

Reiknirit Kruskals (1956)

Bergur Snorrason

March 4, 2024

- Gerum ráð fyrir að við séum með samanhagandi óstefnt net $G = (V, E)$.

- ▶ Gerum ráð fyrir að við séum með samanhagandi óstefnt net $G = (V, E)$.
- ▶ Munið að net kallast tré ef það er samanhagandi og órásað.

- ▶ Gerum ráð fyrir að við séum með samanhagandi óstefnt net $G = (V, E)$.
- ▶ Munið að net kallast tré ef það er samanhagandi og órásað.
- ▶ Auðvelt er að sýna með þrepun að við getum gert G að tréi með því að fjarlægja leggi.

- ▶ Gerum ráð fyrir að við séum með samanhagandi óstefnt net $G = (V, E)$.
- ▶ Munið að net kallast tré ef það er samanhagandi og órásað.
- ▶ Auðvelt er að sýna með þrepun að við getum gert G að tréi með því að fjarlægja leggi.
- ▶ Einnig má sýna að tré uppfyllir alltaf $|E| = |V| - 1$.

- ▶ Gerum ráð fyrir að við séum með samanhagandi óstefnt net $G = (V, E)$.
- ▶ Munið að net kallast tré ef það er samanhagandi og órásað.
- ▶ Auðvelt er að sýna með þrepun að við getum gert G að tréi með því að fjarlægja leggi.
- ▶ Einnig má sýna að tré uppfyllir alltaf $|E| = |V| - 1$.
- ▶ Ef G' er tré sem fæst með því að fjarlægja leggi úr G þá köllum við G' *spannandi tré* G (e. *spanning tree*).

- Ef $G = (V, E, w)$ er vegið net og $G' = (V', E')$ er spannandi tré netsins (V, E) þá segjum við að *stærðin* á spannandi trénu sé

$$S(G') = \sum_{e \in E'} w(e).$$

- ▶ Ef $G = (V, E, w)$ er vegið net og $G' = (V', E')$ er spannandi tré netsins (V, E) þá segjum við að *stærðin* á spannandi trénu sé

$$S(G') = \sum_{e \in E'} w(e).$$

- ▶ Hvernig förum við að því að finna G' þannig að $S(G')$ sé sem minnst.

- ▶ Ef $G = (V, E, w)$ er vegið net og $G' = (V', E')$ er spannandi tré netsins (V, E) þá segjum við að *stærðin* á spannandi trénu sé

$$S(G') = \sum_{e \in E'} w(e).$$

- ▶ Hvernig förum við að því að finna G' þannig að $S(G')$ sé sem minnst.
- ▶ Slíkt G' er kallað *minnsta spannandi tré netsins* G (e. *minimum spanning tree*), þó svo að það sé ekki ótvírætt ákvarðað.

- ▶ Ef $G = (V, E, w)$ er vegið net og $G' = (V', E')$ er spannandi tré netsins (V, E) þá segjum við að *stærðin* á spannandi trénu sé

$$S(G') = \sum_{e \in E'} w(e).$$

- ▶ Hvernig förum við að því að finna G' þannig að $S(G')$ sé sem minnst.
- ▶ Slíkt G' er kallað *minnsta spannandi tré netsins* G (e. *minimum spanning tree*), þó svo að það sé ekki ótvírætt ákvarðað.
- ▶ Við getum fundið minnsta spannandi tré gráðugt.

- ▶ Við getum lýst aðferðinni í einni málgrein.

- ▶ Við getum lýst aðferðinni í einni málgrein.
- ▶ Við bætum alltaf við minnsta leggnum sem myndar ekki rás.

- ▶ Við getum lýst aðferðinni í einni málgrein.
- ▶ Við bætum alltaf við minnsta leggnum sem myndar ekki rás.
- ▶ Hvernig getum við gert þetta á hagkvæman hátt.

- ▶ Við getum lýst aðferðinni í einni málgrein.
- ▶ Við bætum alltaf við minnsta leggnum sem myndar ekki rás.
- ▶ Hvernig getum við gert þetta á hagkvæman hátt.
- ▶ Við byrjum með net með $|V|$ hnúta en enga leggi.

