar tveggja kenna	`A^B`
Kennir mismunar tveggja kenna	`A&(~B)`

- NB: Vegna forgangs aðgerða í flestum forritunarmálum er góður vani að nota nóg af svigum þegar unnið er með bitaaðgerðir.
- Til dæmis er `A&B == 0` jafngilt `A&(B == 0)` í `C/C++`, þó við viljum yfirleitt `(A&B) == 0`.

- Þegar kemur að því að nota bitakenni í forritun notum við okkur eftirfarandi:

Kennir *k*-ta einstökungs	`1 << k`
Kennir fyllimengis kennis	`~A`
Kennir samengis tveggja kenna	`A|B`
Kennir sniðmengis tveggja kenna	`A&B`
Kennir samhverfs mismunar tveggja kenna	`A^B`
Kennir mismunar tveggja kenna	`A&(~B)`

- NB: Vegna forgangs aðgerða í flestum forritunarmálum er góður vani að nota nóg af svigum þegar unnið er með bitaaðgerðir.
- Til dæmis er `A&B == 0` jafngilt `A&(B == 0)` í `C/C++`, þó við viljum yfirleitt `(A&B) == 0`.
- Takið eftir að kennir fyllimengisins bætir við bitum utan þeirra sem við höfum áhuga því við erum í rauninni að taka fyllimengi með stærra óðal.

- Þegar kemur að því að nota bitakenni í forritun notum við okkur eftirfarandi:

Kennir *k*-ta einstökungs	`1 << k`
Kennir fyllimengis kennis	`~A`
Kennir samengis tveggja kenna	`A|B`
Kennir sniðmengis tveggja kenna	`A&B`
Kennir samhverfs mismunar tveggja kenna	`A^B`
Kennir mismunar tveggja kenna	`A&(~B)`

- NB: Vegna forgangs aðgerða í flestum forritunarmálum er góður vani að nota nóg af svigum þegar unnið er með bitaaðgerðir.
- Til dæmis er `A&B == 0` jafngilt `A&(B == 0)` í `C/C++`, þó við viljum yfirleitt `(A&B) == 0`.
- Takið eftir að kennir fyllimengisins bætir við bitum utan þeirra sem við höfum áhuga því við erum í rauninni að taka fyllimengi með stærra óðal.
- Til að allt sé rétt þarf notum við `(~A)&((1 << n) - 1)`.

Lausn á dæminu

- Við getum nú leyst dæmið.

Lausn á dæminu

- Við getum nú leyst dæmið.
- Til að ítra í gegnum öll hlutmengi ítrum við í gegnum alla bitakenni mengisins.

Lausn

```c
#include <stdio.h>

int main()
{
    int n, i, j;
    scanf("%d", &n);
    int a[n];
    for (i = 0; i < n; i++) scanf("%d", &(a[i]));

    int mx = 0, mask;
    for (i = 0; i < (1 << n); i++)
    {
        int s[n], c = 0;
        for (j = 0; j < n; j++) if (((1 << j)&i) != 0) s[c++] = j;
        for (j = 1; j < c; j++) if (a[s[j]] < a[s[j - 1]]) break;
        if (j == c && c > mx) mx = c, mask = i;
    }

    printf("%d\n", mx);
    for (i = 0; i < n; i++) if (((1 << i)&mask) != 0) printf("%d ", a[i]);
    printf("\n");

    return 0;
}
```

- Hér er lausnarrúmið af stærð 2^n og við erum $\mathcal{O}(n)$ að ganga úr skugga um hvort tiltekin lausn sé í raun rétt, svo reikniritið er $\mathcal{O}(\qquad)$.

- Hér er lausnarrúmið af stærð 2^n og við erum $\mathcal{O}(n)$ að ganga úr skugga um hvort tiltekin lausn sé í raun rétt, svo reikniritið er $\mathcal{O}(n \cdot 2^n)$.

Tæmandi leit, allar umraðanir

- Við höfum oft áhuga á að ítra í gegnum allar umraðanir á lista talna.

Tæmandi leit, allar umraðanir

- Við höfum oft áhuga á að ítra í gegnum allar umraðanir á lista talna.
- Munum að, ef við höfum n ólíkar tölur þá getum við raðað þeim á $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ vegu.

