

Lausnir á völdum dæmum úr viku tvö

Bergur Snorrason

27. janúar 2022

- ▶ Ég mun leysa eftirfarandi dæmi:
 - ▶ *Reiknirit,*
 - ▶ *Pipe Rotation,*
 - ▶ *Language Survey.*

Reiknirit

- ▶ Skoðum aftur skiladæmið *Reiknirit*.
- ▶ Fyrsta lína inntaksins inniheldur heiltölu n .
- ▶ Síðan koma n heiltölur a_1, a_2, \dots, a_n .
- ▶ Gerum ráð fyrir að við séum með forrit sem gerir eftirfarandi:
 - ▶ Prentar tölurnar.
 - ▶ Fjarlægir öll eintök af algengustu tölunni í listan.
 - ▶ Endurtekur skrefin að ofan þar til listinn er tómur.
- ▶ Dæmið snýst um að finna hversu margar tölur eru prentaðar í heildina.

Reiknirit

- ▶ Síðast leystum við þetta dæmi með því að útfæra forritið sem er lýst í dæminu.
- ▶ Við komumst þó að því að sú lausn var $\mathcal{O}(n^2)$ sem reyndist of hæg.
- ▶ Tökum eftir að við getum notað svipaða hugmynd og í hægu útfærslunni til að telja hversu oft hver tala kemur fyrir.
- ▶ Tökum einnig eftir að hvert eintak af algengustu tölunni er prentað einu sinni, hvert eintak af næst algengustu tölunni er prentað tvisvar og svo framvegis.
- ▶ Einnig skiptir talan sjálf ekki máli, heldur eingöngu hversu oft hún kemur fyrir.

Reiknirit

- ▶ Látum því $h_1 \geq h_2 \geq \dots \geq h_k$ þannig að algengast talan kemur h_1 sinni fyrir, næst algengasta talan kemur h_2 sinnum fyrir og svo framvegis.
- ▶ Svarið er því

$$\sum_{i=1}^k i \cdot h_i.$$

- ▶ Við þurfum þó að passa okkur aðeins.
- ▶ Ef $h_1 = h_2 = \dots h_k = 1$ (þá er einnig $k = n$) fæst að svarið er

$$\sum_{i=1}^k i \cdot h_i = \sum_{i=1}^k i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

- ▶ Svo, þar sem n getur verið allt að 10^6 , getur svarið okkar orðið of stórt fyrir int.
- ▶ Við þurfum því að nota long long.

Reiknirit

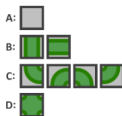
```
1 #include <stdlib.h>
2 #include <stdio.h>
3 typedef long long ll;
4
5 #define CMP(E, F) (F <= E) - (E <= F)
6 int cmp(const void* p1, const void* p2)
7 {
8     return CMP(*(ll*)p2, *(ll*)p1);
9 }
10
11 int main()
12 {
13     ll i, j, k, r = 0, n;
14     scanf("%lld", &n);
15     ll a[n], b[n];
16     for (i = 0; i < n; i++) scanf("%lld", &a[i]);
17     qsort(a, n, sizeof *a, cmp);
18     i = k = 0;
19     while (i < n)
20     { // teljum hvað hver tala kemur oft fyrir.
21         j = i;
22         while (j < n && a[i] == a[j]) j++;
23         b[k++] = j - i;
24         i = j;
25     }
26     qsort(b, k, sizeof *b, cmp);
27     for (i = 0; i < k; i++) r = r + (i + 1)*b[i];
28     printf("%lld\n", r);
29     return 0;
30 }
```

Reiknirit

- ▶ Sjáum við byrjum á að raða, sem er $\mathcal{O}(n \log n)$.
- ▶ Við teljum síðan hvað hver tala kemur oft fyrir, sem er $\mathcal{O}(n)$.
- ▶ Síðan röðum við aftur.
- ▶ Að lokum reiknum við summuna í $\mathcal{O}(n)$.
- ▶ Tímaflækjan er því í heildina $\mathcal{O}(n \log n)$.
- ▶ Nú er $10^{-8} \cdot 10^6 \cdot \log 10^6 \sim 0,2$, svo þessi lausn er nógu hröð.

