

Lausnir á lokakeppnisdæmum

Bergur Snorrason, Atli FF

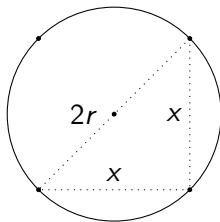
20. apríl 2022

- ▶ Þér er gefinn hringur með geisla r og þú átt að dreifa fjórum punktum jafnt á hringinn.

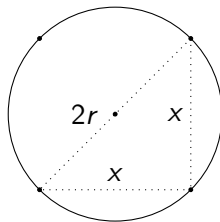
Skálagerð

- ▶ Þér er gefinn hringur með geisla r og þú átt að dreifa fjórum punktum jafnt á hringinn.
- ▶ Hver verður fjarlægðin milli aðliggjandi punkta?

Skálagerð

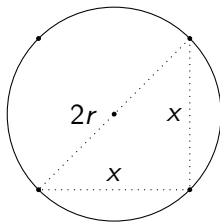


Skálagerð



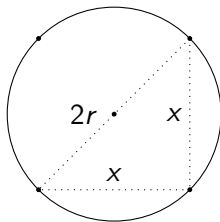
- ▶ Við vitum að þríhyrningurinn merktur með punktalínum er rétthyrndur (setning Palesar).

Skálagerð



- ▶ Við vitum að þríhyrningurinn merktur með punktalínum er rétthyrndur (setning Palesar).
- ▶ Svo $2x^2 = 4r^2$ (setning Pýþagorasar).

Skálagerð



- ▶ Við vitum að þríhyrningurinn merktur með punktalínum er rétthyrndur (setning Palesar).
- ▶ Svo $2x^2 = 4r^2$ (setning Pýþagorasar).
- ▶ Svarið er því $x = r\sqrt{2}$.

DCC líkur

- ▶ Gefna teninga í DCC kerfinu og líkur p , hvað þarf að hækka annan teninginn mikið svo hann hafi $p\%$ vinningslíkur?

- ▶ Líkurnar á að n hliða teningur sigri m hliða tening má hér einfaldlega reikna með tvöfaldri for-lykkju því tölurnar eru svo smáar.

DCC líkur

- ▶ Líkurnar á að n hliða teningur sigri m hliða tening má hér einfaldlega reikna með tvöfaldri for-lykkju því tölurnar eru svo smáar.
- ▶ Ytri lykkjan fer frá 1 til n , hin frá 1 til m og þegar ytri breytan er stærri (strangt!) hækkum við teljara um 1. Deilum með nm í lokin og fáum líkurnar.

DCC líkur

- ▶ Líkurnar á að n hliða teningur sigri m hliða tening má hér einfaldlega reikna með tvöfaldri for-lykkju því tölurnar eru svo smáar.
- ▶ Ytri lykkjan fer frá 1 til n , hin frá 1 til m og þegar ytri breytan er stærri (strangt!) hækkum við teljara um 1. Deilum með nm í lokin og fáum líkurnar.
- ▶ Þá er bara að gera þetta aftur og aftur þar til líkurnar eru stærri en eða jöfn (ekki strangt!) $p\%$, hækka tening um einn í keðjunni í einu.

DCC líkur

- ▶ Líkurnar á að n hliða teningur sigri m hliða tening má hér einfaldlega reikna með tvöfaldri for-lykkju því tölurnar eru svo smáar.
- ▶ Ytri lykkjan fer frá 1 til n , hin frá 1 til m og þegar ytri breytan er stærri (strangt!) hækkum við teljara um 1. Deilum með nm í lokin og fáum líkurnar.
- ▶ Þá er bara að gera þetta aftur og aftur þar til líkurnar eru stærri en eða jöfn (ekki strangt!) $p\%$, hækka tening um einn í keðjunni í einu.
- ▶ Passa nákvæmni, betra jafnvel að nota almenn brot heldur en fleytitölur. Passa að ekki sé hægt að fara uppfyrrir 30 hliðar.

