Lausn á *Upp og niður*

Bergur Snorrason

22. febrúar 2023

- Gefnar eru $n \leq 10^5$ ólíkar heiltölur $a_1, \ldots, a_n$, $1 \leq a_j \leq 10^9$.

- Gefnar eru $n \leq 10^5$ ólíkar heiltölur $a_1, \ldots, a_n$, $1 \leq a_j \leq 10^9$.
- Finnið heiltölur $1 \leq i < j < k \leq n$ þannig að $x_i < x_k < x_j$.

- Byrjum á að minnka a_j þannig að $a_j \leq n$, án þess að breyta innbyrðis röðun talnanna.

- Byrjum á að minnka a_j þannig að $a_j \leq n$, án þess að breyta innbyrðis röðun talnanna.
- Í grófum dráttum breytum við minnstu tölunni í 0, næst minnstu tölunni í 1 og svo framvegis.

- Byrjum á að minnka a_j þannig að $a_j \leq n$, án þess að breyta innbyrðis röðun talnanna.
- Í grófum dráttum breytum við minnstu tölunni í 0, næst minnstu tölunni í 1 og svo framvegis.
  - Röðum (a_i, i) eftir fyrra hnitinu.

- Byrjum á að minnka a_j þannig að $a_j \leq n$, án þess að breyta innbyrðis röðun talnanna.
- Í grófum dráttum breytum við minnstu tölunni í 0, næst minnstu tölunni í 1 og svo framvegis.
  - Röðum (a_i, i) eftir fyrra hnitinu.
  - Látum nú fyrra hnit i-ta staksins í tvenndunum (eftir röðun) vera i.

- Byrjum á að minnka a_j þannig að $a_j \leq n$, án þess að breyta innbyrðis röðun talnanna.
- Í grófum dráttum breytum við minnstu tölunni í 0, næst minnstu tölunni í 1 og svo framvegis.
  - Röðum (a_i, i) eftir fyrra hnitinu.
  - Látum nú fyrra hnit i-ta staksins í tvenndunum (eftir röðun) vera i.
  - Röðum eftir seinna hnitinu.

- Byrjum á að minnka a_j þannig að $a_j \leq n$, án þess að breyta innbyrðis röðun talnanna.
- Í grófum dráttum breytum við minnstu tölunni í 0, næst minnstu tölunni í 1 og svo framvegis.
  - Röðum (a_i, i) eftir fyrra hnitinu.
  - Látum nú fyrra hnit i-ta staksins í tvenndunum (eftir röðun) vera i.
  - Röðum eftir seinna hnitinu.
  - Látum nú a_i vera fyrra hnit i-ta staksins af tvenndunum (eftir að raða tvisvar).

- Byrjum á að minnka a_j þannig að $a_j \leq n$, án þess að breyta innbyrðis röðun talnanna.
- Í grófum dráttum breytum við minnstu tölunni í 0, næst minnstu tölunni í 1 og svo framvegis.
  - Röðum (a_i, i) eftir fyrra hnitinu.
  - Látum nú fyrra hnit i-ta staksins í tvenndunum (eftir röðun) vera i.
  - Röðum eftir seinna hnitinu.
  - Látum nú a_i vera fyrra hnit i-ta staksins af tvenndunum (eftir að raða tvisvar).
- Með þessari aðferð getum við gert ráð fyrir að $0 \leq a_j \leq 10^5$.

```
b = [[a[i], i] for i in range(n)]
b.sort(key = lambda x: x[0])
for i in range(n): b[i][0] = i
b.sort(key = lambda x: x[1])
for i in range(n): a[i] = b[i][0]
```

- Festum nú eitthvað j.

- Festum nú eitthvað j.
- Við getum gráðugt valið $i < j$ sem vísinn á minnsta stakið af fyrstu $j - 1$ tölunum.

- Festum nú eitthvað j.
- Við getum gráðugt valið $i < j$ sem vísinn á minnsta stakið af fyrstu $j - 1$ tölunum.
- Við þurfum svo að geta athugað hvort til sé k þannig að $x_i < x_k < x_j$.

- Festum nú eitthvað j.
- Við getum gráðugt valið $i < j$ sem vísinn á minnsta stakið af fyrstu $j - 1$ tölunum.
- Við þurfum svo að geta athugað hvort til sé k þannig að $x_i < x_k < x_j$.
- Við getum gert þetta með biltréi sem styður...

- Festum nú eitthvað j.
- Við getum gráðugt valið $i < j$ sem vísinn á minnsta stakið af fyrstu $j - 1$ tölunum.
- Við þurfum svo að geta athugað hvort til sé k þannig að $x_i < x_k < x_j$.
- Við getum gert þetta með biltréi sem styður...
  - ...punktuppfærsluna „bætum k við i-ta stakið í trénu".

- Festum nú eitthvað j.
- Við getum gráðugt valið $i < j$ sem vísinn á minnsta stakið af fyrstu $j - 1$ tölunum.
- Við þurfum svo að geta athugað hvort til sé k þannig að $x_i < x_k < x_j$.
- Við getum gert þetta með biltréi sem styður...
  - ...punktuppfærsluna „bætum k við i-ta stakið í trénu".
  - ...bilfyrirspurnina „hver er summan yfir bil $[i, j]$".

