

Tímaflækjur

Bergur Snorrason

18. janúar 2022

Tímaflækjur

- ▶ Látum $f, g: [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$.
- ▶ Við segjum að fall g sé í menginu $\mathcal{O}(f)$ ef til eru rauntölur c og x_0 þannig að

$$|g(x)| \leq c \cdot f(x)$$

fyrir öll $x > x_0$.

- ▶ Þetta þýðir í raun að fallið $|g|$ verður á endanum minna en $c \cdot f$.
- ▶ Þessi lýsing undirstrikar að f er efra mat á g , það er að segja g hagar sér ekki verr en f .
- ▶ Ef $g \in \mathcal{O}(f)$ og $f \in \mathcal{O}(g)$ þá segjum við að $f \in \Theta(g)$ (og $g \in \Theta(f)$).

Dæmi

- ▶ Tökum nokkur dæmi.
- ▶ Ef $f \in \mathcal{O}(g)$ og $r > 0$ þá er $r \cdot f \in \mathcal{O}(g)$.
- ▶ Ef $f_1 \in \mathcal{O}(g_1)$ og $f_2 \in \mathcal{O}(g_2)$ þá er $f_1 \cdot f_2 \in \mathcal{O}(g_1 \cdot g_2)$.
- ▶ Ef p er n -ta stigs margliða þá er $p \in \Theta(x^n)$.
- ▶ Ef p er n -ta stigs margliða og q er m -ta stigs margliða með $n < m$ þá er $p \in \mathcal{O}(q)$, en $q \notin \mathcal{O}(p)$.
- ▶ Við höfum að $\log x \in \mathcal{O}(x)$ en $x \notin \mathcal{O}(\log x)$.
- ▶ Nú er $\log x^n = n \cdot \log x$, svo ef p er n -ta stigs margliða þá er $\log p \in \mathcal{O}(\log x)$.

Í forritun

- ▶ Takið eftir að í stað þessa að segja „ $f \in \mathcal{O}(g)$ ” er oft sagt $f = \mathcal{O}(g)$.
- ▶ Ef forrit framkvæmir $T(n)$ aðgerðir, með $T \in \mathcal{O}(f)$, segjum við að *tímaflækja* (e. *time complexity*) forritsins sé $\mathcal{O}(f)$.
- ▶ Skoðum nú nokkur forrit og ákvörðum tímaflækjur þeirra.

```
1 #include <stdio.h>
2
3 int main()
4 {
5     printf("Hello world!\n");
6     return 0;
7 }
```

- ▶ Hér er ekkert inntak svo forritið hefur tímaflækjuna $\mathcal{O}(1)$.

```

1 #include <stdio.h>
2
3 int main()
4 {
5     int i, n, r = 0;
6     scanf("%d", &n);
7     for (i = 0; i < n; i++)
8         r += i;
9     printf("%d\n", r);
10    return 0;
11 }

```

- ▶ Forritið les inn töluna n og reiknar svo summuna $1 + 2 + \dots + n$.
- ▶ Þetta er gert með forlykkju sem keyrir n sinnum.
- ▶ Hvert skipti eru tvær tölur lagðar saman.
- ▶ Svo þetta forrit er $\mathcal{O}(n)$.

```

1 #include <stdio.h>
2
3 int main()
4 {
5     int i, j, n, r = 0;
6     scanf("%d", &n);
7     for (i = 0; i < n; i++)
8         for (j = 0; j < i/2; j++)
9             r += i^j;
10    printf("%d\n", r);
11    return 0;
12 }

```

- ▶ Forritið les inn töluna n og reiknar svo summu.
- ▶ Summan er reiknuð með tvöfaldri forlykkju.
- ▶ Ytri forlykkjan keyrir n sinnum og seinni keyrir aldrei oftar en $n/2$ sinnum.
- ▶ Svo tímaflækja forritsins er $\mathcal{O}(n^2)$.

- ▶ Skoðum skiladæmið *Reiknirit*.
- ▶ Fyrsta lína inntaksins inniheldur heiltölu n .
- ▶ Síðan koma n heiltölur a_1, a_2, \dots, a_n .
- ▶ Gerum ráð fyrir að við séum með forrit sem gerir eftirfarandi:
 - ▶ Prentar tölurnar.
 - ▶ Fjarlægir öll eintök af algengustu tölunni í listan.
 - ▶ Endurtekur skrefin að ofan þar til listinn er tómur.
- ▶ Dæmið snýst um að finna hversu margar tölur eru prentaðar í heildina.
- ▶ Tökum dæmi.

