

Kvik bestun

Bergur Snorrason

17. febrúar 2022

# Rakningarvensl

- ▶ Talnarunan  $a_1, a_2, \dots$  kallast  $k$ -ta stigs rakningarvensl ef til er fall  $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  þannig að

$$a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-k})$$

fyrir öll  $n > k$ .

- ▶ Frægasta dæmið um rakningarvensl er *Fibonacci runan*.
- ▶ Hún er annars stigs rakningarvensl gefin með fallinu  $f(x, y) = x + y$ .
- ▶ Reikna má upp úr þessum venslum endurkvæmt.

```
3 int fib(int x)
4 {
5     if (x < 3) return 1;
6     return fib(x - 1) + fib(x - 2);
7 }
```

- ▶ Í hverju skrefi skiptist endurkvæmnin í tvennt svo þetta forrit hefur tímaflækju  $\mathcal{O}(2^n)$ .
- ▶ Við getum þó bætt þetta til muna með því að geyma niðurstöðuna úr hverju kalli.
- ▶ Þá nægir að reikna hvert gildi einu sinni.
- ▶ Þessi viðbót kallast *minnun* (e. *memoization*).

```
1 #include <stdio.h>
2 #define MAXN 1000000
3
4 int d[MAXN]; // Hér geymum við skilagildi fib(...).
5             // Ef d[i] = -1 þá eigum við eftir að reikna fib(i).
6 int fib(int x)
7 {
8     if (d[x] != -1) return d[x];
9     if (x < 2) return 1;
10    return d[x] = fib(x - 1) + fib(x - 2);
11 }
12
13 int main()
14 {
15     int n, i;
16     scanf("%d", &n);
17     for (i = 0; i < n; i++) d[i] = -1;
18     printf("%d\n", fib(n - 1));
19     return 0;
20 }
```

## Ofansækin kvik bestun

- ▶ Nú reiknum við hvert gildi aðeins einu sinni.
- ▶ Við þurfum að reikna  $n$  gildi og hvert gildi má reikna í  $\mathcal{O}(1)$  tíma, svo í heildina er forritið  $\mathcal{O}(n)$ .
- ▶ Án minnunar náum við með erfiðum að reikna fertugustu Fibonacci töluna (því eframatið  $\mathcal{O}(2^n)$  mætti bæta ögn) en með minnun náum við hæglega að reikna milljónustu Fibonacci töluna (hún mun þó ekki einu sinni passa í 64 bita).
- ▶ Ef lausnin okkar er endurkvæm með minnun kallast hún *ofansækin kvik bestun* (e. *top down dynamic programming*).

## Neðansækin kvik bestun

- ▶ Það er þó lítið mál að breyta endurkvæmnu lausninni okkar í ítraða lausn.
- ▶ Eina sem við þurfum að passa er að reikna gildin í vaxandi röð.

```
1 #include <stdio.h>
2
3 int main()
4 {
5     int n, i;
6     scanf("%d", &n);
7     int a[n];
8     a[0] = a[1] = 1;
9     for (i = 2; i < n; i++) a[i] = a[i - 1] + a[i - 2];
10    printf("%d\n", a[n - 1]);
11    return 0;
12 }
```

- ▶ Þegar ofansækin kvik bestunar lausn er útfærð með ítrun köllum við það *neðansækna kvika bestun* (e. *bottom up dynamic programming*).

- ▶ Í neðansækinni kvikri bestun byrjum við með grunntilfellin og smíðum flóknari lausnirnar út frá þeim.
- ▶ Í ofansækinni kvikri bestun brjótum við fyrst niður flóknu dæmin í smærri dæmi sem við vitum svarið við og reiknum svo út úr því.
- ▶ Ef endurkvæmnafallið okkar er háð  $k$  breytum þá segjum við að lausnin okkar sé  $k$  víð kvik bestun.
- ▶ Ofansækin kvik bestun hentar þegar við erum að vinna með fleiri en eina vídd.
- ▶ Þá getur verið erfitt að ítra í gegnum stöðurnar í “rétttri röð”.

- ▶ Annar kostur ofansækinna kvikrar bestunar er að lausnirnar geta verið nokkuð einsleitar.

```
1 #include <stdio.h>
2 #define MAXN 1000000
3
4 int d[MAXN];
5 int dp_lookup(int x)
6 {
7     if (d[x] != -1) return d[x];
8     if (/* Er þetta grunntilfelli? */)
9     {
10         /* Skila tilheyrandi grunnsvari */
11     }
12     /* Reikna d[x] */
13     return d[x];
14 }
15
16 int main()
17 {
18     int n, i;
19     scanf("%d", &n);
20     for (i = 0; i < MAXN; i++) d[i] = -1;
21     printf("%d\n", dp_lookup(n));
22     return 0;
23 }
```



- ▶ Neðansækin kvik bestun hefur sýna kosti.
- ▶ Það er stundum hægt að bæta tímaflækjuna með til dæmis sniðugri gagnagrind.
- ▶ Sumar þessara bætinga krefjast þess að útfærsla sé neðansækin.

## Lengsta sameiginlega hlutruna

- ▶ Tökum annað dæmi.
- ▶ Látum  $S = s_1s_2\dots s_n$  og  $T = t_1t_2\dots t_m$  vera strengi af lengd  $n$  og  $m$ , þannig að  $1 \leq n, m \leq 10^3$ .
- ▶ Hver er lengd lengsta strengs  $X$  þannig að hann sé hlutruna í bæði  $S$  og  $T$ ?
- ▶ Takið eftir að "12" og "13" eru hlutrunur í "123" en "21" er það ekki.

- ▶ Getum við sett upp dæmið með þægilegum rakningarvenslum?
- ▶ Ef svo er þá getum við notað kvika bestun.
- ▶ Það er yfirleitt þægilegast að hugsa um rakningarvenslin sem fall, frekar en runu.
- ▶ Látum  $f(i, j)$  tákna lengstu sameiginlegu hlutrunu strengjanna  $s_1 s_2 \dots s_i$  og  $t_1 t_2 \dots t_j$ .
- ▶ Okkur mun svo nægja að reikna  $f(n, m)$ .

