Nálægustu punktar í plani

Bergur Snorrason

March 25, 2024

- Gefnir eru n punktar í plani.

- Gefnir eru n punktar í plani.
- Hvaða tveir punktar hafa minnstu fjarlægð sín á milli?

- Gefnir eru n punktar í plani.
- Hvaða tveir punktar hafa minnstu fjarlægð sín á milli?
- Við getum leyst þetta með tæmandi leit í $\mathcal{O}(\quad)$.

- Gefnir eru n punktar í plani.
- Hvaða tveir punktar hafa minnstu fjarlægð sín á milli?
- Við getum leyst þetta með tæmandi leit í $\mathcal{O}(n^2)$.

- Gefnir eru n punktar í plani.
- Hvaða tveir punktar hafa minnstu fjarlægð sín á milli?
- Við getum leyst þetta með tæmandi leit í $\mathcal{O}(n^2)$.
- Við skoðum einfaldlega öll pör punkta.

- Gefnir eru n punktar í plani.
- Hvaða tveir punktar hafa minnstu fjarlægð sín á milli?
- Við getum leyst þetta með tæmandi leit í $\mathcal{O}(n^2)$.
- Við skoðum einfaldlega öll pör punkta.
- Prófum að bæta þetta með því að deila og drottna.

- Röðum punktunum eftir x-hniti og skiptum í helminga.

- Röðum punktunum eftir x-hniti og skiptum í helminga.
- Látum x_0 vera þannig að hann liggi á milli x-hnita helminganna.

- Röðum punktunum eftir x-hniti og skiptum í helminga.
- Látum x_0 vera þannig að hann liggi á milli x-hnita helminganna.
- Leysum svo endurkvæmt fyrir hvorn helming fyrir sig.

- Röðum punktunum eftir x-hniti og skiptum í helminga.
- Látum x_0 vera þannig að hann liggi á milli x-hnita helminganna.
- Leysum svo endurkvæmt fyrir hvorn helming fyrir sig.
- Við þurfum nú að athuga hvort eitthvert par á milli helminganna sé betra en bestu pörin í hvorum helmingnum.

- Röðum punktunum eftir x-hniti og skiptum í helminga.
- Látum x_0 vera þannig að hann liggi á milli x-hnita helminganna.
- Leysum svo endurkvæmt fyrir hvorn helming fyrir sig.
- Við þurfum nú að athuga hvort eitthvert par á milli helminganna sé betra en bestu pörin í hvorum helmingnum.
- Það er of hægt að skoða öll pörin sem liggja á milli, þá verður tímaflækjan $\mathcal{O}(n^2)$.

- Röðum punktunum eftir x-hniti og skiptum í helminga.
- Látum x_0 vera þannig að hann liggi á milli x-hnita helminganna.
- Leysum svo endurkvæmt fyrir hvorn helming fyrir sig.
- Við þurfum nú að athuga hvort eitthvert par á milli helminganna sé betra en bestu pörin í hvorum helmingnum.
- Það er of hægt að skoða öll pörin sem liggja á milli, þá verður tímaflækjan $\mathcal{O}(n^2)$.
- Látum d vera minnstu fjarlægðina sem fannst í hvorum helmingnum fyrir sig.

- Röðum punktunum eftir x-hniti og skiptum í helminga.
- Látum x_0 vera þannig að hann liggi á milli x-hnita helminganna.
- Leysum svo endurkvæmt fyrir hvorn helming fyrir sig.
- Við þurfum nú að athuga hvort eitthvert par á milli helminganna sé betra en bestu pörin í hvorum helmingnum.
- Það er of hægt að skoða öll pörin sem liggja á milli, þá verður tímaflækjan $\mathcal{O}(n^2)$.
- Látum d vera minnstu fjarlægðina sem fannst í hvorum helmingnum fyrir sig.
- Við getum þá hunsað þá punkta sem hafa x-hnit utan bilsins $[x_0 - d, x_0 + d]$.

- Röðum punktunum eftir x-hniti og skiptum í helminga.
- Látum x_0 vera þannig að hann liggi á milli x-hnita helminganna.
- Leysum svo endurkvæmt fyrir hvorn helming fyrir sig.
- Við þurfum nú að athuga hvort eitthvert par á milli helminganna sé betra en bestu pörin í hvorum helmingnum.
- Það er of hægt að skoða öll pörin sem liggja á milli, þá verður tímaflækjan $\mathcal{O}(n^2)$.
- Látum d vera minnstu fjarlægðina sem fannst í hvorum helmingnum fyrir sig.
- Við getum þá hunsað þá punkta sem hafa x-hnit utan bilsins $[x_0 - d, x_0 + d]$.
- Röðum afgangnum eftir y-hniti.

