Rótarþáttun

Bergur Snorrason

February 19, 2024

Dæmi

- Gefinn er listi með n tölum.

Dæmi

- Gefinn er listi með n tölum.
- Næst koma q fyrirspurnir, þar sem hver er af einni af tveimur gerðum:

Dæmi

- Gefinn er listi með n tölum.
- Næst koma q fyrirspurnir, þar sem hver er af einni af tveimur gerðum:
  - Bættu k við i-tu töluna.

Dæmi

- Gefinn er listi með n tölum.
- Næst koma q fyrirspurnir, þar sem hver er af einni af tveimur gerðum:
  - Bættu k við i-tu töluna.
  - Reiknaðu summu allra talna á bilinu $[i, j]$.

Almenn k-þáttun

- Hvað ef við skiptum fylkinu upp í k (næstum) jafnstór hólf.

Almenn k-þáttun

- Hvað ef við skiptum fylkinu upp í k (næstum) jafnstór hólf.
- Við getum þá haldið utan um, og uppfært, summu hvers hólfs auðveldlega.

Almenn k-þáttun

- Hvað ef við skiptum fylkinu upp í k (næstum) jafnstór hólf.
- Við getum þá haldið utan um, og uppfært, summu hvers hólfs auðveldlega.
- Til að finna summu á einhverju bili í fylkinu nægir að reikna summu hólfana á milli endapunktana og leggja svo afganginn við (afgangurinn er í mesta lagi lengd tveggja hólfa).

Almenn k-þáttun

- Hvað ef við skiptum fylkinu upp í k (næstum) jafnstór hólf.
- Við getum þá haldið utan um, og uppfært, summu hvers hólfs auðveldlega.
- Til að finna summu á einhverju bili í fylkinu nægir að reikna summu hólfana á milli endapunktana og leggja svo afganginn við (afgangurinn er í mesta lagi lengd tveggja hólfa).
- Tökum eftirfarandi sýnidæmi sem skipt hefur verið í þrjú hólf,

$$p = [0\ 1\ 4 \mid 3\ 4\ 5 \mid 0\ 1\ 8\ 9].$$

Almenn k-þáttun

- Hvað ef við skiptum fylkinu upp í k (næstum) jafnstór hólf.
- Við getum þá haldið utan um, og uppfært, summu hvers hólfs auðveldlega.
- Til að finna summu á einhverju bili í fylkinu nægir að reikna summu hólfana á milli endapunktana og leggja svo afganginn við (afgangurinn er í mesta lagi lengd tveggja hólfa).
- Tökum eftirfarandi sýnidæmi sem skipt hefur verið í þrjú hólf,

$$p = [0\ 1\ 4 \mid 3\ 4\ 5 \mid 0\ 1\ 8\ 9].$$

- Köllum fylkið sem geymir summu hvers hólfs `s`, sem verður þá

$$s = [5\ 12\ 18].$$

- Ef við viljum uppfæra, til dæmis bæta 5 við stak 2, þá þurfum við að sjálfsögðu að uppfæra `p`, en það þarf líka breyta `s`.

- Ef við viljum uppfæra, til dæmis bæta 5 við stak 2, þá þurfum við að sjálfsögðu að uppfæra `p`, en það þarf líka breyta `s`.
- Til að breyta `p` gerum við einfaldlega `p[2] += 5`.

- Ef við viljum uppfæra, til dæmis bæta 5 við stak 2, þá þurfum við að sjálfsögðu að uppfæra `p`, en það þarf líka breyta `s`.
- Til að breyta `p` gerum við einfaldlega `p[2] += 5`.
- Til að uppfæra *s* þurfum við að finna hólfið sem stak `2` tilheyrir. Þar sem það er í hólfi `0` notum við `s[0] += 5`.

- Ef við viljum uppfæra, til dæmis bæta 5 við stak 2, þá þurfum við að sjálfsögðu að uppfæra `p`, en það þarf líka breyta `s`.
- Til að breyta `p` gerum við einfaldlega `p[2] += 5`.
- Til að uppfæra s þurfum við að finna hólfið sem stak `2` tilheyrir. Þar sem það er í hólfi `0` notum við `s[0] += 5`.
- Svona líta svo fylkin út, fyrir og eftir uppfærslu.

$$
\begin{array}{cc}
\text{Fyrir breytingu} & \text{Eftir breytingu} \\
p = [0\ 1\ 4 \mid 3\ 4\ 5 \mid 0\ 1\ 8\ 9] & p = [0\ 1\ 9 \mid 3\ 4\ 5 \mid 0\ 1\ 8\ 9] \\
s = [5\ 12\ 18] & s = [10\ 12\ 18]
\end{array}.
$$

- Ég fór mjög losaralega í hvernig ætti að framkvæma seinni aðgerðina.

