

# Tímaflækjur

Bergur Snorrason

19. janúar 2022

# Tímaflækjur

- ▶ Látum  $f, g: [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ .

# Tímaflækjur

- ▶ Látum  $f, g: [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ .
- ▶ Við segjum að fall  $g$  sé í menginu  $\mathcal{O}(f)$  ef til eru rauntölur  $c$  og  $x_0$  þannig að

$$|g(x)| \leq c \cdot f(x)$$

fyrir öll  $x > x_0$ .

# Tímaflækjur

- ▶ Látum  $f, g: [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ .
- ▶ Við segjum að fall  $g$  sé í menginu  $\mathcal{O}(f)$  ef til eru rauntölur  $c$  og  $x_0$  þannig að

$$|g(x)| \leq c \cdot f(x)$$

fyrir öll  $x > x_0$ .

- ▶ Þetta þýðir í raun að fallið  $|g|$  verður á endanum minna en  $c \cdot f$ .

# Tímaflækjur

- ▶ Látum  $f, g: [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ .
- ▶ Við segjum að fall  $g$  sé í menginu  $\mathcal{O}(f)$  ef til eru rauntölur  $c$  og  $x_0$  þannig að

$$|g(x)| \leq c \cdot f(x)$$

fyrir öll  $x > x_0$ .

- ▶ Þetta þýðir í raun að fallið  $|g|$  verður á endanum minna en  $c \cdot f$ .
- ▶ Þessi lýsing undirstrikar að  $f$  er efra mat á  $g$ , það er að segja  $g$  hagar sér ekki verr en  $f$ .

# Tímaflækjur

- ▶ Látum  $f, g: [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ .
- ▶ Við segjum að fall  $g$  sé í menginu  $\mathcal{O}(f)$  ef til eru rauntölur  $c$  og  $x_0$  þannig að

$$|g(x)| \leq c \cdot f(x)$$

fyrir öll  $x > x_0$ .

- ▶ Þetta þýðir í raun að fallið  $|g|$  verður á endanum minna en  $c \cdot f$ .
- ▶ Þessi lýsing undirstrikar að  $f$  er efra mat á  $g$ , það er að segja  $g$  hagar sér ekki verr en  $f$ .
- ▶ Ef  $g \in \mathcal{O}(f)$  og  $f \in \mathcal{O}(g)$  þá segjum við að  $f \in \Theta(g)$  (og  $g \in \Theta(f)$ ).

# Dæmi

- ▶ Tökum nokkur dæmi.

# Dæmi

- ▶ Tökum nokkur dæmi.
- ▶ Ef  $f \in \mathcal{O}(g)$  og  $r > 0$  þá er  $r \cdot f \in \mathcal{O}(g)$ .



# Dæmi

- ▶ Tökum nokkur dæmi.
- ▶ Ef  $f \in \mathcal{O}(g)$  og  $r > 0$  þá er  $r \cdot f \in \mathcal{O}(g)$ .
- ▶ Ef  $f_1 \in \mathcal{O}(g_1)$  og  $f_2 \in \mathcal{O}(g_2)$  þá er  $f_1 \cdot f_2 \in \mathcal{O}(g_1 \cdot g_2)$ .

# Dæmi

- ▶ Tökum nokkur dæmi.
- ▶ Ef  $f \in \mathcal{O}(g)$  og  $r > 0$  þá er  $r \cdot f \in \mathcal{O}(g)$ .
- ▶ Ef  $f_1 \in \mathcal{O}(g_1)$  og  $f_2 \in \mathcal{O}(g_2)$  þá er  $f_1 \cdot f_2 \in \mathcal{O}(g_1 \cdot g_2)$ .
- ▶ Ef  $p$  er  $n$ -ta stigs margliða þá er  $p \in \Theta(x^n)$ .

# Dæmi

- ▶ Tökum nokkur dæmi.
- ▶ Ef  $f \in \mathcal{O}(g)$  og  $r > 0$  þá er  $r \cdot f \in \mathcal{O}(g)$ .
- ▶ Ef  $f_1 \in \mathcal{O}(g_1)$  og  $f_2 \in \mathcal{O}(g_2)$  þá er  $f_1 \cdot f_2 \in \mathcal{O}(g_1 \cdot g_2)$ .
- ▶ Ef  $p$  er  $n$ -ta stigs margliða þá er  $p \in \Theta(x^n)$ .
- ▶ Ef  $p$  er  $n$ -ta stigs margliða og  $q$  er  $m$ -ta stigs margliða með  $n < m$  þá er  $p \in \mathcal{O}(q)$ , en  $q \notin \mathcal{O}(p)$ .

