

# Hæsti sameiginlegi forfaðir

Bergur Snorrason

4. apríl 2022

- ▶ Gerum ráð fyrir að við séum með tré.

- ▶ Gerum ráð fyrir að við séum með tré.
- ▶ Látum einn hnút tákna rót trésins.

- ▶ Gerum ráð fyrir að við séum með tré.
- ▶ Látum einn hnút tákna rót trésins.
- ▶ Við getum þá talað um *hæð* hnúts í trénu.

- ▶ Gerum ráð fyrir að við séum með tré.
- ▶ Látum einn hnút tákna rót trésins.
- ▶ Við getum þá talað um *hæð* hnúts í trénu.
- ▶ Hæð hnútsins er þá fjarlægðin frá hnútnum í rótina.

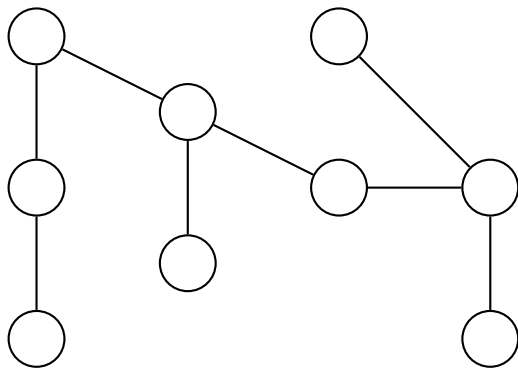
- ▶ Gerum ráð fyrir að við séum með tré.
- ▶ Látum einn hnút tákna rót trésins.
- ▶ Við getum þá talað um *hæð* hnúts í trénu.
- ▶ Hæð hnútsins er þá fjarlægðin frá hnútnum í rótina.
- ▶ Þar sem við erum í tréi er aðeins einn einfaldur vegur í rótina.

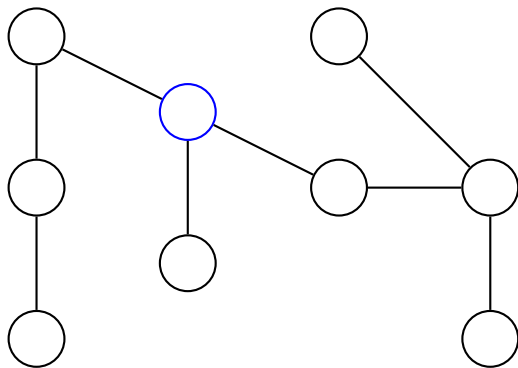
- ▶ Gerum ráð fyrir að við séum með tré.
- ▶ Látum einn hnút tákna rót trésins.
- ▶ Við getum þá talað um *hæð* hnúts í trénu.
- ▶ Hæð hnútsins er þá fjarlægðin frá hnútnum í rótina.
- ▶ Þar sem við erum í tréi er aðeins einn einfaldur vegur í rótina.
- ▶ Ein leið til að finna hæð allra hnúta er með einni dýptarleit.

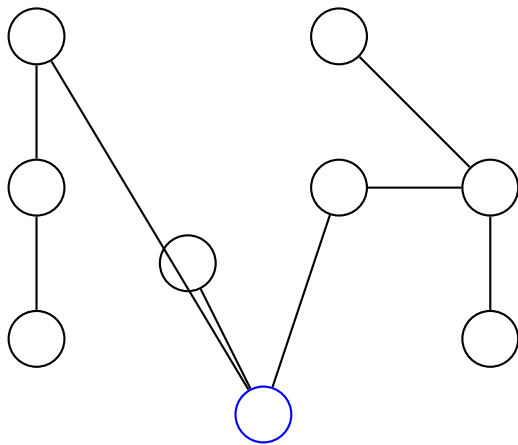
- ▶ Gerum ráð fyrir að við séum með tré.
- ▶ Látum einn hnút tákna rót trésins.
- ▶ Við getum þá talað um  $hæð$  hnúts í trénu.
- ▶  $Hæð$  hnútsins er þá fjarlægðin frá hnútnum í rótina.
- ▶ Þar sem við erum í tréi er aðeins einn einfaldur vegur í rótina.
- ▶ Ein leið til að finna  $hæð$  allra hnúta er með einni dýptarleit.
- ▶ Látum  $hæð$  hnútsins  $u$  vera  $h(u)$ .

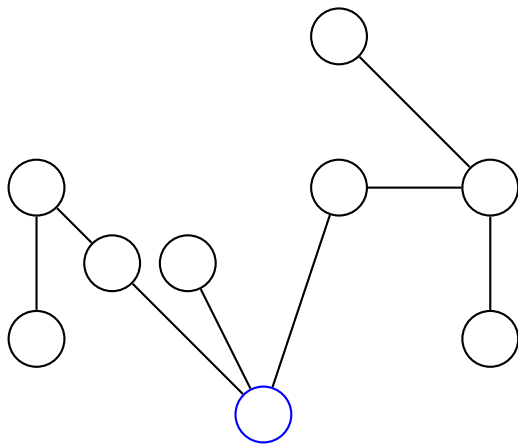


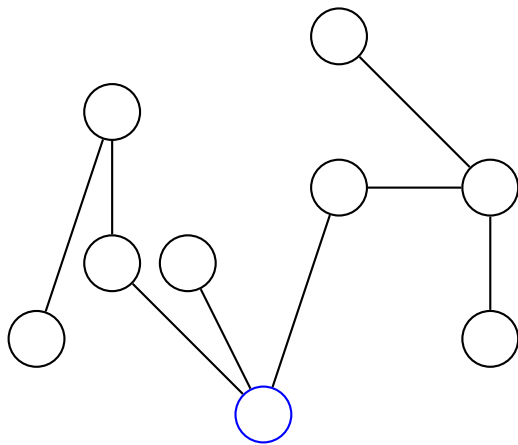
- ▶ Gerum ráð fyrir að við séum með tré.
- ▶ Látum einn hnút tákna rót trésins.
- ▶ Við getum þá talað um  $hæð$  hnúts í trénu.
- ▶  $Hæð$  hnútsins er þá fjarlægðin frá hnútnum í rótina.
- ▶ Þar sem við erum í tréi er aðeins einn einfaldur vegur í rótina.
- ▶ Ein leið til að finna  $hæð$  allra hnúta er með einni dýptarleit.
- ▶ Látum  $hæð$  hnútsins  $u$  vera  $h(u)$ .
- ▶ Við segjum líka að  $hæð$  trés sé  $H$  ef hnúturinn með hæstu  $hæð$  er  $H$ .