- ▶ Við vitum að  $f(0, i) = f(j, 0) = 0$ .
- ▶ Þetta munu vera grunntilfellin okkar.
- ▶ Almennt gildir að ef við erum að reikna  $f(i, j)$  og  $s_i = t_j$  þá getum við látið þann staf vera aftastan í sameiginlegu hlutrununni.
- ▶ Svo  $f(i, j) = f(i - 1, j - 1) + 1$  ef  $s_i = t_j$ .
- ▶ Ef  $s_i \neq t_j$  þá verður annað stakið (eða bæði stökin) að vera ekki í hlutrununni.
- ▶ Við veljum að sjálfsögðu að sleppa þeim sem gefur okkur betra svar, það er að segja  $f(i, j) = \max(f(i - 1, j), f(i, j - 1))$ .
- ▶ Við getum svo sett allt saman og fengið

$$f(i, j) = \begin{cases} 0, & \text{ef } i = 0 \text{ eða } j = 0 \\ f(i - 1, j - 1) + 1, & \text{annars, og ef } s_i = t_j \\ \max(f(i - 1, j), f(i, j - 1)), & \text{annars.} \end{cases}$$

```

6 char s[MAXN], t[MAXN];
7 int d[MAXN][MAXN];
8 int dp_lookup(int x, int y)
9 { // Finnur lengd lengstu sameiginlegu hlutruna s[0:x] og t[0:y].
10   if (d[x][y] != -1) return d[x][y];
11   if (x == 0 || y == 0) return 0;
12   if (s[x - 1] == t[y - 1]) return d[x][y] = dp_lookup(x - 1, y - 1) + 1;
13   return d[x][y] = max(dp_lookup(x - 1, y), dp_lookup(x, y - 1));
14 }
15
16 int lcs(char *a, char *b)
17 { // Finnur lengd lengstu sameiginlegu hlutruna strengjanna a og b.
18   int i, j, n = strlen(a) - 1, m = strlen(b) - 1;
19   strcpy(s, a), strcpy(t, b);
20   for (i = 0; i < n + 1; i++) for (j = 0; j < m + 1; j++) d[i][j] = -1;
21   return dp_lookup(n, m);
22 }

```

- Það er þessi virði að bera saman `dp_lookup(...)` fallið í forritinu og  $f(i, j)$  af glærunni að framan.

$$f(i, j) = \begin{cases} 0, & \text{ef } i = 0 \text{ eða } j = 0 \\ f(i-1, j-1) + 1, & \text{annars, og ef } s_i = t_j \\ \max(f(i-1, j), f(i, j-1)), & \text{annars.} \end{cases}$$

```
8 int dp_lookup(int x, int y)
9 { // Finnur lengd lengstu sameiginlegu hlutruna s[0:x] og t[0:y].
10   if (d[x][y] != -1) return d[x][y];
11   if (x == 0 || y == 0) return 0;
12   if (s[x-1] == t[y-1]) return d[x][y] = dp_lookup(x-1, y-1) + 1;
13   return d[x][y] = max(dp_lookup(x-1, y), dp_lookup(x, y-1));
14 }
```

- ▶ Forritið okkar þarf í versta falli að reikna öll möguleg gildi á  $f(i, j)$ , sem eru  $(n + 1) \cdot (m + 1)$  talsins.
- ▶ En hvert gildi má reikna í  $\mathcal{O}(1)$  tíma.
- ▶ Svo forritið hefur tímaflækjuna  $\mathcal{O}(n \cdot m)$ .

# Skiptimyntadæmið

- ▶ Skoðum aftur Skiptimyntadæmið úr þarsíðustu viku.
- ▶ Þú ert með ótakmarkað magn af  $m$  mismunandi myntum.
- ▶ Þær eru virði  $x_1, x_2, \dots, x_m$ .
- ▶ Til þæginda gerum við ráð fyrir því að  $x_1 = 1$ .
- ▶ Hver er minnsti nauðsynlegi fjöldi af klinki sem þú þarft ef þú vilt gefa  $n$  krónur til baka.



- ▶ Gerum ráð fyrir að við byrjum að gefa til baka  $x_j$  krónur.
- ▶ Þá erum við búin að smækka dæmið niður í  $n - x_j$ .
- ▶ Við getum því skoðað öll mögulega gildi  $x_j$  og séð hvað er best.
- ▶ Við viljum því reikna gildin á fallinu

$$f(i) = \begin{cases} \infty, & \text{ef } i < 0 \\ 0, & \text{ef } i = 0 \\ \min_{j=1,2,\dots,m} f(i - x_j) + 1, & \text{annars.} \end{cases}$$

```

7 int n, m, a[MAXM];
8 int d[MAXN];
9 int dp_lookup(int x)
10 { // Hver er minnsti fjöldi af klinki til að gefa til baka x kr?
11     int i;
12     if (x < 0) return INF; // Þessi lína þarf að vera fremst!
13     if (d[x] != -1) return d[x];
14     if (x == 0) return 0;
15     d[x] = INF;
16     for (i = 0; i < m; i++) d[x] = min(d[x], dp_lookup(x - a[i]) + 1);
17     return d[x];
18 }

```

- ▶ Þetta dæmi má þó hæglega gera neðansækið.

```

1 #include <stdio.h>
2 #define INF (1 << 30)
3 int min(int a, int b) { if (a < b) return a; return b; }
4
5 int main()
6 { // Skiptimyntadæmið með endurtekningu.
7     int i, j, n, m;
8     scanf("%d%d", &n, &m);
9     int d[n + 1], a[m];
10    for (i = 0; i < m; i++) scanf("%d", &a[i]);
11    for (i = 0; i < n + 1; i++) d[i] = INF;
12    d[0] = 0;
13    for (i = 0; i < m; i++)
14    {
15        for (j = 0; j < n + 1 - a[i]; j++) if (d[j] < INF)
16        {
17            d[j + a[i]] = min(d[j + a[i]], d[j] + 1);
18        }
19    }
20
21    printf("%d\n", d[n]);
22    return 0;
23 }

```

- ▶ Breytum dæminu örlítið.
- ▶ Núna höfum við takmarkað magn af hverju klinki.
- ▶ Nánar tiltekið höfum við  $m$  klink að andvirði  $x_1, x_2, \dots, x_m$  (núna geta verið endurtekin gildi).
- ▶ Hver er minnsti fjöldi að klinki sem þarf til að gefa til baka  $n$  krónur, ef það er á annað borð hægt.
- ▶ Nú er óþarfi að gera ráð fyrir því að  $x_1 = 1$ .
- ▶ Hvernig mætti breyta neðansæknu lausninni til að höndla þetta?
- ▶ Skoðum aftur neðansæknu lausnina.