# Dæmi

- ▶ Tökum nokkur dæmi.
- ▶ Ef  $f \in \mathcal{O}(g)$  og  $r > 0$  þá er  $r \cdot f \in \mathcal{O}(g)$ .
- ▶ Ef  $f_1 \in \mathcal{O}(g_1)$  og  $f_2 \in \mathcal{O}(g_2)$  þá er  $f_1 \cdot f_2 \in \mathcal{O}(g_1 \cdot g_2)$ .
- ▶ Ef  $p$  er  $n$ -ta stigs margliða þá er  $p \in \Theta(x^n)$ .
- ▶ Ef  $p$  er  $n$ -ta stigs margliða og  $q$  er  $m$ -ta stigs margliða með  $n < m$  þá er  $p \in \mathcal{O}(q)$ , en  $q \notin \mathcal{O}(p)$ .
- ▶ Við höfum að  $\log x \in \mathcal{O}(x)$  en  $x \notin \mathcal{O}(\log x)$ .

# Dæmi

- ▶ Tökum nokkur dæmi.
- ▶ Ef  $f \in \mathcal{O}(g)$  og  $r > 0$  þá er  $r \cdot f \in \mathcal{O}(g)$ .
- ▶ Ef  $f_1 \in \mathcal{O}(g_1)$  og  $f_2 \in \mathcal{O}(g_2)$  þá er  $f_1 \cdot f_2 \in \mathcal{O}(g_1 \cdot g_2)$ .
- ▶ Ef  $p$  er  $n$ -ta stigs margliða þá er  $p \in \Theta(x^n)$ .
- ▶ Ef  $p$  er  $n$ -ta stigs margliða og  $q$  er  $m$ -ta stigs margliða með  $n < m$  þá er  $p \in \mathcal{O}(q)$ , en  $q \notin \mathcal{O}(p)$ .
- ▶ Við höfum að  $\log x \in \mathcal{O}(x)$  en  $x \notin \mathcal{O}(\log x)$ .
- ▶ Nú er  $\log x^n = n \cdot \log x$ , svo ef  $p$  er  $n$ -ta stigs margliða þá er  $\log p \in \mathcal{O}(\log x)$ .

# Í forritun

- Takið eftir að í stað þessa að segja „ $f \in \mathcal{O}(g)$ ” er oft sagt  $f = \mathcal{O}(g)$ .

# Í forritun

- ▶ Takið eftir að í stað þessa að segja „ $f \in \mathcal{O}(g)$ ” er oft sagt  $f = \mathcal{O}(g)$ .
- ▶ Ef forrit framkvæmir  $T(n)$  aðgerðir, með  $T \in \mathcal{O}(f)$ , segjum við að *tímaflækja* (e. *time complexity*) forritsins sé  $\mathcal{O}(f)$ .

# Í forritun

- ▶ Takið eftir að í stað þessa að segja „ $f \in \mathcal{O}(g)$ ” er oft sagt  $f = \mathcal{O}(g)$ .
- ▶ Ef forrit framkvæmir  $T(n)$  aðgerðir, með  $T \in \mathcal{O}(f)$ , segjum við að *tímaflækja* (e. *time complexity*) forritsins sé  $\mathcal{O}(f)$ .
- ▶ Skoðum nú nokkur forrit og ákvörðum tímaflækjur þeirra.



```
1 #include <stdio.h>
2
3 int main()
4 {
5     printf("Hello world!\n");
6     return 0;
7 }
```

► Hér er ekkert inntak svo forritið hefur tímaflækjuna  $\mathcal{O}(\quad)$ .

```
1 #include <stdio.h>
2
3 int main()
4 {
5     printf("Hello world!\n");
6     return 0;
7 }
```

- ▶ Hér er ekkert inntak svo forritið hefur tímaflækjuna  $\mathcal{O}(1)$ .

```
1 #include <stdio.h>
2
3 int main()
4 {
5     int i, n, r = 0;
6     scanf("%d", &n);
7     for (i = 0; i < n; i++)
8         r += i;
9     printf("%d\n", r);
10    return 0;
11 }
```

- Forritið les inn töluna  $n$  og reiknar svo summuna  $1 + 2 + \dots + n$ .

```
1 #include <stdio.h>
2
3 int main()
4 {
5     int i, n, r = 0;
6     scanf("%d", &n);
7     for (i = 0; i < n; i++)
8         r += i;
9     printf("%d\n", r);
10    return 0;
11 }
```

