Sammengisleit

Bergur Snorrason

February 12, 2024

Sammengisleit

- *Sammengisleit* (e. *union-find*) er öflug leið til að halda utan um jafngildisflokka tiltekna vensla eða, með öðrum orðum, halda utan um *sundurlæg* mengi.

Sammengisleit

- *Sammengisleit* (e. *union-find*) er öflug leið til að halda utan um jafngildisflokka tiltekna vensla eða, með öðrum orðum, halda utan um *sundurlæg* mengi.
- Við viljum:

Sammengisleit

- *Sammengisleit* (e. *union-find*) er öflug leið til að halda utan um jafngildisflokka tiltekna vensla eða, með öðrum orðum, halda utan um *sundurlæg* mengi.
- Við viljum:
  - Bera saman jafngildisflokka mismunandi staka.

Sammengisleit

- *Sammengisleit* (e. *union-find*) er öflug leið til að halda utan um jafngildisflokka tiltekna vensla eða, með öðrum orðum, halda utan um *sundurlæg* mengi.
- Við viljum:
  - Bera saman jafngildisflokka mismunandi staka.
  - Sameina jafngildisflokka.

Sammengisleit

- *Sammengisleit* (e. *union-find*) er öflug leið til að halda utan um jafngildisflokka tiltekna vensla eða, með öðrum orðum, halda utan um *sundurlæg* mengi.
- Við viljum:
  - Bera saman jafngildisflokka mismunandi staka.
  - Sameina jafngildisflokka.
- Við tölum um aðgerðirnar `find(x)` og `join(x, y)`.

- Tökum sem dæmi einstökungasafnið $\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\}\}$.

- Tökum sem dæmi einstökungasafnið $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}$.
- `join(1, 3)` gefur okkur $\{\{1, 3\}, \{2\}, \{4\}, \{5\}\}$.

- Tökum sem dæmi einstökungasafnið $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}$.
- `join(1, 3)` gefur okkur $\{\{1, 3\}, \{2\}, \{4\}, \{5\}\}$.
- `join(2, 5)` gefur okkur $\{\{1, 3\}, \{2, 5\}, \{4\}\}$.

- Tökum sem dæmi einstökungasafnið $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}$.
- `join(1, 3)` gefur okkur $\{\{1, 3\}, \{2\}, \{4\}, \{5\}\}$.
- `join(2, 5)` gefur okkur $\{\{1, 3\}, \{2, 5\}, \{4\}\}$.
- `join(2, 4)` gefur okkur $\{\{1, 3\}, \{2, 4, 5\}\}$.

- Tökum sem dæmi einstökungasafnið $\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\}\}$.
- `join(1, 3)` gefur okkur $\{\{1,3\},\{2\},\{4\},\{5\}\}$.
- `join(2, 5)` gefur okkur $\{\{1,3\},\{2,5\},\{4\}\}$.
- `join(2, 4)` gefur okkur $\{\{1,3\},\{2,4,5\}\}$.
- `join(1, 4)` gefur okkur $\{\{1,2,3,4,5\}\}$.

- Tökum sem dæmi einstökungasafnið $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}$.
- `join(1, 3)` gefur okkur $\{\{1, 3\}, \{2\}, \{4\}, \{5\}\}$.
- `join(2, 5)` gefur okkur $\{\{1, 3\}, \{2, 5\}, \{4\}\}$.
- `join(2, 4)` gefur okkur $\{\{1, 3\}, \{2, 4, 5\}\}$.
- `join(1, 4)` gefur okkur $\{\{1, 2, 3, 4, 5\}\}$.
- Á sérhverjum tímapunkti myndi `find(x)` skila einhverju staki sem er í sama mengi og `x`.

- Tökum sem dæmi einstökungasafnið $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}$.
- `join(1, 3)` gefur okkur $\{\{1, 3\}, \{2\}, \{4\}, \{5\}\}$.
- `join(2, 5)` gefur okkur $\{\{1, 3\}, \{2, 5\}, \{4\}\}$.
- `join(2, 4)` gefur okkur $\{\{1, 3\}, \{2, 4, 5\}\}$.
- `join(1, 4)` gefur okkur $\{\{1, 2, 3, 4, 5\}\}$.
- Á sérhverjum tímapunkti myndi `find(x)` skila einhverju staki sem er í sama mengi og `x`.
- Mikilvægt er að `find(...)` skilar sama stakinu fyrir sérhvert stak í sérhverjum jafngildisflokki.

