Gagnagrindur

Listar, forgangsbiðraðir og sammengisleit

Bergur Snorrason

8. febrúar 2021

Efnisyfirlit

• Listi er einföld gagnagrind notuð til að geyma gögn á skilvirkann hátt.

- Listi er einföld gagnagrind notuð til að geyma gögn á skilvirkann hátt.
- Við viljum getað:



3/1

Bergur Snorrason Gagnagrindur 8. febrúar 2021

- Listi er einföld gagnagrind notuð til að geyma gögn á skilvirkann hátt.
- Við viljum getað:
 - Bætt staki í listann.



3/1

Bergur Snorrason Gagnagrindur 8. febrúar 2021

- Listi er einföld gagnagrind notuð til að geyma gögn á skilvirkann hátt.
- Við viljum getað:
 - Bætt staki í listann.
 - Leitað að staki í listanum.

8. febrúar 2021

- Listi er einföld gagnagrind notuð til að geyma gögn á skilvirkann hátt.
- Við viljum getað:
 - Bætt staki í listann.
 - Leitað að staki í listanum.
 - Eytt staki úr listanum.

Eintengdir listar

• Einfaldasta (og sennilega algengasta) leiðin til að útfæra lista er með eintengdum lista (singly linked list).

4/1

Eintengdir listar

- Einfaldasta (og sennilega algengasta) leiðin til að útfæra lista er með eintengdum lista (singly linked list).
- Eintengdur listi samanstendur af nóðum.

Bergur Snorrason Gagnagrindur 8. febrúar 2021

Eintengdir listar

- Einfaldasta (og sennilega algengasta) leiðin til að útfæra lista er með eintengdum lista (singly linked list).
- Eintengdur listi samanstendur af nóðum.
- Hver nóða geymir stak í listanum og upplýsingar um staðsetningu (bendi á) næstu nóðu.

```
typedef struct snode
    int v;
    struct snode* n;
} node;
class Ilist
{
    public:
    node* h;
    node* t;
    llist()
        h = NULL; t = NULL;
    void add(int n)
    bool find (int n)
    bool del(int n)
};
```

```
void add(int n)
{
   node* a = new node;
   a->v = n;
   a->n = NULL;
   if (h == NULL)
   {
      h = a; t = a;
   }
   else
   {
      t->n = a;
      t = t->n;
   }
}
```

```
bool del(int n)
{
     if (h\rightarrow v == n)
         if (h == t)
              delete h; h = NULL; t = NULL; return true;
         node* g = h; h = h \rightarrow n; delete g; return true;
    node* gg = h; node* g = h \rightarrow n;
    while (g != NULL)
         if (g\rightarrow v = n)
              break;
         gg = g; g = g \rightarrow n;
    }
if (g == NULL)
         return false;
    gg->n = g->n;
    if (g == t)
         t = gg;
    delete g;
    return true;
```

• Gallar:

- Gallar:
 - Mjög hæg leit.

- Gallar:
 - Mjög hæg leit.
 - Býður ekki upp á handahófskennda vísun (e. random access).

- Gallar:
 - Mjög hæg leit.
 - Býður ekki upp á handahófskennda vísun (e. random access).
- Kostir:

- Gallar:
 - Mjög hæg leit.
 - Býður ekki upp á handahófskennda vísun (e. random access).
- Kostir:
 - Er hluti af C++ STL.

- Gallar:
 - Mjög hæg leit.
 - Býður ekki upp á handahófskennda vísun (e. random access).
- Kostir:
 - Er hluti af C++ STL.
 - Unnt er að skeyta saman listum í $\mathcal{O}(1)$, eitthvað sem er til dæmis ekki unnt með vector í C++.

Tímaflækjur

 $\bullet \ \ \mathsf{Innsetning} \colon \ \mathcal{O}(1).$

Tímaflækjur

- Innsetning: $\mathcal{O}(1)$.
- Leita að staki: $\mathcal{O}(n)$.

Tímaflækjur

- Innsetning: $\mathcal{O}(1)$.
- Leita að staki: $\mathcal{O}(n)$.
- Eyða taki: $\mathcal{O}(n)$.