Pipe Rotation

- ▶ Okkur er gefið $n \times m$ ($1 \leq n, m \leq 100$) borð af spilum af eftirfarandi gerðum:



- ▶ Við eigum að ákvarða hvort hægt sé að snúa spilunum þannig að allar hliðar sem eru grænar eru gagnstæðar hliðum sem eru einnig grænar.
- ▶ Takið eftir að við megum ekki endurraða spilunum og að hliðar sem snúa út mega ekki vera grænar.

Pipe Rotation

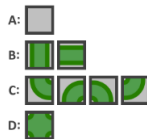
- ▶ Sjáum dæmi.



- ▶ Efra dæmið er ekki löglegt en neðra er löglegt.

Pipe Rotation

- ▶ Sjáum fyrst að ef við vitum hvað er vinstra megin og fyrir ofan spil þá vitum við hvernig það þarf að snúa.
- ▶ Ef hliðin fyrir ofan er auð og hliðin til vinstri er auð þá þarf spilið að vera af gerð A eða af gerð C í öðrum snúning.
- ▶ Ef hliðin fyrir ofan er auð og hliðin til vinstri er græn þá þarf spilið að vera af gerð B í seinni snúning eða af gerð C í þriðja snúning.
- ▶ Ef hliðin fyrir ofan er græn og hliðin til vinstri er auð þá þarf spilið að vera af gerð B í fyrri snúning eða af gerð C í fyrsta snúning.
- ▶ Ef hliðin fyrir ofan er græn og hliðin til vinstri er græn þá þarf spilið að vera af gerð C í fjórða snúning eða af gerð D.



Pipe Rotation

- ▶ Nú getum við labbað í gegnum öll spilin og ákvarðað hvernig hvert spil snýr ef við byrjum á efstu línunni og vinnum okkur niður, og skoðum hverja línu frá vinstri til hægri.
- ▶ Það er þínu vinna að útfæra þetta útaf öllum tilfellunum sem þarf að hafa í huga.

```
4 void imp()  
5 {  
6     printf("Impossible\n");  
7     exit(0);  
8 }
```

```
10 int main()
11 {
12     int i, j, n, m;
13     scanf("%d%d", &n, &m);
14     char s[n][m + 1], a[n + 1][m + 1], b[n + 1][m + 1];
15     for (i = 0; i < n + 1; i++) for (j = 0; j < m + 1; j++)
16         a[i][j] = b[i][j] = 0;
17     for (i = 0; i < n; i++) scanf("%s", s[i]);
18     for (i = 0; i < n; i++) for (j = 0; j < m; j++)
19     {
20         if (a[i][j] == 0 && b[i][j] == 0)
21         {
22             if (s[i][j] == 'C') a[i + 1][j]++, b[i][j + 1]++;
23             else if (s[i][j] != 'A') imp();
24         }
25         else if (a[i][j] == 1 && b[i][j] == 0)
26         {
27             if (s[i][j] == 'B') a[i + 1][j]++;
28             else if (s[i][j] == 'C') b[i][j + 1]++;
29             else imp();
30         }
31         else if (a[i][j] == 0 && b[i][j] == 1)
32         {
33             if (s[i][j] == 'B') b[i][j + 1]++;
34             else if (s[i][j] == 'C') a[i + 1][j]++;
35             else imp();
36         }
37         else
38         {
39             if (s[i][j] == 'D') a[i + 1][j]++, b[i][j + 1]++;
40             else if (s[i][j] != 'C') imp();
41         }
42     }
43     for (i = 0; i < n; i++) if (b[i][m]) imp();
44     for (i = 0; i < m; i++) if (a[n][i]) imp();
45     printf("Possible\n");
46     return 0;
47 }
```

Pipe Rotation

- ▶ Þessi lausn er lítið annað en tvöföld for-lykkja sú ytri af lengd n og sú innri af lengd m .
- ▶ Svo tímaflækjan er $\mathcal{O}(n \cdot m)$.