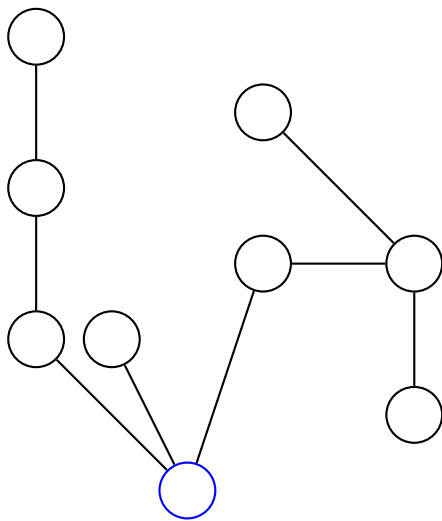


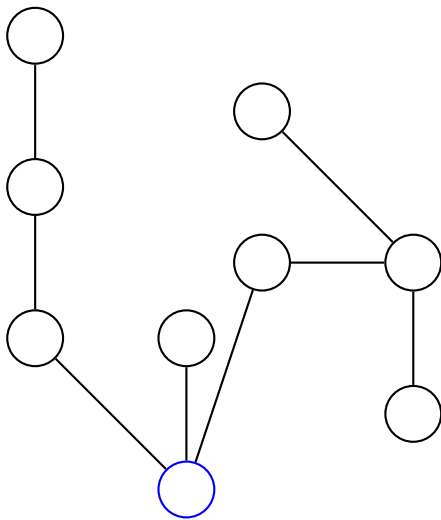




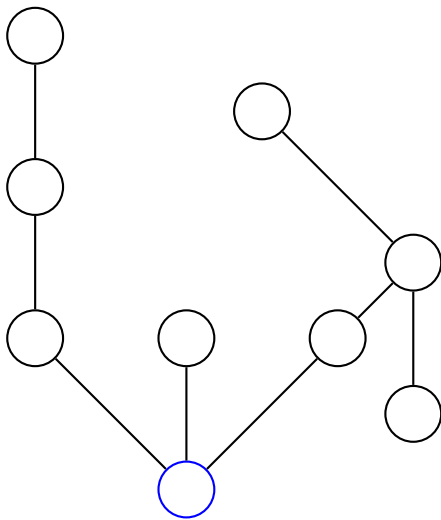


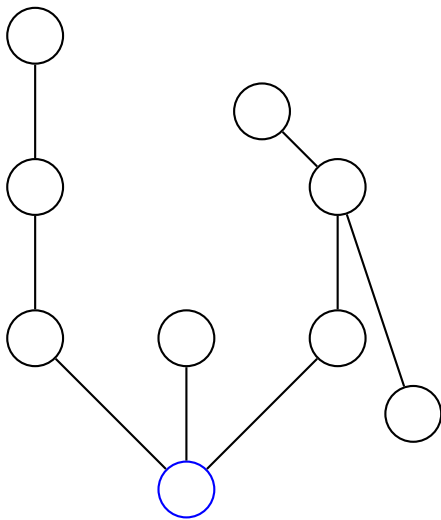


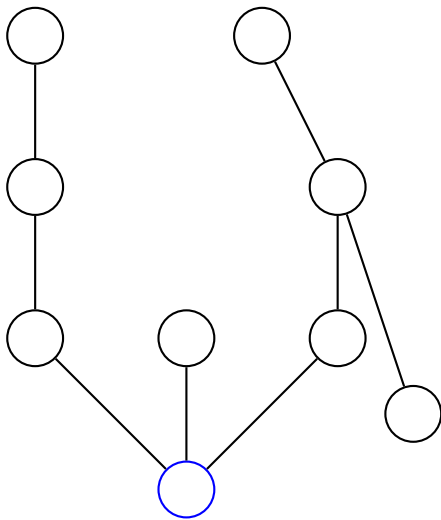


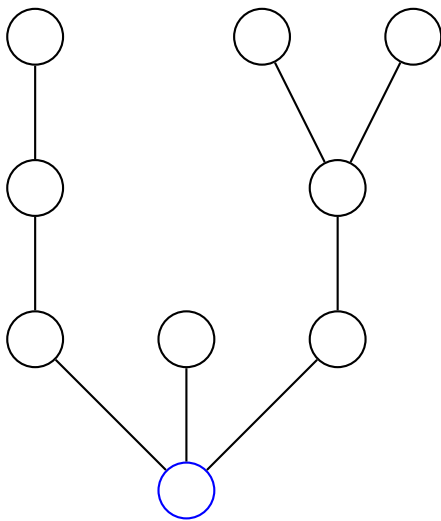


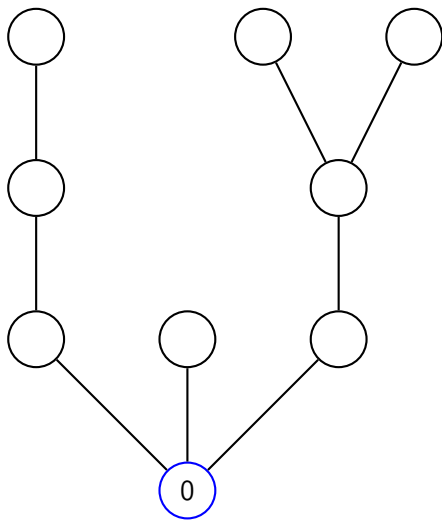


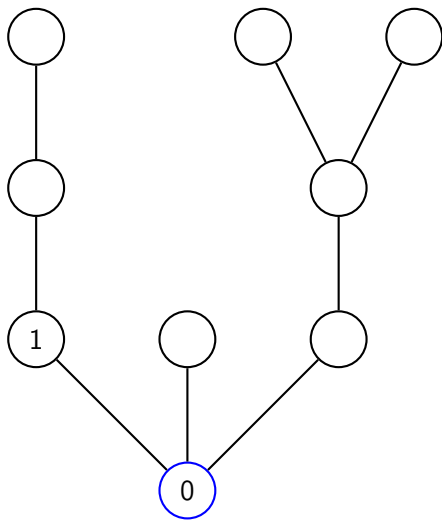


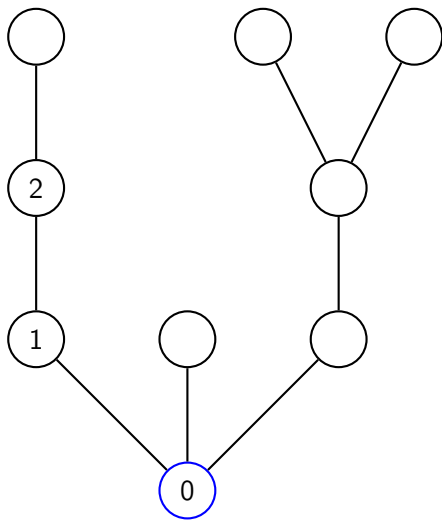


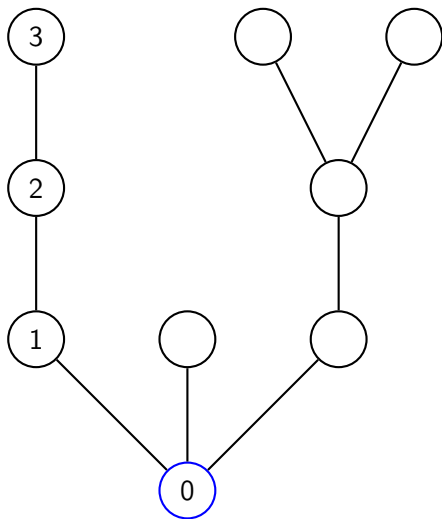




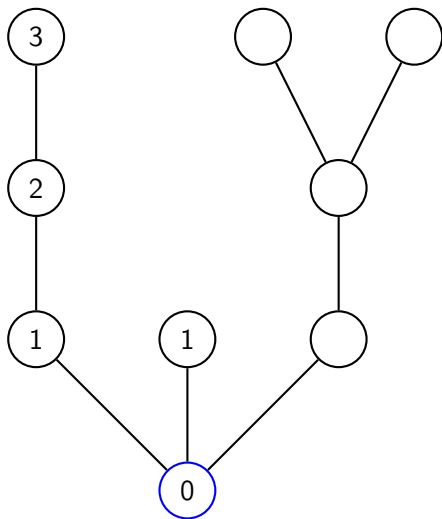


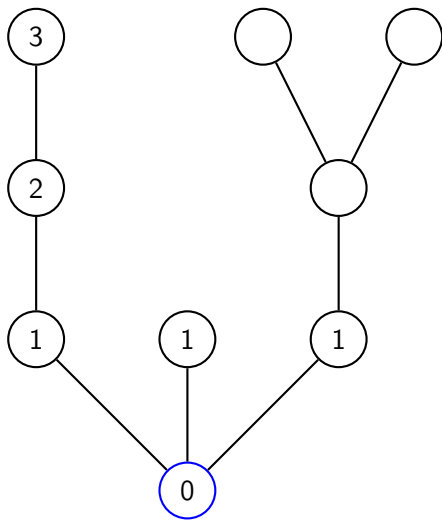


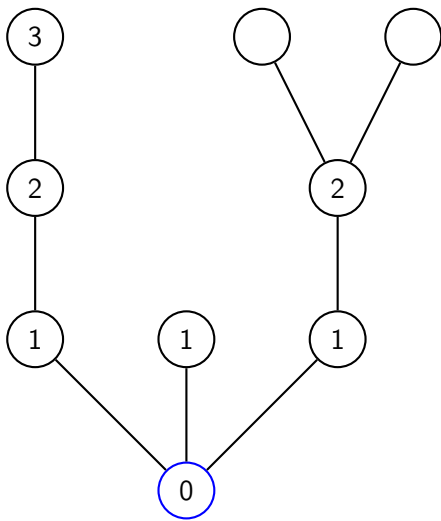


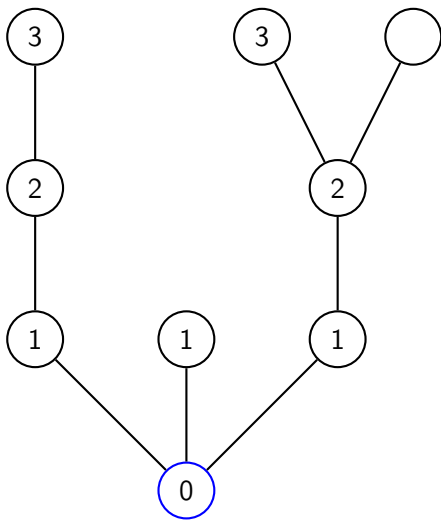


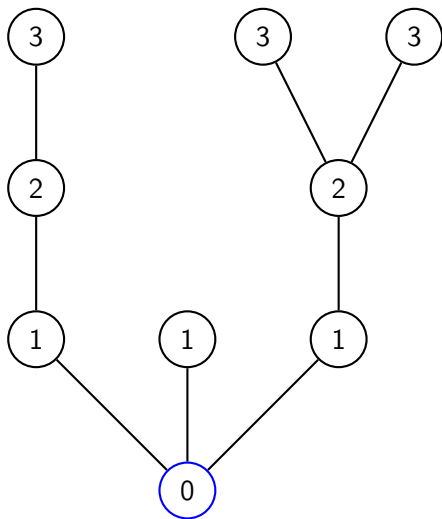












- ▶ Við köllum þann nágranna hnúts sem hefur einum lægri hæð *foreldri* hnútsins.

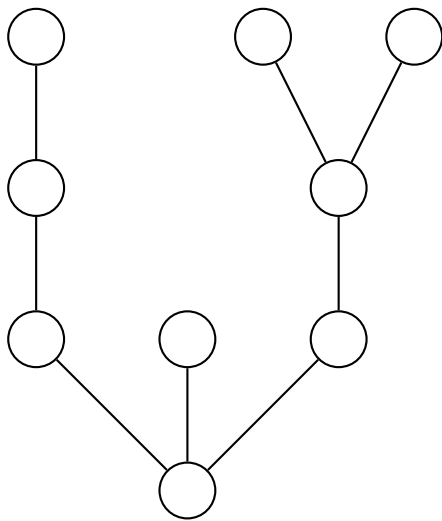