- Tökum sem dæmi einstökungasafnið $\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\}\}$.
- `join(1, 3)` gefur okkur $\{\{1,3\},\{2\},\{4\},\{5\}\}$.
- `join(2, 5)` gefur okkur $\{\{1,3\},\{2,5\},\{4\}\}$.
- `join(2, 4)` gefur okkur $\{\{1,3\},\{2,4,5\}\}$.
- `join(1, 4)` gefur okkur $\{\{1,2,3,4,5\}\}$.
- Á sérhverjum tímapunkti myndi `find(x)` skila einhverju staki sem er í sama mengi og `x`.
- Mikilvægt er að `find(...)` skilar sama stakinu fyrir sérhvert stak í sérhverjum jafngildisflokki.
- Til dæmis, í þriðja punktinum myndi `find(1)` og `find(3)` þurfa að skila sama stakinu.

- Tökum sem dæmi einstökungasafnið $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}$.
- `join(1, 3)` gefur okkur $\{\{1, 3\}, \{2\}, \{4\}, \{5\}\}$.
- `join(2, 5)` gefur okkur $\{\{1, 3\}, \{2, 5\}, \{4\}\}$.
- `join(2, 4)` gefur okkur $\{\{1, 3\}, \{2, 4, 5\}\}$.
- `join(1, 4)` gefur okkur $\{\{1, 2, 3, 4, 5\}\}$.
- Á sérhverjum tímapunkti myndi `find(x)` skila einhverju staki sem er í sama mengi og `x`.
- Mikilvægt er að `find(...)` skilar sama stakinu fyrir sérhvert stak í sérhverjum jafngildisflokki.
- Til dæmis, í þriðja punktinum myndi `find(1)` og `find(3)` þurfa að skila sama stakinu.
- Við köllum þetta stak *oddvita* (e. *representative*) jafngildisflokksins.

- Gerum ráð fyrir að tölurnar sem við munum vinna með séu jákvæðar og minni en n.

- Gerum ráð fyrir að tölurnar sem við munum vinna með séu jákvæðar og minni en n.
- Við munum þá gefa okkur n staka fylki p, þar sem i-ta stakið í fylkinu er upphafstillt sem i.

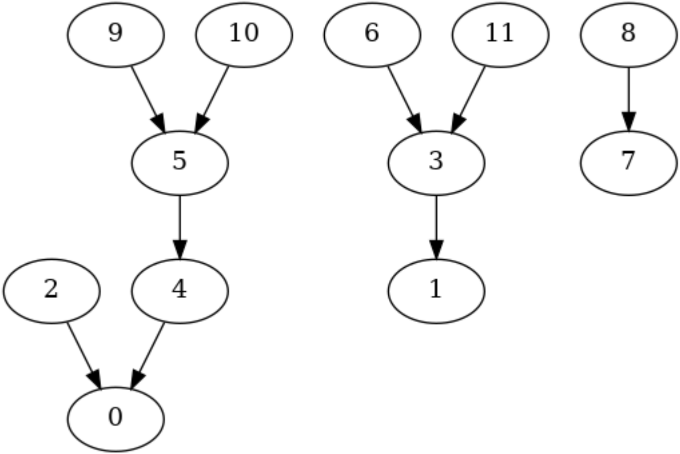
- Gerum ráð fyrir að tölurnar sem við munum vinna með séu jákvæðar og minni en n.
- Við munum þá gefa okkur n staka fylki p, þar sem i-ta stakið í fylkinu er upphafstillt sem i.
- Fylkið p mun nú geyma *foreldri* sérhvers stak.

- Gerum ráð fyrir að tölurnar sem við munum vinna með séu jákvæðar og minni en n.
- Við munum þá gefa okkur n staka fylki p, þar sem i-ta stakið í fylkinu er upphafstillt sem i.
- Fylkið p mun nú geyma *foreldri* sérhvers stak.
- Foreldrin mynda keðjur, sem svara til jafngildisflokkanna.

- Gerum ráð fyrir að tölurnar sem við munum vinna með séu jákvæðar og minni en n.
- Við munum þá gefa okkur n staka fylki p, þar sem i-ta stakið í fylkinu er upphafstillt sem i.
- Fylkið p mun nú geyma *foreldri* sérhvers stak.
- Foreldrin mynda keðjur, sem svara til jafngildisflokkanna.
- Sérhver keðja endar í einhverju staki, sem munu vera oddvitar jafngildisflokkanna.