# Hefðbundna skiptimyntadæmið

```
1 #include <stdio.h>
2 #define INF (1 << 30)
3 int min(int a, int b) { if (a < b) return a; return b; }
4
5 int main()
6 { // Skiptimyntadæmið með endurtekningu.
7     int i, j, n, m;
8     scanf("%d%d", &n, &m);
9     int d[n + 1], a[m];
10    for (i = 0; i < m; i++) scanf("%d", &a[i]);
11    for (i = 0; i < n + 1; i++) d[i] = INF;
12    d[0] = 0;
13    for (i = 0; i < m; i++)
14    {
15        for (j = 0; j < n + 1 - a[i]; j++) if (d[j] < INF)
16        {
17            d[j + a[i]] = min(d[j + a[i]], d[j] + 1);
18        }
19    }
20
21    printf("%d\n", d[n]);
22    return 0;
23 }
```

# Nýja dæmið

```
1 #include <stdio.h>
2 #define INF (1 << 30)
3 int min(int a, int b) { if (a < b) return a; return b; }
4
5 int main()
6 { // Skiptimyntadæmið án endurtekningar.
7     int i, j, n, m;
8     scanf("%d%d", &n, &m);
9     int d[n + 1], a[m];
10    for (i = 0; i < m; i++) scanf("%d", &a[i]);
11    for (i = 0; i < n + 1; i++) d[i] = INF;
12    d[0] = 0;
13    for (i = 0; i < m; i++)
14    {
15        for (j = n - a[i]; j >= 0; j--) if (d[j] < INF)
16        {
17            d[j + a[i]] = min(d[j + a[i]], d[j] + 1);
18        }
19    }
20
21    printf("%d\n", d[n]);
22    return 0;
23 }
```

- ▶ Skoðum báðar aðferðirnar á litlu sýnidæmi.
- ▶ Skoðum fyrst með endurtekningum og síðan án endurtekningar.



$$n = 10$$

```
a = [1, 3, 5]
```

 $\wedge$ 
$$d = [0, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1]$$
 $\wedge$ 

1

$$n = 10$$

```
a = [1, 3, 5]
```

$$d = \begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ [0, & 1, & -1, & -1, & -1, & -1, & -1, & -1, & -1, & -1, & -1] \\ \wedge & & | & & & & & & & & & \end{matrix}$$

$$n = 10$$
$$a = [1, 3, 5]$$
$$d = [0, \underset{\sim}{1}, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1]$$

$$n = 10$$
$$a = \underset{\wedge}{[1, 3, 5]}$$
$$d = [0, \underset{\sim}{1}, \underset{|}{2}, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1]$$

n = 10

a = [1, 3, 5]  
^

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d =	[0,	1,	2,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1]
			^								

n = 10

a = [1, 3, 5]  
^

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d =	[0,	1,	2,	3,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1]
			^								

n = 10

a = [1, 3, 5]  
^

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d =	[0,	1,	2,	3,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1]
				^							

n = 10

a = [1, 3, 5]  
^

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d =	[0,	1,	2,	3,	4,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1]
				^							



n = 10

a = [1, 3, 5]  
^

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d =	[0,	1,	2,	3,	4,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1]
					^						

n = 10

a = [1, 3, 5]  
^

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d =	[0,	1,	2,	3,	4,	5,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1]
					^						

n = 10

a = [1, 3, 5]  
^

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d =	[0,	1,	2,	3,	4,	5,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1]
						^					

n = 10

a = [1, 3, 5]  
^

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d =	[0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	-1,	-1,	-1,	-1]
						^					

n = 10

a = [1, 3, 5]  
^

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d =	[0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	-1,	-1,	-1,	-1]
							^				

n = 10

a = [1, 3, 5]  
^

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d =	[0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	-1,	-1,	-1]
							^				

n = 10

a = [1, 3, 5]  
^

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d =	[0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	-1,	-1,	-1]
								^			

n = 10

a = [1, 3, 5]  
^

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d =	[0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	-1,	-1]
								^			



n = 10

a = [1, 3, 5]  
^

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d =	[0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	-1,	-1]
									^		

n = 10

a = [1, 3, 5]  
^

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d =	[0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	-1]
									^		

$$n = 10$$
$$a = [1, 3, 5]$$

```
0   1   2   3   4   5   6   7   8   9  10
d = [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, -1]
      ^ |
```

$$n = 10$$
$$a = \underset{\wedge}{[1, 3, 5]}$$

```
d = [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]
      ~|
```

n = 10

a = [1, 3, 5]  
^

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d =	[0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10]
	^										

n = 10

a = [1, 3, 5]  
^

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d =	[0,	1,	2,	1,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10]
	^										

n = 10

a = [1, 3, 5]

^

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d =	[0,	1,	2,	1,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10]

^

|

n = 10

a = [1, 3, 5]

^

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d =	[0,	1,	2,	1,	2,	5,	6,	7,	8,	9,	10]
		^									



n = 10

a = [1, 3, 5]  
^

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d =	[0,	1,	2,	1,	2,	5,	6,	7,	8,	9,	10]
			^								

n = 10

a = [1, 3, 5]  
^

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d =	[0,	1,	2,	1,	2,	3,	6,	7,	8,	9,	10]
			^								

n = 10

a = [1, 3, 5]  
^

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d =	[0,	1,	2,	1,	2,	3,	6,	7,	8,	9,	10]
				^							

n = 10

a = [1, 3, 5]  
^

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d =	[0,	1,	2,	1,	2,	3,	2,	7,	8,	9,	10]
				^							

n = 10

a = [1, 3, 5]  
^

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d =	[0,	1,	2,	1,	2,	3,	2,	7,	8,	9,	10]
					^						

n = 10

a = [1, 3, 5]  
^

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d =	[0,	1,	2,	1,	2,	3,	2,	3,	8,	9,	10]
					^						

n = 10

a = [1, 3, 5]  
^

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d =	[0,	1,	2,	1,	2,	3,	2,	3,	8,	9,	10]
						^					

n = 10

a = [1, 3, 5]  
^

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d =	[0,	1,	2,	1,	2,	3,	2,	3,	4,	9,	10]
						^					



n = 10

a = [1, 3, 5]  
^

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d =	[0,	1,	2,	1,	2,	3,	2,	3,	4,	9,	10]
							^				

n = 10

a = [1, 3, 5]  
^

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d =	[0,	1,	2,	1,	2,	3,	2,	3,	4,	3,	10]
							^				

n = 10

a = [1, 3, 5]  
^

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d =	[0,	1,	2,	1,	2,	3,	2,	3,	4,	3,	10]
								^			

n = 10

a = [1, 3, 5]  
^

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d =	[0,	1,	2,	1,	2,	3,	2,	3,	4,	3,	4]
								^			

n = 10

a = [1, 3, 5]

^

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d =	[0,	1,	2,	1,	2,	3,	2,	3,	4,	3,	4]
	^										

n = 10

a = [1, 3, 5]

^

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d =	[0,	1,	2,	1,	2,	1,	2,	3,	4,	3,	4]
	^										

n = 10

a = [1, 3, 5]

^

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d =	[0,	1,	2,	1,	2,	1,	2,	3,	4,	3,	4]
		^									

n = 10

a = [1, 3, 5]

^

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d =	[0,	1,	2,	1,	2,	1,	2,	3,	4,	3,	4]
		^									



n = 10

a = [1, 3, 5]

^

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d =	[0,	1,	2,	1,	2,	1,	2,	3,	4,	3,	4]
			^								

n = 10

a = [1, 3, 5]

^

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d =	[0,	1,	2,	1,	2,	1,	2,	3,	4,	3,	4]
			^								

n = 10

a = [1, 3, 5]