- ▶ Við köllum þann nágranna hnúts sem hefur einum lægri hæð *foreldri* hnútsins.
- ▶ Við getum þá fundið veginn að rótinni með því að ferðast eftir foreldrum.

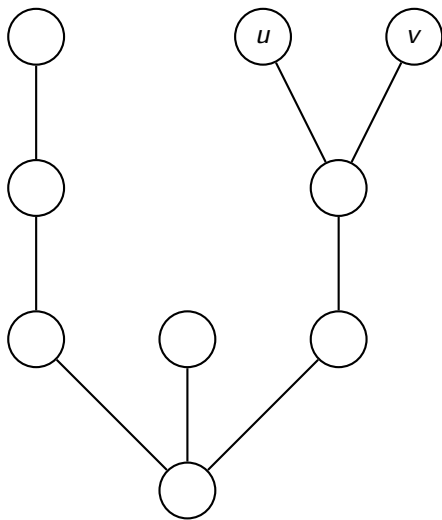
- ▶ Við köllum þann nágranna hnúts sem hefur einum lægri hæð *foreldri* hnútsins.
- ▶ Við getum þá fundið veginn að rótinni með því að ferðast eftir foreldrum.
- ▶ Þeir hnútar sem eru á veginum niður að rótinni kallast *forfeður* hnúts.

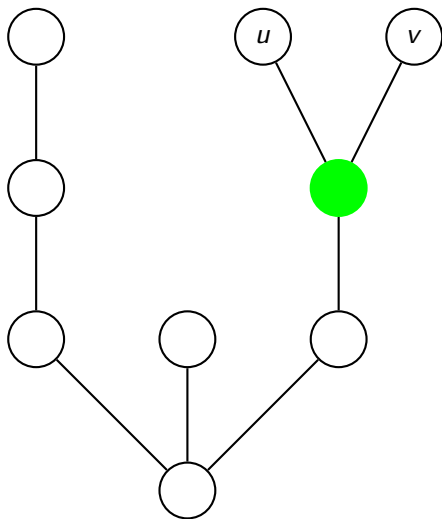


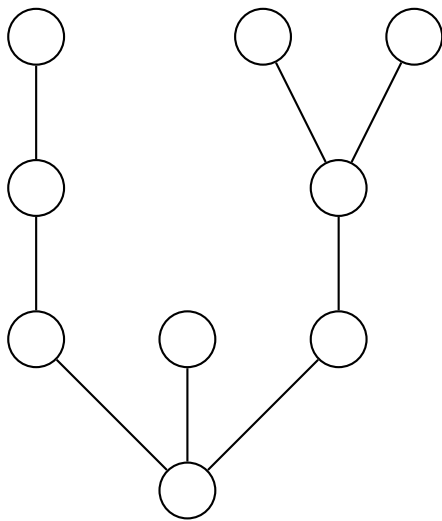
- ▶ Við köllum þann nágranna hnúts sem hefur einum lægri hæð *foreldri* hnútsins.
- ▶ Við getum þá fundið veginn að rótinni með því að ferðast eftir foreldrum.
- ▶ Þeir hnútar sem eru á veginum niður að rótinni kallast *forfeður* hnúts.
- ▶ Það er kannski skrítið, en allir hnútar er forfeður sínir.