- ▶ Gefin heiltala $n \leq 10^{18}$, eru til heiltölur $a, b > 1$ þannig að $n = ab^2$?

- ▶ Frumþáttum þannig að $n = p_1^{e_1} \dots p_m^{e_m}$.

Vatnskubbur

- ▶ Frumþáttum þannig að $n = p_1^{e_1} \dots p_m^{e_m}$.
- ▶ Tökum eftir að ef $e_1 = \dots = e_m = 1$ þá er þetta ekki hægt.

Vatnskubbur

- ▶ Frumpáttum þannig að $n = p_1^{e_1} \dots p_m^{e_m}$.
- ▶ Tökum eftir að ef $e_1 = \dots = e_m = 1$ þá er þetta ekki hægt.
- ▶ Ef $m = 1$ og $e_1 = 2$ þá er þetta heldur ekki hægt.

Vatnskubbur

- ▶ Frumpáttum þannig að $n = p_1^{e_1} \dots p_m^{e_m}$.
- ▶ Tökum eftir að ef $e_1 = \dots = e_m = 1$ þá er þetta ekki hægt.
- ▶ Ef $m = 1$ og $e_1 = 2$ þá er þetta heldur ekki hægt.
- ▶ Annars er þetta hægt.

Vatnskubbur

- ▶ Frumpáttum þannig að $n = p_1^{e_1} \dots p_m^{e_m}$.
- ▶ Tökum eftir að ef $e_1 = \dots = e_m = 1$ þá er þetta ekki hægt.
- ▶ Ef $m = 1$ og $e_1 = 2$ þá er þetta heldur ekki hægt.
- ▶ Annars er þetta hægt.
- ▶ Þá er til j þannig að $e_j \geq 2$ svo við getum látið $b = p_j$.

Vatnskubbur

- ▶ Frumpáttum þannig að $n = p_1^{e_1} \dots p_m^{e_m}$.
- ▶ Tökum eftir að ef $e_1 = \dots = e_m = 1$ þá er þetta ekki hægt.
- ▶ Ef $m = 1$ og $e_1 = 2$ þá er þetta heldur ekki hægt.
- ▶ Annars er þetta hægt.
- ▶ Þá er til j þannig að $e_j \geq 2$ svo við getum látið $b = p_j$.
- ▶ Við þurfum að passa að n er stór, svo við þurfum reiknirit Pollards til að lausnin verði nógu hröð.

Vatnskubbur

- ▶ Frumpáttum þannig að $n = p_1^{e_1} \dots p_m^{e_m}$.
- ▶ Tökum eftir að ef $e_1 = \dots = e_m = 1$ þá er þetta ekki hægt.
- ▶ Ef $m = 1$ og $e_1 = 2$ þá er þetta heldur ekki hægt.
- ▶ Annars er þetta hægt.
- ▶ Þá er til j þannig að $e_j \geq 2$ svo við getum látið $b = p_j$.
- ▶ Við þurfum að passa að n er stór, svo við þurfum reiknirit Pollards til að lausnin verði nógu hröð.
- ▶ Reiknirit Pollards er of hægt fyrir stóra frumtölu þar að auki, svo byrja þarf á að nota reiknirit Miller-Rabin.

Önnur lausn

- ▶ Einnig má vera aðeins sniðugur og sleppa öllu flottu reikniritunum.

Önnur lausn

- ▶ Einnig má vera aðeins sniðugur og sleppa öllu flottu reikniritunum.
- ▶ Það þarf aðeins að fjarlægja þættina úr n sem eru $\leq \sqrt[3]{n}$.

Önnur lausn

- ▶ Einnig má vera aðeins sniðugur og sleppa öllu flottu reikniritunum.
- ▶ Það þarf aðeins að fjarlægja þættina úr n sem eru $\leq \sqrt[3]{n}$.
- ▶ Eftirlátum restina af þessarri lausn sem æfingu fyrir lesanda.