^

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d =	[0,	1,	2,	1,	2,	1,	2,	3,	4,	3,	4]
				^							

n = 10

a = [1, 3, 5]

^

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d =	[0,	1,	2,	1,	2,	1,	2,	3,	2,	3,	4]
				^							

n = 10

a = [1, 3, 5]

^

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d =	[0,	1,	2,	1,	2,	1,	2,	3,	2,	3,	4]
					^						

n = 10

a = [1, 3, 5]

^

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d =	[0,	1,	2,	1,	2,	1,	2,	3,	2,	3,	4]
					^						

n = 10

a = [1, 3, 5]

^

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d =	[0,	1,	2,	1,	2,	1,	2,	3,	2,	3,	4]
						^					

n = 10

a = [1, 3, 5]

^

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d =	[0,	1,	2,	1,	2,	1,	2,	3,	2,	3,	2]
						^					



```
n = 10
```

```
a = [1, 3, 5]
```

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d =	[0,	1,	2,	1,	2,	1,	2,	3,	2,	3,	2]

$$n = 10$$
$$a = [1, 3, 5]$$
$$d = [0, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1]$$

n = 10

a = [1, 3, 5]  
^

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d =	[0,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1]
									^		

n = 10

a = [1, 3, 5]  
^

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d =	[0,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1]
								^			

n = 10

a = [1, 3, 5]  
^

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d =	[0,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1]
							^				

n = 10

a = [1, 3, 5]  
      ^

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d =	[0,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1]
						^					

n = 10

a = [1, 3, 5]  
^

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d =	[0,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1]
					^						

n = 10

a = [1, 3, 5]  
^

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d =	[0,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1]
				^							



n = 10

a = [1, 3, 5]  
^

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d =	[0,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1]
			^								

$$n = 10$$
$$a = [1, 3, 5]$$
$$d = [0, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1]$$

$$n = 10$$
$$a = [1, 3, 5]$$
$$d = \begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ [0, & -1, & -1, & -1, & -1, & -1, & -1, & -1, & -1, & -1, & -1] \\ & \wedge & | & & & & & & & & & \end{matrix}$$

$$n = 10$$

```
a = [1, 3, 5]
```

$$d = \begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ [0, & 1, & -1, & -1, & -1, & -1, & -1, & -1, & -1, & -1, & -1] \\ \wedge & & | & & & & & & & & & \end{matrix}$$

n = 10

a = [1, 3, 5]  
^

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d =	[0,	1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1]
								^			

n = 10

a = [1, 3, 5]  
^

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d =	[0,	1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1]
							^				

n = 10

a = [1, 3, 5]  
^

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d =	[0,	1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1]
						^					

n = 10

a = [1, 3, 5]  
^

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d =	[0,	1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1]
					^						



n = 10

a = [1, 3, 5]  
^

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d =	[0,	1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1]
				^							

n = 10

a = [1, 3, 5]  
^

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d =	[0,	1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1]
			^								

n = 10

a = [1, 3, 5]

^

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d =	[0,	1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1]
		^									

n = 10

a = [1, 3, 5]

^

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d =	[0,	1,	-1,	-1,	2,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1]
		^									

n = 10

a = [1, 3, 5]  
^

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d =	[0,	1,	-1,	-1,	2,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1]
	^										

n = 10

a = [1, 3, 5]  
^

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d =	[0,	1,	-1,	1,	2,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1]
	^										

n = 10

a = [1, 3, 5]  
^

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d =	[0,	1,	-1,	1,	2,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1]
						^					

n = 10

a = [1, 3, 5]

^

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d =	[0,	1,	-1,	1,	2,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1]
					^						



n = 10

a = [1, 3, 5]

^

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d =	[0,	1,	-1,	1,	2,	-1,	-1,	-1,	-1,	3,	-1]
					^						

n = 10

a = [1, 3, 5]

^

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d =	[0,	1,	-1,	1,	2,	-1,	-1,	-1,	-1,	3,	-1]
				^							

n = 10

a = [1, 3, 5]

^

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d =	[0,	1,	-1,	1,	2,	-1,	-1,	-1,	2,	3,	-1]
				^							

n = 10

a = [1, 3, 5]

^

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d =	[0,	1,	-1,	1,	2,	-1,	-1,	-1,	2,	3,	-1]
			^								

n = 10

a = [1, 3, 5]

^

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d =	[0,	1,	-1,	1,	2,	-1,	-1,	-1,	2,	3,	-1]
		^									

n = 10

a = [1, 3, 5]  
^

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d =	[0,	1,	-1,	1,	2,	-1,	2,	-1,	2,	3,	-1]
		^									

n = 10

a = [1, 3, 5]

^

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d =	[0,	1,	-1,	1,	2,	-1,	2,	-1,	2,	3,	-1]
	^										

n = 10

a = [1, 3, 5]

^

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d =	[0,	1,	-1,	1,	2,	1,	2,	-1,	2,	3,	-1]
	^										



n = 10

a = [1, 3, 5]

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d =	[0,	1,	-1,	1,	2,	1,	2,	-1,	2,	3,	-1]

- ▶ Hvernig myndum við þó leysa seinna dæmið með ofansækinni kvikri bestun?
- ▶ Við þurfum að hugsa það aðeins öðruvísi.
- ▶ Nú höfum við um tvennt að velja fyrir hvern pening.
- ▶ Annaðhvort notum við hann, eða ekki.
- ▶ Svo við látum  $f(n, j)$  tákna minnsta fjölda af klinki sem þarf til að gefa til baka  $n$  krónur, ef við megum nota klink  $x_j, x_{j+1}, \dots, x_m$ .
- ▶ Þá fáum við að

$$f(i, j) = \begin{cases} \infty, & \text{ef } i < 0 \\ \infty, & \text{ef } i \neq 0 \text{ og } j = m + 1 \\ 0, & \text{ef } i = 0 \text{ og } j = m + 1 \\ \min(f(i, j + 1), & \\ \quad f(i - x_j, j + 1) + 1), & \text{annars.} \end{cases}$$

```

8 int d[MAXN][MAXM];
9 int dp_lookup(int x, int y)
10 { // Minnsta klink til að gefa x kr. með klinki y, y + 1, ..., n.
11     if (x < 0) return INF;
12     if (d[x][y] != -1) return d[x][y];
13     if (y == m) return x == 0 ? 0 : INF;
14     return d[x][y] = min(dp_lookup(x, y + 1),
15                          dp_lookup(x - a[y], y + 1) + 1);
16 }

```

- ▶ Það er nokkuð létt að meta tímaflækjurnar á neðansæknu lausnunum.
- ▶ Þær eru báðar tvöfaldar for-lykkjur, sú ytri af lengd  $m$  og innri af lengd  $\mathcal{O}(n)$ .
- ▶ Svo tímaflækjurnar eru  $\mathcal{O}(n \cdot m)$ .