Language Survey

- ▶ Þér er gefið land sem er skipt í grind eftir hvaða tungumál eru töluð hvar.
- ▶ Þú veist að í heildina eru þrjú tungumál töluð.
- ▶ Þér er einnig sagt, fyrir sérhvern reit, hvort eitt tungumál er talað þar eða fleiri.
- ▶ Einnig er gefið að hvert tungumál er talað á samanhagandi svæði reita.
- ▶ Með öðrum orðum getur þú labbað milli allra reita sem tala sama tungumál án þess að þurfa að heimsækja reit sem talar ekki tungumálið.

Language Survey

► Fyrri sýniinntakið er

```
1 3 4
2 2211
3 1112
4 1112
```

► og samsvarandi úttak er

```
1 AAAA
2 ...A
3 ....
4
5 BB..
6 BBBB
7 ...B
8
9 ....
10 ...C
11 CCCC
```


Language Survey

- ▶ Gerum ráð fyrir að við getum raðað tungumálunum þannig að eitt tungumál er talað í hverjum reit, en fyrir hvern reit er líka, að minnsta kosti, einn nágranni sem talar annað tungumál.
- ▶ Ef slík skipun er til þá er eftirleikurinn auðveldur.
- ▶ Fyrir hvern reit þar sem fleiri en eitt tungumál er talað veljum við tungumálið sem er talað hjá nágrannanum sem talar annað tungumál og látum það tungumál líka talað í þeim reit.
- ▶ En er slík skipun til?

Language Survey

- ▶ Byrjum á að láta dálkinn lengst til vinstri fá tungumál A.
- ▶ Við látum svo p tákna reitinn efst til hægri og q tákna reitinn neðst til hægri og:
 - ▶ Færum p til vintri þangað til hann kemst ekki lengra og látum alla reiti sem hann lendir á fá tungumál B.
 - ▶ Færum p niður þangað til hann kemst ekki lengra og látum alla reiti sem hann lendir á fá tungumál B.
 - ▶ Færum q upp þangað til hann kemst ekki lengra og látum alla reiti sem hann lendir á fá tungumál C.
 - ▶ Færum q til vinstri þangað til hann kemst ekki lengra og látum alla reiti sem hann lendir á fá tungumál C.
 - ▶ Færum p til hægri þangað til hann kemst ekki lengra og látum alla reiti sem hann lendir á fá tungumál B.
 - ▶ Færum p upp þangað til hann kemst ekki lengra og látum alla reiti sem hann lendir á fá tungumál B.
 - ▶ Færum q niður þangað til hann kemst ekki lengra og látum alla reiti sem hann lendir á fá tungumál C.
 - ▶ Færum q til hægri þangað til hann kemst ekki lengra og látum alla reiti sem hann lendir á fá tungumál C.
 - ▶ Endurtökum þar til allir reitir hafa tungumál.

[illegible]

[illegible]

A x x x x x x x B

A x x x x x x x x

A x x x x x x x x

A x x x x x x x x

A x x x x x x x x

A x x x x x x x x

A x x x x x x x x

A x x x x x x x x

A x x x x x x x x

A x x x x x x B B

A x x x x x x x x

A x x x x x x x x

A x x x x x x x x

A x x x x x x x x

A x x x x x x x x

A x x x x x x x x

A x x x x x x x x

A x x x x x x x x

[illegible]

[illegible]

A x x x x x x x x

A x x B B B B B B

A x x x x x x x x

A x x x x x x x x

A x x x x x x x x

A x x x x x x x x

A x x x x x x x x

A x x x x x x x x

A x x x x x x x x

A x x x x x x x x

A x B B B B B B B

A x x x x x x x x

A x x x x x x x x

A x x x x x x x x

A x x x x x x x x

A x x x x x x x x

A x x x x x x x x

A x x x x x x x x

A x x x x x x x x

A x x x x x x x x

[illegible]

[illegible]

[illegible]

A	B	B	B	B	B	B	B	B
A	B	x	x	x	x	x	x	x
A	B	x	x	x	x	x	x	x
A	B	x	x	x	x	x	x	x
A	B	x	x	x	x	x	x	x
A	x	x	x	x	x	x	x	x
A	x	x	x	x	x	x	x	x
A	x	x	x	x	x	x	x	x
A	x	x	x	x	x	x	x	x