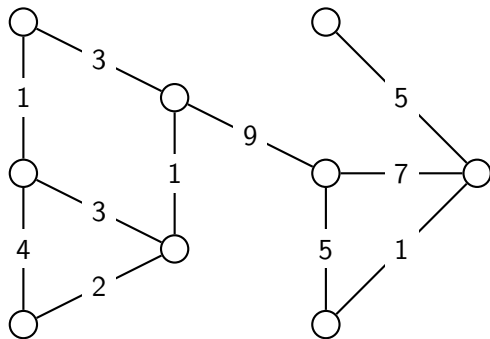
- ▶ Við getum lýst aðferðinni í einni málgrein.
- ▶ Við bætum alltaf við minnsta leggnum sem myndar ekki rás.
- ▶ Hvernig getum við gert þetta á hagkvæman hátt.
- ▶ Við byrjum með net með $|V|$ hnúta en enga leggi.
- ▶ Gerum ráð fyrir að við höfum bætt við nokkrum leggjum sem mynda ekki rás.

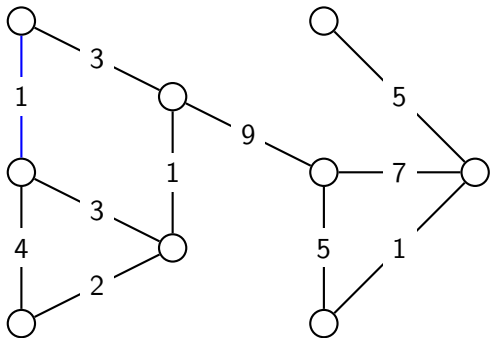
- ▶ Við getum lýst aðferðinni í einni málgrein.
- ▶ Við bætum alltaf við minnsta leggnum sem myndar ekki rás.
- ▶ Hvernig getum við gert þetta á hagkvæman hátt.
- ▶ Við byrjum með net með $|V|$ hnúta en enga leggi.
- ▶ Gerum ráð fyrir að við höfum bætt við nokkrum leggjum sem mynda ekki rás.
- ▶ Ef við viljum bæta við leggnum (u, v) þá erum við í raun að sameina samhengispættina sem hnútarnir u og v tilheyra.

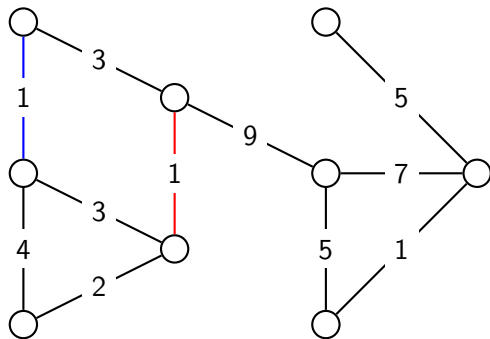
- ▶ Við getum lýst aðferðinni í einni málgrein.
- ▶ Við bætum alltaf við minnsta leggnum sem myndar ekki rás.
- ▶ Hvernig getum við gert þetta á hagkvæman hátt.
- ▶ Við byrjum með net með $|V|$ hnúta en enga leggi.
- ▶ Gerum ráð fyrir að við höfum bætt við nokkrum leggjum sem mynda ekki rás.
- ▶ Ef við viljum bæta við leggnum (u, v) þá erum við í raun að sameina samhengisþættina sem hnútarnir u og v tilheyra.
- ▶ Ef þeir tilheyra sama samhengisþætti þá myndast rás við það að bæta við leggnum.

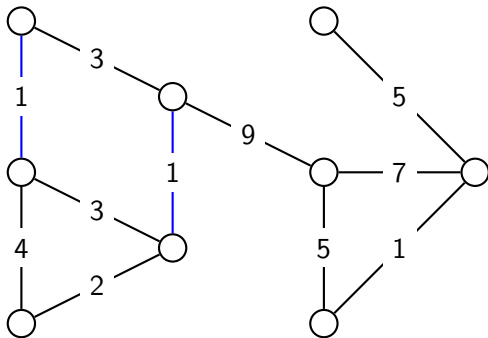
- ▶ Við getum lýst aðferðinni í einni málgrein.
- ▶ Við bætum alltaf við minnsta leggnum sem myndar ekki rás.
- ▶ Hvernig getum við gert þetta á hagkvæman hátt.
- ▶ Við byrjum með net með $|V|$ hnúta en enga leggi.
- ▶ Gerum ráð fyrir að við höfum bætt við nokkrum leggjum sem mynda ekki rás.
- ▶ Ef við viljum bæta við leggnum (u, v) þá erum við í raun að sameina samhengisþættina sem hnútarnir u og v tilheyra.
- ▶ Ef þeir tilheyra sama samhengisþætti þá myndast rás við það að bæta við leggnum.
- ▶ Svo við getum notað _____ til að segja til um hvort leggur myndi rás.