Tæmandi leit, allar umraðanir

- Við höfum oft áhuga á að ítra í gegnum allar umraðanir á lista talna.
- Munum að, ef við höfum n ólíkar tölur þá getum við raðað þeim á $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ vegu.
- Tökum mjög einfalt dæmi:

Tæmandi leit, allar umraðanir

- Við höfum oft áhuga á að ítra í gegnum allar umraðanir á lista talna.
- Munum að, ef við höfum n ólíkar tölur þá getum við raðað þeim á $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ vegu.
- Tökum mjög einfalt dæmi:
- Gefið er n. Prentið allar umraðanir á $1, 2, \ldots, n$ í vaxandi stafrófsröð, hverja á sinni línu.

Tæmandi leit, allar umraðanir

- Við höfum oft áhuga á að ítra í gegnum allar umraðanir á lista talna.
- Munum að, ef við höfum n ólíkar tölur þá getum við raðað þeim á $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ vegu.
- Tökum mjög einfalt dæmi:
- Gefið er n. Prentið allar umraðanir á $1, 2, \ldots, n$ í vaxandi stafrófsröð, hverja á sinni línu.
- Við getum notað okkur innbyggða fallið `next_permutation(...)` í `C++`.

```cpp
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;

int main()
{
    int n, i;
    cin >> n;
    vector<int> p;
    for (i = 0; i < n; i++) p.push_back(i + 1);
    do {
        for (i = 0; i < n; i++) cout << p[i] << ' ';
        cout << '\n';
    } while (next_permutation(p.begin(), p.end()));
    return 0;
}
```

- Mikilvægt er að `p` sé vaxandi í upphafi því lykkjan hættir þegar hún lendir á síðustu umröðunni, í stafrófsröð.

- Mikilvægt er að `p` sé vaxandi í upphafi því lykkjan hættir þegar hún lendir á síðustu umröðunni, í stafrófsröð.
- Þessi lausn er $\mathcal{O}(\qquad\qquad)$.

- Mikilvægt er að `p` sé vaxandi í upphafi því lykkjan hættir þegar hún lendir á síðustu umröðunni, í stafrófsröð.
- Þessi lausn er $\mathcal{O}((n+1)!)$.

- Tökum nú annað dæmi.

- Tökum nú annað dæmi.
- Gefnar eru n mismunandi heiltölur.

- Tökum nú annað dæmi.
- Gefnar eru n mismunandi heiltölur.
- Raðið þeim.

- Tökum nú annað dæmi.
- Gefnar eru n mismunandi heiltölur.
- Raðið þeim.
- Þetta má að sjálfsögðu leysa með innbyggðum röðunarföllum, en við viljum leysa þetta með tæmandi leit.

- Tökum nú annað dæmi.
- Gefnar eru n mismunandi heiltölur.
- Raðið þeim.
- Þetta má að sjálfsögðu leysa með innbyggðum röðunarföllum, en við viljum leysa þetta með tæmandi leit.
- Við getum notað sama forrit og áðan, með smávægilegum breytingum.

```cpp
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;

int main()
{
    int x, n, i;
    cin >> n;
    vector<int> p, a, b(n);
    for (i = 0; i < n; i++)
    {
        cin >> x;
        a.push_back(x);
        p.push_back(i);
    }
    do {
        for (i = 0; i < n; i++) b[i] = a[p[i]];
        for (i = 0; i < n - 1; i++) if (b[i] > b[i + 1]) break;
        if (i == n - 1) break;
    } while (next_permutation(p.begin(), p.end()));
    for (i = 0; i < n; i++) cout << a[p[i]] << ' ';
    cout << endl;
    return 0;
}
```

- Tímaflækjan á þessari lausn er $\mathcal{O}(\qquad)$.

- Tímaflækjan á þessari lausn er $\mathcal{O}((n+1)!)$.

- Tímaflækjan á þessari lausn er $\mathcal{O}((n+1)!)$.
- Við getum bætt hana.

- Tímaflækjan á þessari lausn er $\mathcal{O}((n+1)!)$.
- Við getum bætt hana.
- Byrjum á að leysa dæmið án þess að nota `next_permutation(...)`.