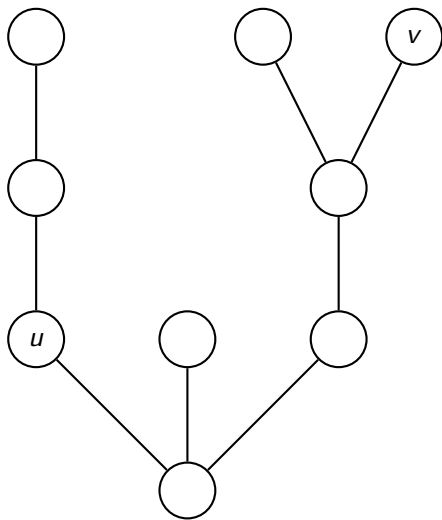
- ▶ Við köllum þann nágranna hnúts sem hefur einum lægri hæð *foreldri* hnútsins.
- ▶ Við getum þá fundið veginn að rótinni með því að ferðast eftir foreldrum.
- ▶ Þeir hnútar sem eru á veginum niður að rótinni kallast *forfeður* hnúts.
- ▶ Það er kannski skrítið, en allir hnútar er forfeður sínir.
- ▶ Oft nýtist okkur að vita hvaða sameiginlegi forfaðir tveggja hnúta er hæstur í trénu.

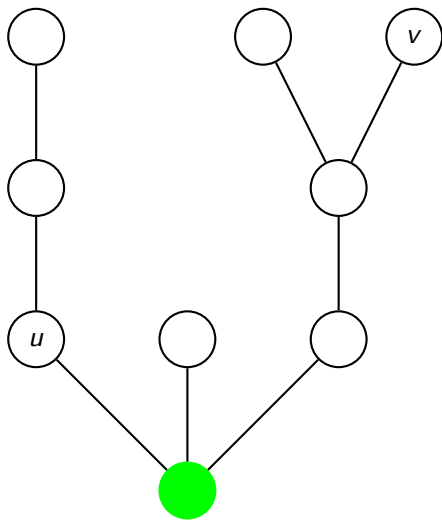




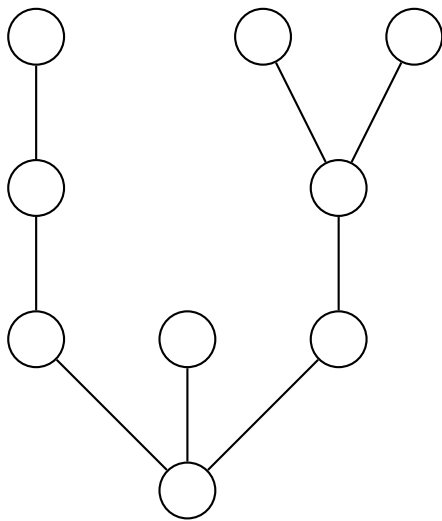


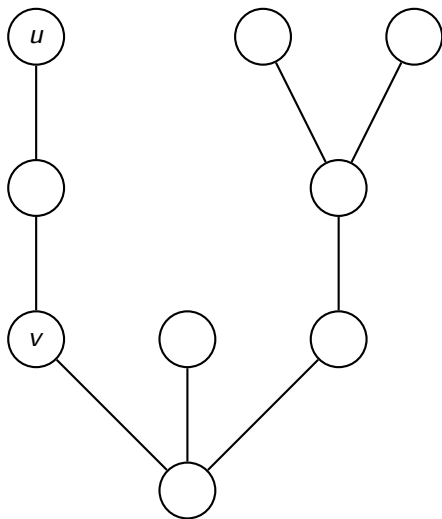


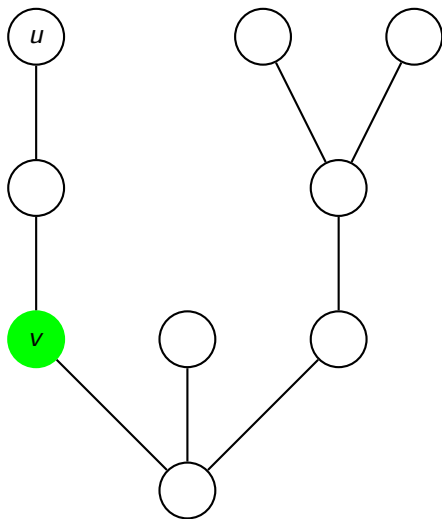














- ▶ Hvernig finnum þennan forföður?

- ▶ Hvernig finnum þennan forföður?
- ▶ Látum  $u$  og  $v$  tákna hnútana og  $x$  hæsta sameiginlega forföður þeirra.

- ▶ Hvernig finnum þennan forföður?
- ▶ Látum  $u$  og  $v$  tákna hnútana og  $x$  hæsta sameiginlega forföður þeirra.
- ▶ Við getum gert ráð fyrir að  $u$  sé ofar í trénu, það er að segja  $h(u) \geq h(v)$ .

- ▶ Hvernig finnum þennan forföður?
- ▶ Látum  $u$  og  $v$  tákna hnútana og  $x$  hæsta sameiginlega forföður þeirra.
- ▶ Við getum gert ráð fyrir að  $u$  sé ofar í trénu, það er að segja  $h(u) \geq h(v)$ .
- ▶ Við vitum að allir forfeður  $u$  sem hafa hæð stærri en  $h(v)$  eru ekki  $x$ .

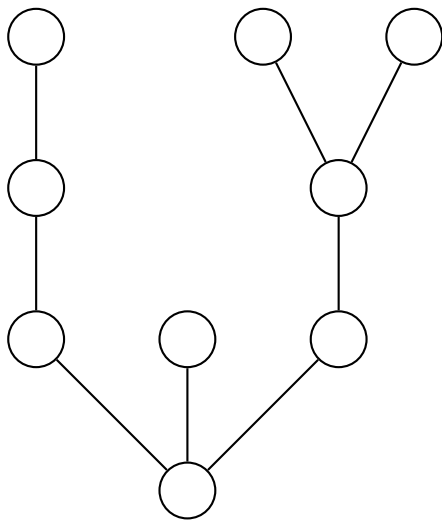


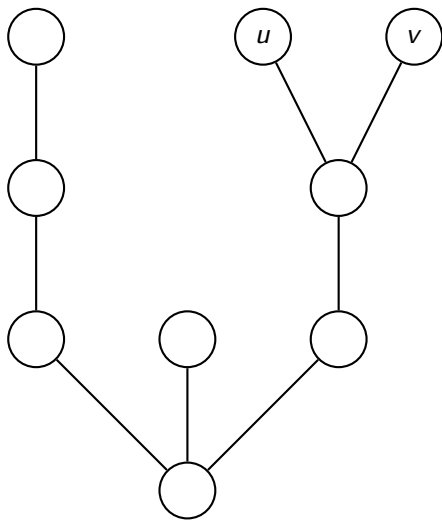
- ▶ Hvernig finnum þennan forföður?
- ▶ Látum  $u$  og  $v$  tákna hnútana og  $x$  hæsta sameiginlega forföður þeirra.
- ▶ Við getum gert ráð fyrir að  $u$  sé ofar í trénu, það er að segja  $h(u) \geq h(v)$ .
- ▶ Við vitum að allir forfeður  $u$  sem hafa hæð stærri en  $h(v)$  eru ekki  $x$ .
- ▶ Svo við getum ferðast niður tréð frá  $u$  þar til við erum komin í sömu hæð og  $v$ .