Bíórugl

- ▶ Það eru $n \leq 10^{18}$ einstaklingar í bíó og þeir sitja allar í sömu röð og fylla akkúrat röðina.

Bíóruhl

- ▶ Það eru $n \leq 10^{18}$ einstaklingar í bíó og þeir sitja allar í sömu röð og fylla akkúrat röðina.
- ▶ Í hlé fara allir á klóíð og vilja svo sæti sem er í mesta lagi tveimur sætum frá upprunalega sætinu sínu.

Bíóruhl

- ▶ Það eru $n \leq 10^{18}$ einstaklingar í bíó og þeir sitja allar í sömu röð og fylla akkúrat röðina.
- ▶ Í hlé fara allir á klóíð og vilja svo sæti sem er í mesta lagi tveimur sætum frá upprunalega sætinu sínu.
- ▶ Á hversu marga vegu geta þeir sest aftur?

Bíórugl

- ▶ Við leysum þetta með því að finna rakningarvensl sem lýsa dæminu.

Bíórugl

- ▶ Við leysum þetta með því að finna rakningarvensl sem lýsa dæminu.
- ▶ Með því að skoða hvernig dæmið skiptist í smærri tilfelli (og handreikna grunntilfellin) fæst að

$$c_n = 14c_{n-1} + 2c_{n-3} - c_{n-5},$$

ef $n > 4$ og $c_0 = 1, c_1 = 1, c_2 = 2, c_3 = 6$ og $c_4 = 14$.

Bíórugl

- ▶ Við leysum þetta með því að finna rakningarvensl sem lýsa dæminu.
- ▶ Með því að skoða hvernig dæmið skiptist í smærri tilfelli (og handreikna grunntilfellin) fæst að

$$c_n = 14c_{n-1} + 2c_{n-3} - c_{n-5},$$

ef $n > 4$ og $c_0 = 1, c_1 = 1, c_2 = 2, c_3 = 6$ og $c_4 = 14$.

- ▶ Við getum síðan notað fylkjamargföldun til að reikna c_n í logratíma.

Bíórugl

- ▶ Við leysum þetta með því að finna rakningarvensl sem lýsa dæminu.
- ▶ Með því að skoða hvernig dæmið skiptist í smærri tilfelli (og handreikna grunntilfellin) fæst að

$$c_n = 14c_{n-1} + 2c_{n-3} - c_{n-5},$$

ef $n > 4$ og $c_0 = 1, c_1 = 1, c_2 = 2, c_3 = 6$ og $c_4 = 14$.

- ▶ Við getum síðan notað fylkjamargföldun til að reikna c_n í logratíma.
- ▶ Ef við viljum ekki reikna grunntilfellin í höndunum getum við notað tæmandi leit til þessa að finna þau.

Bíóruhl

- ▶ Við leysum þetta með því að finna rakningarvensl sem lýsa dæminu.
- ▶ Með því að skoða hvernig dæmið skiptist í smærri tilfelli (og handreikna grunntilfellin) fæst að

$$c_n = 14c_{n-1} + 2c_{n-3} - c_{n-5},$$

ef $n > 4$ og $c_0 = 1, c_1 = 1, c_2 = 2, c_3 = 6$ og $c_4 = 14$.

- ▶ Við getum síðan notað fylkjamargföldun til að reikna c_n í logratíma.
- ▶ Ef við viljum ekki reikna grunntilfellin í höndunum getum við notað tæmandi leit til þessa að finna þau.
- ▶ Við getum líka fundið stuðlana með Gauss-Jordan eyðingu.

Réttur krappi er rangur

- ▶ Gefnir eru $n \leq 3\,000$ punktar í plani.

Réttur krappi er rangur

- ▶ Gefnir eru $n \leq 3\,000$ punktar í plani.
- ▶ Hversu margar þrenndir í punkta safninu mynda rétthyrndan þríhyrning?