- ▶ Gerum ráð fyrir að tölurnar í inntakinu séu 1, 2, 1, 4, 4.
- ▶ Þá myndi forritið í dæminu prenta:

```
1 1 2 1 4 4
2 1 2 1
3 2
```

- ▶ Svo það prentar 9 tölur.

- ▶ Ein leið til að leysa þetta dæmi er að útfæra forritið.
- ▶ Við þurfum þá að geta fjarlægt algengasta stakið.

```

3 typedef long long ll;
4
5 int cmp(const void* p1, const void* p2)
6 {
7     ll x = *(ll*)p1, y = *(ll*)p2;
8     return (y <= x) - (x <= y);
9 }
10
11 ll fjarlaegja_algengasta_stakid(ll *a, ll n)
12 { // fjarlaegir algengasta stakid og skilar nyju lengd listans.
13     ll i = 0, j, mx = 0, r;
14     while (i < n)
15     { // finnum algengasta stakid i rodudu fylki.
16         j = i;
17         while (j < n && a[i] == a[j]) j++;
18         if (mx < j - i) mx = j - i, r = a[i];
19         i = j;
20     }
21     // fjarlaegjum algengasta stakid.
22     for (i = 0, j = 0; i < n; i++) if (a[i] != r) a[j++] = a[i];
23     return j;
24 }
25
26 int main()
27 {
28     ll i, n, r = 0;
29     scanf("%lld", &n);
30     ll a[n];
31     for (i = 0; i < n; i++) scanf("%lld", &a[i]);
32     qsort(a, n, sizeof *a, cmp);
33     while (n > 0)
34     {
35         r += n;
36         n = fjarlaegja_algengasta_stakid(a, n);
37     }
38     printf("%lld\n", r);
39     return 0;
40 }

```

- ▶ Þetta forrit leysir dæmið (að því sem ég best veit).
- ▶ Nú er spurning hvort það sé nógu hratt.
- ▶ Í dæminu á Kattis er gefið að $n \leq 10^6$.
- ▶ Reynum nú að ákvarða tímaflækjuna.
- ▶ Sjáum aftur útfærsluna.

```

10
11 ll fjarlaegja_algengasta_stakid(ll *a, ll n)
12 { // fjarlaegir algengasta stakid og skilar nyju lengd listans.
13     ll i = 0, j, mx = 0, r;
14     while (i < n)
15     { // finnum algengasta stakid i rodudu fylki.
16         j = i;
17         while (j < n && a[i] == a[j]) j++;
18         if (mx < j - i) mx = j - i, r = a[i];
19         i = j;
20     }
21     // fjarlaegjum algengasta stakid.
22     for (i = 0, j = 0; i < n; i++) if (a[i] != r) a[j++] = a[i];
23     return j;
24 }
25
26 int main()
27 {
28     ll i, n, r = 0;
29     scanf("%lld", &n);
30     ll a[n];
31     for (i = 0; i < n; i++) scanf("%lld", &a[i]);
32     qsort(a, n, sizeof *a, cmp);
33     while (n > 0)
34     {
35         r += n;
36         n = fjarlaegja_algengasta_stakid(a, n);
37     }
38     printf("%lld\n", r);
39     return 0;
40 }

```

- ▶ Í fyrsta lagi röðum við listanum, sem er $\mathcal{O}(n \log n)$.
- ▶ Síðan erum við með while-lykkju, sem gerir ekkert annað en að kalla á fallið `fjarlaegja_algengasta_stakid(...)`.
- ▶ Í versta falli fjarlægjum við eitt stak í einu, svo þessi while-lykkja keyrir allt að n sinnum.
- ▶ Í fallinu `fjarlaegja_algengasta_stakid(...)` eru tvær lykkjur, hvor um sig keyrir n sinnum.
- ▶ Takið eftir að n er þá lengd listans á þeim tímapunkti.
- ▶ Fallið `fjarlaegja_algengasta_stakid(...)` hefur því tímaflækjuna $\mathcal{O}(n)$.
- ▶ Forritið í heild sinni hefur því tímaflækjuna $\mathcal{O}(n^2)$.

- ▶ Rifjum upp að $n \leq 10^6$ og tímaflækjan er $\mathcal{O}(n^2)$.
- ▶ Er þetta nógu hratt til að fá AC?
- ▶ Nú segir 10^8 *relgan* okkur að tímamörk dæmisins þurfi að vera $(10^6)^2 \cdot 10^{-8} = 10^4$ sekúndur.
- ▶ Svo er ekki og þessi lausn er því að fara að fá TLE.