- Festum nú eitthvað j.
- Við getum gráðugt valið $i < j$ sem vísinn á minnsta stakið af fyrstu $j - 1$ tölunum.
- Við þurfum svo að geta athugað hvort til sé k þannig að $x_i < x_k < x_j$.
- Við getum gert þetta með biltréi sem styður...
  - ...punktuppfærsluna „bætum k við i-ta stakið í trénu".
  - ...bilfyrirspurnina „hver er summan yfir bil $[i, j]$".
- Þetta biltré er eins og fyrsta dæmið í glærunum um biltré.

- Við byrjum á að láta allar tölurnar a_i í biltréð (með `update(a[i], 1)`).

- Við byrjum á að láta allar tölurnar a_i í biltréð (með `update(a[i], 1)`).
- Við gefum okkur einnig breytu `mn` sem er upphafstillt sem ∞.

- Við byrjum á að láta allar tölurnar a_i í biltréð (með `update(a[i], 1)`).
- Við gefum okkur einnig breytu `mn` sem er upphafstillt sem ∞.
- Við ítrum síðan í gegnum $j = 2, 3, \ldots, n - 1$ og ...

- Við byrjum á að láta allar tölurnar a_i í biltréð (með `update(a[i], 1)`).
- Við gefum okkur einnig breytu `mn` sem er upphafstillt sem ∞.
- Við ítrum síðan í gegnum $j = 2, 3, \ldots, n - 1$ og ...
  - ...breytum `mn` í a_{j-1} ef það er minna en `mn`.

- Við byrjum á að láta allar tölurnar a_i í biltréð (með `update(a[i], 1)`).
- Við gefum okkur einnig breytu `mn` sem er upphafstillt sem ∞.
- Við ítrum síðan í gegnum $j = 2, 3, \ldots, n-1$ og ...
  - ...breytum `mn` í a_{j-1} ef það er minna en `mn`.
  - ...fjarlægjum a_j úr biltrénu (með `update(a[j], -1)`).

- Við byrjum á að láta allar tölurnar a_i í biltréð (með `update(a[i], 1)`).
- Við gefum okkur einnig breytu `mn` sem er upphafstillt sem ∞.
- Við ítrum síðan í gegnum $j = 2, 3, \ldots, n-1$ og ...
  - ...breytum `mn` í a_{j-1} ef það er minna en `mn`.
  - ...fjarlægjum a_j úr biltrénu (með `update(a[j], -1)`).
  - ...athugum hvort `mn` er minna en a_j og summan yfir bilið `mn + 1` og $a_j - 1$ er stærra en núll. Ef svo er erum við komin með vísanna.

- Við byrjum á að láta allar tölurnar a_i í biltréð (með `update(a[i], 1)`).
- Við gefum okkur einnig breytu `mn` sem er upphafstillt sem ∞.
- Við ítrum síðan í gegnum $j = 2, 3, \ldots, n - 1$ og ...
  - ...breytum `mn` í a_{j-1} ef það er minna en `mn`.
  - ...fjarlægjum a_j úr biltrénu (með `update(a[j], -1)`).
  - ...athugum hvort `mn` er minna en a_j og summan yfir bilið `mn + 1` og $a_j - 1$ er stærra en núll. Ef svo er erum við komin með vísanna.
- Við getum nú fundið i og k með því að leita línulega.

- Þegar við upphafstillum biltréð köllum við n sinnum á `update(...)`.

- Þegar við upphafstillum biltréð köllum við n sinnum á `update(...)`.
- Þetta tekur $\mathcal{O}(\qquad)$ tíma.

- Þegar við upphafstillum biltréð köllum við n sinnum á `update(...)`.
- Þetta tekur $\mathcal{O}(n \log n)$ tíma.

- Þegar við upphafstillum biltréð köllum við n sinnum á `update(...)`.
- Þetta tekur $\mathcal{O}(n \log n)$ tíma.
- Síðan ítrum við í gegnum öll stökin, nema tvö, og fyrir hvert stak köllum við á `update(...)` og `query(...)`.

- Þegar við upphafstillum biltréð köllum við n sinnum á `update(...)`.
- Þetta tekur $\mathcal{O}(n \log n)$ tíma.
- Síðan ítrum við í gegnum öll stökin, nema tvö, og fyrir hvert stak köllum við á `update(...)` og `query(...)`.
- Þetta tekur $\mathcal{O}(\qquad)$ tíma.

- Þegar við upphafstillum biltréð köllum við n sinnum á `update(...)`.
- Þetta tekur $\mathcal{O}(n \log n)$ tíma.
- Síðan ítrum við í gegnum öll stökin, nema tvö, og fyrir hvert stak köllum við á `update(...)` og `query(...)`.
- Þetta tekur $\mathcal{O}(n \log n)$ tíma.

- Þegar við upphafstillum biltréð köllum við n sinnum á `update(...)`.
- Þetta tekur $\mathcal{O}(n \log n)$ tíma.
- Síðan ítrum við í gegnum öll stökin, nema tvö, og fyrir hvert stak köllum við á `update(...)` og `query(...)`.
- Þetta tekur $\mathcal{O}(n \log n)$ tíma.
- Svo heildar tímaflækjan er $\mathcal{O}(\qquad)$ tíma.

- Þegar við upphafstillum biltréð köllum við n sinnum á `update(...)`.
- Þetta tekur $\mathcal{O}(n \log n)$ tíma.
- Síðan ítrum við í gegnum öll stökin, nema tvö, og fyrir hvert stak köllum við á `update(...)` og `query(...)`.
- Þetta tekur $\mathcal{O}(n \log n)$ tíma.
- Svo heildar tímaflækjan er $\mathcal{O}(n \log n)$ tíma.