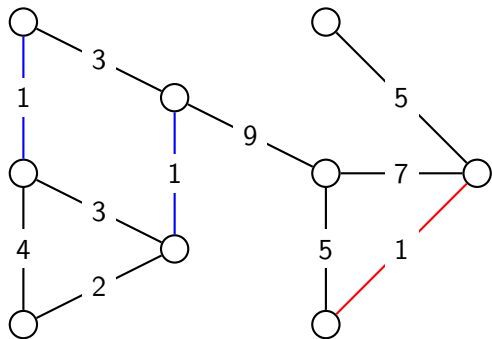
- ▶ Við getum lýst aðferðinni í einni málgrein.
- ▶ Við bætum alltaf við minnsta leggnum sem myndar ekki rás.
- ▶ Hvernig getum við gert þetta á hagkvæman hátt.
- ▶ Við byrjum með net með $|V|$ hnúta en enga leggi.
- ▶ Gerum ráð fyrir að við höfum bætt við nokkrum leggjum sem mynda ekki rás.
- ▶ Ef við viljum bæta við leggnum (u, v) þá erum við í raun að sameina samhengisþættina sem hnútarnir u og v tilheyra.
- ▶ Ef þeir tilheyra sama samhengisþætti þá myndast rás við það að bæta við leggnum.
- ▶ Svo við getum notað sammengisleit til að segja til um hvort leggur myndi rás.

