Rótarþáttun

Bergur Snorrason

17. febrúar 2023

Dæmi

- Gefinn er listi með n tölum.

Dæmi

- Gefinn er listi með n tölum.
- Næst koma q fyrirspurnir, þar sem hver er af einni af tveimur gerðum:

Dæmi

- Gefinn er listi með n tölum.
- Næst koma q fyrirspurnir, þar sem hver er af einni af tveimur gerðum:
  - Bættu k við i-tu töluna.

Dæmi

- Gefinn er listi með n tölum.
- Næst koma q fyrirspurnir, þar sem hver er af einni af tveimur gerðum:
  - Bættu k við i-tu töluna.
  - Reiknaðu summu allra talna á bilinu $[i, j]$.

Almenn k-þáttun

- Hvað ef við skiptum fylkinu upp í k (næstum) jafnstór hólf.

Almenn k-þáttun

- Hvað ef við skiptum fylkinu upp í k (næstum) jafnstór hólf.
- Við getum þá haldið utan um, og uppfært, summu hvers hólfs auðveldlega.

Almenn k-þáttun

- Hvað ef við skiptum fylkinu upp í k (næstum) jafnstór hólf.
- Við getum þá haldið utan um, og uppfært, summu hvers hólfs auðveldlega.
- Til að finna summu á einhverju bili í fylkinu nægir að reikna summu hólfana á milli endapunktana og leggja svo afganginn við (afgangurinn er í mesta lagi lengd tveggja hólfa).

Almenn k-þáttun

- Hvað ef við skiptum fylkinu upp í k (næstum) jafnstór hólf.
- Við getum þá haldið utan um, og uppfært, summu hvers hólfs auðveldlega.
- Til að finna summu á einhverju bili í fylkinu nægir að reikna summu hólfana á milli endapunktana og leggja svo afganginn við (afgangurinn er í mesta lagi lengd tveggja hólfa).
- Tökum eftirfarandi sýnidæmi sem skipt hefur verið í þrjú hólf,

$$p = [0\ 1\ 4 \mid 3\ 4\ 5 \mid 0\ 1\ 8\ 9].$$

Almenn k-þáttun

- Hvað ef við skiptum fylkinu upp í k (næstum) jafnstór hólf.
- Við getum þá haldið utan um, og uppfært, summu hvers hólfs auðveldlega.
- Til að finna summu á einhverju bili í fylkinu nægir að reikna summu hólfana á milli endapunktana og leggja svo afganginn við (afgangurinn er í mesta lagi lengd tveggja hólfa).
- Tökum eftirfarandi sýnidæmi sem skipt hefur verið í þrjú hólf,

$$p = [0\ 1\ 4 \mid 3\ 4\ 5 \mid 0\ 1\ 8\ 9].$$

- Köllum fylkið sem geymir summu hvers hólfs `s`, sem verður þá

$$s = [5\ 12\ 18].$$

- Ef við viljum uppfæra, til dæmis bæta 5 við stak 2, þá þurfum við að sjálfsögðu að uppfæra `p`, en það þarf líka breyta `s`.

- Ef við viljum uppfæra, til dæmis bæta 5 við stak 2, þá þurfum við að sjálfsögðu að uppfæra `p`, en það þarf líka breyta `s`.
- Til að breyta `p` gerum við einfaldlega `p[2] += 5`.

- Ef við viljum uppfæra, til dæmis bæta 5 við stak 2, þá þurfum við að sjálfsögðu að uppfæra `p`, en það þarf líka breyta `s`.
- Til að breyta `p` gerum við einfaldlega `p[2] += 5`.
- Til að uppfæra *s* þurfum við að finna hólfið sem stak `2` tilheyrir. Þar sem það er í hólfi `0` notum við `s[0] += 5`.