- ▶ Í ofansæknu lausninni á hefðbundna dæminu þarf að reikna, allt að,  $n + 1$  fallgildi.
- ▶ Hvert gildi má reikna í  $\mathcal{O}(m)$  tíma.
- ▶ Svo í heildina er hún  $\mathcal{O}(n \cdot m)$ .

```
9  int dp_lookup(int x)
10 { // Hver er minnsti fjöldi af klínki til að gefa til baka x kr?
11     int i;
12     if (x < 0) return INF; // Þessi lína þarf að vera fremst!
13     if (d[x] != -1) return d[x];
14     if (x == 0) return 0;
15     d[x] = INF;
16     for (i = 0; i < m; i++) d[x] = min(d[x], dp_lookup(x - a[i]) + 1);
17     return d[x];
18 }
```



- ▶ Hvað gerum við ef við viljum vita *hvaða* klink á að gefa til baka, ekki bara hversu mikið?
- ▶ Takið eftir að þegar við reiknum, til dæmis,  $\min(\text{dp}(x, y + 1), \text{dp}(x - a[y], y + 1) + 1)$  þá erum við í raun að velja hvort er betra:  $\text{dp}(x, y + 1)$  eða  $\text{dp}(x - a[y], y + 1) + 1$ .
- ▶ Okkur nægir því að geyma fyrir hvert inntak í `dp_lookup(...)` hver besta leiðin er.
- ▶ Kvik bestun byggir á því að besta leiðin sé alltaf sú sama.
- ▶ Síðan er hægt að þræða sig í gegn eftir á og finna klinkið sem þarf.

# Finnur bara fjöldann

```
1 #include <stdio.h>
2 #define INF (1 << 30)
3 int min(int a, int b) { if (a < b) return a; return b; }
4
5 int main()
6 {
7     int i, j, n, m, x;
8     scanf("%d%d", &n, &m);
9     int d[n + 1], a[m];
10    for (i = 0; i < m; i++) scanf("%d", &a[i]);
11    for (i = 0; i < n + 1; i++) d[i] = INF;
12    d[0] = 0;
13    for (i = 0; i < m; i++)
14        for (j = 0; j < n + 1 - a[i]; j++)
15            if (d[j] < INF && d[j + a[i]] > d[j] + 1)
16            {
17                d[j + a[i]] = d[j] + 1;
18            }
19
20    printf("%d\n", d[n]);
21
22
23
24
25
26
27
28
29    return 0;
30 }
```



# Finnur hvaða klink

```
1 #include <stdio.h>
2 #define INF (1 << 30)
3 int min(int a, int b) { if (a < b) return a; return b; }
4
5 int main()
6 {
7     int i, j, n, m, x;
8     scanf("%d%d", &n, &m);
9     int d[n + 1], a[m], e[n + 1];
10    for (i = 0; i < m; i++) scanf("%d", &a[i]);
11    for (i = 0; i < n + 1; i++) d[i] = INF;
12    d[0] = 0;
13    for (i = 0; i < m; i++)
14        for (j = 0; j < n + 1 - a[i]; j++)
15            if (d[j] < INF && d[j + a[i]] > d[j] + 1)
16            {
17                d[j + a[i]] = d[j] + 1;
18                e[j + a[i]] = a[i];
19            }
20
21    printf("%d\n", d[n]);
22    x = n;
23    while (x != 0)
24    {
25        printf("%d ", e[x]);
26        x -= e[x];
27    }
28    printf("\n");
29    return 0;
30 }
```

- ▶ Í stað þess að geyma besta skrefið getum við skoðað öll skrefin og valið það besta.

```

7  int dp_lookup(int x)
8  {
9      int i;
10     if (x < 0) return INF; // Þessi lína þarf að vera fremst!
11     if (d[x] != -1) return d[x];
12     if (x == 0) return 0;
13     d[x] = INF;
14     for (i = 0; i < m; i++) d[x] = min(d[x], dp_lookup(x - a[i]) + 1);
15     return d[x];
16 }
17
18 int dp_traverse(int n, int *r)
19 {
20     int i = 0, mn, mni, j;
21     while (n > 0)
22     {
23         for (mn = INF, j = 0; j < m; j++) if (mn > dp_lookup(n - a[j]) + 1)
24             mn = dp_lookup(n - a[j]) + 1, mni = j;
25         r[i++] = a[mni];
26         n -= a[mni];
27     }
28     return i;
29 }

```

- ▶ Helsti kostur fyrri aðferðarinnar er að besta skrefið er ákvarðað í  $\mathcal{O}(1)$  tíma.
- ▶ Í seinni aðferðinni tekur það jafnalangan tíma og `dp_lookup(...)` tekur að meta hverja stöðu.
- ▶ Þetta kemur bara til með að gera nógu góða lausn hæga ef það þarf að reikna fyrir mörg gildi.
- ▶ Skoðum nú hvernig við getum nýtt þetta til að finna eina af lengstu sameiginlegu hlutrunum tveggja strengja.

```

5 char s[MAXN], t[MAXN];
6 int d[MAXN][MAXN];
7 int dp_lookup(int x, int y)
8 { // Lengd lengstu sameiginlegr hlutruna s[0:x] og t[0:y].
9     if (d[x][y] != -1) return d[x][y];
10    if (x == 0 || y == 0) return 0;
11    if (s[x - 1] == t[y - 1]) return d[x][y] = dp_lookup(x - 1, y - 1) + 1;
12    return d[x][y] = max(dp_lookup(x - 1, y), dp_lookup(x, y - 1));
13 }
14
15 int lcs(char *a, char *b, char *r)
16 { // Finnur einn af lengstu sameiginlegr hlutrunu strengjanna a og b.
17     int i, j, k, n = strlen(a) - 1, m = strlen(b) - 1, x, y;
18     strcpy(s, a), strcpy(t, b), memset(r, '\0', MAXN);
19     for (i = 0; i < n + 1; i++) for (j = 0; j < m + 1; j++) d[i][j] = -1;
20     for (k = dp_lookup(n, m), x = n, y = m; x > 0 && y > 0; )
21     {
22         if (s[x - 1] == t[y - 1]) r[--k] = s[x - 1], x--, y--;
23         else if (dp_lookup(x, y - 1) > dp_lookup(x - 1, y)) y--;
24         else x--;
25     }
26     return dp_lookup(n, m);
27 }

```

- ▶ Seinni skiptimyntadæmið er náskylt *hlutmengjasummudæminu* (e. *Subset Sum Problem*).
- ▶ Dæmið er einfalt.
- ▶ Gefnar eru  $n$  tölur  $a_1, \dots, a_n$  ásamt tölu  $c$ .
- ▶ Hvaða hlutruna af tölum gefur hæstu summuna án þess að fara yfir  $c$ .