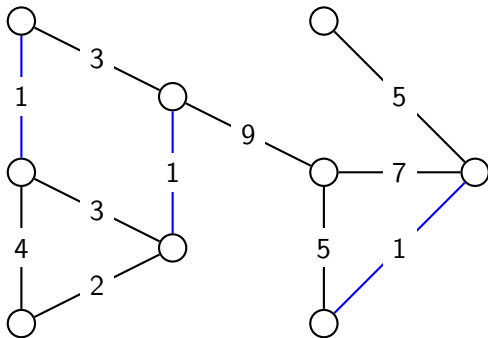


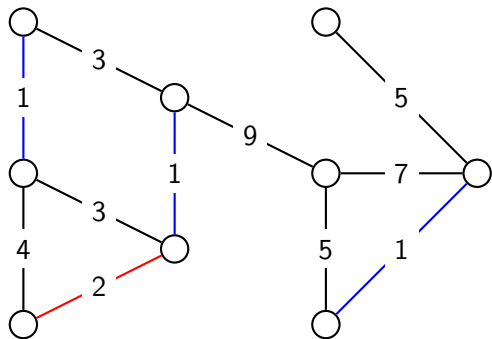


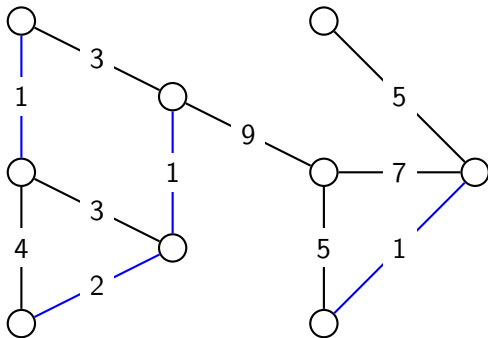


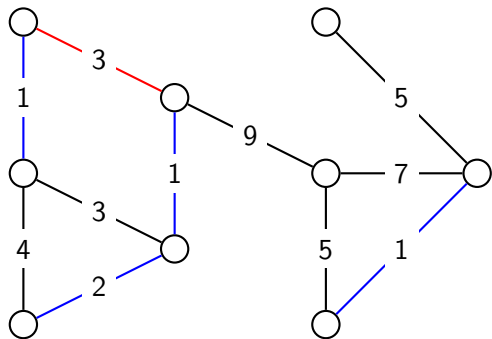


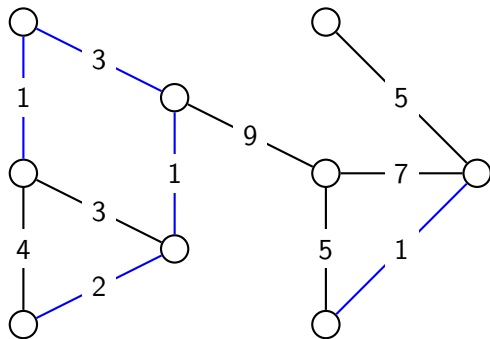


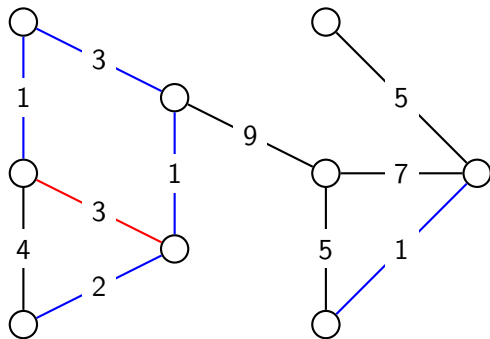


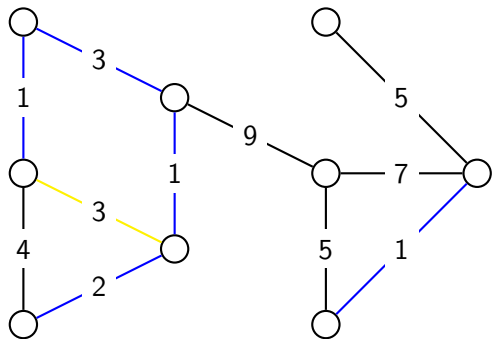


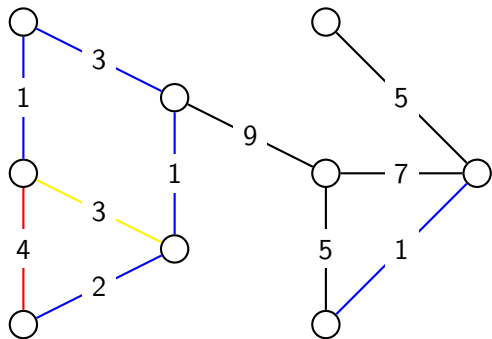


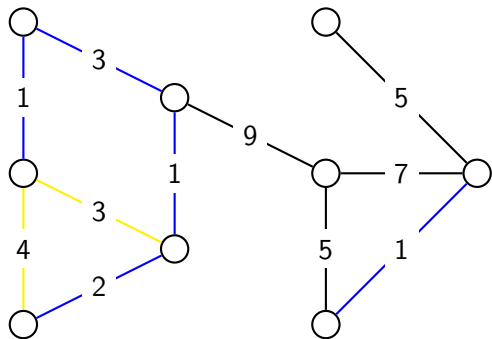


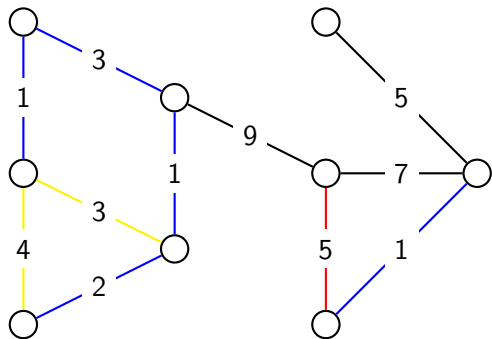


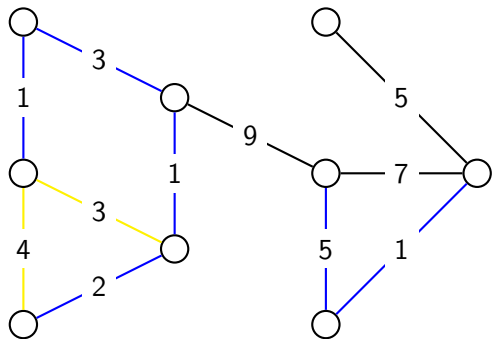


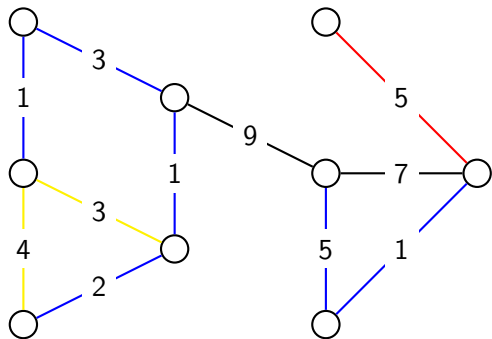


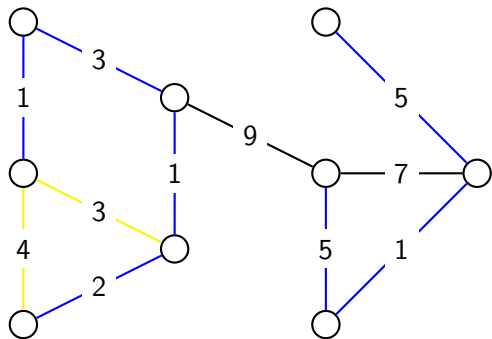