Réttur krappi er rangur

- ▶ Það er lítið mál að skoða allar þrenndir punkta, en sú lausn er $\mathcal{O}(n^3)$ sem er of hægt.

Réttur krappi er rangur

- ▶ Það er lítið mál að skoða allar þrenndir punkta, en sú lausn er $\mathcal{O}(n^3)$ sem er of hægt.
- ▶ Veljum einhver punkt sem vendipunkt og skoðum allar línur sem liggja gegnum vendi punktinn og einhvern annan punkt í safninu.

Réttur krappi er rangur

- ▶ Það er lítið mál að skoða allar þrenndir punkta, en sú lausn er $\mathcal{O}(n^3)$ sem er of hægt.
- ▶ Veljum einhver punkt sem vendipunkt og skoðum allar línur sem liggja gegnum vendi punktinn og einhvern annan punkt í safninu.
- ▶ Ef tvær línur skerast í réttu horni þá svara þær til þrenndar í punktasetninu sem myndar rétthyrning.

Réttur krappi er rangur

- ▶ Það er lítið mál að skoða allar þrenndir punkta, en sú lausn er $\mathcal{O}(n^3)$ sem er of hægt.
- ▶ Veljum einhver punkt sem vendipunkt og skoðum allar línur sem liggja gegnum vendi punktinn og einhvern annan punkt í safninu.
- ▶ Ef tvær línur skerast í réttu horni þá svara þær til þrenndar í punktasetninu sem myndar rétthyrning.
- ▶ Við getum fundið, fyrir tiltekna línu, hversu margar línur hún sker undir réttu horni með helmingunarleit (tveimur leitum reyndar) eða gagngrindum á borða við leitartré (`set<...>`) eða hakkatöflu (`unordered_map<...>`).

Réttur krappi er rangur

- ▶ Það er lítið mál að skoða allar þrenndir punkta, en sú lausn er $\mathcal{O}(n^3)$ sem er of hægt.
- ▶ Veljum einhver punkt sem vendipunkt og skoðum allar línur sem liggja gegnum vendi punktinn og einhvern annan punkt í safninu.
- ▶ Ef tvær línur skerast í réttu horni þá svara þær til þrenndar í punktastafninu sem myndar rétthyrning.
- ▶ Við getum fundið, fyrir tiltekna línu, hversu margar línur hún sker undir réttu horni með helmingunarleit (tveimur leitum reyndar) eða gagngrindum á borða við leitartré (`set<...>`) eða hakkatöflu (`unordered_map<...>`).
- ▶ Endurtökum svo þannig að allir punktar verði vendipunktar og stytum svo út endurtekningar.

Réttur krappi er rangur

- ▶ Það er lítið mál að skoða allar þrenndir punkta, en sú lausn er $\mathcal{O}(n^3)$ sem er of hægt.
- ▶ Veljum einhver punkt sem vendipunkt og skoðum allar línur sem liggja gegnum vendi punktinn og einhvern annan punkt í safninu.
- ▶ Ef tvær línur skerast í réttu horni þá svara þær til þrenndar í punktastafninu sem myndar rétthyrning.
- ▶ Við getum fundið, fyrir tiltekna línu, hversu margar línur hún sker undir réttu horni með helmingunarleit (tveimur leitum reyndar) eða gagngrindum á borða við leitartré (`set<...>`) eða hakkatöflu (`unordered_map<...>`).
- ▶ Endurtökum svo þannig að allir punktar verði vendipunktar og stytum svo út endurtekningar.
- ▶ Þessi lausn er $\mathcal{O}(n^2 \log n)$.

Önnur lausn

- ▶ Einnig má nýta sér að þetta séu allt heiltölur. Ef við erum með línu gegnum $(0, 0)$ og tvo punkta verða hnit annars punktsins að vera margfeldi af hnitum hins.