- Tímaflækjan á þessari lausn er $\mathcal{O}((n+1)!)$.
- Við getum bætt hana.
- Byrjum á að leysa dæmið án þess að nota `next_permutation(...)`.
- Við getum gert það endurkvæmt.

- Tímaflækjan á þessari lausn er $\mathcal{O}((n+1)!)$.
- Við getum bætt hana.
- Byrjum á að leysa dæmið án þess að nota `next_permutation(...)` .
- Við getum gert það endurkvæmt.
- Í hverju skrefi í endurkvæmninni veljum við stak sem við höfum ekki valið áður, setjum það á hlaða og höldum áfram.

```c
#include <stdio.h>
#define SWAP(E, F) { int swap = (E); (E) = (F); (F) = swap; }
int perm(int* a, int n, int x)
{
    int i;
    if (x == n)
    {
        for (i = 0; i < n - 1; i++) if (a[i] > a[i + 1]) break;
        return i < n - 1 ? 0 : 1;
    }
    for (i = x; i < n; i++)
    {
        SWAP(a[x], a[i]);
        if (perm(a, n, x + 1)) return 1;
        SWAP(a[x], a[i]);
    }
    return 0;
}

int main()
{
    int i, n;
    scanf("%d", &n);
    int a[n];
    for (i = 0; i < n; i++) scanf("%d", &a[i]);
    perm(a, n, 0);
    for (i = 0; i < n; i++) printf("%d ", a[i]);
    printf("\n");
    return 0;
}
```

- Gerum ráð fyrir að $n = 5$ og gefnu tölurnar séu `3 2 5 4 1`.

- Gerum ráð fyrir að $n = 5$ og gefnu tölurnar séu `3 2 5 4 1`.
- Við byrjum með tómann hlaða, táknum hann með `x x x x x`.

- Gerum ráð fyrir að $n = 5$ og gefnu tölurnar séu `3 2 5 4 1`.
- Við byrjum með tómann hlaða, táknum hann með `x x x x x`.
- Við bætum fyrst við `3` og fáum `3 x x x x`.

- Gerum ráð fyrir að $n = 5$ og gefnu tölurnar séu `3 2 5 4 1`.
- Við byrjum með tómann hlaða, táknum hann með `x x x x x`.
- Við bætum fyrst við `3` og fáum `3 x x x x`.
- Síðan bætum við `2` við og fáum `3 2 x x x`.

- Gerum ráð fyrir að $n = 5$ og gefnu tölurnar séu `3 2 5 4 1`.
- Við byrjum með tómann hlaða, táknum hann með `x x x x x`.
- Við bætum fyrst við `3` og fáum `3 x x x x`.
- Síðan bætum við `2` við og fáum `3 2 x x x`.
- Næst prófum við allar umraðanir `5 4 1` þar fyrir aftan.

- Gerum ráð fyrir að $n = 5$ og gefnu tölurnar séu `3 2 5 4 1`.
- Við byrjum með tómann hlaða, táknum hann með `x x x x x`.
- Við bætum fyrst við `3` og fáum `3 x x x x`.
- Síðan bætum við `2` við og fáum `3 2 x x x`.
- Næst prófum við allar umraðanir `5 4 1` þar fyrir aftan.
- En við sjáum strax að það mun aldrei verða raðað, því $3 > 2$.

- Gerum ráð fyrir að $n = 5$ og gefnu tölurnar séu `3 2 5 4 1`.
- Við byrjum með tómann hlaða, táknum hann með `x x x x x`.
- Við bætum fyrst við `3` og fáum `3 x x x x`.
- Síðan bætum við `2` við og fáum `3 2 x x x`.
- Næst prófum við allar umraðanir `5 4 1` þar fyrir aftan.
- En við sjáum strax að það mun aldrei verða raðað, því $3 > 2$.
- Svo við getum sleppt því að skoða dýpra.

```c
#include <stdio.h>
#define SWAP(E, F) { int swap = (E); (E) = (F); (F) = swap; }
int perm(int* a, int n, int x)
{
    int i;
    if (x == n) return 1;
    for (i = x; i < n; i++) if (x == 0 || a[x - 1] <= a[i])
    {
        SWAP(a[x], a[i]);
        if (perm(a, n, x + 1)) return 1;
        SWAP(a[x], a[i]);
    }
    return 0;
}

int main()
{
    int i, n;
    scanf("%d", &n);
    int a[n];
    for (i = 0; i < n; i++) scanf("%d", &a[i]);
    perm(a, n, 0);
    for (i = 0; i < n; i++) printf("%d ", a[i]);
    printf("\n");
    return 0;
}
```

- Tímaflækjan eftir þessa breytingu er ekki augljós.