c = 15

b = 0

a: 1    2    7    9

s: 0

$$c = 15$$

$$b = 1$$

$$a: \begin{matrix} 1 & 2 & 7 & 9 \\ \wedge \end{matrix}$$

$$s: 1$$



$$c = 15$$

$$b = 2$$

$$a: \begin{matrix} 1 & 2 & 7 & 9 \\ & \sim & & \end{matrix}$$

$$s: 2$$

$$c = 15$$

$$b = 7$$

$$a: \begin{matrix} 1 & 2 & 7 & 9 \\ & & \wedge & \end{matrix}$$

$$s: 7$$

c = 15

b = 9

a: 1    2    7    9  
     ^

s: 9

$$c = 15$$

$$b = 9$$

$$a: \begin{matrix} 1 & 2 & 7 & 9 \\ \wedge & \wedge & & \end{matrix}$$

$$s: 3$$

$$c = 15$$

$$b = 9$$

$$a: \begin{matrix} 1 & 2 & 7 & 9 \\ \wedge & & \wedge & \end{matrix}$$

$$s: 8$$

c = 15

b = 10

a: 1    2    7    9  
    ^            ^

s: 10

$$c = 15$$

$$b = 10$$

$$a: \begin{matrix} 1 & 2 & 7 & 9 \\ & \wedge & \wedge & \end{matrix}$$

$$s: 9$$

c = 15

b = 11

a: 1    2    7    9  
     ^       ^

s: 11



c = 15

b = 11

a: 1    2    7    9  
     ^    ^

s: 16

$$c = 15$$

$$b = 11$$

$$a: \begin{matrix} 1 & 2 & 7 & 9 \\ \wedge & \wedge & \wedge & \end{matrix}$$

$$s: 10$$

$$c = 15$$

$$b = 12$$

$$a: \begin{matrix} 1 & 2 & 7 & 9 \\ \wedge & \wedge & & \wedge \end{matrix}$$

$$s: 12$$

$$c = 15$$

$$b = 12$$

$$a: \begin{matrix} 1 & 2 & 7 & 9 \\ \wedge & & \wedge & \wedge \end{matrix}$$

$$s: 17$$

$$c = 15$$

$$b = 12$$

$$a: \begin{matrix} 1 & 2 & 7 & 9 \\ & \wedge & \wedge & \wedge \end{matrix}$$

$$s: 18$$

$$c = 15$$

$$b = 12$$

$$a: \begin{matrix} 1 & 2 & 7 & 9 \\ \wedge & \wedge & \wedge & \wedge \end{matrix}$$

$$s: 19$$

- ▶ Látum

$$f(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{ef til er hlutruna af } a_1, \dots, a_i \text{ sem hefur summu } j, \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

- ▶ Við getum nú umritað

$$f(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{ef } i = 0 \text{ og } j = 0, \\ 0, & \text{ef } i = 0 \text{ og } j \neq 0, \text{ eða } j < 0, \\ \min(1, f(i-1, j) \\ \quad + f(i-1, j - a_i)), & \text{ef } i \neq 0. \end{cases}$$

- ▶ Svarið er þá stærsta  $\ell \leq c$  þannig að  $f(n, \ell)$  er einn.

```

7 int d[MAXN][MAXC], b[MAXN];
8 int dp_lookup(int x, int y)
9 { // Er hægt að skrifa y sem summu talnanna a[0:x].
10     if (x < 0 && y == 0) return 1;
11     if (y < 0 || x < 0) return 0;
12     if (d[x][y] != -1) return d[x][y];
13     return d[x][y] = dp_lookup(x - 1, y) || dp_lookup(x - 1, y - b[x]);
14 }
15
16 int subsetsum(int *a, int n, int c)
17 { // Hver er stærsta talan á [0, c] sem má skrifa sem summu talnanna í a.
18     int i, j;
19     for (i = 0; i < n; i++) for (j = 0; j < c + 1; j++) d[i][j] = -1;
20     for (i = 0; i < n; i++) b[i] = a[i];
21     while (!dp_lookup(n - 1, c)) c--;
22     return c;
23 }

```



- ▶ Við reiknum hvert gildi á  $f(i, j)$  í  $\mathcal{O}(1)$ .
- ▶ Við þurfum í versta falli að reinka  $n \cdot (c + 1)$  slíka gildi.
- ▶ Svo það tekur okkur  $\mathcal{O}(n \cdot c)$  tíma að reikna  $f(i, j)$ .
- ▶ En sökum minnunar tekur það  $\mathcal{O}(q + n \cdot c)$  tíma að reikna  $q$  sinnum fallgildi fallsins  $f$ .
- ▶ Við þurfum að reikna það, í versta falli,  $c$  sinnum, svo forritið er  $\mathcal{O}(n \cdot c)$ .

- ▶ Ein algeng hagnýting á þessu er tvískipting talna.
- ▶ Látum  $a_1, \dots, a_n$  vera heiltölur.
- ▶ Hvernig er best að skipta þeim í tvo hópa þannig að mismunur summa hvors hóps sé sem minnstur.
- ▶ Ef tölurnar eru  $(10, 2, 10, 30, 15, 2, 30, 10)$  þá skiptum við í  $(2, 2, 10, 10, 30)$  og  $(10, 15, 30)$ .
- ▶ Summurnar eru 54 og 55, og mismunur þeirra er 1.

- ▶ Hvernig getum við leyst þetta?
- ▶ Látum  $T$  vera summu allra talnanna.
- ▶ Við getum nú notað `subsetsum(...)` með  $c = \lfloor T/2 \rfloor$ .
- ▶ Það gefur okkur annan hópinn og hinn hópurinn verður afgangurinn.
- ▶ Okkur vantar þó að finna hvaða tölur eiga að vera í hvorum hóp.

```

7 int d[MAXN][MAXC], b[MAXN];
8 int dp_lookup(int x, int y)
9 { // Er hægt að skrifa y sem summu talnanna a[0:x].
10     if (x < 0 && y == 0) return 1;
11     if (y < 0 || x < 0) return 0;
12     if (d[x][y] != -1) return d[x][y];
13     return d[x][y] = dp_lookup(x - 1, y) || dp_lookup(x - 1, y - b[x]);
14 }
15
16 void partition(int *a, int *r, int n)
17 { // Finnur jöfnustu skiptingu talnanna í a.
18     int i, j, t = 0, c;
19     for (i = 0; i < n; i++) t += a[i], r[i] = 0, b[i] = a[i];
20     c = t/2;
21     for (i = 0; i < n; i++) for (j = 0; j < c + 1; j++) d[i][j] = -1;
22     while (!dp_lookup(n - 1, c)) c--;
23     i = n - 1, j = c;
24     while (i > 0 && j > 0)
25     {
26         if (dp_lookup(i - 1, j) > dp_lookup(i - 1, j - a[i])) i--;
27         else r[i] = 1, j -= a[i], i--;
28     }
29 }

```

- ▶ Látum  $T$  vera summu allra talnanna.
- ▶ Þá er tímaflækjan  $\mathcal{O}(n \cdot T)$ .
- ▶ Það er til skemmtileg leið til að fá tímaflækjuna  $\mathcal{O}(n \cdot w)$ , þar sem  $w$  er stærsta talan í inntakinu.
- ▶ Takið eftir að tímaflækjan  $\mathcal{O}(n \cdot T)$  er í raun sú sama og  $\mathcal{O}(n^2 \cdot w)$ .
- ▶ Við skoðum hana kannski seinna.