- Keðjurnar sem fást með $\{\{0, 2, 4, 5, 9, 10\}, \{1, 3, 6, 11\}, \{7, 8\}\}$ gætu til dæmis verið gefnar með $p = [0, 1, 0, 1, 0, 4, 3, 7, 7, 5, 5, 3]$.

- Keðjurnar sem fást með $\{\{0, 2, 4, 5, 9, 10\}, \{1, 3, 6, 11\}, \{7, 8\}\}$ gætu til dæmis verið gefnar með $p = [0, 1, 0, 1, 0, 4, 3, 7, 7, 5, 5, 3]$.



- Til að fá oddvita flokks tiltekins staks er hægt að fara endurkvæmt upp keðjuna.

- Til að fá oddvita flokks tiltekins staks er hægt að fara endurkvæmt upp keðjuna.
- Til að sameina flokka nægir að breyta foreldri oddvita annars flokksins yfir í eitthvert stak hins flokksins.

- Til að fá oddvita flokks tiltekins staks er hægt að fara endurkvæmt upp keðjuna.
- Til að sameina flokka nægir að breyta foreldri oddvita annars flokksins yfir í eitthvert stak hins flokksins.
- Báðar þessar aðgerðir er auðvelt að útfæra.

Frumstæð sammengisleit

```
int find(int *p, int x)
{
    if (p[x] == x) return x;
    return find(p, p[x]);
}

void join(int *p, int x, int y)
{
    p[find(p, x)] = find(p, y);
}

void init(int *p, int n)
{
    for (int i = 0; i < n; i++) p[i] = i;
}
```

Ekki nota frumstæða sammengisleit

- Við sjáum nú að tímaflækja `find(...)` er línuleg í lengd keðjunnar, svo þar sem lengd keðjunnar getur verið í versta falli n þá er `find(...)` með tímaflækjuna $\mathcal{O}(\quad)$.

Ekki nota frumstæða sammengisleit

- Við sjáum nú að tímaflækja `find(...)` er línuleg í lengd keðjunnar, svo þar sem lengd keðjunnar getur verið í versta falli n þá er `find(...)` með tímaflækjuna $\mathcal{O}(n)$.

Ekki nota frumstæða sammengisleit

- Við sjáum nú að tímaflækja `find(...)` er línuleg í lengd keðjunnar, svo þar sem lengd keðjunnar getur verið í versta falli n þá er `find(...)` með tímaflækjuna $\mathcal{O}(n)$.
- Fallið `join(...)` gerir lítið annað en að kalla tvisvar á `find(...)` svo það er $\mathcal{O}(\quad)$.

Ekki nota frumstæða sammengisleit

- Við sjáum nú að tímaflækja `find(...)` er línuleg í lengd keðjunnar, svo þar sem lengd keðjunnar getur verið í versta falli n þá er `find(...)` með tímaflækjuna $\mathcal{O}(n)$.
- Fallið `join(...)` gerir lítið annað en að kalla tvisvar á `find(...)` svo það er $\mathcal{O}(n)$.

Ekki nota frumstæða sammengisleit

- Við sjáum nú að tímaflækja `find(...)` er línuleg í lengd keðjunnar, svo þar sem lengd keðjunnar getur verið í versta falli n þá er `find(...)` með tímaflækjuna $\mathcal{O}(\, n\,)$.
- Fallið `join(...)` gerir lítið annað en að kalla tvisvar á `find(...)` svo það er $\mathcal{O}(\, n\,)$.
- Við myndum því aðeins ná að svara n fyrirpsurnum ef $n \leq 10^4$.

Ekki nota frumstæða sammengisleit

- Við sjáum nú að tímaflækja `find(...)` er línuleg í lengd keðjunnar, svo þar sem lengd keðjunnar getur verið í versta falli n þá er `find(...)` með tímaflækjuna $\mathcal{O}(n)$.
- Fallið `join(...)` gerir lítið annað en að kalla tvisvar á `find(...)` svo það er $\mathcal{O}(n)$.
- Við myndum því aðeins ná að svara n fyrirpsurnum ef $n \leq 10^4$.
- Því er ekki ráðlagt að nota þessa frumstæðu útfærslu.

