Lausnir á rúmfræðidæmi

Bergur Snorrason

20. apríl 2022

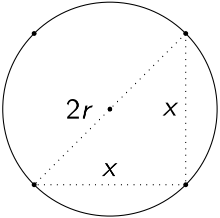
Skálagerð

- Þér er gefinn hringur með geisla r og þú átt að dreifa fjórum punktum jafnt á hringinn.

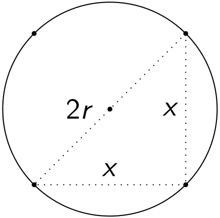
Skálagerð

- Þér er gefinn hringur með geisla r og þú átt að dreifa fjórum punktum jafnt á hringinn.
- Hver verður fjarlægðin milli aðliggjandi punkta?

Skálagerð

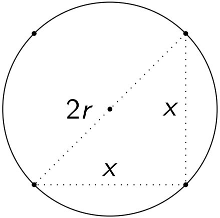


Skálagerð



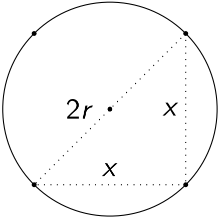
- Við vitum að þríhyrningurinn merktur með punktalínum er rétthyrndur (setning Þalesar).

Skálagerð



- Við vitum að þríhyrningurinn merktur með punktalínum er rétthyrndur (setning Þalesar).
- Svo $2x^2 = 4r^2$ (setning Pýþagorasar).

Skálagerð



- Við vitum að þríhyrningurinn merktur með punktalínum er rétthyrndur (setning Þalesar).
- Svo $2x^2 = 4r^2$ (setning Pýþagorasar).
- Svarið er því $x = r\sqrt{2}$.

DCC líkur

Vatnskubbur

- Gefin heiltala $n \leq 10^{18}$, eru til heiltölur $a, b > 1$ þannig að $n = ab^2$?

Vatnskubbur

- Frumþáttum þannig að $n = p_1^{e_1} \dots p_m^{e_m}$.

Vatnskubbur

- Frumþáttum þannig að $n = p_1^{e_1} \dots p_m^{e_m}$.
- Tökum eftir að ef $e_1 = \dots = e_m = 1$ þá er þetta ekki hægt.

Vatnskubbur

- Frumþáttum þannig að $n = p_1^{e_1} \dots p_m^{e_m}$.
- Tökum eftir að ef $e_1 = \dots = e_m = 1$ þá er þetta ekki hægt.
- Ef $m = 1$ og $e_1 = 2$ þá er þetta heldur ekki hægt.

Vatnskubbur

- Frumþáttum þannig að $n = p_1^{e_1} \dots p_m^{e_m}$.
- Tökum eftir að ef $e_1 = \cdots = e_m = 1$ þá er þetta ekki hægt.
- Ef $m = 1$ og $e_1 = 2$ þá er þetta heldur ekki hægt.
- Annar er þetta hægt.

Vatnskubbur

- Frumþáttum þannig að $n = p_1^{e_1} \dots p_m^{e_m}$.
- Tökum eftir að ef $e_1 = \cdots = e_m = 1$ þá er þetta ekki hægt.
- Ef $m = 1$ og $e_1 = 2$ þá er þetta heldur ekki hægt.
- Annar er þetta hægt.
- Þá er til j þannig að $e_j \geq 2$ svo við getum látið $b = p_j$.

Vatnskubbur

- Frumþáttum þannig að $n = p_1^{e_1} \dots p_m^{e_m}$.
- Tökum eftir að ef $e_1 = \cdots = e_m = 1$ þá er þetta ekki hægt.
- Ef $m = 1$ og $e_1 = 2$ þá er þetta heldur ekki hægt.
- Annar er þetta hægt.
- Þá er til j þannig að $e_j \geq 2$ svo við getum látið $b = p_j$.
- Við þurfum að passa að n er stór, svo við þurfum reiknirit Pollards til að lausnin verði nógu hröð.

Bíórugl

- Það eru $n \leq 10^{18}$ einstaklingar í bíó og þeir sitja allar í sömu röð og fylla akkúrat röðina.

Bíórugl

- Það eru $n \leq 10^{18}$ einstaklingar í bíó og þeir sitja allar í sömu röð og fylla akkúrat röðina.
- Í hlé fara allir á klóið og vilja svo sæti sem er í mesta lagi tveimur sætum frá upprunalega sætinu sínu.

Bíórugl

- Það eru $n \leq 10^{18}$ einstaklingar í bíó og þeir sitja allar í sömu röð og fylla akkúrat röðina.
- Í hlé fara allir á klóið og vilja svo sæti sem er í mesta lagi tveimur sætum frá upprunalega sætinu sínu.
- Á hversu marga vegu geta þeir sest aftur?

Bíórugl

- Við leysum þetta með því að finna rakningarvensl sem lýsa dæminu.

Bíórugl

- Við leysum þetta með því að finna rakningarvensl sem lýsa dæminu.
- Með því að skoða hvernig dæmið skiptist í smærri tilfelli (og handreikna grunntilfellin) fæst að

$$c_n = 14c_{n-1} + 2c_{n-3} - c_{n-5},$$

ef $n > 4$ og $c_0 = 1, c_1 = 1, c_2 = 2, c_3 = 6$ og $c_4 = 14$.