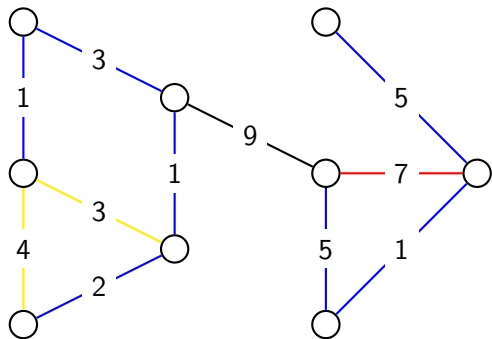


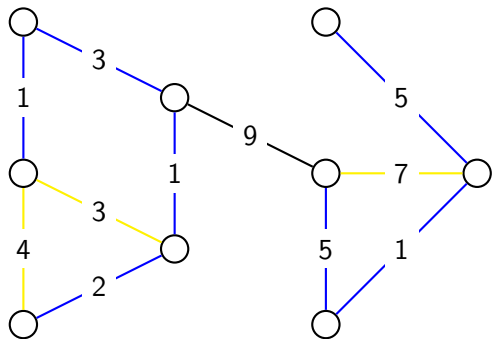


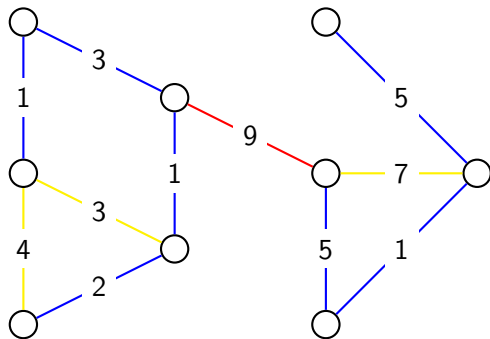


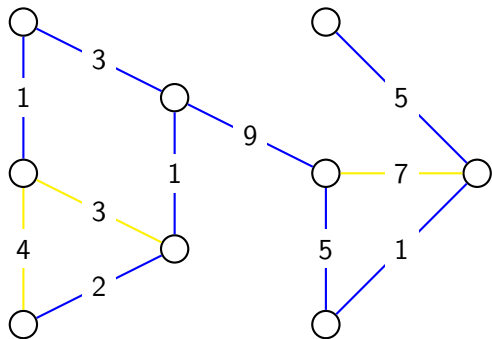


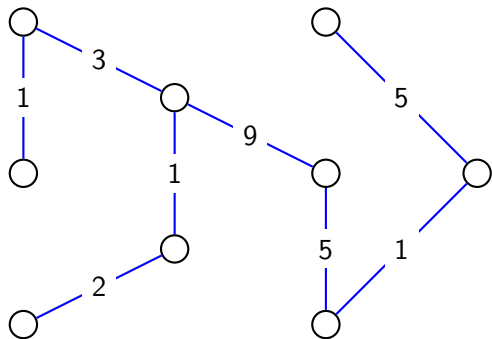












- ▶ Við höfum ekki áhuga á nágrönnum hnúta heldur vigtum á leggjum svo við notum leggjalista í útfærslunni okkar.

- ▶ Við höfum ekki áhuga á nágrönnum hnúta heldur vigtum á leggjum svo við notum leggjalista í útfærslunni okkar.
- ▶ Við byrjum á að raða leggjalistanum eftir vigt leggjanna.