- Ef við viljum uppfæra, til dæmis bæta 5 við stak 2, þá þurfum við að sjálfsögðu að uppfæra `p`, en það þarf líka breyta `s`.
- Til að breyta `p` gerum við einfaldlega `p[2] += 5`.
- Til að uppfæra s þurfum við að finna hólfið sem stak `2` tilheyrir. Þar sem það er í hólfi `0` notum við `s[0] += 5`.
- Svona líta svo fylkin út, fyrir og eftir uppfærslu.

$$\begin{array}{cc} \text{Fyrir breytingu} & \text{Eftir breytingu} \\ p = [0\ 1\ 4 \mid 3\ 4\ 5 \mid 0\ 1\ 8\ 9] & p = [0\ 1\ 9 \mid 3\ 4\ 5 \mid 0\ 1\ 8\ 9] \\ s = [5\ 12\ 18] & s = [10\ 12\ 18] \end{array}.$$

- Ég fór mjög losaralega í hvernig ætti að framkvæma seinni aðgerðina.

- Ég fór mjög losaralega í hvernig ætti að framkvæma seinni aðgerðina.
- Skoðum, sem dæmi, hverju eigi að skila fyrir `2 1 8`.

- Ég fór mjög losaralega í hvernig ætti að framkvæma seinni aðgerðina.
- Skoðum, sem dæmi, hverju eigi að skila fyrir `2 1 8`.
- Það er aðeins eitt hólf á milli staks `1` og staks `8`, hólf `1`.

- Ég fór mjög losaralega í hvernig ætti að framkvæma seinni aðgerðina.
- Skoðum, sem dæmi, hverju eigi að skila fyrir `2 1 8`.
- Það er aðeins eitt hólf á milli staks `1` og staks `8`, hólf `1`.
- „Afgangurinn“, eins og ég kallaði hann áðan, eru þau stök sem ekki eru í hólfi `1` en eru þó á bilinu frá `1` til `8`.

- Ég fór mjög losaralega í hvernig ætti að framkvæma seinni aðgerðina.
- Skoðum, sem dæmi, hverju eigi að skila fyrir `2 1 8`.
- Það er aðeins eitt hólf á milli staks `1` og staks `8`, hólf `1`.
- „Afgangurinn", eins og ég kallaði hann áðan, eru þau stök sem ekki eru í hólfi `1` en eru þó á bilinu frá `1` til `8`.
- Þetta eru stök `1`, `2`, `6`, `7` og `8` (samtals summan er þá 31).

- Ég fór mjög losaralega í hvernig ætti að framkvæma seinni aðgerðina.
- Skoðum, sem dæmi, hverju eigi að skila fyrir `2 1 8`.
- Það er aðeins eitt hólf á milli staks `1` og staks `8`, hólf `1`.
- „Afgangurinn", eins og ég kallaði hann áðan, eru þau stök sem ekki eru í hólfi `1` en eru þó á bilinu frá `1` til `8`.
- Þetta eru stök `1`, `2`, `6`, `7` og `8` (samtals summan er þá 31).
- Við erum því að leggja saman rauðu stökin á myndinni fyrir neðan,

$$\begin{aligned} p &= [0\ {\color{red}1}\ {\color{red}9}\ |\ {\color{blue}3}\ {\color{blue}4}\ {\color{blue}5}\ |\ {\color{red}0}\ {\color{red}1}\ {\color{red}8}\ 9] \\ s &= [10\ {\color{red}12}\ 18] \end{aligned}.$$

- En er þetta hraðar en frumstæða aðferðin sem við skoðuðum í upphafi?

- En er þetta hraðar en frumstæða aðferðin sem við skoðuðum í upphafi?
- Það fer að sjálfsögðu allt eftir því hversu stór hólf við veljum.

- En er þetta hraðar en frumstæða aðferðin sem við skoðuðum í upphafi?
- Það fer að sjálfsögðu allt eftir því hversu stór hólf við veljum.
- Ef fylkinu er skipt upp í n hólf er nokkuð ljóst að þessi aðferð er jafngild frumstæðu aðferðinni.

- En er þetta hraðar en frumstæða aðferðin sem við skoðuðum í upphafi?
- Það fer að sjálfsögðu allt eftir því hversu stór hólf við veljum.
- Ef fylkinu er skipt upp í n hólf er nokkuð ljóst að þessi aðferð er jafngild frumstæðu aðferðinni.
- Ef fylkinu er skipt upp í 1 hólf gildir það sama.