- ▶ Forritið les inn töluna  $n$  og reiknar svo summuna  $1 + 2 + \dots + n$ .
- ▶ Þetta er gert með forlykkju sem keyrir  $n$  sinnum.

```

1 #include <stdio.h>
2
3 int main()
4 {
5     int i, n, r = 0;
6     scanf("%d", &n);
7     for (i = 0; i < n; i++)
8         r += i;
9     printf("%d\n", r);
10    return 0;
11 }

```

- ▶ Forritið les inn töluna  $n$  og reiknar svo summuna  $1 + 2 + \dots + n$ .
- ▶ Þetta er gert með forlykkju sem keyrir  $n$  sinnum.
- ▶ Hvert skipti eru tvær tölur lagðar saman.

```

1 #include <stdio.h>
2
3 int main()
4 {
5     int i, n, r = 0;
6     scanf("%d", &n);
7     for (i = 0; i < n; i++)
8         r += i;
9     printf("%d\n", r);
10    return 0;
11 }

```

- ▶ Forritið les inn töluna  $n$  og reiknar svo summuna  $1 + 2 + \dots + n$ .
- ▶ Þetta er gert með forlykkju sem keyrir  $n$  sinnum.
- ▶ Hvert skipti eru tvær tölur lagðar saman.
- ▶ Svo þetta forrit er  $\mathcal{O}(\quad)$ .

```

1 #include <stdio.h>
2
3 int main()
4 {
5     int i, n, r = 0;
6     scanf("%d", &n);
7     for (i = 0; i < n; i++)
8         r += i;
9     printf("%d\n", r);
10    return 0;
11 }

```

- ▶ Forritið les inn töluna  $n$  og reiknar svo summuna  $1 + 2 + \dots + n$ .
- ▶ Þetta er gert með forlykkju sem keyrir  $n$  sinnum.
- ▶ Hvert skipti eru tvær tölur lagðar saman.
- ▶ Svo þetta forrit er  $\mathcal{O}(n)$ .

```

1 #include <stdio.h>
2
3 int main()
4 {
5     int i, j, n, r = 0;
6     scanf("%d", &n);
7     for (i = 0; i < n; i++)
8         for (j = 0; j < i/2; j++)
9             r += i^j;
10    printf("%d\n", r);
11    return 0;
12 }

```

► Forritið les inn töluna  $n$  og reiknar svo summu.



```

1 #include <stdio.h>
2
3 int main()
4 {
5     int i, j, n, r = 0;
6     scanf("%d", &n);
7     for (i = 0; i < n; i++)
8         for (j = 0; j < i/2; j++)
9             r += i^j;
10    printf("%d\n", r);
11    return 0;
12 }

```

- ▶ Forritið les inn töluna  $n$  og reiknar svo summu.
- ▶ Summan er reiknuð með tvöfaldri forlykkju.

```

1 #include <stdio.h>
2
3 int main()
4 {
5     int i, j, n, r = 0;
6     scanf("%d", &n);
7     for (i = 0; i < n; i++)
8         for (j = 0; j < i/2; j++)
9             r += i^j;
10    printf("%d\n", r);
11    return 0;
12 }

```

- ▶ Forritið les inn töluna  $n$  og reiknar svo summu.
- ▶ Summan er reiknuð með tvöfaldri forlykkju.
- ▶ Ytri forlykkjan keyrir  $n$  sinnum og seinni keyrir aldrei oftar en  $n/2$  sinnum.

```

1 #include <stdio.h>
2
3 int main()
4 {
5     int i, j, n, r = 0;
6     scanf("%d", &n);
7     for (i = 0; i < n; i++)
8         for (j = 0; j < i/2; j++)
9             r += i^j;
10    printf("%d\n", r);
11    return 0;
12 }

```

- ▶ Forritið les inn töluna  $n$  og reiknar svo summu.
- ▶ Summan er reiknuð með tvöfaldri forlykkju.
- ▶ Ytri forlykkjan keyrir  $n$  sinnum og seinni keyrir aldrei oftar en  $n/2$  sinnum.
- ▶ Svo tímaflækja forritsins er  $\mathcal{O}(\quad)$ .

```

1 #include <stdio.h>
2
3 int main()
4 {
5     int i, j, n, r = 0;
6     scanf("%d", &n);
7     for (i = 0; i < n; i++)
8         for (j = 0; j < i/2; j++)
9             r += i^j;
10    printf("%d\n", r);
11    return 0;
12 }