Önnur lausn

- ▶ Einnig má nýta sér að þetta séu allt heiltölur. Ef við erum með línu gegnum $(0, 0)$ og tvo punkta verða hnit annars punktsins að vera margfeldi af hnitum hins.
- ▶ Veljum þá einn vendipunkt í einu og stytum út stærsta samdeili hnita allra punkta til að fá punktasaftn, höldum utan um hvað það eru mörg af hverjum punkti því við fáum mögulega endurtekningar.

Önnur lausn

- ▶ Einnig má nýta sér að þetta séu allt heiltölur. Ef við erum með línu gegnum $(0, 0)$ og tvo punkta verða hnit annars punktsins að vera margfeldi af hnitum hins.
- ▶ Veljum þá einn vendipunkt í einu og stytum út stærsta samdeili hnita allra punkta til að fá punktastafn, höldum utan um hvað það eru mörg af hverjum punkti því við fáum mögulega endurtekningar.
- ▶ Svo fyrir hvern punkt skoðum við bara hvað það eru margir af honum og af honum snúið um $\pi/2$, leggjum það við niðurstöðu.

Önnur lausn

- ▶ Einnig má nýta sér að þetta séu allt heiltölur. Ef við erum með línu gegnum $(0, 0)$ og tvo punkta verða hnit annars punktsins að vera margfeldi af hnitum hins.
- ▶ Veljum þá einn vendipunkt í einu og stytum út stærsta samdeili hnita allra punkta til að fá punktastafn, höldum utan um hvað það eru mörg af hverjum punkti því við fáum mögulega endurtekningar.
- ▶ Svo fyrir hvern punkt skoðum við bara hvað það eru margir af honum og af honum snúið um $\pi/2$, leggjum það við niðurstöðu.
- ▶ Þessi lausn er $\mathcal{O}(n^2 \log(w))$ þar sem w er stærsta leyfilega hnit talnanna, sem gengur einnig.

Leiðinda rigning

- Finna á leiðina heim fyrir Atla sem bleytir hann sem minnst. Höfum net með $n \leq 5 \cdot 10^4$ hnúta, $m \leq 10^5$ leggi og svo $q \leq 5 \cdot 10^4$ fyrirspurnar. Þær biðja annað hvort um að breyta hvort hnútur sé strætóstöð eða að finna hvaða stöð er næst gefnum hnút.

Drög að lausn

- ▶ Fjarlægðin er ekki summa vigtanna, heldur bara hæsta vigtin sem kemur fyrir á leiðinni. Við getum því hent öllum leggjum sem eru ekki í minnsta spennandi tré netsins.

Drög að lausn

- ▶ Fjarlægðin er ekki summa vigtanna, heldur bara hæsta vigtin sem kemur fyrir á leiðinni. Við getum því hent öllum leggjum sem eru ekki í minnsta spannandi tré netsins.
- ▶ Þá erum við með tré. Ímyndum okkur að við viljum reikna fjarlægð í næstu stöð fyrir alla hnúta í byrjun. Getum gert þetta með reikniriti Dijkstra, setjum allar strætóstöðvar sem fjarlægð 0 í byrjun.

Drög að lausn

- ▶ Fjarlægðin er ekki summa vigtanna, heldur bara hæsta vigtin sem kemur fyrir á leiðinni. Við getum því hent öllum leggjum sem eru ekki í minnsta spannandi tré netsins.
- ▶ Þá erum við með tré. Ímyndum okkur að við viljum reikna fjarlægð í næstu stöð fyrir alla hnúta í byrjun. Getum gert þetta með reikniriti Dijkstra, setjum allar strætóstöðvar sem fjarlægð 0 í byrjun.
- ▶ En við getum ekki uppfært þetta nógu hratt. Hvað ef við viljum skoða fjarlægð í eina tiltekna stöð hratt?