Efnisyfirlit

 Forgangsbiðraðir (e. priority queues) eru þægilegar gagnagrindur að hafa.

12/1

- Forgangsbiðraðir (e. priority queues) eru þægilegar gagnagrindur að hafa.
- Við notum þær til að geyma röðuð gögn.

- Forgangsbiðraðir (e. priority queues) eru þægilegar gagnagrindur að hafa.
- Við notum þær til að geyma röðuð gögn.
- Við viljum getað:

- Forgangsbiðraðir (e. priority queues) eru þægilegar gagnagrindur að hafa.
- Við notum þær til að geyma röðuð gögn.
- Við viljum getað:
 - Bætt staki í biðröðina.

- Forgangsbiðraðir (e. priority queues) eru þægilegar gagnagrindur að hafa.
- Við notum þær til að geyma röðuð gögn.
- Við viljum getað:
 - Bætt staki í biðröðina.
 - Fundið besta stakið í biðröðinni.

- Forgangsbiðraðir (e. priority queues) eru þægilegar gagnagrindur að hafa.
- Við notum þær til að geyma röðuð gögn.
- Við viljum getað:
 - Bætt staki í biðröðina.
 - Fundið besta stakið í biðröðinni.
 - Eytt besta stakinu úr biðröðinni.

Hrúgur

 Algengasta leiðin til að útfæra forgangsbiðraðir er að nota hrúgu (e. heap)

Hrúgur

- Algengasta leiðin til að útfæra forgangsbiðraðir er að nota hrúgu (e. heap)
- Hrúga er tvíundartré sem uppfyllir hrúguskilyrðinu.

Hrúgur

- Algengasta leiðin til að útfæra forgangsbiðraðir er að nota hrúgu (e. heap)
- Hrúga er tvíundartré sem uppfyllir hrúguskilyrðinu.
- Hrúguskilyrðið: Sérhver nóða er betri en, eða jafn góð, börnum sínum.

Framsetning hrúga í tölvum

• Hrúgur eru nokkuð einfaldar í útfærslu.

14/1

Framsetning hrúga í tölvum

- Hrúgur eru nokkuð einfaldar í útfærslu.
- Hægt er að tákna *tréð* sem *fylki*.

Framsetning hrúga í tölvum

- Hrúgur eru nokkuð einfaldar í útfærslu.
- Hægt er að tákna tréð sem fylki.
- Helsta atriðið verður að útfæra hrúguskilyrðis lagara.

Framsetning hrúga í tölvum

- Hrúgur eru nokkuð einfaldar í útfærslu.
- Hægt er að tákna tréð sem fylki.
- Helsta atriðið verður að útfæra hrúguskilyrðis lagara.
- Þegar tvíundartré eru útfærð með fylkjum er yfirleitt notuð önnur af tveimur aðferðum.

• Sú fyrri:

- Sú fyrri:
 - Rótin er í staki 1 í fylkinu.

- Sú fyrri:
 - Rótin er í staki 1 í fylkinu.
 - ullet Vinstra barn staksins i er stak $2 \times i$.

- Sú fyrri:
 - Rótin er í staki 1 í fylkinu.
 - Vinstra barn staksins i er stak $2 \times i$.
 - Hægra barn staksins i er stak $2 \times i + 1$.

- Sú fyrri:
 - Rótin er í staki 1 í fylkinu.
 - Vinstra barn staksins i er stak $2 \times i$.
 - Hægra barn staksins i er stak $2 \times i + 1$.
 - Foreldri staks i er stakið $\left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor$.

- Sú fyrri:
 - Rótin er í staki 1 í fylkinu.
 - Vinstra barn staksins i er stak $2 \times i$.
 - Hægra barn staksins i er stak $2 \times i + 1$.
 - Foreldri staks i er stakið $\left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor$.
- Sú seinni:

- Sú fyrri:
 - Rótin er í staki 1 í fylkinu.
 - Vinstra barn staksins i er stak $2 \times i$.
 - Hægra barn staksins i er stak $2 \times i + 1$.
 - Foreldri staks i er stakið $\left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor$.
- Sú seinni:
 - Rótin er í staki 0 í fylkinu.