```

- ▶ Forritið les inn töluna  $n$  og reiknar svo summu.
- ▶ Summan er reiknuð með tvöfaldri forlykkju.
- ▶ Ytri forlykkjan keyrir  $n$  sinnum og seinni keyrir aldrei oftar en  $n/2$  sinnum.
- ▶ Svo tímaflækja forritsins er  $\mathcal{O}(n^2)$ .

```

1  #include <stdio.h>
2
3  int len(int n, int k)
4  {
5      int r = 0;
6      while (n > 0) r++, n /= k;
7      return r;
8  }
9
10 int main()
11 {
12     int i, j, n, r = 0;
13     scanf("%d", &n);
14     for (i = 2; i <= n; i++) r += len(n, i);
15     printf("%d\n", r);
16     return 0;
17 }

```

- Sjáum fyrst að lykkja í main keyrir  $n - 1$  sinnum.

```

1  #include <stdio.h>
2
3  int len(int n, int k)
4  {
5      int r = 0;
6      while (n > 0) r++, n /= k;
7      return r;
8  }
9
10 int main()
11 {
12     int i, j, n, r = 0;
13     scanf("%d", &n);
14     for (i = 2; i <= n; i++) r += len(n, i);
15     printf("%d\n", r);
16     return 0;
17 }

```

- ▶ Sjáum fyrst að lykkja í main keyrir  $n - 1$  sinnum.
- ▶ Hún kallar síðan á fallið `len(...)`.

```

1  #include <stdio.h>
2
3  int len(int n, int k)
4  {
5      int r = 0;
6      while (n > 0) r++, n /= k;
7      return r;
8  }
9
10 int main()
11 {
12     int i, j, n, r = 0;
13     scanf("%d", &n);
14     for (i = 2; i <= n; i++) r += len(n, i);
15     printf("%d\n", r);
16     return 0;
17 }

```

- ▶ Sjáum fyrst að lykkja í main keyrir  $n - 1$  sinnum.
- ▶ Hún kallar síðan á fallið `len(...)`.
- ▶ Það fall hefur eina `while`-lykkju sem deilir tölunni  $n$  með  $k$ , án afgangs, þar til  $n$  er orðin núll.

```

1  #include <stdio.h>
2
3  int len(int n, int k)
4  {
5      int r = 0;
6      while (n > 0) r++, n /= k;
7      return r;
8  }
9
10 int main()
11 {
12     int i, j, n, r = 0;
13     scanf("%d", &n);
14     for (i = 2; i <= n; i++) r += len(n, i);
15     printf("%d\n", r);
16     return 0;
17 }

```

- ▶ Sjáum fyrst að lykkja í main keyrir  $n - 1$  sinnum.
- ▶ Hún kallar síðan á fallið `len(...)`.
- ▶ Það fall hefur eina `while`-lykkju sem deilir tölunni  $n$  með  $k$ , án afgangs, þar til  $n$  er orðin núll.
- ▶ Þetta fall hefur því tímaflækjuna  $\mathcal{O}(\quad)$ .



```

1  #include <stdio.h>
2
3  int len(int n, int k)
4  {
5      int r = 0;
6      while (n > 0) r++, n /= k;
7      return r;
8  }
9
10 int main()
11 {
12     int i, j, n, r = 0;
13     scanf("%d", &n);
14     for (i = 2; i <= n; i++) r += len(n, i);
15     printf("%d\n", r);
16     return 0;
17 }

```

- ▶ Sjáum fyrst að lykkja í main keyrir  $n - 1$  sinnum.
- ▶ Hún kallar síðan á fallið `len(...)`.
- ▶ Það fall hefur eina `while`-lykkju sem deilir tölunni  $n$  með  $k$ , án afgang, þar til  $n$  er orðin núll.
- ▶ Þetta fall hefur því tímaflækjuna  $\mathcal{O}(\log n)$ .

```

1  #include <stdio.h>
2
3  int len(int n, int k)
4  {
5      int r = 0;
6      while (n > 0) r++, n /= k;
7      return r;
8  }
9
10 int main()
11 {
12     int i, j, n, r = 0;
13     scanf("%d", &n);
14     for (i = 2; i <= n; i++) r += len(n, i);
15     printf("%d\n", r);
16     return 0;
17 }

```

- ▶ Sjáum fyrst að lykkja í main keyrir  $n - 1$  sinnum.
- ▶ Hún kallar síðan á fallið `len(...)`.
- ▶ Það fall hefur eina `while`-lykkju sem deilir tölunni  $n$  með  $k$ , án afgang, þar til  $n$  er orðin núll.
- ▶ Þetta fall hefur því tímaflækjuna  $\mathcal{O}(\log n)$ .
- ▶ Í heildina hefur forritið því tímaflækjuna  $\mathcal{O}(\quad)$ .

```

1  #include <stdio.h>
2
3  int len(int n, int k)
4  {
5      int r = 0;
6      while (n > 0) r++, n /= k;
7      return r;
8  }
9
10 int main()
11 {
12     int i, j, n, r = 0;
13     scanf("%d", &n);
14     for (i = 2; i <= n; i++) r += len(n, i);
15     printf("%d\n", r);
16     return 0;
17 }