- En er þetta hraðar en frumstæða aðferðin sem við skoðuðum í upphafi?
- Það fer að sjálfsögðu allt eftir því hversu stór hólf við veljum.
- Ef fylkinu er skipt upp í n hólf er nokkuð ljóst að þessi aðferð er jafngild frumstæðu aðferðinni.
- Ef fylkinu er skipt upp í 1 hólf gildir það sama.
- Munið að við létum k tákna fjölda hólfa.

- En er þetta hraðar en frumstæða aðferðin sem við skoðuðum í upphafi?
- Það fer að sjálfsögðu allt eftir því hversu stór hólf við veljum.
- Ef fylkinu er skipt upp í n hólf er nokkuð ljóst að þessi aðferð er jafngild frumstæðu aðferðinni.
- Ef fylkinu er skipt upp í 1 hólf gildir það sama.
- Munið að við létum k tákna fjölda hólfa.
- Fyrri aðgerðin er ennþá $\mathcal{O}(\quad)$, en seinni aðgerðin verður $\mathcal{O}(\qquad\qquad)$, svo tímaflækjan er $\mathcal{O}(\qquad\qquad\qquad)$.

- En er þetta hraðar en frumstæða aðferðin sem við skoðuðum í upphafi?
- Það fer að sjálfsögðu allt eftir því hversu stór hólf við veljum.
- Ef fylkinu er skipt upp í n hólf er nokkuð ljóst að þessi aðferð er jafngild frumstæðu aðferðinni.
- Ef fylkinu er skipt upp í 1 hólf gildir það sama.
- Munið að við létum k tákna fjölda hólfa.
- Fyrri aðgerðin er ennþá $\mathcal{O}(1)$, en seinni aðgerðin verður $\mathcal{O}(\qquad\qquad)$, svo tímaflækjan er $\mathcal{O}(\qquad\qquad\qquad)$.

- En er þetta hraðar en frumstæða aðferðin sem við skoðuðum í upphafi?
- Það fer að sjálfsögðu allt eftir því hversu stór hólf við veljum.
- Ef fylkinu er skipt upp í n hólf er nokkuð ljóst að þessi aðferð er jafngild frumstæðu aðferðinni.
- Ef fylkinu er skipt upp í 1 hólf gildir það sama.
- Munið að við látum k tákna fjölda hólfa.
- Fyrri aðgerðin er ennþá $\mathcal{O}(\,1\,)$, en seinni aðgerðin verður $\mathcal{O}(n/k + k)$, svo tímaflækjan er $\mathcal{O}(\qquad\qquad)$.

- En er þetta hraðar en frumstæða aðferðin sem við skoðuðum í upphafi?
- Það fer að sjálfsögðu allt eftir því hversu stór hólf við veljum.
- Ef fylkinu er skipt upp í n hólf er nokkuð ljóst að þessi aðferð er jafngild frumstæðu aðferðinni.
- Ef fylkinu er skipt upp í 1 hólf gildir það sama.
- Munið að við létum k tákna fjölda hólfa.
- Fyrri aðgerðin er ennþá $\mathcal{O}(1)$, en seinni aðgerðin verður $\mathcal{O}(n/k + k)$, svo tímaflækjan er $\mathcal{O}(qn/k + qk)$.

Skynsamlegt val á k

- Þar sem að fyrri aðgerðin er ekki háð skiptingunni þá nægir að lágmarka $\frac{n}{k} + k$.

Skynsamlegt val á k

- Þar sem að fyrri aðgerðin er ekki háð skiptingunni þá nægir að lágmarka $\frac{n}{k} + k$.
- Látum $f(k) = \frac{n}{k} + k$.

Skynsamlegt val á k

- Þar sem að fyrri aðgerðin er ekki háð skiptingunni þá nægir að lágmarka $\frac{n}{k} + k$.
- Látum $f(k) = \frac{n}{k} + k$.
- Við höfum $f'(k) = -\frac{n}{k^2} + 1$.