- Sú fyrri:
 - Rótin er í staki 1 í fylkinu.
 - Vinstra barn staksins i er stak $2 \times i$.
 - Hægra barn staksins i er stak $2 \times i + 1$.
 - Foreldri staks i er stakið $\left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor$.
- Sú seinni:
 - Rótin er í staki 0 í fylkinu.
 - Vinstra barn staksins i er stak $2 \times i + 1$.

- Sú fyrri:
 - Rótin er í staki 1 í fylkinu.
 - Vinstra barn staksins i er stak $2 \times i$.
 - Hægra barn staksins i er stak $2 \times i + 1$.
 - Foreldri staks i er stakið $\left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor$.
- Sú seinni:
 - Rótin er í staki 0 í fylkinu.
 - Vinstra barn staksins i er stak $2 \times i + 1$.
 - Hægra barn staksins i er stak $2 \times i + 2$.

- Sú fyrri:
 - Rótin er í staki 1 í fylkinu.
 - Vinstra barn staksins i er stak $2 \times i$.
 - Hægra barn staksins i er stak $2 \times i + 1$.
 - Foreldri staks i er stakið $\left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor$.
- Sú seinni:
 - Rótin er í staki 0 í fylkinu.
 - Vinstra barn staksins i er stak $2 \times i + 1$.
 - Hægra barn staksins i er stak $2 \times i + 2$.
 - ullet Foreldri staks i er stakið $\left| rac{i-1}{2}
 ight|$.



```
#define PARENT(i) ((i - 1)/2)
#define LEFT(i) ((i)*2+1)
#define RIGHT(i) ((i)*2 + 2)
int h[1000000];
int hn = 0;
void fix_down(int i)
void fix up(int i)
void pop()
int peek()
void push(int x)
```

```
void pop()
{
    hn--;
    h[0] = h[hn];
    fix_down(0);
}
int peek()
{
    return h[0];
}
void push(int x)
{
    h[hn++] = x;
    fix_up(hn - 1);
}
```

```
void fix_down(int i)
{
    int mx = i;
    if (RIGHT(i) < hn && h[mx] < h[RIGHT(i)])
    {
        mx = RIGHT(i);
    }
    if (LEFT(i) < hn && h[mx] < h[LEFT(i)])
    {
        mx = LEFT(i);
    }
    if (mx != i)
    {
        int s = h[i];
        h[i] = h[mx];
        h[mx] = s;
        fix_down(mx);
}
</pre>
```

```
void fix_up(int i)
{
    if (i == 0)
    {
        return;
    }
    else if (h[i] > h[PARENT(i)])
    {
        int s = h[i];
        h[i] = h[PARENT(i)];
        h[PARENT(i)] = s;
        fix_up(PARENT(i));
}
```

• Gallar:

- Gallar:
 - Styður ekki beint almenna leit.

- Gallar:
 - Styður ekki beint almenna leit.
 - Styður ekki beint samruna.

- Gallar:
 - Styður ekki beint almenna leit.
 - Styður ekki beint samruna.
- Kostir:

- Gallar:
 - Styður ekki beint almenna leit.
 - Styður ekki beint samruna.
- Kostir:
 - Er hluti af C++ STL.

- Gallar:
 - Styður ekki beint almenna leit.
 - Styður ekki beint samruna.
- Kostir:
 - Er hluti af C++ STL.
 - Heldur kvikt utan um röðun.

Tímaflækjur

• Finna besta stakið: $\mathcal{O}(1)$.

Tímaflækjur

- Finna besta stakið: $\mathcal{O}(1)$.
- Innsetning: $\mathcal{O}(\log n)$.

Tímaflækjur

- Finna besta stakið: $\mathcal{O}(1)$.
- Innsetning: $\mathcal{O}(\log n)$.
- Eyða besta stakinu: $\mathcal{O}(\log n)$.

Efnisyfirlit

 Sammengisleit (e. union-find) er öflug leið til að halda utan um jafngildisflokka tiltekna vensla, eða m.ö.o. halda utan um sundurlæg mengi.

