

# Tæmandi leit

Bergur Snorrason

January 23, 2024

# Lausnaraðferðir

- ▶ Þegar við leysum dæmi í keppnisforritun notumst við oftast við eina af eftirfarandi aðferðum:
  - ▶ *Ad hoc*,
  - ▶ *Tæmandi leit* eða *ofbeldis aðferðin* (e. *complete search*, *brute force*),
  - ▶ *Gráðug reiknirit* (e. *greedy algorithms*),
  - ▶ *Deila og drottna* (e. *divide and conquer*),
  - ▶ *Kvik bestun* (e. *dynamic programming*).
- ▶ Í síðustu viku fjölluðum við um *Ad hoc* dæmi.
- ▶ Í þessari viku fjöllum við um *tæmandi leit* og *gráðug reiknirit*.

# Tæmandi leit

- ▶ Safn allra lausna tiltekis dæmis kallast *lausnarrúm* dæmisins.
- ▶ *Tæmandi leit* felur í sér að leita í gegnum allt lausnarrúmið að bestu lausninni.
- ▶ Takið eftir að lausnarrúmið inniheldur líka rangar lausnir.
- ▶ Tökum dæmi.

## Dæmi

- ▶ Gefinn er listi  $a$  af  $n$  mismunandi heiltölum á bilinu  $[0, m]$ .
- ▶ Hver þeirra er stærst?
- ▶ Til að nota tæmandi leit þurfum við að byrja á að ákvarða lausnarrúmið.
- ▶ Hér getum við einfaldlega valið heiltölurnar á bilinu  $[0, m]$ .
- ▶ Okkur nægir að ítra öfugt í gegnum heiltölurnar á bilinu  $[0, m]$  þangað til við lendum á tölu sem er í  $a$ .
- ▶ Við getum athugað hvort tiltekin tala sé í  $a$  með því að ítra í gegnum  $a$ , sem tekur  $\mathcal{O}(n)$  tíma.
- ▶ Þessi aðferð er því  $\mathcal{O}(n \cdot m)$ .

- ▶ Almennt fáum við að ef lausnarrúmið er af stærð  $S$  og við getum athugað hverja lausn í  $\mathcal{O}(T(k))$  þá er tæmandi leit  $\mathcal{O}(S \cdot T(k))$ .
- ▶ Gildin  $n!$  og  $2^n$  eru algengar stærðir á lausnarrúmum.
- ▶ Þar af leiðandi eru  $\mathcal{O}(n \cdot n!) = \mathcal{O}((n+1)!)$  og  $\mathcal{O}(n2^n)$  algengar tímaflækjur.
- ▶ Oft má á þægilegan hátt breyta slíkum lausnum í  $\mathcal{O}(n!)$  og  $\mathcal{O}(2^n)$ .

## Tæmandi leit, öll hlutmengi

- ▶ Dæmið hér á undan gæti leitt ykkur til að halda að tæmandi leit sé einföld.
- ▶ Svo er ekki alltaf.
- ▶ Tökum annað dæmi.
- ▶ Gefin er runa af  $n$  tölum. Hver er lengsta vaxandi hlutruna gefnu rununnar?
- ▶ Ef við viljum leysa þetta dæmi með tæmandi leit þá þurfum við að skoða sérhvert hlutmengi gefnu rununnar.

# Útúrdúr um hlutmengi

- ▶ Ef við erum með endanlegt mengi  $A$  af stærð  $n$  getum við númerað öll stökin með tölunum  $1, 2, \dots, n$ .
- ▶ Sérhvert hlutmengi einkennist af því hvort stak  $k$  sé í hlutmenginu eða ekki, fyrir öll  $k$  í  $\{1, 2, \dots, n\}$ .
- ▶ Við fáum því gagntæka samsvörun milli mengi allra hlutmengja  $A$  og mengisins  $\{0, 1\}^n$ .
- ▶ Svo fjöldi hlutmengja í  $A$  er  $2^n$ .

## Útúrdúr um bitaframsetingu talna

- ▶ Fyrir hlutmengi  $H$  í  $A$  er til ótvírætt ákvörðuð tala  $b$  sem hefur 1 í  $k$ -ta sæti bitaframsetningar sinnar þá og því aðeins að  $k$ -ta stak  $A$  sé í  $H$ .
- ▶ Þetta gefur okkur gagntæka samsvörun milli hlutmengja  $A$  og talnanna  $0, 1, \dots, 2^n - 1$ .
- ▶ Talan  $b$  er vanalega kölluð *bitakennir* eða *kennir* (e. *bitmask*, *mask*) hlutmengisins  $H$ .
- ▶ Sem dæmi, ef  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  og  $H = \{1, 3, 5, 6\}$  þá er  $b = 110101_2 = 53$ .
- ▶ Kennir tómamengisins er alltaf  $0 = 00 \dots 00_2$  og kennir  $A$  er  $2^n - 1 = 11 \dots 11_2$ .