- Ég fór mjög losaralega í hvernig ætti að framkvæma seinni aðgerðina.
- Skoðum, sem dæmi, hverju eigi að skila fyrir `2 1 8`.

- Ég fór mjög losaralega í hvernig ætti að framkvæma seinni aðgerðina.
- Skoðum, sem dæmi, hverju eigi að skila fyrir `2 1 8`.
- Það er aðeins eitt hólf á milli staks `1` og staks `8`, hólf `1`.

- Ég fór mjög losaralega í hvernig ætti að framkvæma seinni aðgerðina.
- Skoðum, sem dæmi, hverju eigi að skila fyrir `2 1 8`.
- Það er aðeins eitt hólf á milli staks `1` og staks `8`, hólf `1`.
- „Afgangurinn", eins og ég kallaði hann áðan, eru þau stök sem ekki eru í hólfi `1` en eru þó á bilinu frá `1` til `8`.

- Ég fór mjög losaralega í hvernig ætti að framkvæma seinni aðgerðina.
- Skoðum, sem dæmi, hverju eigi að skila fyrir `2 1 8`.
- Það er aðeins eitt hólf á milli staks `1` og staks `8`, hólf `1`.
- „Afgangurinn", eins og ég kallaði hann áðan, eru þau stök sem ekki eru í hólfi `1` en eru þó á bilinu frá `1` til `8`.
- Þetta eru stök `1`, `2`, `6`, `7` og `8` (samtals summan er þá 31).

- Ég fór mjög losaralega í hvernig ætti að framkvæma seinni aðgerðina.
- Skoðum, sem dæmi, hverju eigi að skila fyrir `2 1 8`.
- Það er aðeins eitt hólf á milli staks `1` og staks `8`, hólf `1`.
- „Afgangurinn", eins og ég kallaði hann áðan, eru þau stök sem ekki eru í hólfi `1` en eru þó á bilinu frá `1` til `8`.
- Þetta eru stök `1`, `2`, `6`, `7` og `8` (samtals summan er þá 31).
- Við erum því að leggja saman rauðu stökin á myndinni fyrir neðan,

$$\begin{array}{c} p = [0\ 1\ 9 \mid 3\ 4\ 5 \mid 0\ 1\ 8\ 9] \\ s = [10\ 12\ 18] \end{array}.$$

- En er þetta hraðar en frumstæða aðferðin sem við skoðuðum í upphafi?

- En er þetta hraðar en frumstæða aðferðin sem við skoðuðum í upphafi?
- Það fer að sjálfsögðu allt eftir því hversu stór hólf við veljum.

- En er þetta hraðar en frumstæða aðferðin sem við skoðuðum í upphafi?
- Það fer að sjálfsögðu allt eftir því hversu stór hólf við veljum.
- Ef fylkinu er skipt upp í n hólf er nokkuð ljóst að þessi aðferð er jafngild frumstæðu aðferðinni.

- En er þetta hraðar en frumstæða aðferðin sem við skoðuðum í upphafi?
- Það fer að sjálfsögðu allt eftir því hversu stór hólf við veljum.
- Ef fylkinu er skipt upp í n hólf er nokkuð ljóst að þessi aðferð er jafngild frumstæðu aðferðinni.
- Ef fylkinu er skipt upp í 1 hólf gildir það sama.

- En er þetta hraðar en frumstæða aðferðin sem við skoðuðum í upphafi?
- Það fer að sjálfsögðu allt eftir því hversu stór hólf við veljum.
- Ef fylkinu er skipt upp í n hólf er nokkuð ljóst að þessi aðferð er jafngild frumstæðu aðferðinni.
- Ef fylkinu er skipt upp í 1 hólf gildir það sama.
- Munið að við látum k tákna fjölda hólfa.