```

- ▶ Sjáum fyrst að lykkja í main keyrir  $n - 1$  sinnum.
- ▶ Hún kallar síðan á fallið `len(...)`.
- ▶ Það fall hefur eina `while`-lykkju sem deilir tölunni  $n$  með  $k$ , án afgang, þar til  $n$  er orðin núll.
- ▶ Þetta fall hefur því tímaflækjuna  $\mathcal{O}(\log n)$ .
- ▶ Í heildina hefur forritið því tímaflækjuna  $\mathcal{O}(n \log n)$ .

```
1 #include <stdio.h>
2
3 int fib(int n)
4 {
5     if (n < 2) return n;
6     return fib(n - 1) + fib(n - 2);
7 }
8
9 int main()
10 {
11     int n;
12     scanf("%d", &n);
13     printf("%d\n", fib(n));
14     return 0;
15 }
```

► Hér erum við með endurkvæmt fall.

```

1 #include <stdio.h>
2
3 int fib(int n)
4 {
5     if (n < 2) return n;
6     return fib(n - 1) + fib(n - 2);
7 }
8
9 int main()
10 {
11     int n;
12     scanf("%d", &n);
13     printf("%d\n", fib(n));
14     return 0;
15 }

```

- ▶ Hér erum við með endurkvæmt fall.
- ▶ Við sjáum að ef  $n \geq 2$  þá kallar `fib(n)` tvisvar á sjálft sig.

```

1 #include <stdio.h>
2
3 int fib(int n)
4 {
5     if (n < 2) return n;
6     return fib(n - 1) + fib(n - 2);
7 }
8
9 int main()
10 {
11     int n;
12     scanf("%d", &n);
13     printf("%d\n", fib(n));
14     return 0;
15 }

```

- ▶ Hér erum við með endurkvæmt fall.
- ▶ Við sjáum að ef  $n \geq 2$  þá kallar  $\text{fib}(n)$  tvisvar á sjálft sig.
- ▶ Svo þetta forrit er  $\mathcal{O}(\quad)$ .

```

1 #include <stdio.h>
2
3 int fib(int n)
4 {
5     if (n < 2) return n;
6     return fib(n - 1) + fib(n - 2);
7 }
8
9 int main()
10 {
11     int n;
12     scanf("%d", &n);
13     printf("%d\n", fib(n));
14     return 0;
15 }

```

- ▶ Hér erum við með endurkvæmt fall.
- ▶ Við sjáum að ef  $n \geq 2$  þá kallar  $\text{fib}(n)$  tvisvar á sjálft sig.
- ▶ Svo þetta forrit er  $\mathcal{O}(2^n)$ .

```

1 #include <stdio.h>
2
3 int fib(int n)
4 {
5     if (n < 2) return n;
6     return fib(n - 1) + fib(n - 2);
7 }
8
9 int main()
10 {
11     int n;
12     scanf("%d", &n);
13     printf("%d\n", fib(n));
14     return 0;
15 }

```

- ▶ Hér erum við með endurkvæmt fall.
- ▶ Við sjáum að ef  $n \geq 2$  þá kallar  $\text{fib}(n)$  tvisvar á sjálft sig.
- ▶ Svo þetta forrit er  $\mathcal{O}(2^n)$ .
- ▶ Það er hægt að fá betra mat (við getum minnkað veldisstofninn).



- ▶ Skoðum skiladæmið *Reiknirit*.

- ▶ Skoðum skiladæmið *Reiknirit*.
- ▶ Fyrsta lína inntaksins inniheldur heiltölu  $n$ .

- ▶ Skoðum skiladæmið *Reiknirit*.
- ▶ Fyrsta lína inntaksins inniheldur heiltölu  $n$ .
- ▶ Síðan koma  $n$  heiltölur  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

- ▶ Skoðum skiladæmið *Reiknirit*.
- ▶ Fyrsta lína inntaksins inniheldur heiltölu  $n$ .
- ▶ Síðan koma  $n$  heiltölur  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .
- ▶ Gerum ráð fyrir að við séum með forrit sem gerir eftirfarandi:

- ▶ Skoðum skiladæmið *Reiknirit*.
- ▶ Fyrsta lína inntaksins inniheldur heiltölu  $n$ .
- ▶ Síðan koma  $n$  heiltölur  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .
- ▶ Gerum ráð fyrir að við séum með forrit sem gerir eftirfarandi:
  - ▶ Prentar tölurnar.