- Tímaflækjan eftir þessa breytingu er ekki augljós.
- Munið að tölurnar eru allar ólíkar.

- Tímaflækjan eftir þessa breytingu er ekki augljós.
- Munið að tölurnar eru allar ólíkar.
- Takið eftir að sérhvert hlutmengi mun koma fyrir í hlaðanum okkar.

- Tímaflækjan eftir þessa breytingu er ekki augljós.
- Munið að tölurnar eru allar ólíkar.
- Takið eftir að sérhvert hlutmengi mun koma fyrir í hlaðanum okkar.
- Hlaðinn er einnig alltaf raðaður, svo hann inniheldur aldrei sama mengið tvisvar.

- Tímaflækjan eftir þessa breytingu er ekki augljós.
- Munið að tölurnar eru allar ólíkar.
- Takið eftir að sérhvert hlutmengi mun koma fyrir í hlaðanum okkar.
- Hlaðinn er einnig alltaf raðaður, svo hann inniheldur aldrei sama mengið tvisvar.
- Svo tímaflækjan er $\mathcal{O}(\quad)$.

- Tímaflækjan eftir þessa breytingu er ekki augljós.
- Munið að tölurnar eru allar ólíkar.
- Takið eftir að sérhvert hlutmengi mun koma fyrir í hlaðanum okkar.
- Hlaðinn er einnig alltaf raðaður, svo hann inniheldur aldrei sama mengið tvisvar.
- Svo tímaflækjan er $\mathcal{O}(2^n)$.

- Þegar við ítrum yfir öll hlutmengi endum við oft með tímaflækjuna $\mathcal{O}(2^n)$ eða $\mathcal{O}(n \cdot 2^n)$.

- Þegar við ítrum yfir öll hlutmengi endum við oft með tímaflækjuna $\mathcal{O}(2^n)$ eða $\mathcal{O}(n \cdot 2^n)$.
- Svo slíkar lausnir virka fyrir $n \sim 20$ en verða of hægar fyrir $n \geq 30$.

- Þegar við ítrum yfir öll hlutmengi endum við oft með tímaflækjuna $\mathcal{O}(2^n)$ eða $\mathcal{O}(n \cdot 2^n)$.
- Svo slíkar lausnir virka fyrir $n \sim 20$ en verða of hægar fyrir $n \geq 30$.
- Það er þó oft hægt að beita nokkuð almennri aðferð til að bæta tímaflækjuna.

- Þegar við ítrum yfir öll hlutmengi endum við oft með tímaflækjuna $\mathcal{O}(2^n)$ eða $\mathcal{O}(n \cdot 2^n)$.
- Svo slíkar lausnir virka fyrir $n \sim 20$ en verða of hægar fyrir $n \geq 30$.
- Það er þó oft hægt að beita nokkuð almennri aðferð til að bæta tímaflækjuna.
- Tökum lýsandi dæmi.

- Okkur eru gefnar n heiltölur ásamt heiltölunum $m < n$ og t.

- Okkur eru gefnar n heiltölur ásamt heiltölunum $m < n$ og t.
- Á hversu marga vegu má velja nákvæmlega m af tölunum þannig að summa þeirra sé nákvæmlega t?

- Okkur eru gefnar n heiltölur ásamt heiltölunum $m < n$ og t.
- Á hversu marga vegu má velja nákvæmlega m af tölunum þannig að summa þeirra sé nákvæmlega t?
- Ef við beitum hefðbundinni tæmandi leit fáum við tímaflækjuna $\mathcal{O}(n \cdot 2^n)$.