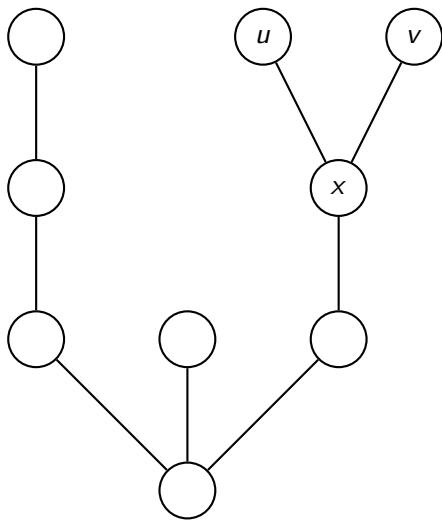
- ▶ Hvernig finnum þennan forföður?
- ▶ Látum  $u$  og  $v$  tákna hnútana og  $x$  hæsta sameiginlega forföður þeirra.
- ▶ Við getum gert ráð fyrir að  $u$  sé ofar í trénu, það er að segja  $h(u) \geq h(v)$ .
- ▶ Við vitum að allir forfeður  $u$  sem hafa hæð stærri en  $h(v)$  eru ekki  $x$ .
- ▶ Svo við getum ferðast niður tréð frá  $u$  þar til við erum komin í sömu hæð og  $v$ .
- ▶ Við getum svo ferðast eftir foreldrum beggja á sama tíma þangað til við lendum í sama hnútnum.

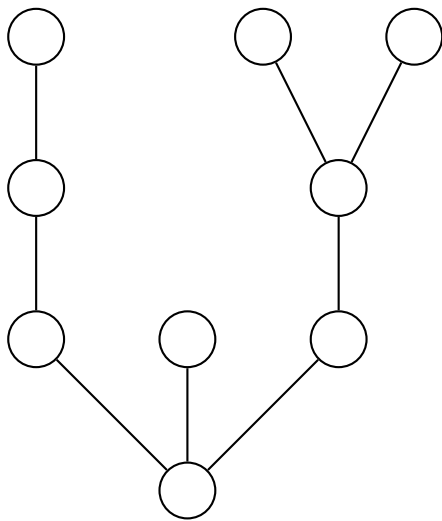
- ▶ Hvernig finnum þennan forföður?
- ▶ Látum  $u$  og  $v$  tákna hnútana og  $x$  hæsta sameiginlega forföður þeirra.
- ▶ Við getum gert ráð fyrir að  $u$  sé ofar í trénu, það er að segja  $h(u) \geq h(v)$ .
- ▶ Við vitum að allir forfeður  $u$  sem hafa hæð stærri en  $h(v)$  eru ekki  $x$ .
- ▶ Svo við getum ferðast niður tréð frá  $u$  þar til við erum komin í sömu hæð og  $v$ .
- ▶ Við getum svo ferðast eftir foreldrum beggja á sama tíma þangað til við lendum í sama hnútnum.
- ▶ Sá hnútur er  $x$ .

- ▶ Hvernig finnum þennan forföður?
- ▶ Látum  $u$  og  $v$  tákna hnútana og  $x$  hæsta sameiginlega forföður þeirra.
- ▶ Við getum gert ráð fyrir að  $u$  sé ofar í trénu, það er að segja  $h(u) \geq h(v)$ .
- ▶ Við vitum að allir forfeður  $u$  sem hafa hæð stærri en  $h(v)$  eru ekki  $x$ .
- ▶ Svo við getum ferðast niður tréð frá  $u$  þar til við erum komin í sömu hæð og  $v$ .
- ▶ Við getum svo ferðast eftir foreldrum beggja á sama tíma þangað til við lendum í sama hnútnum.
- ▶ Sá hnútur er  $x$ .
- ▶ Sjáum hvernig þessi aðferð leysir sýnidæmin sem við sáum áðan.