A	B	B	B	B	B	B	B	B
A	B	x	x	x	x	x	x	x
A	B	x	x	x	x	x	x	x
A	B	x	x	x	x	x	x	x
A	B	x	x	x	x	x	x	x
A	B	x	x	x	x	x	x	x
A	x	x	x	x	x	x	x	x
A	x	x	x	x	x	x	x	x
A	x	x	x	x	x	x	x	x

A	B	B	B	B	B	B	B	B
A	B	x	x	x	x	x	x	x
A	B	x	x	x	x	x	x	x
A	B	x	x	x	x	x	x	x
A	B	x	x	x	x	x	x	x
A	B	x	x	x	x	x	x	x
A	B	x	x	x	x	x	x	x
A	x	x	x	x	x	x	x	x
A	x	x	x	x	x	x	x	x

A	B	B	B	B	B	B	B	B
A	B	x	x	x	x	x	x	x
A	B	x	x	x	x	x	x	x
A	B	x	x	x	x	x	x	x
A	B	x	x	x	x	x	x	x
A	B	x	x	x	x	x	x	x
A	B	x	x	x	x	x	x	x
A	B	x	x	x	x	x	x	x
A	x	x	x	x	x	x	x	x

[illegible]

[illegible]

A	B	B	B	B	B	B	B	B
A	B	x	x	x	x	x	x	x
A	B	x	x	x	x	x	x	x
A	B	x	x	x	x	x	x	x
A	B	x	x	x	x	x	x	x
A	B	x	x	x	x	x	x	x
A	B	x	x	x	x	x	x	C
A	B	x	x	x	x	x	x	C

A	B	B	B	B	B	B	B	B
A	B	x	x	x	x	x	x	x
A	B	x	x	x	x	x	x	x
A	B	x	x	x	x	x	x	x
A	B	x	x	x	x	x	x	x
A	B	x	x	x	x	x	x	x
A	B	x	x	x	x	x	x	C
A	B	x	x	x	x	x	x	C
A	B	x	x	x	x	x	x	C

A	B	B	B	B	B	B	B	B
A	B	x	x	x	x	x	x	x
A	B	x	x	x	x	x	x	x
A	B	x	x	x	x	x	x	x
A	B	x	x	x	x	x	x	x
A	B	x	x	x	x	x	x	C
A	B	x	x	x	x	x	x	C
A	B	x	x	x	x	x	x	C
A	B	x	x	x	x	x	x	C

A	B	B	B	B	B	B	B	B
A	B	x	x	x	x	x	x	x
A	B	x	x	x	x	x	x	x
A	B	x	x	x	x	x	x	x
A	B	x	x	x	x	x	x	C
A	B	x	x	x	x	x	x	C
A	B	x	x	x	x	x	x	C
A	B	x	x	x	x	x	x	C
A	B	x	x	x	x	x	x	C

A	B	B	B	B	B	B	B	B
A	B	x	x	x	x	x	x	x
A	B	x	x	x	x	x	x	x
A	B	x	x	x	x	x	x	C
A	B	x	x	x	x	x	x	C
A	B	x	x	x	x	x	x	C
A	B	x	x	x	x	x	x	C
A	B	x	x	x	x	x	x	C

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

A	B	B	B	B	B	B	B	B
A	B	C	C	C	C	C	C	C
A	B	x	x	x	x	x	x	C
A	B	x	x	x	x	x	x	C
A	B	x	x	x	x	x	x	C
A	B	x	x	x	x	x	x	C
A	B	x	x	x	x	x	x	C
A	B	x	x	x	x	x	x	C
A	B	B	x	x	x	x	x	C

A	B	B	B	B	B	B	B	B
A	B	C	C	C	C	C	C	C
A	B	x	x	x	x	x	x	C
A	B	x	x	x	x	x	x	C
A	B	x	x	x	x	x	x	C
A	B	x	x	x	x	x	x	C
A	B	x	x	x	x	x	x	C
A	B	x	x	x	x	x	x	C
A	B	B	B	x	x	x	x	C