- En er þetta hraðar en frumstæða aðferðin sem við skoðuðum í upphafi?
- Það fer að sjálfsögðu allt eftir því hversu stór hólf við veljum.
- Ef fylkinu er skipt upp í n hólf er nokkuð ljóst að þessi aðferð er jafngild frumstæðu aðferðinni.
- Ef fylkinu er skipt upp í 1 hólf gildir það sama.
- Munið að við létum k tákna fjölda hólfa.
- Fyrri aðgerðin er ennþá $\mathcal{O}(\quad)$, en seinni aðgerðin verður $\mathcal{O}(\qquad\qquad)$, svo tímaflækjan er $\mathcal{O}(\qquad\qquad\qquad)$.

- En er þetta hraðar en frumstæða aðferðin sem við skoðuðum í upphafi?
- Það fer að sjálfsögðu allt eftir því hversu stór hólf við veljum.
- Ef fylkinu er skipt upp í n hólf er nokkuð ljóst að þessi aðferð er jafngild frumstæðu aðferðinni.
- Ef fylkinu er skipt upp í 1 hólf gildir það sama.
- Munið að við látum k tákna fjölda hólfa.
- Fyrri aðgerðin er ennþá $\mathcal{O}(\,1\,)$, en seinni aðgerðin verður $\mathcal{O}(\qquad\qquad)$, svo tímaflækjan er $\mathcal{O}(\qquad\qquad\qquad)$.

- En er þetta hraðar en frumstæða aðferðin sem við skoðuðum í upphafi?
- Það fer að sjálfsögðu allt eftir því hversu stór hólf við veljum.
- Ef fylkinu er skipt upp í n hólf er nokkuð ljóst að þessi aðferð er jafngild frumstæðu aðferðinni.
- Ef fylkinu er skipt upp í 1 hólf gildir það sama.
- Munið að við létum k tákna fjölda hólfa.
- Fyrri aðgerðin er ennþá $\mathcal{O}(\,1\,)$, en seinni aðgerðin verður $\mathcal{O}(n/k + k)$, svo tímaflækjan er $\mathcal{O}(\qquad\qquad)$.

- En er þetta hraðar en frumstæða aðferðin sem við skoðuðum í upphafi?
- Það fer að sjálfsögðu allt eftir því hversu stór hólf við veljum.
- Ef fylkinu er skipt upp í n hólf er nokkuð ljóst að þessi aðferð er jafngild frumstæðu aðferðinni.
- Ef fylkinu er skipt upp í 1 hólf gildir það sama.
- Munið að við létum k tákna fjölda hólfa.
- Fyrri aðgerðin er ennþá $\mathcal{O}(1)$, en seinni aðgerðin verður $\mathcal{O}(n/k + k)$, svo tímaflækjan er $\mathcal{O}(qn/k + qk)$.

Skynsamlegt val á k

- Þar sem að fyrri aðgerðin er ekki háð skiptingunni þá nægir að lágmarka $\frac{n}{k} + k$.

Skynsamlegt val á k

- Þar sem að fyrri aðgerðin er ekki háð skiptingunni þá nægir að lágmarka $\frac{n}{k} + k$.
- Látum $f(k) = \frac{n}{k} + k$.

Skynsamlegt val á k

- Þar sem að fyrri aðgerðin er ekki háð skiptingunni þá nægir að lágmarka $\frac{n}{k} + k$.
- Látum $f(k) = \frac{n}{k} + k$.
- Við höfum $f'(k) = -\frac{n}{k^2} + 1$.

Skynsamlegt val á k

- Þar sem að fyrri aðgerðin er ekki háð skiptingunni þá nægir að lágmarka $\frac{n}{k} + k$.
- Látum $f(k) = \frac{n}{k} + k$.
- Við höfum $f'(k) = -\frac{n}{k^2} + 1$.
- Útgildispunktar fást í