- ▶ Hlutmengjadæmið er í raun sértilfelli af *bakpokadæminu* (e. *Knapsack Problem*).
- ▶ Gerum ráð fyrir að við séum með  $n$  hluti sem allir hafa einhverja vigt og verðgildi.
- ▶ Við erum einnig með bakpoka sem þolir tiltekna samtals vigt.
- ▶ Verkefnið snýst þá um að hámarka heildar verðgildi hluta sem hægt er að setja í bakpokann.
- ▶ Ef sérhver hlutur hefur sömu vigt og verðgildi þá erum við komin með hlutmengjasummudæmið.

- ▶ Nánar, við höfum tölur  $v_1, \dots, v_n$ ,  $w_1, \dots, w_n$  og  $c$ .
- ▶ Við viljum ákvarða tölur  $b_1, \dots, b_n \in \{0, 1\}$  þannig að

$$\sum_{i=1}^n b_i \cdot w_i \leq c \quad \text{og} \quad \sum_{i=1}^n b_i \cdot v_i \text{ sé hámarkað.}$$

- ▶ Látum  $f(i, j)$  tákna hámarks verðgildi sem má fá úr fyrstu  $i$  hlutunum með bakpoka sem þolir þyngd  $j$ .
- ▶ Við höfum þá

$$f(i, j) = \begin{cases} -\infty, & \text{ef } j < 0, \\ 0, & \text{annars, ef } i = 0, \\ \max(f(i-1, j) \\ + f(i-1, j - w_i) + v_i), & \text{annars.} \end{cases}$$

```

8 int d[MAXN][MAXC], a[MAXN], b[MAXN];
9 int dp_lookup(int x, int y)
10 { // Hæsta verðgildi sem má fá með pakpokastærð y og hluti 1, 2, ..., x.
11     if (y < 0) return -INF;
12     if (x < 0) return 0;
13     if (d[x][y] != -1) return d[x][y];
14     return d[x][y] = max(dp_lookup(x - 1, y),
15                          dp_lookup(x - 1, y - b[x]) + a[x]);
16 }
17
18 void knapsack(int *v, int *w, int *r, int n, int c)
19 { // Leysir bakpokadæmið. Fylkið r segir hvaða hluti á að taka.
20     int i, j, s[MAXN], ss;
21     for (i = 0; i < n; i++) for (j = 0; j <= c; j++) d[i][j] = -1;
22     for (i = 0; i < n; i++) a[i] = v[i], b[i] = w[i], r[i] = 0;
23     j = c;
24     for (i = n - 1; i >= 0; i--)
25         if (dp_lookup(i - 1, j) < dp_lookup(i - 1, j - w[i]) + v[i])
26             j -= w[i], r[i] = 1;
27 }

```



- ▶ Við þurfum að reikna  $n \cdot (c + 1)$  fallgildi fallsins  $f$ .
- ▶ Hvert fallgildi er reiknað í  $\mathcal{O}(1)$ .
- ▶ Í heildina er þetta því  $\mathcal{O}(n \cdot c)$ .

- ▶ Stundum getur verið erfitt að ákvarða hvernig stöðurúmið okkar á að líta út.
- ▶ Tökum vel þekkt dæmi.
- ▶ Gerum ráð fyrir að við séum með  $n$  stöður.
- ▶ Gefið er tvívítt fylki  $(d_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ , þar sem  $d_{ij}$  táknar tímann sem það tekur að fara úr  $i$ -tu stöðunni í  $j$ -tu stöðuna.
- ▶ Við viljum nú ferðast í gegnum allar stöðurnar í einhverri röð þannig að við byrjum og endum í sömu stöðu, förum í hverja stöðu nákvæmlega einu sinni (tvisvar í upphafsstöðuna) og tökum sem stystan tíma.
- ▶ Þetta er fræga *Farandsölumannadæmið* (e. *Travelling Salesman Problem*).
- ▶ Sígilt er að leysa þetta dæmi endurkvæmt í  $\mathcal{O}((n+1)!)$  tíma.
- ▶ Við höfum nú tólin til að gera betur.

- ▶ Tökum fyrst eftir að það skiptir ekki máli í hvaða stöðu við byrjum.
- ▶ Við getum því gert ráð fyrir að við byrjum í fyrstu stöðunni.
- ▶ Látum  $P$  tákna mengi alla staða,  $A$  vera eiginlegt hlutmengi þar í og  $s$  vera stak utan  $A$ .
- ▶ Við getum þá látið  $f(s, A)$  vera stystu leiðina til að fara í allar stöður  $P \setminus A$  nákvæmlega einu sinni frá  $s$  og enda í fyrstu stöðunni.
- ▶ Rakningarformúla fyrir  $f$  fæst því með

$$f(s, A) = \begin{cases} 0, & \text{ef } s = 1 \text{ og } A = P \\ \infty, & \text{ef } s = 1 \text{ og } A \neq \emptyset \\ \min_{e \in P \setminus A} (d_{se} + f(e, A \setminus e)), & \text{annars.} \end{cases}$$

- ▶ Svarið við dæminu fæst svo með  $f(1, \emptyset)$ .

- ▶ Wikipedia kennir þessa aðferð við Held og Karp (1962) og segir að þetta sé með fyrstu hagnýtingum kvikrar bestunar.
- ▶ Í versta falli þurfum við að reikna  $n \cdot 2^n$  fallgildi á  $f$ , ef við erum með  $n$  stöður.
- ▶ Hvert fallgildi er reiknað í  $\mathcal{O}(n)$  tíma.
- ▶ Svo í heildina er forritið  $\mathcal{O}(n^2 \cdot 2^n)$ .
- ▶ Samkvæmt  $10^8$  reglunni náum við að leysa dæmi með  $n \leq 18$ .
- ▶ Við náum bara  $n \leq 10$  með augljósu endurkvæmnu lausninni.

```

7 int d[MAXN][1 << MAXN], g[MAXN][MAXN], n;
8 int dp_lookup(int x, int y)
9 {
10     int i;
11     if (d[x][y] != -1) return d[x][y];
12     if (x == 0 && y != 0) return (y == ((1 << n) - 1)) ? 0 : INF;
13     for (d[x][y] = INF, i = 0; i < n; i++) if ((y & (1 << i)) == 0)
14         d[x][y] = min(d[x][y], dp_lookup(i, y + (1 << i)) + g[x][i]);
15     return d[x][y];
16 }
17
18 int tsp(int *a, int n)
19 { // Finnur stystu rásina sem heimsækir allar stöðurnar.
20     int i, j;
21     for (i = 0; i < n; i++) for (j = 0; j < (1 << n); j++) d[i][j] = -1;
22     for (i = 0; i < n; i++) for (j = 0; j < n; j++) g[i][j] = a[i*MAXN + j];
23     return dp_lookup(0, 0);
24 }