- Okkur eru gefnar n heiltölur ásamt heiltölunum $m < n$ og t.
- Á hversu marga vegu má velja nákvæmlega m af tölunum þannig að summa þeirra sé nákvæmlega t?
- Ef við beitum hefðbundinni tæmandi leit fáum við tímaflækjuna $\mathcal{O}(n \cdot 2^n)$.
- En hvað ef $n = 30$?

- Okkur eru gefnar n heiltölur ásamt heiltölunum $m < n$ og t.
- Á hversu marga vegu má velja nákvæmlega m af tölunum þannig að summa þeirra sé nákvæmlega t?
- Ef við beitum hefðbundinni tæmandi leit fáum við tímaflækjuna $\mathcal{O}(n \cdot 2^n)$.
- En hvað ef $n = 30$?
- Þá er hefðbundin tæmandi leit of hæg.

- Skiptum tölunum í tvennt og reiknum summur allra hlutmengja þeirra og geymum eftir því hversu margar tölur eru í hlutmenginu.

- Skiptum tölunum í tvennt og reiknum summur allra hlutmengja þeirra og geymum eftir því hversu margar tölur eru í hlutmenginu.
- Ítrum síðan í gegnum öll hlutmengin í annari skiptingunni og notum helmingunarleit til að telja hversu mörg hlutmengi í hinni skiptingunni hafa réttan fjölda talna og rétta summu.

```c
void bf(int *a, int n, int *u)
{
    int i, j;
    for (i = 0; i < (1 << n); i++)
    {
        u[i] = 0;
        for (j = 0; j < n; j++) if (i&(1 << j)) u[i] += a[j];
    }
}

int bs(int *a, int t, int n)
{
    int r = -1, s;
    for (s = n; s >= 1; s /= 2) while (r + s < n && a[r + s] < t) r += s;
    return r + 1;
}

int solve_internal(int *a, int *b, int n, int m, int x, int t)
{
    int r = 0, i, j, z, u[1 << n], v[1 << m], e, l[m + 1], h[m + 1][1 << m];
    for (i = z = 0; i < m + 1; i++) l[i] = 0;
    bf(a, n, u), bf(b, m, v);
    for (i = 0; i < (1 << m); z = __builtin_popcount(++i)) h[z][l[z]++] = v[i];
    for (i = 0; i < m + 1; i++) qsort(h[i], l[i], sizeof *h[i], cmp);
    for (i = z = 0; i < (1 << n); z = __builtin_popcount(++i))
    {
        if (x - z < 0 || x - z > m || t < u[i]) continue;
        r += bs(h[x - z], t - u[i] + 1, l[x - z]);
        r -= bs(h[x - z], t - u[i], l[x - z]);
    }
    return r;
}

int solve(int *a, int n, int x, int t)
{
    return solve_internal(a, a + n/2, n/2, (n + 1)/2, x, t);
}
```

- Með þessari aðferð erum við aðeins að framkvæma tæmandi leit á helming listans, sem svarar til kvaratrótsminnkunar á stærð lausnarrúmsins.

- Með þessari aðferð erum við aðeins að framkvæma tæmandi leit á helming listans, sem svarar til kvaratrótsminnkunar á stærð lausnarrúmsins.
- Tæmandi leitin hefur tímaflækjuna $\mathcal{O}($ $)$.

- Með þessari aðferð erum við aðeins að framkvæma tæmandi leit á helming listans, sem svarar til kvaratrótsminnkunar á stærð lausnarrúmsins.
- Tæmandi leitin hefur tímaflækjuna $\mathcal{O}(n \cdot 2^{n/2})$.