- Sammengisleit (e. union-find) er öflug leið til að halda utan um jafngildisflokka tiltekna vensla, eða m.ö.o. halda utan um sundurlæg mengi.
- Við viljum getað:

- Sammengisleit (e. union-find) er öflug leið til að halda utan um jafngildisflokka tiltekna vensla, eða m.ö.o. halda utan um sundurlæg mengi.
- Við viljum getað:
 - Borið saman samhengisþætti mismunandi staka.

- Sammengisleit (e. union-find) er öflug leið til að halda utan um jafngildisflokka tiltekna vensla, eða m.ö.o. halda utan um sundurlæg mengi.
- Við viljum getað:
 - Borið saman samhengisþætti mismunandi staka.
 - Sameinað samhengisflokka.

- Sammengisleit (e. union-find) er öflug leið til að halda utan um jafngildisflokka tiltekna vensla, eða m.ö.o. halda utan um sundurlæg mengi.
- Við viljum getað:
 - Borið saman samhengisþætti mismunandi staka.
 - Sameinað samhengisflokka.
- Við tölum um aðgerðirnar find(x) og join(x, y).

• Tökum sem dæmi einstökungasafnið $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}.$

- \bullet Tökum sem dæmi einstökungasafnið $\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\}\}.$
- join(1, 3) gefur okkur $\{\{1,3\},\{2\},\{4\},\{5\}\}.$

- Tökum sem dæmi einstökungasafnið $\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\}\}.$
- join(1, 3) gefur okkur $\{\{1,3\},\{2\},\{4\},\{5\}\}.$
- join(2, 5) gefur okkur $\{\{1,3\},\{2,5\},\{4\}\}$.

- \bullet Tökum sem dæmi einstökungasafnið $\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\}\}.$
- join(1, 3) gefur okkur $\{\{1,3\},\{2\},\{4\},\{5\}\}.$
- join(2, 5) gefur okkur $\{\{1,3\},\{2,5\},\{4\}\}.$
- join(2, 4) gefur okkur $\{\{1,3\},\{2,4,5\}\}$.

- Tökum sem dæmi einstökungasafnið $\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\}\}.$
- join(1, 3) gefur okkur $\{\{1,3\},\{2\},\{4\},\{5\}\}.$
- join(2, 5) gefur okkur $\{\{1,3\},\{2,5\},\{4\}\}.$
- join(2, 4) gefur okkur $\{\{1,3\},\{2,4,5\}\}$.
- join(1, 4) gefur okkur $\{\{1,2,3,4,5\}\}$.



- Tökum sem dæmi einstökungasafnið $\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\}\}.$
- join(1, 3) gefur okkur $\{\{1,3\},\{2\},\{4\},\{5\}\}.$
- join(2, 5) gefur okkur $\{\{1,3\},\{2,5\},\{4\}\}.$
- join(2, 4) gefur okkur $\{\{1,3\},\{2,4,5\}\}$.
- join(1, 4) gefur okkur $\{\{1,2,3,4,5\}\}$.
- Á sérhverjum tímapunkti myndi find(x) skila einhverju staki sem er í sama mengi og x.

Dæmi

- \bullet Tökum sem dæmi einstökungasafnið $\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\}\}.$
- join(1, 3) gefur okkur $\{\{1,3\},\{2\},\{4\},\{5\}\}.$
- join(2, 5) gefur okkur $\{\{1,3\},\{2,5\},\{4\}\}.$
- join(2, 4) gefur okkur $\{\{1,3\},\{2,4,5\}\}$.
- join(1, 4) gefur okkur $\{\{1, 2, 3, 4, 5\}\}$.
- Á sérhverjum tímapunkti myndi find(x) skila einhverju staki sem er í sama mengi og x.
- Aðalatriðið er að find(x) skilar sama stakinu fyrir sérhvert stak í sérhverjum samhengisflokki.