Skynsamlegt val á k

- Þar sem að fyrri aðgerðin er ekki háð skiptingunni þá nægir að lágmarka $\frac{n}{k} + k$.
- Látum $f(k) = \frac{n}{k} + k$.
- Við höfum $f'(k) = -\frac{n}{k^2} + 1$.
- Útgildispunktar fást í

$$f'(k) = 0$$

Skynsamlegt val á k

- Þar sem að fyrri aðgerðin er ekki háð skiptingunni þá nægir að lágmarka $\frac{n}{k} + k$.
- Látum $f(k) = \frac{n}{k} + k$.
- Við höfum $f'(k) = -\frac{n}{k^2} + 1$.
- Útgildispunktar fást í

$$\begin{aligned} & f'(k) = 0 \\ \Rightarrow \quad & 1 - \frac{n}{k^2} = 0 \end{aligned}$$

Skynsamlegt val á k

- Þar sem að fyrri aðgerðin er ekki háð skiptingunni þá nægir að lágmarka $\frac{n}{k} + k$.
- Látum $f(k) = \frac{n}{k} + k$.
- Við höfum $f'(k) = -\frac{n}{k^2} + 1$.
- Útgildispunktar fást í

$$\begin{aligned} & f'(k) = 0 \\ \Rightarrow \quad & 1 - \frac{n}{k^2} = 0 \\ \Rightarrow \quad & 1 = \frac{n}{k^2} \end{aligned}$$

Skynsamlegt val á k

- Þar sem að fyrri aðgerðin er ekki háð skiptingunni þá nægir að lágmarka $\frac{n}{k} + k$.
- Látum $f(k) = \frac{n}{k} + k$.
- Við höfum $f'(k) = -\frac{n}{k^2} + 1$.
- Útgildispunktar fást í

$$
\begin{aligned}
& f'(k) = 0 \\
\Rightarrow \quad & 1 - \frac{n}{k^2} = 0 \\
\Rightarrow \quad & 1 = \frac{n}{k^2} \\
\Rightarrow \quad & k^2 = n
\end{aligned}
$$

Skynsamlegt val á k

- Þar sem að fyrri aðgerðin er ekki háð skiptingunni þá nægir að lágmarka $\frac{n}{k} + k$.
- Látum $f(k) = \frac{n}{k} + k$.
- Við höfum $f'(k) = -\frac{n}{k^2} + 1$.
- Útgildispunktar fást í

$$\begin{aligned} & f'(k) = 0 \\ \Rightarrow \quad & 1 - \frac{n}{k^2} = 0 \\ \Rightarrow \quad & 1 = \frac{n}{k^2} \\ \Rightarrow \quad & k^2 = n \\ \Rightarrow \quad & k = \sqrt{n}. \end{aligned}$$

Skynsamlegt val á k

- Þar sem að fyrri aðgerðin er ekki háð skiptingunni þá nægir að lágmarka $\frac{n}{k} + k$.
- Látum $f(k) = \frac{n}{k} + k$.
- Við höfum $f'(k) = -\frac{n}{k^2} + 1$.
- Útgildispunktar fást í

$$
\begin{aligned}
& f'(k) = 0 \\
\Rightarrow \quad & 1 - \frac{n}{k^2} = 0 \\
\Rightarrow \quad & 1 = \frac{n}{k^2} \\
\Rightarrow \quad & k^2 = n \\
\Rightarrow \quad & k = \sqrt{n}.
\end{aligned}
$$

- Nú þarf bara að ganga úr skugga um að þessi skipting sé betri en línuleg.

- Ef við veljum $k = \sqrt{n}$ þá er tímaflækja seinni aðgerðarinnar

$$\mathcal{O}\left(\frac{n}{\sqrt{n}} + \sqrt{n}\right) = \mathcal{O}(\sqrt{n} + \sqrt{n}) = \mathcal{O}(\sqrt{n}).$$

- Ef við veljum $k = \sqrt{n}$ þá er tímaflækja seinni aðgerðarinnar

$$\mathcal{O}\left(\frac{n}{\sqrt{n}} + \sqrt{n}\right) = \mathcal{O}(\sqrt{n} + \sqrt{n}) = \mathcal{O}(\sqrt{n}).$$

- Því er tímaflækjan á lausninni $\mathcal{O}(\quad)$.

- Ef við veljum $k = \sqrt{n}$ þá er tímaflækja seinni aðgerðarinnar

$$\mathcal{O}\left(\frac{n}{\sqrt{n}} + \sqrt{n}\right) = \mathcal{O}(\sqrt{n} + \sqrt{n}) = \mathcal{O}(\sqrt{n}).$$

- Því er tímaflækjan á lausninni $\mathcal{O}(q\sqrt{n})$.