- Röðum punktunum eftir x-hniti og skiptum í helminga.
- Látum x_0 vera þannig að hann liggi á milli x-hnita helminganna.
- Leysum svo endurkvæmt fyrir hvorn helming fyrir sig.
- Við þurfum nú að athuga hvort eitthvert par á milli helminganna sé betra en bestu pörin í hvorum helmingnum.
- Það er of hægt að skoða öll pörin sem liggja á milli, þá verður tímaflækjan $\mathcal{O}(n^2)$.
- Látum d vera minnstu fjarlægðina sem fannst í hvorum helmingnum fyrir sig.
- Við getum þá hunsað þá punkta sem hafa x-hnit utan bilsins $[x_0 - d, x_0 + d]$.
- Röðum afgangnum eftir y-hniti.
- Svo kemur trikkið.

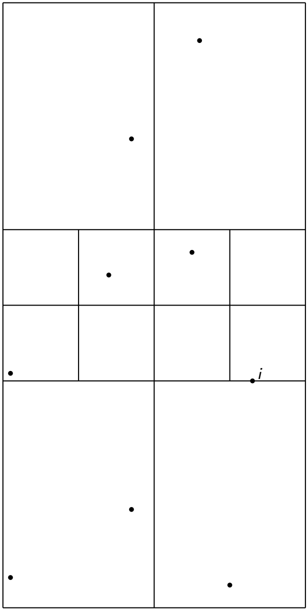
- Röðum punktunum eftir x-hniti og skiptum í helminga.
- Látum x_0 vera þannig að hann liggi á milli x-hnita helminganna.
- Leysum svo endurkvæmt fyrir hvorn helming fyrir sig.
- Við þurfum nú að athuga hvort eitthvert par á milli helminganna sé betra en bestu pörin í hvorum helmingnum.
- Það er of hægt að skoða öll pörin sem liggja á milli, þá verður tímaflækjan $\mathcal{O}(n^2)$.
- Látum d vera minnstu fjarlægðina sem fannst í hvorum helmingnum fyrir sig.
- Við getum þá hunsað þá punkta sem hafa x-hnit utan bilsins $[x_0 - d, x_0 + d]$.
- Röðum afgangnum eftir y-hniti.
- Svo kemur trikkið.
- Okkur nægir, fyrir hvern punkt, að skoða fastann fjölda af næstu punktum.

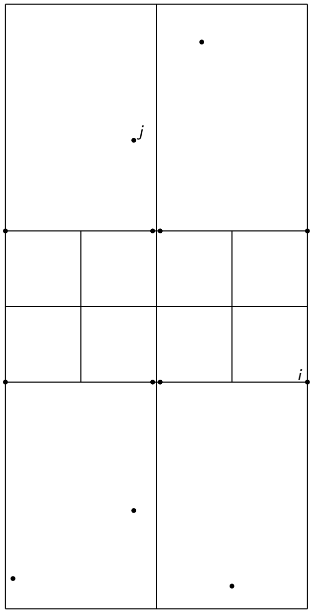
- Skiptum svæðinu fyrir ofan punktinn x_i í átta ferninga, hver með hliðarlengdir $d/2$.

- Skiptum svæðinu fyrir ofan punktinn x_i í átta ferninga, hver með hliðarlengdir $d/2$.
- Ef fjarlægðin milli allra punktana í hvorum helming er ekki minni en d þá getur mest einn punktur verið í hverjum ferningi (þar með talið er x_i).

- Skiptum svæðinu fyrir ofan punktinn x_i í átta ferninga, hver með hliðarlengdir $d/2$.
- Ef fjarlægðin milli allra punktana í hvorum helming er ekki minni en d þá getur mest einn punktur verið í hverjum ferningi (þar með talið er x_i).
- Allir punktar utan þessa svæðis eru meira en d fjarlægð frá i-ta punktinum, svo við þurfum ekki að skoða þá.