Skynsamlegt val á k

- Þar sem að fyrri aðgerðin er ekki háð skiptingunni þá nægir að lágmarka $\frac{n}{k} + k$.
- Látum $f(k) = \frac{n}{k} + k$.
- Við höfum $f'(k) = -\frac{n}{k^2} + 1$.
- Útgildispunktar fást í

Skynsamlegt val á k

- Þar sem að fyrri aðgerðin er ekki háð skiptingunni þá nægir að lágmarka $\frac{n}{k} + k$.
- Látum $f(k) = \frac{n}{k} + k$.
- Við höfum $f'(k) = -\frac{n}{k^2} + 1$.
- Útgildispunktar fást í

$$f'(k) = 0$$

Skynsamlegt val á k

- Þar sem að fyrri aðgerðin er ekki háð skiptingunni þá nægir að lágmarka $\frac{n}{k} + k$.
- Látum $f(k) = \frac{n}{k} + k$.
- Við höfum $f'(k) = -\frac{n}{k^2} + 1$.
- Útgildispunktar fást í

$$\begin{aligned} & f'(k) = 0 \\ \Rightarrow \quad & 1 - \frac{n}{k^2} = 0 \end{aligned}$$

Skynsamlegt val á k

- Þar sem að fyrri aðgerðin er ekki háð skiptingunni þá nægir að lágmarka $\frac{n}{k} + k$.
- Látum $f(k) = \frac{n}{k} + k$.
- Við höfum $f'(k) = -\frac{n}{k^2} + 1$.
- Útgildispunktar fást í

$$\begin{aligned} & f'(k) = 0 \\ \Rightarrow \quad & 1 - \frac{n}{k^2} = 0 \\ \Rightarrow \quad & 1 = \frac{n}{k^2} \end{aligned}$$

Skynsamlegt val á k

- Þar sem að fyrri aðgerðin er ekki háð skiptingunni þá nægir að lágmarka $\frac{n}{k} + k$.
- Látum $f(k) = \frac{n}{k} + k$.
- Við höfum $f'(k) = -\frac{n}{k^2} + 1$.
- Útgildispunktar fást í

$$
\begin{aligned}
& f'(k) = 0 \\
\Rightarrow \quad & 1 - \frac{n}{k^2} = 0 \\
\Rightarrow \quad & 1 = \frac{n}{k^2} \\
\Rightarrow \quad & k^2 = n
\end{aligned}
$$

Skynsamlegt val á k

- Þar sem að fyrri aðgerðin er ekki háð skiptingunni þá nægir að lágmarka $\frac{n}{k} + k$.
- Látum $f(k) = \frac{n}{k} + k$.
- Við höfum $f'(k) = -\frac{n}{k^2} + 1$.
- Útgildispunktar fást í

$$\begin{aligned} & f'(k) = 0 \\ \Rightarrow \quad & 1 - \frac{n}{k^2} = 0 \\ \Rightarrow \quad & 1 = \frac{n}{k^2} \\ \Rightarrow \quad & k^2 = n \\ \Rightarrow \quad & k = \sqrt{n}. \end{aligned}$$

Skynsamlegt val á k

- Þar sem að fyrri aðgerðin er ekki háð skiptingunni þá nægir að lágmarka $\frac{n}{k} + k$.
- Látum $f(k) = \frac{n}{k} + k$.
- Við höfum $f'(k) = -\frac{n}{k^2} + 1$.
- Útgildispunktar fást í

$$\begin{aligned} & f'(k) = 0 \\ \Rightarrow \quad & 1 - \frac{n}{k^2} = 0 \\ \Rightarrow \quad & 1 = \frac{n}{k^2} \\ \Rightarrow \quad & k^2 = n \\ \Rightarrow \quad & k = \sqrt{n}. \end{aligned}$$

- Nú þarf bara að ganga úr skugga um að þessi skipting sé betri en línuleg.

- Ef við veljum $k = \sqrt{n}$ þá er tímaflækja seinni aðgerðarinnar

$$\mathcal{O}\left(\frac{n}{\sqrt{n}} + \sqrt{n}\right) = \mathcal{O}(\sqrt{n} + \sqrt{n}) = \mathcal{O}(\sqrt{n}).$$

- Ef við veljum $k = \sqrt{n}$ þá er tímaflækja seinni aðgerðarinnar
$$\mathcal{O}\left(\frac{n}{\sqrt{n}} + \sqrt{n}\right) = \mathcal{O}(\sqrt{n} + \sqrt{n}) = \mathcal{O}(\sqrt{n}).$$
- Því er tímaflækjan á lausninni $\mathcal{O}(\qquad)$.