- ▶ Skoðum skiladæmið *Reiknirit*.
- ▶ Fyrsta lína inntaksins inniheldur heiltölu  $n$ .
- ▶ Síðan koma  $n$  heiltölur  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .
- ▶ Gerum ráð fyrir að við séum með forrit sem gerir eftirfarandi:
  - ▶ Prentar tölurnar.
  - ▶ Fjarlægir öll eintök af algengustu tölunni í listan.

- ▶ Skoðum skiladæmið *Reiknirit*.
- ▶ Fyrsta lína inntaksins inniheldur heiltölu  $n$ .
- ▶ Síðan koma  $n$  heiltölur  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .
- ▶ Gerum ráð fyrir að við séum með forrit sem gerir eftirfarandi:
  - ▶ Prentar tölurnar.
  - ▶ Fjarlægir öll eintök af algengustu tölunni í listan.
  - ▶ Endurtekur skrefin að ofan þar til listinn er tómur.

- ▶ Skoðum skiladæmið *Reiknirit*.
- ▶ Fyrsta lína inntaksins inniheldur heiltölu  $n$ .
- ▶ Síðan koma  $n$  heiltölur  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .
- ▶ Gerum ráð fyrir að við séum með forrit sem gerir eftirfarandi:
  - ▶ Prentar tölurnar.
  - ▶ Fjarlægir öll eintök af algengustu tölunni í listan.
  - ▶ Endurtekur skrefin að ofan þar til listinn er tómur.
- ▶ Dæmið snýst um að finna hversu margar tölur eru prentaðar í heildina.



- ▶ Skoðum skiladæmið *Reiknirit*.
- ▶ Fyrsta lína inntaksins inniheldur heiltölu  $n$ .
- ▶ Síðan koma  $n$  heiltölur  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .
- ▶ Gerum ráð fyrir að við séum með forrit sem gerir eftirfarandi:
  - ▶ Prentar tölurnar.
  - ▶ Fjarlægir öll eintök af algengustu tölunni í listan.
  - ▶ Endurtekur skrefin að ofan þar til listinn er tómur.
- ▶ Dæmið snýst um að finna hversu margar tölur eru prentaðar í heildina.
- ▶ Tökum dæmi.

- Gerum ráð fyrir að tölurnar í inntakinu séu 1, 2, 1, 4, 4.

- ▶ Gerum ráð fyrir að tölurnar í inntakinu séu 1, 2, 1, 4, 4.
- ▶ Þá myndi forritið í dæminu prenta:

- ▶ Gerum ráð fyrir að tölurnar í inntakinu séu 1, 2, 1, 4, 4.
- ▶ Þá myndi forritið í dæminu prenta:

```
1 1 2 1 4 4
2 1 2 1
3 2
```

- ▶ Gerum ráð fyrir að tölurnar í inntakinu séu 1, 2, 1, 4, 4.
- ▶ Þá myndi forritið í dæminu prenta:

```
1 1 2 1 4 4
2 1 2 1
3 2
```

- ▶ Svo það prentar 9 tölur.

- ▶ Ein leið til að leysa þetta dæmi er að útfæra forritið.

- ▶ Ein leið til að leysa þetta dæmi er að útfæra forritið.
- ▶ Við þurfum þá að geta fjarlægt algengasta stakið.

```

3 typedef long long ll;
4
5 int cmp(const void* p1, const void* p2)
6 {
7     ll x = *(ll*)p1, y = *(ll*)p2;
8     return (y <= x) - (x <= y);
9 }
10
11 ll fjarlaegja_algengasta_stakid(ll *a, ll n)
12 { // fjarlaegir algengasta stakid og skilar nyju lengd listans.
13     ll i = 0, j, mx = 0, r;
14     while (i < n)
15     { // finnum algengasta stakid i rodudu fylki.
16         j = i;
17         while (j < n && a[i] == a[j]) j++;
18         if (mx < j - i) mx = j - i, r = a[i];
19         i = j;
20     }
21     // fjarlaegjum algengasta stakid.
22     for (i = 0, j = 0; i < n; i++) if (a[i] != r) a[j++] = a[i];
23     return j;
24 }
25
26 int main()
27 {
28     ll i, n, r = 0;
29     scanf("%lld", &n);
30     ll a[n];
31     for (i = 0; i < n; i++) scanf("%lld", &a[i]);
32     qsort(a, n, sizeof *a, cmp);
33     while (n > 0)
34     {
35         r += n;
36         n = fjarlaegja_algengasta_stakid(a, n);
37     }
38     printf("%lld\n", r);
39     return 0;
40 }

```



- ▶ Þetta forrit leysir dæmið (að því sem ég best veit).