Drög að lausn

- ▶ Fjarlægðin er ekki summa vigtanna, heldur bara hæsta vigtin sem kemur fyrir á leiðinni. Við getum því hent öllum leggjum sem eru ekki í minnsta spannandi tré netsins.
- ▶ Þá erum við með tré. Ímyndum okkur að við viljum reikna fjarlægð í næstu stöð fyrir alla hnúta í byrjun. Getum gert þetta með reikniriti Dijkstra, setjum allar strætóstöðvar sem fjarlægð 0 í byrjun.
- ▶ En við getum ekki uppfært þetta nógu hratt. Hvað ef við viljum skoða fjarlægð í eina tiltekna stöð hratt?
- ▶ Setjum upp LCA töflu fyrir tréð! Þá getum við fundið hámarksvigtina milli upphafspunkts og að strætóstöð í logratíma.

Drög að lausn

- ▶ Fjarlægðin er ekki summa vigtanna, heldur bara hæsta vigtin sem kemur fyrir á leiðinni. Við getum því hent öllum leggjum sem eru ekki í minnsta spannandi tré netsins.
- ▶ Þá erum við með tré. Ímyndum okkur að við viljum reikna fjarlægð í næstu stöð fyrir alla hnúta í byrjun. Getum gert þetta með reikniriti Dijkstra, setjum allar strætóstöðvar sem fjarlægð 0 í byrjun.
- ▶ En við getum ekki uppfært þetta nógu hratt. Hvað ef við viljum skoða fjarlægð í eina tiltekna stöð hratt?
- ▶ Setjum upp LCA töflu fyrir tréð! Þá getum við fundið hámarksvigtina milli upphafspunkts og að strætóstöð í logratíma.
- ▶ Hvernig má nú sameina þetta tvennt til að fá skikkanlega tímaflkju?

Rótarþáttun

- ▶ Við skiptum fyrirspurnunum í \sqrt{q} fötur. Í byrjuninni á hverri fötu reiknum við allar fjarlægðir í stöðvar sem munu ekki breytast í þessarri fötu með því að nota Dijkstra.

Rótarþáttun

- ▶ Við skiptum fyrirspurnunum í \sqrt{q} fötur. Í byrjuninni á hverri fötu reiknum við allar fjarlægðir í stöðvar sem munu ekki breytast í þessarri fötu með því að nota Dijkstra.
- ▶ Löbbum svo í gegnum fötuna. Flettum upp gildi í Dijkstra niðurstöðum fyrir hverja fyrirspurn, en höldum einnig utan um lista fyrir allar breyttar stöðvar. Við reiknum fjarlægðirnar í þær allar til viðbótar með LCA og tökum besta gildið. Þessi listi verður aldrei lengri en \sqrt{q} því hann getur aðeins breyst um eitt stak í hverri fyrirspurn.

Rótarþáttun

- ▶ Við skiptum fyrirspurnunum í \sqrt{q} fötur. Í byrjuninni á hverri fötu reiknum við allar fjarlægðir í stöðvar sem munu ekki breytast í þessarri fötu með því að nota Dijkstra.
- ▶ Löbbum svo í gegnum fötuna. Flettum upp gildi í Dijkstra niðurstöðum fyrir hverja fyrirspurn, en höldum einnig utan um lista fyrir allar breyttar stöðvar. Við reiknum fjarlægðirnar í þær allar til viðbótar með LCA og tökum besta gildið. Þessi listi verður aldrei lengri en \sqrt{q} því hann getur aðeins breyst um eitt stak í hverri fyrirspurn.
- ▶ Reiknum Dijkstra \sqrt{q} sinnum, það tekur samtals $\mathcal{O}(\sqrt{q}n \log(n))$ tíma. Reiknum LCA töflu í byrjun í $\mathcal{O}(n \log(n))$ tíma. Flettum upp í henni fyrir hvert stak listans og í hverri fyrirspurn, það tekur $\mathcal{O}(q\sqrt{q} \log(n))$. Ef við reiknum upp úr þessu sést að þetta allt saman er undir tímamörkum.