Ekki nota frumstæða sammengisleit

- Við sjáum nú að tímaflækja `find(...)` er línuleg í lengd keðjunnar, svo þar sem lengd keðjunnar getur verið í versta falli n þá er `find(...)` með tímaflækjuna $\mathcal{O}(n)$.
- Fallið `join(...)` gerir lítið annað en að kalla tvisvar á `find(...)` svo það er $\mathcal{O}(n)$.
- Við myndum því aðeins ná að svara n fyrirpsurnum ef $n \leq 10^4$.
- Því er ekki ráðlagt að nota þessa frumstæðu útfærslu.
- Hana má þó bæta.

Keðjuþjöppuð sammengisleit

- Lykilatriðið í bætingunni er að stytta keðjurnar.

Keðjuþjöppuð sammengisleit

- Lykilatriðið í bætingunni er að stytta keðjurnar.
- Í hvert sinn sem við köllum á `find(...)` þá fletjum við keðjun sem við heimsækjum.

Keðjuþjöppuð sammengisleit

- Lykilatriðið í bætingunni er að stytta keðjurnar.
- Í hvert sinn sem við köllum á `find(...)` þá fletjum við keðjun sem við heimsækjum.
- Þetta er gert með því að setja `p[x]` sem oddvita flokks `x`, í hverju skrefi endurkvæmninnar.

Keðjuþjöppuð sammengisleit

- Lykilatriðið í bætingunni er að stytta keðjurnar.
- Í hvert sinn sem við köllum á `find(...)` þá fletjum við keðjun sem við heimsækjum.
- Þetta er gert með því að setja `p[x]` sem oddvita flokks `x`, í hverju skrefi endurkvæmninnar.
- Þetta köllum við *keðjuþjöppun* (e. *path compression*).

- Gefum okkur $p = [0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]$.

- Gefum okkur $p = [0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]$.
- Ljóst er að `find(5)` skilar 0.

- Gefum okkur $p = [0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]$.
- Ljóst er að `find(5)` skilar 0.
- Ef við notum frumstæða sammengisleit breytist p ekki neitt þegar kallað er á `find(...)` en með keðjuþjappaðri sammengisleit þjappast keðjan frá og með 5 og því fæst $p = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 5, 6, 7]$.

- Gefum okkur $p = [0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]$.
- Ljóst er að `find(5)` skilar 0.
- Ef við notum frumstæða sammengisleit breytist p ekki neitt þegar kallað er á `find(...)` en með keðjuþjappaðri sammengisleit þjappast keðjan frá og með 5 og því fæst $p = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 5, 6, 7]$.
- Takið eftir að nú er líka styttra í oddvitann fyrir stök 6, 7 og 8, þó við heimsóttum þau ekki í endurkvæmninni.

Keðjuþjöppað sammengisleit

```
int find(int *p, int x)
{
    if (p[x] == x) return x;
    return p[x] = find(p, p[x]);
}

void join(int *p, int x, int y)
{
    p[find(p, x)] = find(p, y);
}

void init(int *p, int n)
{
    for (int i = 0; i < n; i++) p[i] = i;
}
```

- Þetta er þó ekki eina bætingin sem er í boði.

- Þetta er þó ekki eina bætingin sem er í boði.
- Við getum einnig sameinað á skilvirkari máta með *stærðarmiðaðri sameiningu*.

Stærðarmiðuð sameining (e. *union by size*)

- Þegar við sameinum keðjur þarf að velja hvor odvitinn verður ennþá odviti.

Stærðarmiðuð sameining (e. *union by size*)

- Þegar við sameinum keðjur þarf að velja hvor odvitinn verður ennþá odviti.
- Við getum valið oddvitann sem hefur fleiri stök í sinni keðju.

Stærðarmiðuð sameining (e. *union by size*)

- Þegar við sameinum keðjur þarf að velja hvor odvitinn verður ennþá odviti.
- Við getum valið oddvitann sem hefur fleiri stök í sinni keðju.

```c
int find(int *p, int x)
{
    return p[x] < 0 ? x : (p[x] = find(p, p[x]));
}

void join(int *p, int x, int y)
{
    int rx = find(p, x), ry = find(p, y);
    if (rx == ry) return;
    if (p[rx] > p[ry]) p[ry] += p[rx], p[rx] = ry;
    else p[rx] += p[ry], p[ry] = rx;
}
```

Stærðarmiðuð sameining (e. *union by size*)

- Þegar við sameinum keðjur þarf að velja hvor odvitinn verður ennþá odviti.
- Við getum valið oddvitann sem hefur fleiri stök í sinni keðju.

```
int find(int *p, int x)
{
    return p[x] < 0 ? x : (p[x] = find(p, p[x]));
}

void join(int *p, int x, int y)
{
    int rx = find(p, x), ry = find(p, y);
    if (rx == ry) return;
    if (p[rx] > p[ry]) p[ry] += p[rx], p[rx] = ry;
    else p[rx] += p[ry], p[ry] = rx;
}
```

- Í þessari útfærlsu geymir oddvitinn neikvæða tölu, en önnur stök vísa ennþá upp keðjuna.