- Ef við veljum $k = \sqrt{n}$ þá er tímaflækja seinni aðgerðarinnar

$$\mathcal{O}\left(\frac{n}{\sqrt{n}} + \sqrt{n}\right) = \mathcal{O}(\sqrt{n} + \sqrt{n}) = \mathcal{O}(\sqrt{n}).$$

- Því er tímaflækjan á lausninni $\mathcal{O}(q\sqrt{n})$.

- Ef við veljum $k = \sqrt{n}$ þá er tímaflækja seinni aðgerðarinnar
$$\mathcal{O}\left(\frac{n}{\sqrt{n}} + \sqrt{n}\right) = \mathcal{O}(\sqrt{n} + \sqrt{n}) = \mathcal{O}(\sqrt{n}).$$
- Því er tímaflækjan á lausninni $\mathcal{O}(q\sqrt{n})$.
- Svo þessi aðferð er betri en sú frumstæða, ef við skiptum í $\sqrt{n}$ hólf.

- Ef við veljum $k = \sqrt{n}$ þá er tímaflækja seinni aðgerðarinnar
$$\mathcal{O}\left(\frac{n}{\sqrt{n}} + \sqrt{n}\right) = \mathcal{O}(\sqrt{n} + \sqrt{n}) = \mathcal{O}(\sqrt{n}).$$
- Því er tímaflækjan á lausninni $\mathcal{O}(q\sqrt{n})$.
- Svo þessi aðferð er betri en sú frumstæða, ef við skiptum í $\sqrt{n}$ hólf.
- Við köllum það *rótarþáttun* (e. *squareroot decomposition*) þegar við skiptum upp í $\sqrt{n}$ hólf.

```c
#define MAXN 1000000
int a[MAXN], s[MAXN], n, e;

void update(int x, int y)
{
    s[x/e] += y;
    a[x] += y;
}

int query(int x, int y)
{
    int r = 0;
    while (x%e != 0 && x < y) r += a[x++];
    if (x == y) return r;
    while (y%e != 0) r += a[--y];
    while (x < y) r += s[x/e], x += e;
    return r;
}

int init(int n)
{
    int i, r = 0;
    while (r*r < n) r++;
    for (i = 0; i < r; i++) s[i] = 0;
    return r;
}
```

Lygnar uppfærlsur

- Við getum einnig framkvæmt lygnar uppfærlsur þegar við notum rótarþáttun (líkt og með biltré).

Lygnar uppfærlsur

- Við getum einnig framkvæmt lygnar uppfærlsur þegar við notum rótarþáttun (líkt og með biltré).
- Við uppfærum þá beint þau gildi sem eru í sömu hólfum og endarpunktar bilsins sem við uppfærum yfir.

Lygnar uppfærlsur

- Við getum einnig framkvæmt lygnar uppfærlsur þegar við notum rótarþáttun (líkt og með biltré).
- Við uppfærum þá beint þau gildi sem eru í sömu hólfum og endarpunktar bilsins sem við uppfærum yfir.
- Við framkvæmum svo lygna uppfærslu á þau hólf sem liggja þar á milli.

```c
void prop(int x)
{
    int i;
    s[x] += o[x]*e;
    for (i = 0; i < e; i++) a[x*e + i] += o[x];
    o[x] = 0;
}

int query(int x, int y)
{
    prop(x/e), prop((y - 1)/e);
    int r = 0;
    while (x%e != 0 && x < y) r += a[x++];
    if (x == y) return r;
    while (y%e != 0) r += a[--y];
    while (x < y) r += s[x/e] + o[x/e]*e, x += e;
    return r;
}

void update(int x, int y, int z)
{
    prop(x/e), prop((y - 1)/e);
    while (x%e != 0 && x < y) a[x] += z, s[x++/e] += z;
    if (x == y) return;
    while (y%e != 0) a[--y] += z, s[y/e] += z;
    while (x < y) o[x/e] += z, x += e;
}

int init(int n)
{
    int i, r = 0;
    while (r*r < n) r++;
    for (i = 0; i < r; i++) o[i] = s[i] = 0;
    return r;
}
```