- Skiptum svæðinu fyrir ofan punktinn x_i í átta ferninga, hver með hliðarlengdir $d/2$.
- Ef fjarlægðin milli allra punktana í hvorum helming er ekki minni en d þá getur mest einn punktur verið í hverjum ferningi (þar með talið er x_i).
- Allir punktar utan þessa svæðis eru meira en d fjarlægð frá i-ta punktinum, svo við þurfum ekki að skoða þá.
- Svo við þurfum bara að skoða fjarlægðina frá x_i í x_j þegar $j - i \leq 7$.


i


j
i

```c
double closest_pair_r(pt *a, pt *b, int n, pt *r1, pt *r2)
{
    if (n < 2) return 1e16;
    int m = n/2, i, j, k = 0;
    pt r3, r4;
    double p = closest_pair_r(a, b, m, r1, r2);
    double d = closest_pair_r(a + m + 1, b + m + 1, n - m - 1, &r3, &r4);
    if (d < p) p = d, *r1 = r3, *r2 = r4;
    for (i = 0; i < n; i++) if (fabs(creal(a[i] - a[m])) < p) b[k++] = a[i];
    qsort(b, k, sizeof *b, cmpy);
    for (i = 0; i < k; i++)
        for (j = i + 1; cimag(b[j] - b[i]) < p && j < k; j++)
            if (cabs(b[i] - b[j]) < p)
                p = cabs(b[i] - b[j]), *r1 = b[i], *r2 = b[j];
    return p;
}

double closest_pair(pt* a, int n, pt* r1, pt* r2)
{
    pt b[n];
    qsort(a, n, sizeof *a, cmpx);
    return closest_pair_r(a, b, n, r1, r2);
}
```

- Hvert endurkvæmt kall er $\mathcal{O}($ $)$.

- Hvert endurkvæmt kall er $\mathcal{O}(n \log n)$.

- Hvert endurkvæmt kall er $\mathcal{O}(n \log n)$.
- Svo tímaflækjan á þessari útfærslu er $\mathcal{O}(\qquad)$, sem er bæting.

- Hvert endurkvæmt kall er $\mathcal{O}(n \log n)$.
- Svo tímaflækjan á þessari útfærslu er $\mathcal{O}(n \log^2 n)$, sem er bæting.

- Hvert endurkvæmt kall er $\mathcal{O}(n \log n)$.
- Svo tímaflækjan á þessari útfærslu er $\mathcal{O}(n \log^2 n)$, sem er bæting.
- Eina ástæðan fyrir því að hvert endurkvæmt kall sé $\mathcal{O}(n \log n)$ er að við röðum í hvert skipti.

- Hvert endurkvæmt kall er $\mathcal{O}(n \log n)$.
- Svo tímaflækjan á þessari útfærslu er $\mathcal{O}(n \log^2 n)$, sem er bæting.
- Eina ástæðan fyrir því að hvert endurkvæmt kall sé $\mathcal{O}(n \log n)$ er að við röðum í hvert skipti.
- Það er óþarfi því við erum alltaf að raða sömu punktunum aftur og aftur.

- Hvert endurkvæmt kall er $\mathcal{O}(n \log n)$.
- Svo tímaflækjan á þessari útfærslu er $\mathcal{O}(n \log^2 n)$, sem er bæting.
- Eina ástæðan fyrir því að hvert endurkvæmt kall sé $\mathcal{O}(n \log n)$ er að við röðum í hvert skipti.
- Það er óþarfi því við erum alltaf að raða sömu punktunum aftur og aftur.
- Það eru fleiri en ein leið til að þurfa ekki að raða oft.

- Hvert endurkvæmt kall er $\mathcal{O}(n \log n)$.
- Svo tímaflækjan á þessari útfærslu er $\mathcal{O}(n \log^2 n)$, sem er bæting.
- Eina ástæðan fyrir því að hvert endurkvæmt kall sé $\mathcal{O}(n \log n)$ er að við röðum í hvert skipti.
- Það er óþarfi því við erum alltaf að raða sömu punktunum aftur og aftur.
- Það eru fleiri en ein leið til að þurfa ekki að raða oft.
- Ein leið er að gera það sama og er gert í `mergesort`.