A	B	B	B	B	B	B	B	B
A	B	C	C	C	C	C	C	C
A	B	x	x	x	x	x	x	C
A	B	x	x	x	x	x	x	C
A	B	x	x	x	x	x	x	C
A	B	x	x	x	x	x	x	C
A	B	x	x	x	x	x	x	C
A	B	x	x	x	x	x	x	C
A	B	B	B	B	x	x	x	C

A	B	B	B	B	B	B	B	B
A	B	C	C	C	C	C	C	C
A	B	x	x	x	x	x	x	C
A	B	x	x	x	x	x	x	C
A	B	x	x	x	x	x	x	C
A	B	x	x	x	x	x	x	C
A	B	x	x	x	x	x	x	C
A	B	x	x	x	x	x	x	C
A	B	B	B	B	B	x	x	C

A	B	B	B	B	B	B	B	B
A	B	C	C	C	C	C	C	C
A	B	x	x	x	x	x	x	C
A	B	x	x	x	x	x	x	C
A	B	x	x	x	x	x	x	C
A	B	x	x	x	x	x	x	C
A	B	x	x	x	x	x	x	C
A	B	x	x	x	x	x	x	C
A	B	B	B	B	B	B	x	C

A	B	B	B	B	B	B	B	B
A	B	C	C	C	C	C	C	C
A	B	x	x	x	x	x	x	C
A	B	x	x	x	x	x	x	C
A	B	x	x	x	x	x	x	C
A	B	x	x	x	x	x	x	C
A	B	x	x	x	x	x	x	C
A	B	x	x	x	x	x	x	C
A	B	x	x	x	x	x	x	C
A	B	B	B	B	B	B	B	C

A	B	B	B	B	B	B	B	B
A	B	C	C	C	C	C	C	C
A	B	x	x	x	x	x	x	C
A	B	x	x	x	x	x	x	C
A	B	x	x	x	x	x	B	C
A	B	x	x	x	x	x	B	C
A	B	x	x	x	x	x	B	C
A	B	x	x	x	x	x	B	C
A	B	x	x	x	x	x	B	C
A	B	B	B	B	B	B	B	C

A	B	B	B	B	B	B	B	B
A	B	C	C	C	C	C	C	C
A	B	x	x	x	x	x	x	C
A	B	x	x	x	x	x	B	C
A	B	x	x	x	x	x	B	C
A	B	x	x	x	x	x	B	C
A	B	x	x	x	x	x	B	C
A	B	x	x	x	x	x	B	C
A	B	x	x	x	x	x	B	C
A	B	B	B	B	B	B	B	C

A	B	B	B	B	B	B	B	B
A	B	C	C	C	C	C	C	C
A	B	C	x	x	x	x	B	C
A	B	C	x	x	x	x	B	C
A	B	x	x	x	x	x	B	C
A	B	x	x	x	x	x	B	C
A	B	x	x	x	x	x	B	C
A	B	x	x	x	x	x	B	C
A	B	x	x	x	x	x	B	C
A	B	B	B	B	B	B	B	C

A	B	B	B	B	B	B	B	B
A	B	C	C	C	C	C	C	C
A	B	C	x	x	x	x	B	C
A	B	C	x	x	x	x	B	C
A	B	C	x	x	x	x	B	C
A	B	x	x	x	x	x	B	C
A	B	x	x	x	x	x	B	C
A	B	x	x	x	x	x	B	C
A	B	x	x	x	x	x	B	C
A	B	B	B	B	B	B	B	C

A	B	B	B	B	B	B	B	B
A	B	C	C	C	C	C	C	C
A	B	C	x	x	x	x	B	C
A	B	C	x	x	x	x	B	C
A	B	C	x	x	x	x	B	C
A	B	C	x	x	x	x	B	C
A	B	x	x	x	x	x	B	C
A	B	x	x	x	x	x	B	C
A	B	B	B	B	B	B	B	C

Language Survey

- ▶ Petta virkar alltaf ef önnur víddin er stærri en tveir.
- ▶ Ef önnur víddin er tveir má nota

A B

A B

A B

A B

A C

- ▶ Ef önnur víddin er einn þarf að leysa dæmið gráðugt.
- ▶ Petta eru einu tilfellin þar sem maður getur fengið *impossible*.