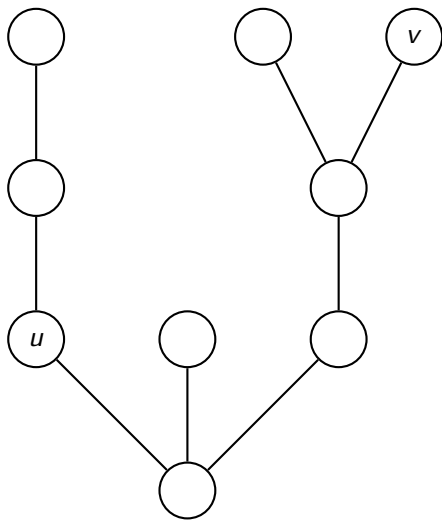


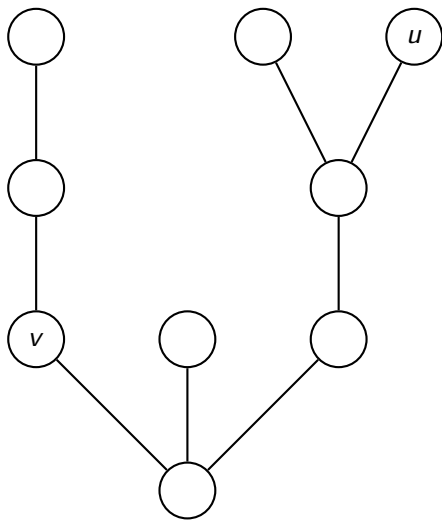


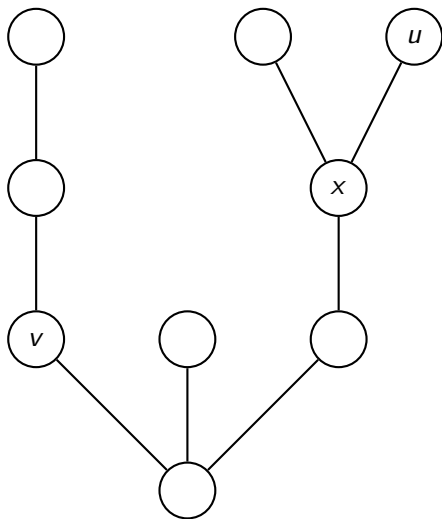


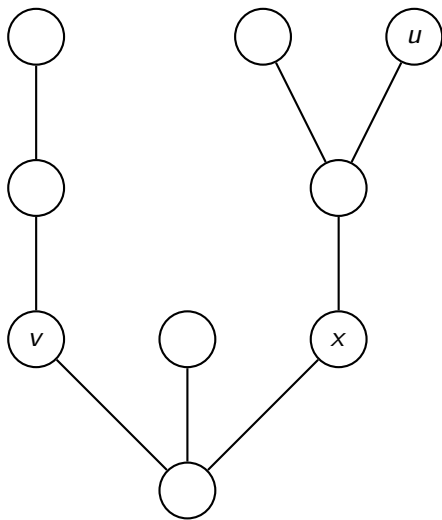


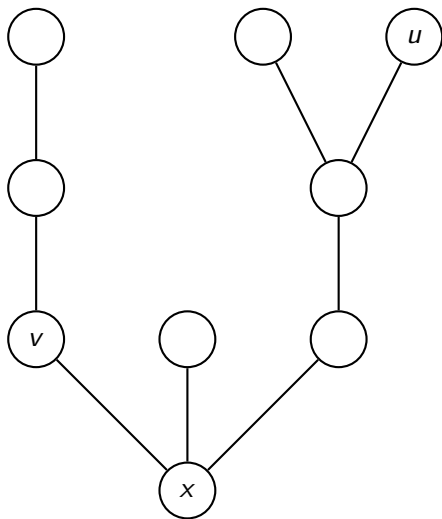


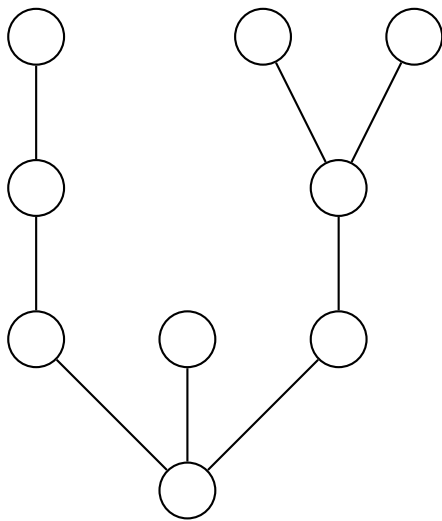


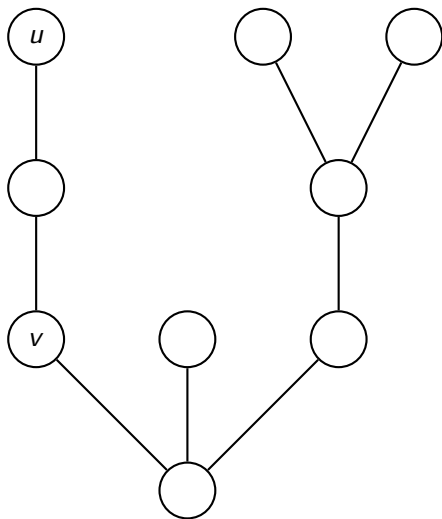


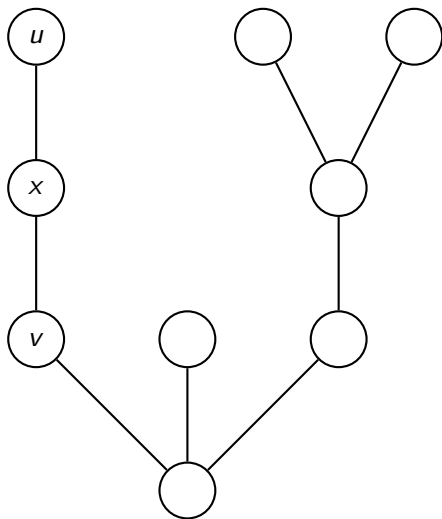




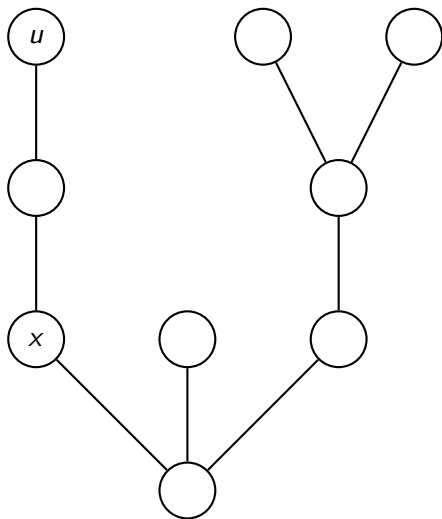


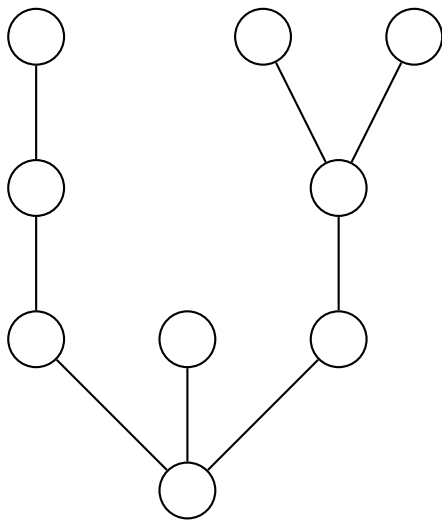


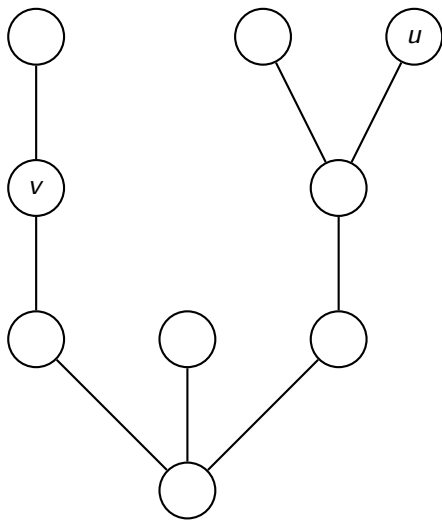


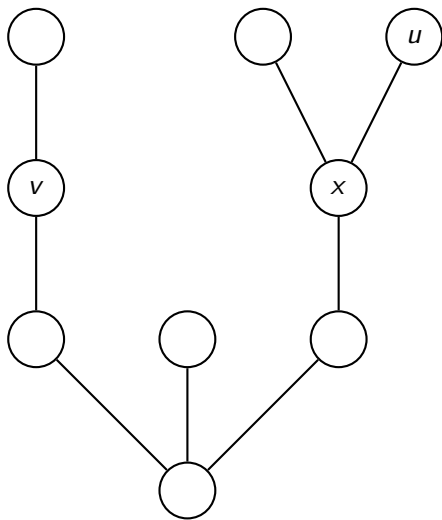


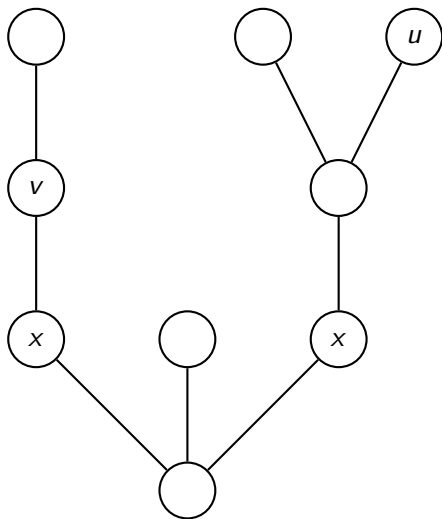


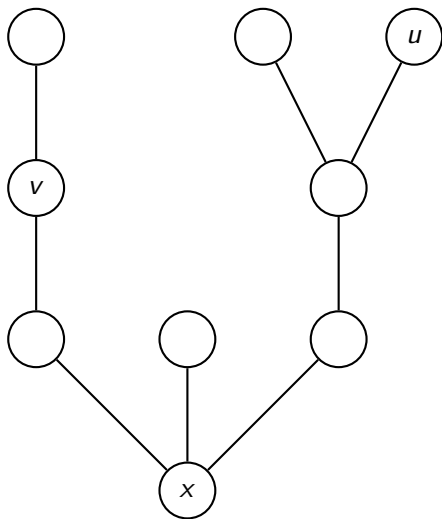












```

7 int p[MAXN], d[MAXN];
8 void lca_dfs(vvi& g, int x, int q, int w)
9 { // Hjálfarfall.
10     int i;
11     d[x] = w, p[x] = q;
12     for (i = 0; i < g[x].size(); i++)
13         if (g[x][i] != q) lca_dfs(g, g[x][i], x, w + 1);
14 }
15
16 void lca_init(vvi& g, int x)
17 { // Upphafstillir fyrir netið g með rót x.
18     lca_dfs(g, 0, x, x);
19 }
20
21 int lca(int u, int v)
22 { // Skilar hæsta sameiginlega forfaðir u og v.
23     if (d[u] < d[v]) swap(u, v);
24     while (d[u] != d[v]) u = p[u];
25     while (u != v) u = p[u], v = p[v];
26     return u;
27 }

```

- ▶ Gerum ráð fyrir að hæð trésins sé  $H$ .



- ▶ Gerum ráð fyrir að hæð trésins sé  $H$ .
- ▶ Þá er tímaflækjan á þessari aðferð  $\mathcal{O}(\quad)$ .

- ▶ Gerum ráð fyrir að hæð trésins sé  $H$ .
- ▶ Þá er tímaflækjan á þessari aðferð  $\mathcal{O}(H)$ .

- ▶ Gerum ráð fyrir að hæð trésins sé  $H$ .
- ▶ Þá er tímaflækjan á þessari aðferð  $\mathcal{O}(H)$ .
- ▶ Í versta falli er hæð trés með  $n$  hnúta .

- ▶ Gerum ráð fyrir að hæð trésins sé  $H$ .
- ▶ Þá er tímaflækjan á þessari aðferð  $\mathcal{O}(H)$ .
- ▶ Í versta falli er hæð trés með  $n$  hnúta  $n - 1$ .

- ▶ Gerum ráð fyrir að hæð trésins sé  $H$ .
- ▶ Þá er tímaflækjan á þessari aðferð  $\mathcal{O}(H)$ .
- ▶ Í versta falli er hæð trés með  $n$  hnúta  $n - 1$ .
- ▶ Svo tímaflækjan er í versta falli  $\mathcal{O}(n)$ .

- ▶ Gerum ráð fyrir að hæð trésins sé  $H$ .
- ▶ Þá er tímaflækjan á þessari aðferð  $\mathcal{O}(H)$ .
- ▶ Í versta falli er hæð trés með  $n$  hnúta  $n - 1$ .
- ▶ Svo tímaflækjan er í versta falli  $\mathcal{O}(n)$ .
- ▶ Við getum þó bætt þetta með því að taka stærri stökk.

- ▶ Aðferðin skiptist í tvö skref:

- ▶ Aðferðin skiptist í tvö skref:
  - ▶ Jöfnum hæðina á hnútunum.



- ▶ Aðferðin skiptist í tvö skref:
  - ▶ Jöfnum hæðina á hnútunum.
  - ▶ Löbbum saman niður þangað til við finnum svarið.

- ▶ Aðferðin skiptist í tvö skref:
  - ▶ Jöfnum hæðina á hnútunum.
  - ▶ Löbbum saman niður þangað til við finnum svarið.
- ▶ Fyrra skrefinu má lýsa nánar.

- ▶ Aðferðin skiptist í tvö skref:
  - ▶ Jöfnum hæðina á hnútunum.
  - ▶ Löbbum saman niður þangað til við finnum svarið.
- ▶ Fyrra skrefinu má lýsa nánar.
- ▶ Látum hnútana okkar vera  $u$  og  $v$ , þannig að  $h(u) \geq h(v)$ .

- ▶ Aðferðin skiptist í tvö skref:
  - ▶ Jöfnum hæðina á hnútunum.
  - ▶ Löbbum saman niður þangað til við finnum svarið.
- ▶ Fyrra skrefinu má lýsa nánar.
- ▶ Látum hnútana okkar vera  $u$  og  $v$ , þannig að  $h(u) \geq h(v)$ .
- ▶ Við viljum því ferðast niður nákvæmlega  $h(v) - h(u)$  sinnum.

- ▶ Aðferðin skiptist í tvö skref:
  - ▶ Jöfnum hæðina á hnútunum.
  - ▶ Löbbum saman niður þangað til við finnum svarið.
- ▶ Fyrra skrefinu má lýsa nánar.
- ▶ Látum hnútana okkar vera  $u$  og  $v$ , þannig að  $h(u) \geq h(v)$ .
- ▶ Við viljum því ferðast niður nákvæmlega  $h(v) - h(u)$  sinnum.
- ▶ Ein leið til að gera þetta hratt er að geyma ekki bara foreldri hvers hnúts, heldur alla hnúta sem eru  $2^k$  fyrir neðan hnútinu í trénu.

- ▶ Aðferðin skiptist í tvö skref:
  - ▶ Jöfnum hæðina á hnútunum.
  - ▶ Löbbum saman niður þangað til við finnum svarið.
- ▶ Fyrri skrefinu má lýsa nánar.
- ▶ Látum hnútana okkar vera  $u$  og  $v$ , þannig að  $h(u) \geq h(v)$ .
- ▶ Við viljum því ferðast niður nákvæmlega  $h(v) - h(u)$  sinnum.
- ▶ Ein leið til að gera þetta hratt er að geyma ekki bara foreldri hvers hnúts, heldur alla hnúta sem eru  $2^k$  fyrir neðan hnútinu í trénu.
- ▶ Við þurfum því að geyma  $\mathcal{O}(\quad)$  stökk fyrir hvern hnút.

- ▶ Aðferðin skiptist í tvö skref:
  - ▶ Jöfnum hæðina á hnútunum.
  - ▶ Löbbum saman niður þangað til við finnum svarið.
- ▶ Fyrra skrefinu má lýsa nánar.
- ▶ Látum hnútana okkar vera  $u$  og  $v$ , þannig að  $h(u) \geq h(v)$ .
- ▶ Við viljum því ferðast niður nákvæmlega  $h(v) - h(u)$  sinnum.
- ▶ Ein leið til að gera þetta hratt er að geyma ekki bara foreldri hvers hnúts, heldur alla hnúta sem eru  $2^k$  fyrir neðan hnútin  $u$  í trénu.
- ▶ Við þurfum því að geyma  $\mathcal{O}(\log n)$  stökk fyrir hvern hnút.