- Hvert endurkvæmt kall er $\mathcal{O}(n \log n)$.
- Svo tímaflækjan á þessari útfærslu er $\mathcal{O}(n \log^2 n)$, sem er bæting.
- Eina ástæðan fyrir því að hvert endurkvæmt kall sé $\mathcal{O}(n \log n)$ er að við röðum í hvert skipti.
- Það er óþarfi því við erum alltaf að raða sömu punktunum aftur og aftur.
- Það eru fleiri en ein leið til að þurfa ekki að raða oft.
- Ein leið er að gera það sama og er gert í `mergesort`.
- Þá erum við í raun að raða, en við gerum það í línulegum tíma (í hverju endurkvæma kalli).

```
void merge(pt* a, pt *b, int m, int r)
{
    int i = 0, j = m, c = 0;
    while (i < m && j < r) b[c++] = a[cimag(a[j] - a[i]) < 0.0 ? j++ : i++];
    while (i < m || j < r) b[c++] = a[j < r ? j++ : i++];
    for (i = 0; i < r; i++) a[i] = b[i];
}

double closest_pair_r(pt *a, pt *b, pt *c, int n, pt *r1, pt *r2)
{
    if (n < 2) { b[0] = a[0]; return 1e16; }
    int m = n/2, i, j, k = 0;
    pt r3, r4;
    double p = closest_pair_r(a, b, c, m, r1, r2), d;
    b[m] = a[m];
    d = closest_pair_r(a + m + 1, b + m + 1, c + m + 1, n - m - 1, &r3, &r4);
    if (d < p) p = d, *r1 = r3, *r2 = r4;
    merge(b, c, m, m + 1), merge(b, c, m + 1, n);
    for (i = 0; i < n; i++) if (fabs(creal(b[i] - a[m])) < p) c[k++] = b[i];
    for (i = 0; i < k; i++)
        for (j = i + 1; cimag(c[j] - c[i]) < p && j < k; j++)
            if (cabs(c[i] - c[j]) < p)
                p = cabs(c[i] - c[j]), *r1 = c[i], *r2 = c[j];
    return p;
}

double closest_pair(pt* a, int n, pt* r1, pt* r2)
{
    pt b[n], c[n];
    qsort(a, n, sizeof *a, cmpx);
    return closest_pair_r(a, b, c, n, r1, r2);
}
```

```c
double closest_pair(pt *a, int n, pt *x, pt *y)
{
    double p[n];
    int i, j, k, l, m, e, r;
    pt b[n], c[n], z[n], w[n];
    qsort(a, n, sizeof(a[0]), cmpx);
    for (i = 0; i < n; i++) b[i] = a[i], p[i] = 1e16;
    for (e = 1; e < n; e *= 2) for (l = 0; l + e < n; l += 2*e)
    {
        i = k = l, j = m = min(l + e, n), r = min(l + e*2, n);
        while (i < m && j < r)
            c[k++] = b[cimag(b[j] - b[i]) < 0.0 ? j++ : i++];
        while (i < m || j < r) c[k++] = b[j < r ? j++ : i++];
        for (i = l; i < r; i++) b[i] = c[i];
        if (p[m] < p[l]) p[l] = p[m], z[l] = z[m], w[l] = w[m];
        for (k = 0, i = l; i < r; i++) if (fabs(creal(b[i] - a[m])) < p[l])
            c[k++] = b[i];
        for (i = 0; i < k; i++)
            for (j = i + 1; cimag(c[j] - c[i]) < p[l] && j < k; j++)
                if (cabs(c[i] - c[j]) < p[l])
                    p[l] = cabs(c[i] - c[j]), z[l] = c[i], w[l] = c[j];
    }
    *x = z[0], *y = w[0];
    return p[0];
}
```

- Hvert endurkvæmt kall er nú $\mathcal{O}(\quad)$.

- Hvert endurkvæmt kall er nú $\mathcal{O}(n)$.

- Hvert endurkvæmt kall er nú $\mathcal{O}(n)$.
- Svo tímaflækjan á þessari útfærslu er $\mathcal{O}(\qquad)$.

- Hvert endurkvæmt kall er nú $\mathcal{O}(\ n\ )$.
- Svo tímaflækjan á þessari útfærslu er $\mathcal{O}(n \log n)$.

- Hvert endurkvæmt kall er nú $\mathcal{O}(\ n\ )$.
- Svo tímaflækjan á þessari útfærslu er $\mathcal{O}(n \log n)$.
- Þetta má síðan bæta með slembnum reikniritum, en verður annars ekki betra.