- Ef við veljum $k = \sqrt{n}$ þá er tímaflækja seinni aðgerðarinnar

$$\mathcal{O}\left(\frac{n}{\sqrt{n}} + \sqrt{n}\right) = \mathcal{O}(\sqrt{n} + \sqrt{n}) = \mathcal{O}(\sqrt{n}).$$

- Því er tímaflækjan á lausninni $\mathcal{O}(q\sqrt{n})$.
- Svo þessi aðferð er betri en sú frumstæða, ef við skiptum í $\sqrt{n}$ hólf.

- Ef við veljum $k = \sqrt{n}$ þá er tímaflækja seinni aðgerðarinnar

$$\mathcal{O}\left(\frac{n}{\sqrt{n}} + \sqrt{n}\right) = \mathcal{O}(\sqrt{n} + \sqrt{n}) = \mathcal{O}(\sqrt{n}).$$

- Því er tímaflækjan á lausninni $\mathcal{O}(q\sqrt{n})$.
- Svo þessi aðferð er betri en sú frumstæða, ef við skiptum í $\sqrt{n}$ hólf.
- Við köllum það *rótarþáttun* (e. *squareroot decomposition*) þegar við skiptum upp í $\sqrt{n}$ hólf.

```c
void update(int *a, int x, int y)
{
    a[2 + a[0] + x/a[1]] += y, a[2 + x] += y;
}

int query(int *a, int x, int y)
{
    int r = 0;
    while (x%a[1] != 0 && x < y) r += a[2 + x++];
    if (x == y) return r;
    while (y%a[1] != 0) r += a[2 + --y];
    while (x < y) r += a[2 + a[0] + x/a[1]], x += a[1];
    return r;
}

void init(int *a, int n)
{
    for (a[0] = n, a[1] = 0; a[1]*a[1] < a[0]; a[1]++);
    for (int i = 2; i < 2*n; i++) a[i] = 0;
}
```

Lygnar uppfærlsur

- Við getum einnig framkvæmt lygnar uppfærlsur þegar við notum rótarþáttun (líkt og með biltré).

Lygnar uppfærlsur

- Við getum einnig framkvæmt lygnar uppfærlsur þegar við notum rótarþáttun (líkt og með biltré).
- Við uppfærum þá beint þau gildi sem eru í sömu hólfum og endarpunktar bilsins sem við uppfærum yfir.

Lygnar uppfærlsur

- Við getum einnig framkvæmt lygnar uppfærlsur þegar við notum rótarþáttun (líkt og með biltré).
- Við uppfærum þá beint þau gildi sem eru í sömu hólfum og endarpunktar bilsins sem við uppfærum yfir.
- Við framkvæmum svo lygna uppfærslu á þau hólf sem liggja þar á milli.

```c
void prop(int *a, int x)
{
    for (int i = 0; i < a[1]; i++) a[3 + x*a[1] + i] += a[a[2] + x];
    a[3 + a[0] + x] += a[a[2] + x]*a[1], a[a[2] + x] = 0;
}

int query(int *a, int x, int y)
{
    prop(a, x/a[1]), prop(a, (y - 1)/a[1]);
    int r = 0;
    while (x%a[1] != 0 && x < y) r += a[3 + x++];
    if (x == y) return r;
    while (y%a[1] != 0) r += a[3 + --y];
    while (x < y) r += a[3 + a[0] + x/a[1]] + a[a[2] + x/a[1]]*a[1], x += a[1];
    return r;
}

void update(int *a, int x, int y, int z)
{
    prop(a, x/a[1]), prop(a, (y - 1)/a[1]);
    while (x%a[1] != 0 && x < y) a[3 + x] += z, a[3 + a[0] + x++/a[1]] += z;
    if (x == y) return;
    while (y%a[1] != 0) a[3 + --y] += z, a[3 + a[0] + y/a[1]] += z;
    while (x < y) a[a[2] + x/a[1]] += z, x += a[1];
}

void init(int *a, int n)
{
    for (a[0] = n, a[1] = 0; a[1]*a[1] < a[0]; a[1]++);
    for (int i = 3; i < 2*a[0]; i++) a[i] = 0;
    a[2] = (a[0] + a[1] - 1)/a[1] + a[0] + 3;
}
```