Stærðarmiðuð sameining (e. *union by size*)

- Þegar við sameinum keðjur þarf að velja hvor odvitinn verður ennþá odviti.
- Við getum valið oddvitann sem hefur fleiri stök í sinni keðju.

```
int find(int *p, int x)
{
    return p[x] < 0 ? x : (p[x] = find(p, p[x]));
}

void join(int *p, int x, int y)
{
    int rx = find(p, x), ry = find(p, y);
    if (rx == ry) return;
    if (p[rx] > p[ry]) p[ry] += p[rx], p[rx] = ry;
    else p[rx] += p[ry], p[ry] = rx;
}
```

- Í þessari útfærlsu geymir oddvitinn neikvæða tölu, en önnur stök vísa ennþá upp keðjuna.
- Þessi neikvæða tala svarar til fjölda staka í þeim keðjum sem enda í oddvitanum.

Stærðarmiðuð sameining (e. *union by size*)

- Þegar við sameinum keðjur þarf að velja hvor odvitinn verður ennþá odviti.
- Við getum valið oddvitann sem hefur fleiri stök í sinni keðju.

```c
int find(int *p, int x)
{
    return p[x] < 0 ? x : (p[x] = find(p, p[x]));
}

void join(int *p, int x, int y)
{
    int rx = find(p, x), ry = find(p, y);
    if (rx == ry) return;
    if (p[rx] > p[ry]) p[ry] += p[rx], p[rx] = ry;
    else p[rx] += p[ry], p[ry] = rx;
}
```

- Í þessari útfærlsu geymir oddvitinn neikvæða tölu, en önnur stök vísa ennþá upp keðjuna.
- Þessi neikvæða tala svarar til fjölda staka í þeim keðjum sem enda í oddvitanum.
- Svo `-p[find(x)]` er fjöldi staka í jafngildisflokki `x`.

Keðjuþjöppað og stærðarmiðuð sammengisleit

```c
int find(int *p, int x)
{
    return p[x] < 0 ? x : (p[x] = find(p, p[x]));
}

void join(int *p, int x, int y)
{
    int rx = find(p, x), ry = find(p, y);
    if (rx == ry) return;
    if (p[rx] > p[ry]) p[ry] += p[rx], p[rx] = ry;
    else p[rx] += p[ry], p[ry] = rx;
}

void init(int *p, int n)
{
    for (int i = 0; i < n; i++) p[i] = -1;
}

int size(int *p, int x)
{
    return -p[find(p, x)];
}
```

- Það er flóknara að lýsa tímaflækju keðjuþjappaðrar sammengisleitar með stærðarmiðaðri sameiningu.

- Það er flóknara að lýsa tímaflækju keðjuþjappaðrar sammengisleitar með stærðarmiðaðri sameiningu.
- *Á heildina litið* (e. *amortized*) er tímaflækja hverrar aðgerðar $\mathcal{O}(\alpha(n))$, þar sem α er andhverfa *Ackermann* fallsins.

- Það er flóknara að lýsa tímaflækju keðjuþjappaðrar sammengisleitar með stærðarmiðaðri sameiningu.
- *Á heildina litið* (e. *amortized*) er tímaflækja hverrar aðgerðar $\mathcal{O}(\alpha(n))$, þar sem α er andhverfa *Ackermann* fallsins.
- Fyrir þau n sem við fáumst við er $\alpha(n)$ nánast fast.

- Það er flóknara að lýsa tímaflækju keðjuþjappaðrar sammengisleitar með stærðarmiðaðri sameiningu.
- *Á heildina litið* (e. *amortized*) er tímaflækja hverrar aðgerðar $\mathcal{O}(\alpha(n))$, þar sem α er andhverfa *Ackermann* fallsins.
- Fyrir þau n sem við fáumst við er $\alpha(n)$ nánast fast.
- Við ímyndum okkur því alltaf að hver aðgerð sammengisleitar sé $\mathcal{O}(1)$.