- Tökum sem dæmi einstökungasafnið $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}.$
- join(1, 3) gefur okkur $\{\{1,3\},\{2\},\{4\},\{5\}\}$.
- join(2, 5) gefur okkur $\{\{1,3\},\{2,5\},\{4\}\}$.
- join(2, 4) gefur okkur $\{\{1,3\},\{2,4,5\}\}$.
- join(1, 4) gefur okkur $\{\{1, 2, 3, 4, 5\}\}$.
- Á sérhverjum tímapunkti myndi find(x) skila einhverju staki sem er í sama mengi og x.
- Aðalatriðið er að find(x) skilar sama stakinu fyrir sérhvert stak í sérhverjum samhengisflokki.
- Til dæmis, í þriðja punktinum myndi find(1) og find(3) alltaf skila sama stakinu.

• Gerum ráð fyrir að tölurnar sem við munum vinna með séu jákvæðar og minni en n.

- Gerum ráð fyrir að tölurnar sem við munum vinna með séu jákvæðar og minni en n.
- Við munum þá gefa okkur n staka fylki p, þar sem i-ta stakið í fylkinu er upphafstillt sem i.

- Gerum ráð fyrir að tölurnar sem við munum vinna með séu jákvæðar og minni en n.
- Við munum þá gefa okkur n staka fylki p, þar sem i-ta stakið í fylkinu er upphafstillt sem i.
- ullet Fylkið p mun nú geyma $\emph{foreldri}$ sérhvers stak.
- Foreldrin myndi keðjur.

- Gerum ráð fyrir að tölurnar sem við munum vinna með séu jákvæðar og minni en n.
- Við munum þá gefa okkur n staka fylki p, þar sem i-ta stakið í fylkinu er upphafstillt sem i.
- ullet Fylkið p mun nú geyma $\emph{foreldri}$ sérhvers stak.
- Foreldrin myndi keðjur.
- Sérhver keðja endar í einhverju staki, sem við munum kalla ráðherra jafngildisflokksins.

Mynd af keðjum

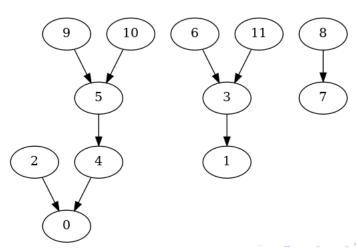
Keðjurnar sem fást með $\{\{0,2,4,5,9,10\},\{1,3,6,11\},\{7,8\}\}$ gætu til dæmis verið gefnar með p=[0,1,0,1,0,4,3,7,7,5,5,3].

26 / 1

Bergur Snorrason Gagnagrindur 8. febrúar 2021

Mynd af keðjum

Keðjurnar sem fást með $\{\{0,2,4,5,9,10\},\{1,3,6,11\},\{7,8\}\}$ gætu til dæmis verið gefnar með p=[0,1,0,1,0,4,3,7,7,5,5,3].



 Til að fá ráðherra flokks tiltekins staks er hægt að fara endurkvæmt upp keðjuna.

- Til að fá ráðherra flokks tiltekins staks er hægt að fara endurkvæmt upp keðjuna.
- Til að sameina flokka nægir að breyta foreldri ráðherra annars flokksins yfir í eitthvert stak hins flokksins (sér í lagi ráðherra þess).

- Til að fá ráðherra flokks tiltekins staks er hægt að fara endurkvæmt upp keðjuna.
- Til að sameina flokka nægir að breyta foreldri ráðherra annars flokksins yfir í eitthvert stak hins flokksins (sér í lagi ráðherra þess).
- Báðar þessar aðgerðir er auðvelt að útfæra.

Frumstæð sammengisleit

```
int p[MAX];
int find (int x)
    if (p[x] = x)
        return x;
    else
        return find(p[x]);
}
void join(int x, int y)
    p[find(x)] = find(y);
int main()
{
    int i:
    int n = MAX;
    for (i = 0; i < n; i++)
        p[i] = i;
```

• Við sjáum nú að tímaflækja find er línuleg í lengd keðjunnar, svo þar sem lengd keðjunnar getur verið, í versta falli, n þá er find $\mathcal{O}(n)$.

- Við sjáum nú að tímaflækja find er línuleg í lengd keðjunnar, svo þar sem lengd keðjunnar getur verið, í versta falli, n þá er find $\mathcal{O}(n)$.
- Fallið join gerir lítið annað en að kalla tvisvar á find svo það er líka $\mathcal{O}(n)$.