- ▶ Við höfum ekki áhuga á nágrönnum hnúta heldur vigtum á leggjum svo við notum leggjalista í útfærslunni okkar.
- ▶ Við byrjum á að raða leggjalistanum eftir vigt leggjanna.
- ▶ Við göngum síðan á leggina og:

- ▶ Við höfum ekki áhuga á nágrönnum hnúta heldur vigtum á leggjum svo við notum leggjalista í útfærslunni okkar.
- ▶ Við byrjum á að raða leggjalistanum eftir vigt leggjanna.
- ▶ Við göngum síðan á leggina og:
 - ▶ Gerum ekkert ef leggurinn myndar rás
(`find(u) == find(v)`).

- ▶ Við höfum ekki áhuga á nágrönnum hnúta heldur vigtum á leggjum svo við notum leggjalista í útfærslunni okkar.
- ▶ Við byrjum á að raða leggjalistanum eftir vigt leggjanna.
- ▶ Við göngum síðan á leggina og:
 - ▶ Gerum ekkert ef leggurinn myndar rás (`find(u) == find(v)`).
 - ▶ Bætum leggnum í spannandi tréð ef hann myndar ekki rás og sameinum í sammengisleitinn (`join(u, v)`).

- ▶ Þetta reiknirit skilar alltaf spannandi tré, en það er meiri vinna að sýna að það sé ekki til minna spannandi tré.

- ▶ Þetta reiknirit skilar alltaf spannandi tré, en það er meiri vinna að sýna að það sé ekki til minna spannandi tré.
- ▶ Við munum ekki týnast í slíkum smáatriðum hér.

```

3  typedef struct { int x, y, z; } ii;
4  int cmp(const void* p1, const void* p2) { return ((ii*)p1)->z - ((ii*)p2)->z; }

24 int kruskal(ii* e, ii* t, int n, int m)
25 {
26     int i, j = 0, r = 0, p[n];
27     uf_init(p, n);
28     qsort(e, m, sizeof(e[0]), cmp);
29     for (i = 0; i < m; i++)
30     {
31         if (uf_find(p, e[i].x) == uf_find(p, e[i].y)) continue;
32         r += e[i].z;
33         uf_join(p, e[i].x, e[i].y);
34         t[j++] = e[i];
35     }
36     return r;
37 }

```

- ▶ Það fyrsta sem við gerum er að raða leggjunum, sem við gerum í $\mathcal{O}(\quad)$ tíma.

- ▶ Það fyrsta sem við gerum er að raða leggjunum, sem við gerum í $\mathcal{O}(E \log E)$ tíma.

- ▶ Það fyrsta sem við gerum er að raða leggjunum, sem við gerum í $\mathcal{O}(E \log E)$ tíma.
- ▶ Síðan ítrum við í gegn leggina og framkvæmum fastann fjölda af sammengisleitaraðgerðum fyrir hvern legg, sem tekur $\mathcal{O}(\quad)$ tíma.

- ▶ Það fyrsta sem við gerum er að raða leggjunum, sem við gerum í $\mathcal{O}(E \log E)$ tíma.
- ▶ Síðan ítrum við í gegn leggina og framkvæmum fastann fjölda af sammengisleitaraðgerðum fyrir hvern legg, sem tekur $\mathcal{O}(E\alpha(V))$ tíma.

- ▶ Það fyrsta sem við gerum er að raða leggjunum, sem við gerum í $\mathcal{O}(E \log E)$ tíma.
- ▶ Síðan ítrum við í gegn leggina og framkvæmum fastann fjölda af sammengisleitaraðgerðum fyrir hvern legg, sem tekur $\mathcal{O}(E\alpha(V))$ tíma.
- ▶ Saman er þetta því $\mathcal{O}(E \log E + E\alpha(V)) = \mathcal{O}(\quad)$.

- ▶ Það fyrsta sem við gerum er að raða leggjunum, sem við gerum í $\mathcal{O}(E \log E)$ tíma.
- ▶ Síðan ítrum við í gegn leggina og framkvæmum fastann fjölda af sammengisleitaraðgerðum fyrir hvern legg, sem tekur $\mathcal{O}(E\alpha(V))$ tíma.
- ▶ Saman er þetta því $\mathcal{O}(E \log E + E\alpha(V)) = \mathcal{O}(E \log E)$.