- ▶ Þetta forrit leysir dæmið (að því sem ég best veit).
- ▶ Nú er spurning hvort það sé nógu hratt.

- ▶ Þetta forrit leysir dæmið (að því sem ég best veit).
- ▶ Nú er spurning hvort það sé nógu hratt.
- ▶ Í dæminu á Kattis er gefið að  $n \leq 10^6$ .

- ▶ Þetta forrit leysir dæmið (að því sem ég best veit).
- ▶ Nú er spurning hvort það sé nógu hratt.
- ▶ Í dæminu á Kattis er gefið að  $n \leq 10^6$ .
- ▶ Reynum nú að ákvarða tímaflækjuna.

- ▶ Þetta forrit leysir dæmið (að því sem ég best veit).
- ▶ Nú er spurning hvort það sé nógu hratt.
- ▶ Í dæminu á Kattis er gefið að  $n \leq 10^6$ .
- ▶ Reynum nú að ákvarða tímaflækjuna.
- ▶ Sjáum aftur útfærsluna.

```

11 ll fjarlaegja_algengasta_stakid(ll *a, ll n)
12 { // fjarlaegir algengasta stakid og skilar nyju lengd listans.
13     ll i = 0, j, mx = 0, r;
14     while (i < n)
15     { // finnum algengasta stakid i rodudu fylki.
16         j = i;
17         while (j < n && a[i] == a[j]) j++;
18         if (mx < j - i) mx = j - i, r = a[i];
19         i = j;
20     }
21     // fjarlaegjum algengasta stakid.
22     for (i = 0, j = 0; i < n; i++) if (a[i] != r) a[j++] = a[i];
23     return j;
24 }
25
26 int main()
27 {
28     ll i, n, r = 0;
29     scanf("%lld", &n);
30     ll a[n];
31     for (i = 0; i < n; i++) scanf("%lld", &a[i]);
32     qsort(a, n, sizeof *a, cmp);
33     while (n > 0)
34     {
35         r += n;
36         n = fjarlaegja_algengasta_stakid(a, n);
37     }
38     printf("%lld\n", r);
39     return 0;
40 }

```

- ▶ Í fyrsta lagi röðum við listanum, sem er  $\mathcal{O}(\quad)$ .

- ▶ Í fyrsta lagi röðum við listanum, sem er  $\mathcal{O}(n \log n)$ .



- ▶ Í fyrsta lagi röðum við listanum, sem er  $\mathcal{O}(n \log n)$ .
- ▶ Síðan erum við með `while`-lykkju, sem gerir ekkert annað en að kalla á fallið `fjarlaegja_algengasta_stakid(...)`.

- ▶ Í fyrsta lagi röðum við listanum, sem er  $\mathcal{O}(n \log n)$ .
- ▶ Síðan erum við með `while`-lykkju, sem gerir ekkert annað en að kalla á fallið `fjarlægja_algengasta_stakid(...)`.
- ▶ Í versta falli fjarlægjum við eitt stak í einu, svo þessi `while`-lykkja keyrir allt að  $n$  sinnum.

- ▶ Í fyrsta lagi röðum við listanum, sem er  $\mathcal{O}(n \log n)$ .
- ▶ Síðan erum við með `while`-lykkju, sem gerir ekkert annað en að kalla á fallið `fjarlaegja_algengasta_stakid(...)`.
- ▶ Í versta falli fjarlægjum við eitt stak í einu, svo þessi `while`-lykkja keyrir allt að  $n$  sinnum.
- ▶ Í fallinu `fjarlaegja_algengasta_stakid(...)` eru tvær lykkjur, hvor um sig keyrir  $n$  sinnum.

- ▶ Í fyrsta lagi röðum við listanum, sem er  $\mathcal{O}(n \log n)$ .
- ▶ Síðan erum við með `while`-lykkju, sem gerir ekkert annað en að kalla á fallið `fjarlaegja_algengasta_stakid(...)`.
- ▶ Í versta falli fjarlægjum við eitt stak í einu, svo þessi `while`-lykkja keyrir allt að  $n$  sinnum.
- ▶ Í fallinu `fjarlaegja_algengasta_stakid(...)` eru tvær lykkjur, hvor um sig keyrir  $n$  sinnum.
- ▶ Takið eftir að  $n$  er þá lengd listans á þeim tímapunkti.