- Við sjáum nú að tímaflækja find er línuleg í lengd keðjunnar, svo þar sem lengd keðjunnar getur verið, í versta falli, n þá er find $\mathcal{O}(n)$.
- Fallið join gerir lítið annað en að kalla tvisvar á find svo það er líka $\mathcal{O}(n)$.
- Er samt ekki hægt að bæta þetta eitthvað?

- Við sjáum nú að tímaflækja find er línuleg í lengd keðjunnar, svo þar sem lengd keðjunnar getur verið, í versta falli, n þá er find $\mathcal{O}(n)$.
- Fallið join gerir lítið annað en að kalla tvisvar á find svo það er líka $\mathcal{O}(n)$.
- Er samt ekki hægt að bæta þetta eitthvað?
- Það er vissulega hægt!

Keðjuþjöppuð sammengisleit

 Eins og nafnið á glæruni gefur til kynna er hugmyndin að þjappa keðjunum saman í hvert skipti sem kallað er á find.

30 / 1

Keðjuþjöppuð sammengisleit

- Eins og nafnið á glæruni gefur til kynna er hugmyndin að þjappa keðjunum saman í hvert skipti sem kallað er á find.
- Petta er gert með því að setja p[x] sem ráðherra flokks x, í hverju skrefi endurkvæmninnar.

Dæmi um keðjuþjöppun

 $\bullet \ \, \mathsf{Gefum} \,\, \mathsf{okkur} \,\, p = [0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7].$

Bergur Snorrason Gagnagrindur 8. febrúar 2021 31/1

Dæmi um keðjuþjöppun

- $\bullet \ \ \mathsf{Gefum} \ \ \mathsf{okkur} \ p = [0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7].$
- Ljóst er að find(5) skilar 0.

Dæmi um keðjuþjöppun

- Gefum okkur p = [0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7].
- Ljóst er að find(5) skilar 0.
- Ef við notum frumstæða sammengisleit breytist p ekki neitt þegar kallað er á find en með keðjuþjappaðri sammengisleit þjappast keðjan frá og með 5 og því fæst p=[0,0,0,0,0,5,6,7].

Keðjuþjöppað sammengisleit

```
int p[MAX];
int find (int x)
    if (p[x] = x)
        return x;
    else
        p[x] = find(p[x]); //keðjuþjöppunin á sér stað í þessar línu
        return p[x];
void join(int x, int y)
{
   p[find(x)] = find(y);
int main()
    int i:
    int n = MAX;
    for (i = 0; i < n; i++)
        p[i] = i;
```

Tímaflækjur keðjuþjappaðar sammengisleitar

• Það er flóknara að lýsa tímaflækju keðjuþjappaðrar sammengisleitar.

Tímaflækjur keðjuþjappaðar sammengisleitar

- Það er flóknara að lýsa tímaflækju keðjuþjappaðrar sammengisleitar.
- \acute{A} heildina litið (e. amortized) er tímaflækjan er $\mathcal{O}(\alpha(n))$, þar sem α er andhverfa Ackermann fallsins.

Tímaflækjur keðjuþjappaðar sammengisleitar

- Það er flóknara að lýsa tímaflækju keðjuþjappaðrar sammengisleitar.
- \acute{A} heildina litið (e. amortized) er tímaflækjan er $\mathcal{O}(\alpha(n))$, þar sem α er andhverfa Ackermann fallsins.
- Fyrir þau n sem við fáumst við er $\alpha(n)$ nánast fast.

Efnisyfirlit

Forskot á sæluna

• Forgangsbiðraðir eru notaðar í reiknirit Dijkstra.

Forskot á sæluna

- Forgangsbiðraðir eru notaðar í reiknirit Dijkstra.
- Sammengisleit er notuð í reiknirit Kruskals.

Forskot á sæluna

- Forgangsbiðraðir eru notaðar í reiknirit Dijkstra.
- Sammengisleit er notuð í reiknirit Kruskals.
- Við munum nota hrúgur aftur í næstu viku.