```

- ▶ Tökum nú dæmi sem er ekki jafn staðlað.
- ▶ Gerum ráð fyrir að við séum með  $n$  reiti fyrir framan okkur, hver merktur með tölu  $a_i$ .
- ▶ Reitirnir liggja jafndreift á beinni línu og þú byrjar á reit númer eitt.
- ▶ Þú vilt síðan ferðast á reit  $n$  með því að hoppa á milli reitanna.
- ▶ Þú færð  $a_i$  stig ef þú lendir á  $i$ -ta reitnum og heildarstigafjöldinn er summa stiganna fyrir öll hoppin.
- ▶ Hvert stökk má þó ekki vera lengra en stökkið á undan.
- ▶ Hver er mesti fjöldi stiga sem þú getur fengið.
- ▶ Takið eftir að  $1 \leq n \leq 3 \cdot 10^3$  og  $-10^9 \leq a_i \leq 10^9$ .

- ▶ Finnum rakningarformúlu sem lýsir svarinu.
- ▶ Látum  $f(i, j)$  vera mesta stigafjöldan sem má fá með því að stökkva frá  $i$ -ta reitnum með stökkum sem eru ekki lengri en  $j$ .
- ▶ Við fáum þá

$$f(i, j) = \begin{cases} a_n, & \text{ef } i = n, \\ \max_{1 \leq k \leq \min(j, n-i)} f(i+k, k) + a_i, & \text{annars.} \end{cases}$$

```

8  || d[MAXN][MAXN], a[MAXN], n;
9  || dp_lookup(|| x, || y)
10 {
11     || i;
12     if (x == n - 1) return a[x];
13     if (d[x][y] != -INF) return d[x][y];
14     for (i = 1; i < min(y + 1, n - x); i++)
15         d[x][y] = max(d[x][y], dp_lookup(x + i, i));
16     return d[x][y] = d[x][y] + a[x];
17 }

```





- ▶ Útfærum nú lausnina neðansækið í von um að geta bætt hana síðan.
- ▶ Munum að

$$f(i, j) = \begin{cases} a_n, & \text{ef } i = n, \\ \max_{1 \leq k \leq \min(j, n-i)} f(i+k, k) + a_i, & \text{annars.} \end{cases}$$

- ▶ Nú er  $f(i, j)$  bara háð styttri stökkum eða jafn löngum stökkum sem byrja aftar.
- ▶ Svo við getum reiknað út  $f(i, j)$  í vaxandi stökk röð, og minnkandi upphafsstöðum.
- ▶ Með öðrum orðum látum við  $j$  vaxa, og  $i$  minnka.

```

1 #include <stdio.h>
2 #include <assert.h>
3 typedef long long ll;
4 #define MAXN 3001
5 #define INF (1LL << 60)
6 ll max(ll a, ll b) { return a > b ? a : b; }
7 ll min(ll a, ll b) { return a < b ? a : b; }
8
9 int main()
10 {
11     ll i, j, k, n;
12     scanf("%lld", &n);
13     ll d[n][n], a[n];
14     for (i = 0; i < n; i++) scanf("%lld", &a[i]);
15     for (i = 0; i < n; i++) for (j = 0; j < n; j++) d[i][j] = -INF;
16     d[n - 1][1] = a[n - 1];
17     for (i = n - 2; i >= 0; i--) d[i][1] = d[i + 1][1] + a[i];
18     for (i = 0; i < n; i++) d[n - 1][i] = a[n - 1];
19     for (j = 2; j < n; j++)
20         for (i = n - 2; i >= 0; i--)
21             for (k = 1; k < min(j + 1, n - i); k++)
22                 d[i][j] = max(d[i][j], d[i + k][k] + a[i]);
23     printf("%lld\n", d[0][n - 1]);
24     return 0;
25 }

```



- ▶ Þegar við reiknum fallgildið  $f(i, j)$  þá tökum við stærsta gildið á skálínunni  $f(i + 1, 1), f(i + 2, 2), \dots, f(i + k, k)$ .
- ▶ Eftir að hafa reiknað fallgildin fyrir tiltekna stökk lengd hefur eitt stak bæst við hverja skálínu.
- ▶ Það er lítið mál að halda utan um stærsta stakið á hverri skálínu með því að uppfæra eftir að nýtt fallgildi er reiknað.
- ▶ Þá getum við líka reiknað hvert fallgildi í föstum tíma.

```

1 #include <stdio.h>
2 #include <assert.h>
3 typedef long long ll;
4 #define MAXN 3001
5 #define INF (1LL << 60)
6 ll max(ll a, ll b) { return a > b ? a : b; }
7 ll min(ll a, ll b) { return a < b ? a : b; }
8
9 int main()
10 {
11     ll i, j, k, n;
12     scanf("%lld", &n);
13     ll d[n][n], e[n], a[n];
14     for (i = 0; i < n; i++) scanf("%lld", &a[i]);
15     for (i = 0; i < n; i++) for (j = 0; j < n; j++) d[i][j] = -INF;
16     d[n - 1][1] = e[n - 1] = a[n - 1];
17     for (i = n - 2; i >= 0; i--) e[i] = d[i][1] = d[i + 1][1] + a[i];
18     for (j = 2; j < n; j++)
19     {
20         e[n - j] = max(e[n - j], d[n - 1][j] = a[n - 1]);
21         for (i = n - 2; i >= 0; i--)
22         {
23             d[i][j] = e[i + 1] + a[i];
24             if (i >= j - 1) e[i - j + 1] = max(e[i - j + 1], d[i][j]);
25         }
26     }
27     printf("%lld\n", d[0][n - 1]);
28     return 0;
29 }

```

- ▶ Nú er þetta forrit lítið annað en tvöföld for-lykkja, hvor af lengd  $\mathcal{O}(n)$ .
- ▶ Svo tímaflækjan er  $\mathcal{O}(n^2)$ .
- ▶ Þetta ætti sleppa, því  $(3 \cdot 10^3)^2 = 9 \cdot 10^6 < 10^8$ .

## Submission

ID	DATE	PROBLEM	STATUS	CPU	LANG
TEST CASES					
8388221	16:50:36	Decelerating Jump	✓ Accepted	0.10 s	C
					