- ▶ Aðferðin skiptist í tvö skref:
  - ▶ Jöfnum hæðina á hnútunum.
  - ▶ Löbbum saman niður þangað til við finnum svarið.
- ▶ Fyrra skrefinu má lýsa nánar.
- ▶ Látum hnútana okkar vera  $u$  og  $v$ , þannig að  $h(u) \geq h(v)$ .
- ▶ Við viljum því ferðast niður nákvæmlega  $h(v) - h(u)$  sinnum.
- ▶ Ein leið til að gera þetta hratt er að geyma ekki bara foreldri hvers hnúts, heldur alla hnúta sem eru  $2^k$  fyrir neðan hnútinu í trénu.
- ▶ Við þurfum því að geyma  $\mathcal{O}(\log n)$  stökk fyrir hvern hnút.
- ▶ Táknum með  $p(u, k)$  þann hnút sem þú endar í ef þú ferðast  $2^k$  sinnum niður tréð frá  $u$  gegnum foreldrin.



- ▶ Aðferðin skiptist í tvö skref:
  - ▶ Jöfnum hæðina á hnútunum.
  - ▶ Löbbum saman niður þangað til við finnum svarið.
- ▶ Fyrra skrefinu má lýsa nánar.
- ▶ Látum hnútana okkar vera  $u$  og  $v$ , þannig að  $h(u) \geq h(v)$ .
- ▶ Við viljum því ferðast niður nákvæmlega  $h(v) - h(u)$  sinnum.
- ▶ Ein leið til að gera þetta hratt er að geyma ekki bara foreldri hvers hnúts, heldur alla hnúta sem eru  $2^k$  fyrir neðan hnútin  $u$  í trénu.
- ▶ Við þurfum því að geyma  $\mathcal{O}(\log n)$  stökk fyrir hvern hnút.
- ▶ Táknum með  $p(u, k)$  þann hnút sem þú endar í ef þú ferðast  $2^k$  sinnum niður tréð frá  $u$  gegnum foreldrin.
- ▶ Til dæmis er  $p(u, 0)$  foreldri  $u$ .

- ▶ Aðferðin skiptist í tvö skref:
  - ▶ Jöfnum hæðina á hnútunum.
  - ▶ Löbbum saman niður þangað til við finnum svarið.
- ▶ Fyrri skrefinu má lýsa nánar.
- ▶ Látum hnútana okkar vera  $u$  og  $v$ , þannig að  $h(u) \geq h(v)$ .
- ▶ Við viljum því ferðast niður nákvæmlega  $h(v) - h(u)$  sinnum.
- ▶ Ein leið til að gera þetta hratt er að geyma ekki bara foreldri hvers hnúts, heldur alla hnúta sem eru  $2^k$  fyrir neðan hnútin  $u$  í trénu.
- ▶ Við þurfum því að geyma  $\mathcal{O}(\log n)$  stökk fyrir hvern hnút.
- ▶ Táknum með  $p(u, k)$  þann hnút sem þú endar í ef þú ferðast  $2^k$  sinnum niður tréð frá  $u$  gegnum foreldrin.
- ▶ Til dæmis er  $p(u, 0)$  foreldri  $u$ .
- ▶ Til þæginda segjum við að foreldri rótarinnar sé rótin sjálf.

- ▶ Aðferðin skiptist í tvö skref:
  - ▶ Jöfnum hæðina á hnútunum.
  - ▶ Löbbum saman niður þangað til við finnum svarið.
- ▶ Fyrri skrefinu má lýsa nánar.
- ▶ Látum hnútana okkar vera  $u$  og  $v$ , þannig að  $h(u) \geq h(v)$ .
- ▶ Við viljum því ferðast niður nákvæmlega  $h(v) - h(u)$  sinnum.
- ▶ Ein leið til að gera þetta hratt er að geyma ekki bara foreldri hvers hnúts, heldur alla hnúta sem eru  $2^k$  fyrir neðan hnútin  $i$  trénu.
- ▶ Við þurfum því að geyma  $\mathcal{O}(\log n)$  stökk fyrir hvern hnút.
- ▶ Táknum með  $p(u, k)$  þann hnút sem þú endar í ef þú ferðast  $2^k$  sinnum niður tréð frá  $u$  gegnum foreldrin.
- ▶ Til dæmis er  $p(u, 0)$  foreldri  $u$ .
- ▶ Til þæginda segjum við að foreldri rótarinnar sé rótin sjálf.
- ▶ Við finnum þessi gildi með rakningunni  $p(u, i) = p(p(u, i - 1), i - 1)$ .

- ▶ Við tökum því eins löng stökk og við getum án þess að  $h(u) < h(v)$  þangað til  $h(u) = h(v)$ .

- ▶ Við tökum því eins löng stökk og við getum án þess að  $h(u) < h(v)$  þangað til  $h(u) = h(v)$ .
- ▶ Við getum því núna gert ráð fyrir að  $h(u) = h(v)$ .

- ▶ Við tökum því eins löng stökk og við getum án þess að  $h(u) < h(v)$  þangað til  $h(u) = h(v)$ .
- ▶ Við getum því núna gert ráð fyrir að  $h(u) = h(v)$ .
- ▶ Þá viljum við taka eins löng stökk og við getum þannig að  $u \neq v$ .

- ▶ Við tökum því eins löng stökk og við getum án þess að  $h(u) < h(v)$  þangað til  $h(u) = h(v)$ .
- ▶ Við getum því núna gert ráð fyrir að  $h(u) = h(v)$ .
- ▶ Þá viljum við taka eins löng stökk og við getum þannig að  $u \neq v$ .
- ▶ Að því loknu munu  $u$  og  $v$  hafa sama foreldri.

```

9  int p[MAXN][MAXK], d[MAXN];
10 void lca_dfs(vvi& g, int x, int q, int w)
11 { // Hjálfarfall.
12     int i;
13     d[x] = w;
14     for (i = 0; i < MAXK; i++) p[x][i] = i == 0 ? q : p[p[x][i - 1]][i - 1];
15     for (i = 0; i < g[x].size(); i++) if (g[x][i] != q)
16         lca_dfs(g, g[x][i], x, w + 1);
17 }
18
19 void lca_init(vvi& g, int x)
20 { // Upphafstillir fyrir netið g með rót x.
21     int i;
22     for (i = 0; i < MAXK; i++) p[x][i] = x;
23     lca_dfs(g, 0, x, x);
24 }
25
26 int lca(int u, int v)
27 { // Skilar hæsta sameiginlega forfaðir u og v.
28     int i;
29     if (d[u] < d[v]) swap(u, v);
30     for (i = MAXK - 1; i >= 0; i--) if (d[p[u][i]] >= d[v]) u = p[u][i];
31     for (i = MAXK - 1; i >= 0; i--) if (p[u][i] != p[v][i])
32         u = p[u][i], v = p[v][i];
33     return u == v ? u : p[u][0];
34 }

```



- ▶ Í hverju skrefi þurfum við bara að taka  $\mathcal{O}(\quad)$ .

- ▶ Í hverju skrefi þurfum við bara að taka  $\mathcal{O}(\log n)$ .

- ▶ Í hverju skrefi þurfum við bara að taka  $\mathcal{O}(\log n)$ .
- ▶ Svo tímaflækjan er  $\mathcal{O}(\quad)$  fyrir hverja fyrirspurn.

- ▶ Í hverju skrefi þurfum við bara að taka  $\mathcal{O}(\log n)$ .
- ▶ Svo tímaflækjan er  $\mathcal{O}(\log n)$  fyrir hverja fyrirspurn.