Sértilfellið

```
8 int foo(int* a, int n)
9 {
10     int i, j, b[3][n], c[3] = {0, 0, 0};
11     rep(i, n) rep(j, 3) b[j][i] = 0;
12     i = 0;
13     while (i < n && a[i] == 1) b[0][i++] = 1, c[0]++;
14     while (i < n && a[i] == 2) b[0][i] = 1, b[1][i] = 1, i++, c[0]++, c[1]++;
15     while (i < n && a[i] == 1) b[1][i++] = 1, c[1]++;
16     while (i < n && a[i] == 2) b[1][i] = 1, b[2][i] = 1, i++, c[1]++, c[2]++;
17     while (i < n && a[i] == 1) b[2][i++] = 1, c[2]++;
18     if (c[2] == 0 && c[1] == 0)
19     {
20         if (n == 2) return 0;
21         b[1][0] = b[2][1] = 1;
22         b[0][0] = b[0][1] = 0;
23     }
24     else if (c[2] == 0)
25     {
26         rep(i, n) if (a[i] == 2) break;
27         b[2][i] = 1;
28     }
29     rep(i, n) if (b[0][i] == 0 && b[1][i] == 0 && b[2][i] == 0) return 0;
30     rep(j, 3) rep(i, n) r[j][i] = b[j][i] ? 'A' + j : '.';
31     return 1;
32 }
```

Köllum á sértílfellið

```
39     if (n == 1 && m == 1)
40     {
41         if (a[0][0] == 1) { printf("impossible\n"); return 0; }
42         printf("A\n\nB\n\nC\n");
43         return 0;
44     }
45     if (n == 1)
46     {
47         int g[m];
48         rep(i, m) g[i] = a[0][i];
49         if (!foo(g, m)) { printf("impossible\n"); return 0; }
50         rep(x, 3) { rep(i, m) printf("%c", r[x][i]); printf("\n\n"); }
51         return 0;
52     }
53     if (m == 1)
54     {
55         int g[n];
56         rep(i, n) g[i] = a[i][0];
57         if (!foo(g, n)) { printf("impossible\n"); return 0; }
58         rep(x, 3) { rep(i, n) printf("%c\n", r[x][i]); printf("\n"); }
59         return 0;
60     }
```

Grunnskiptingin

```
63 z = n - 1, w = m - 3, x = n, y = m - 1;
64 while (1)
65 {
66     if (z <= 0) break;
67     rep(i, z) b[--x][y] = 0;
68     z -= 2;
69     if (w <= 0) break;
70     rep(i, w) b[x][--y] = 0;
71     w -= 2;
72     if (z <= 0) break;
73     rep(i, z) b[++x][y] = 0;
74     z -= 2;
75     if (w <= 0) break;
76     rep(i, w) b[x][++y] = 0;
77     w -= 2;
78 }
```


Finna nágrannann með annað tungamál

```
79     rep(i, n) rep(j, m) c[i][j] = -1;
80     rep(i, n) rep(j, m)
81     {
82         if (i > 0 && b[i - 1][j] != b[i][j]) c[i][j] = b[i - 1][j];
83         if (j > 0 && b[i][j - 1] != b[i][j]) c[i][j] = b[i][j - 1];
84         if (i < n - 1 && b[i + 1][j] != b[i][j]) c[i][j] = b[i + 1][j];
85         if (j < m - 1 && b[i][j + 1] != b[i][j]) c[i][j] = b[i][j + 1];
86     }
```

Prenta lausn

```
91     rep(x, 3)
92     {
93         rep(i, n)
94         {
95             rep(j, m) printf("%c",
96                             (b[i][j] == x || (a[i][j] == 2 && c[i][j] == x))
97                             ? 'A' + x : '.' );
98             printf("\n");
99         }
100         printf("\n");
101     }
```