- ▶ Í fyrsta lagi röðum við listanum, sem er  $\mathcal{O}(n \log n)$ .
- ▶ Síðan erum við með while-lykkju, sem gerir ekkert annað en að kalla á fallið `fjarlaegja_algengasta_stakid(...)`.
- ▶ Í versta falli fjarlægjum við eitt stak í einu, svo þessi while-lykkja keyrir allt að  $n$  sinnum.
- ▶ Í fallinu `fjarlaegja_algengasta_stakid(...)` eru tvær lykkjur, hvor um sig keyrir  $n$  sinnum.
- ▶ Takið eftir að  $n$  er þá lengd listans á þeim tímapunkti.
- ▶ Fallið `fjarlaegja_algengasta_stakid(...)` hefur því tímaflækjuna  $\mathcal{O}(\quad)$ .

- ▶ Í fyrsta lagi röðum við listanum, sem er  $\mathcal{O}(n \log n)$ .
- ▶ Síðan erum við með while-lykkju, sem gerir ekkert annað en að kalla á fallið `fjarlaegja_algengasta_stakid(...)`.
- ▶ Í versta falli fjarlægjum við eitt stak í einu, svo þessi while-lykkja keyrir allt að  $n$  sinnum.
- ▶ Í fallinu `fjarlaegja_algengasta_stakid(...)` eru tvær lykkjur, hvor um sig keyrir  $n$  sinnum.
- ▶ Takið eftir að  $n$  er þá lengd listans á þeim tímapunkti.
- ▶ Fallið `fjarlaegja_algengasta_stakid(...)` hefur því tímaflækjuna  $\mathcal{O}(n)$ .

- ▶ Í fyrsta lagi röðum við listanum, sem er  $\mathcal{O}(n \log n)$ .
- ▶ Síðan erum við með while-lykkju, sem gerir ekkert annað en að kalla á fallið `fjarlaegja_algengasta_stakid(...)`.
- ▶ Í versta falli fjarlægjum við eitt stak í einu, svo þessi while-lykkja keyrir allt að  $n$  sinnum.
- ▶ Í fallinu `fjarlaegja_algengasta_stakid(...)` eru tvær lykkjur, hvor um sig keyrir  $n$  sinnum.
- ▶ Takið eftir að  $n$  er þá lengd listans á þeim tímapunkti.
- ▶ Fallið `fjarlaegja_algengasta_stakid(...)` hefur því tímaflækjuna  $\mathcal{O}(n)$ .
- ▶ Forritið í heild sinni hefur því tímaflækjuna  $\mathcal{O}(\quad)$ .

- ▶ Í fyrsta lagi röðum við listanum, sem er  $\mathcal{O}(n \log n)$ .
- ▶ Síðan erum við með while-lykkju, sem gerir ekkert annað en að kalla á fallið `fjarlaegja_algengasta_stakid(...)`.
- ▶ Í versta falli fjarlægjum við eitt stak í einu, svo þessi while-lykkja keyrir allt að  $n$  sinnum.
- ▶ Í fallinu `fjarlaegja_algengasta_stakid(...)` eru tvær lykkjur, hvor um sig keyrir  $n$  sinnum.
- ▶ Takið eftir að  $n$  er þá lengd listans á þeim tímapunkti.
- ▶ Fallið `fjarlaegja_algengasta_stakid(...)` hefur því tímaflækjuna  $\mathcal{O}(n)$ .
- ▶ Forritið í heild sinni hefur því tímaflækjuna  $\mathcal{O}(n^2)$ .



- Rifjum upp að  $n \leq 10^6$  og tímaflækjan er  $\mathcal{O}(n^2)$ .

- ▶ Rifjum upp að  $n \leq 10^6$  og tímaflækjan er  $\mathcal{O}(n^2)$ .
- ▶ Er þetta nógu hratt til að fá AC?

- ▶ Rifjum upp að  $n \leq 10^6$  og tímaflækjan er  $\mathcal{O}(n^2)$ .
- ▶ Er þetta nógu hratt til að fá AC?
- ▶ Nú segir  $10^8$  *relgan* okkur að tímamörk dæmisins þurfi að vera  $(10^6)^2 \cdot 10^{-8} = 10^4$  sekúndur.

- ▶ Rifjum upp að  $n \leq 10^6$  og tímaflækjan er  $\mathcal{O}(n^2)$ .
- ▶ Er þetta nógu hratt til að fá AC?
- ▶ Nú segir  $10^8$  *relgan* okkur að tímamörk dæmisins þurfi að vera  $(10^6)^2 \cdot 10^{-8} = 10^4$  sekúndur.
- ▶ Svo er ekki og þessi lausn er því að fara að fá TLE.