Bíórugl

- Við leysum þetta með því að finna rakningarvensl sem lýsa dæminu.
- Með því að skoða hvernig dæmið skiptist í smærri tilfelli (og handreikna grunntilfellin) fæst að

$$c_n = 14c_{n-1} + 2c_{n-3} - c_{n-5},$$

  ef $n > 4$ og $c_0 = 1, c_1 = 1, c_2 = 2, c_3 = 6$ og $c_4 = 14$.
- Við getum síðan notað fylkjamargföldun til að reikna c_n í logratíma.

Bíórugl

- Við leysum þetta með því að finna rakningarvensl sem lýsa dæminu.
- Með því að skoða hvernig dæmið skiptist í smærri tilfelli (og handreikna grunntilfellin) fæst að

$$c_n = 14c_{n-1} + 2c_{n-3} - c_{n-5},$$

  ef $n > 4$ og $c_0 = 1, c_1 = 1, c_2 = 2, c_3 = 6$ og $c_4 = 14$.
- Við getum síðan notað fylkjamargföldun til að reikna c_n í logratíma.
- Ef við viljum ekki reikna grunntilfellin í höndunum getum við notað tæmandi leit til þessa að finna þau.

Bíórugl

- Við leysum þetta með því að finna rakningarvensl sem lýsa dæminu.
- Með því að skoða hvernig dæmið skiptist í smærri tilfelli (og handreikna grunntilfellin) fæst að

  $$c_n = 14c_{n-1} + 2c_{n-3} - c_{n-5},$$

  ef $n > 4$ og $c_0 = 1, c_1 = 1, c_2 = 2, c_3 = 6$ og $c_4 = 14$.
- Við getum síðan notað fylkjamargföldun til að reikna c_n í logratíma.
- Ef við viljum ekki reikna grunntilfellin í höndunum getum við notað tæmandi leit til þessa að finna þau.
- Við getum líka fundið stuðlana með Gauss-Jordan eyðingu.

Réttur krappi er rangur

- Gefnir eru $n \leq 3\,000$ punktar í plani.

Réttur krappi er rangur

- Gefnir eru $n \leq 3\,000$ punktar í plani.
- Hversu margar þrenndir í punkta safninu mynda rétthyrndan þríhyrning?

Réttur krappi er rangur

- Það er lítið mál að skoða allar þrenndir punkta, en sú lausn er $\mathcal{O}(n^3)$ sem er of hægt.

Réttur krappi er rangur

- Það er lítið mál að skoða allar þrenndir punkta, en sú lausn er $\mathcal{O}(n^3)$ sem er of hægt.
- Veljum einhver punkt sem vendipunkt og skoðum allar línur sem liggja gegnum vendi punktinn og einhvern annan punkt í safninu.

Réttur krappi er rangur

- Það er lítið mál að skoða allar þrenndir punkta, en sú lausn er $\mathcal{O}(n^3)$ sem er of hægt.
- Veljum einhver punkt sem vendipunkt og skoðum allar línur sem liggja gegnum vendi punktinn og einhvern annan punkt í safninu.
- Ef tvær línur skerast í réttu horni þá svara þær til þrenndar í punktasafninu sem myndar rétthyrning.

Réttur krappi er rangur

- Það er lítið mál að skoða allar þrenndir punkta, en sú lausn er $\mathcal{O}(n^3)$ sem er of hægt.
- Veljum einhver punkt sem vendipunkt og skoðum allar línur sem liggja gegnum vendi punktinn og einhvern annan punkt í safninu.
- Ef tvær línur skerast í réttu horni þá svara þær til þrenndar í punktasafninu sem myndar rétthyrning.
- Við getum fundið, fyrir tiltekna línu, hversu margar línur hún sker undir réttu horni með helmingunarleit (tveimur leitum reyndar) eða gagngrindum á borða við leitartré (`set<...>`) eða hakkatöflu (`unordered_map<...>`).

Réttur krappi er rangur

- Það er lítið mál að skoða allar þrenndir punkta, en sú lausn er $\mathcal{O}(n^3)$ sem er of hægt.
- Veljum einhver punkt sem vendipunkt og skoðum allar línur sem liggja gegnum vendi punktinn og einhvern annan punkt í safninu.
- Ef tvær línur skerast í réttu horni þá svara þær til þrenndar í punktasafninu sem myndar rétthyrning.
- Við getum fundið, fyrir tiltekna línu, hversu margar línur hún sker undir réttu horni með helmingunarleit (tveimur leitum reyndar) eða gagngrindum á borða við leitartré (`set<...>`) eða hakkatöflu (`unordered_map<...>`).
- Endurtökum svo þannig að allir punktar verði vendipunktar og styttum svo út endurtekningar.

Réttur krappi er rangur

- Það er lítið mál að skoða allar þrenndir punkta, en sú lausn er $\mathcal{O}(n^3)$ sem er of hægt.
- Veljum einhver punkt sem vendipunkt og skoðum allar línur sem liggja gegnum vendi punktinn og einhvern annan punkt í safninu.
- Ef tvær línur skerast í réttu horni þá svara þær til þrenndar í punktasafninu sem myndar rétthyrning.
- Við getum fundið, fyrir tiltekna línu, hversu margar línur hún sker undir réttu horni með helmingunarleit (tveimur leitum reyndar) eða gagngrindum á borða við leitartré (`set<...>`) eða hakkatöflu (`unordered_map<...>`).
- Endurtökum svo þannig að allir punktar verði vendipunktar og styttum svo út endurtekningar.
- Þessi lausn er $\mathcal{O}(n^2 \log n)$.

Leiðinda rigning

-