- ▶ Þegar kemur að því að nota bitakenni í forritun notum við okkur eftirfarandi:

Kennir $k$ -ta einstökungs	<code>1 &lt;&lt; k</code>
Kennir fyllimengis kennis	<code>~A</code>
Kennir sammengis tveggja kenna	<code>A   B</code>
Kennir sniðmengis tveggja kenna	<code>A &amp; B</code>
Kennir samhverfs mismunar tveggja kenna	<code>A ^ B</code>
Kennir mismunar tveggja kenna	<code>A &amp; (~B)</code>

- ▶ Vegna forgangs aðgerða í flestum forritunarmálum er góður vani að nota nóg af svigum þegar unnið er með bitaaðgerðir.
- ▶ Til dæmis er `A & B == 0` jafngilt `A & (B == 0)` í `C/C++`, þó við viljum yfirleitt `(A & B) == 0`.
- ▶ Takið eftir að kennir fyllimengisins bætir mögulega við bitum utan þeirra sem við höfum áhuga því við erum í rauninni að taka fyllimengi með stærra óðal.
- ▶ Til að allt sé rétt þarf stundum að nota `(~A) & ((1 << n) - 1)`.

```
3 int einstokungur(int x) { return 1 << x; }
4 int fyllimengi(int k) { return ~k; }
5 int sammengi(int j, int k) { return j|k; }
6 int snidmengi(int j, int k) { return j&k; }
7 int samhverfur_mismunur(int j, int k) { return j^k; }
8 int mismunur(int j, int k) { return j&(~k); }
9 int inniheldur(int k, int x) { return k&(1 << x); }
```

## Lausn á dæminu

- ▶ Við getum nú leyst dæmið.
- ▶ Til að ítra í gegnum öll hlutmengi ítrum við í gegnum alla bitakenni mengisins.

# Lausn

```
1 #include <stdio.h>
2
3 int main()
4 {
5     int n, i, j;
6     scanf("%d", &n);
7     int a[n];
8     for (i = 0; i < n; i++) scanf("%d", &a[i]);
9
10    int mx = 0, mask;
11    for (i = 0; i < (1 << n); i++)
12    {
13        int s[n], c = 0;
14        for (j = 0; j < n; j++) if (((1 << j)&i) != 0) s[c++] = j;
15        for (j = 1; j < c; j++) if (a[s[j]] < a[s[j - 1]]) break;
16        if (j == c && c > mx) mx = c, mask = i;
17    }
18
19    printf("%d\n", mx);
20    for (i = 0; i < n; i++) if (((1 << i)&mask) != 0) printf("%d ", a[i]);
21    printf("\n");
22
23    return 0;
24 }
```

- ▶ Hér er lausnarrúmið af stærð  $2^n$  og við erum  $\mathcal{O}(n)$  tíma að ganga úr skugga um hvort tiltekin lausn sé í raun rétt, svo reikniritið er  $\mathcal{O}(n \cdot 2^n)$ .

## Tæmandi leit, allar umraðanir

- ▶ Við höfum oft áhuga á að ítra í gegnum allar umraðanir á lista talna.
- ▶ Munum að, ef við höfum  $n$  ólíkar tölur þá getum við raðað þeim á  $n! = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$  vegu.
- ▶ Tökum mjög einfalt dæmi:
- ▶ Gefið er  $n$ . Prentið allar umraðanir á  $1, 2, \dots, n$  í vaxandi stafrófsröð, hverja á sinni línu.
- ▶ Við getum notað okkur innbyggða fallið `next_permutation(...)` í C++.

```
1 #include <bits/stdc++.h>
2 using namespace std;
3
4 int main()
5 {
6     int n, i;
7     cin >> n;
8     vector<int> p;
9     for (i = 0; i < n; i++) p.push_back(i + 1);
10    do {
11        for (i = 0; i < n; i++) cout << p[i] << ' ';
12        cout << '\n';
13    } while (next_permutation(p.begin(), p.end()));
14    return 0;
15 }
```

- ▶ Mikilvægt er að  $p$  sé vaxandi í upphafi því lykkjan hættir þegar hún lendir á síðustu umröðunni, í stafrófsröð.
- ▶ Þessi lausn er  $\mathcal{O}((n + 1)!)$ .