- Með þessari aðferð erum við aðeins að framkvæma tæmandi leit á helming listans, sem svarar til kvaratrótsminnkunar á stærð lausnarrúmsins.
- Tæmandi leitin hefur tímaflækjuna $\mathcal{O}(n \cdot 2^{n/2})$.
- Sameining lausnanna hefur tímaflækjuna

$$\mathcal{O}(\qquad\qquad\qquad)$$

- Með þessari aðferð erum við aðeins að framkvæma tæmandi leit á helming listans, sem svarar til kvaratrótsminnkunar á stærð lausnarrúmsins.
- Tæmandi leitin hefur tímaflækjuna $\mathcal{O}(n \cdot 2^{n/2})$.
- Sameining lausnanna hefur tímaflækjuna

$$\mathcal{O}(2^{n/2} \cdot \log 2^{n/2})$$

- Með þessari aðferð erum við aðeins að framkvæma tæmandi leit á helming listans, sem svarar til kvaratrótsminnkunar á stærð lausnarrúmsins.
- Tæmandi leitin hefur tímaflækjuna $\mathcal{O}(n \cdot 2^{n/2})$.
- Sameining lausnanna hefur tímaflækjuna

$$\mathcal{O}(2^{n/2} \cdot \log 2^{n/2}) = \mathcal{O}(\qquad).$$

- Með þessari aðferð erum við aðeins að framkvæma tæmandi leit á helming listans, sem svarar til kvaratrótsminnkunar á stærð lausnarrúmsins.
- Tæmandi leitin hefur tímaflækjuna $\mathcal{O}(n \cdot 2^{n/2})$.
- Sameining lausnanna hefur tímaflækjuna

$$\mathcal{O}(2^{n/2} \cdot \log 2^{n/2}) = \mathcal{O}(n \cdot 2^{n/2}).$$

- Með þessari aðferð erum við aðeins að framkvæma tæmandi leit á helming listans, sem svarar til kvaratrótsminnkunar á stærð lausnarrúmsins.
- Tæmandi leitin hefur tímaflækjuna $\mathcal{O}(n \cdot 2^{n/2})$.
- Sameining lausnanna hefur tímaflækjuna

$$\mathcal{O}(2^{n/2} \cdot \log 2^{n/2}) = \mathcal{O}(n \cdot 2^{n/2}).$$

- Heildartímaflækjan er því $\mathcal{O}(\qquad)$.

- Með þessari aðferð erum við aðeins að framkvæma tæmandi leit á helming listans, sem svarar til kvaratrótsminnkunar á stærð lausnarrúmsins.
- Tæmandi leitin hefur tímaflækjuna $\mathcal{O}(n \cdot 2^{n/2})$.
- Sameining lausnanna hefur tímaflækjuna

$$\mathcal{O}(2^{n/2} \cdot \log 2^{n/2}) = \mathcal{O}(n \cdot 2^{n/2}).$$

- Heildartímaflækjan er því $\mathcal{O}(n \cdot 2^{n/2})$.

Tæmandi leit, kostir og gallar

- Það eru ýmsir kostir við tæmandi leit.

Tæmandi leit, kostir og gallar

- Það eru ýmsir kostir við tæmandi leit.
- Til að mynda er lausnin sem reikniritin skila alltaf rétt (við sjáum seinna aðferðir þar sem það gildir ekki)

Tæmandi leit, kostir og gallar

- Það eru ýmsir kostir við tæmandi leit.
- Til að mynda er lausnin sem reikniritin skila alltaf rétt (við sjáum seinna aðferðir þar sem það gildir ekki)
- Tæmandi leit á það til að vera auðveld í útfærslu (þegar maður er kominn með smá æfingu).

Tæmandi leit, kostir og gallar

- Það eru ýmsir kostir við tæmandi leit.
- Til að mynda er lausnin sem reikniritin skila alltaf rétt (við sjáum seinna aðferðir þar sem það gildir ekki)
- Tæmandi leit á það til að vera auðveld í útfærslu (þegar maður er kominn með smá æfingu).
- Á keppnum er tæmandi leit yfirleitt í léttu dæmunum, ef hún er í keppninni á annað borð.

Tæmandi leit, kostir og gallar

- Það eru ýmsir kostir við tæmandi leit.
- Til að mynda er lausnin sem reikniritin skila alltaf rétt (við sjáum seinna aðferðir þar sem það gildir ekki)
- Tæmandi leit á það til að vera auðveld í útfærslu (þegar maður er kominn með smá æfingu).
- Á keppnum er tæmandi leit yfirleitt í léttu dæmunum, ef hún er í keppninni á annað borð.
- Keppnir innihalda frekar dæmi þar sem tæmandi leit er aðeins hluti af lausninni.