- ▶ Tökum nú annað dæmi.
- ▶ Gefnar eru  $n$  mismunandi heiltölur.
- ▶ Raðið þeim.
- ▶ Þetta má að sjálfsögðu leysa með innbyggðum röðunarföllum, en við viljum leysa þetta með tæmandi leit.
- ▶ Við getum notað sama forrit og áðan, með smávægilegum breytingum.

```

1 #include <bits/stdc++.h>
2 using namespace std;
3
4 int main()
5 {
6     int x, n, i;
7     cin >> n;
8     vector<int> p, a, b(n);
9     for (i = 0; i < n; i++)
10     {
11         cin >> x;
12         a.push_back(x);
13         p.push_back(i);
14     }
15     do {
16         for (i = 0; i < n; i++) b[i] = a[p[i]];
17         for (i = 0; i < n - 1; i++) if (b[i] > b[i + 1]) break;
18         if (i == n - 1) break;
19     } while (next_permutation(p.begin(), p.end()));
20     for (i = 0; i < n; i++) cout << a[p[i]] << ' ';
21     cout << endl;
22     return 0;
23 }

```

- ▶ Tímaflækjan á þessari lausn er  $\mathcal{O}((n+1)!)$ .
- ▶ Við getum bætt hana.
- ▶ Byrjum á að leysa dæmið án þess að nota `next_permutation(...)`.
- ▶ Við getum gert það endurkvæmt.
- ▶ Í hverju skrefi í endurkvæmninni veljum við stak sem við höfum ekki valið áður, setjum það á hlaða og höldum áfram.

```

1 #include <stdio.h>
2 #define SWAP(E, F) { int swap = (E); (E) = (F); (F) = swap; }
3 int perm(int* a, int n, int x)
4 {
5     int i;
6     if (x == n)
7     {
8         for (i = 0; i < n - 1; i++) if (a[i] > a[i + 1]) break;
9         return i < n - 1 ? 0 : 1;
10    }
11    for (i = x; i < n; i++)
12    {
13        SWAP(a[x], a[i]);
14        if (perm(a, n, x + 1)) return 1;
15        SWAP(a[x], a[i]);
16    }
17    return 0;
18 }
19
20 int main()
21 {
22     int i, n;
23     scanf("%d", &n);
24     int a[n];
25     for (i = 0; i < n; i++) scanf("%d", &a[i]);
26     perm(a, n, 0);
27     for (i = 0; i < n; i++) printf("%d ", a[i]);
28     printf("\n");
29     return 0;
30 }

```

- ▶ Gerum ráð fyrir að  $n = 5$  og gefnu tölurnar séu `3 2 5 4 1`.
- ▶ Við byrjum með tómann hlaða, táknum hann með `x x x x x`.
- ▶ Við bætum fyrst við `3` og fáum `3 x x x x`.
- ▶ Síðan bætum við `2` við og fáum `3 2 x x x`.
- ▶ Næst prófum við allar umraðanir `5 4 1` þar fyrir aftan.
- ▶ En við sjáum strax að það mun aldrei verða raðað, því  $3 > 2$ .
- ▶ Svo við getum sleppt því að skoða dýpra.

```

1 #include <stdio.h>
2 #define SWAP(E, F) { int swap = (E); (E) = (F); (F) = swap; }
3 int perm(int* a, int n, int x)
4 {
5     int i;
6     if (x == n) return 1;
7     for (i = x; i < n; i++) if (x == 0 || a[x - 1] <= a[i])
8     {
9         SWAP(a[x], a[i]);
10        if (perm(a, n, x + 1)) return 1;
11        SWAP(a[x], a[i]);
12    }
13    return 0;
14 }
15
16 int main()
17 {
18     int i, n;
19     scanf("%d", &n);
20     int a[n];
21     for (i = 0; i < n; i++) scanf("%d", &a[i]);
22     perm(a, n, 0);
23     for (i = 0; i < n; i++) printf("%d ", a[i]);
24     printf("\n");
25     return 0;
26 }

```

- ▶ Tímaflækjan eftir þessa breytingu er ekki augljós.
- ▶ Munið að tölurnar eru allar ólíkar.
- ▶ Takið eftir að sérhvert hlutmengi mun koma fyrir í hlaðanum okkar.
- ▶ Hlaðinn er einnig alltaf raðaður, svo hann inniheldur aldrei sama mengið tvisvar.
- ▶ Svo tímaflækjan er  $\mathcal{O}(2^n)$ .

- ▶ Þegar við ítrum yfir öll hlutmengi endum við oft með tímaflækjuna  $\mathcal{O}(2^n)$  eða  $\mathcal{O}(n \cdot 2^n)$ .
- ▶ Svo slíkar lausnir virka fyrir  $n \sim 20$  en verða of hægar fyrir  $n \geq 30$ .
- ▶ Það er þó oft hægt að beita nokkuð almennri aðferð til að bæta tímaflækjuna.
- ▶ Tökum lýsandi dæmi.



- ▶ Okkur eru gefnar  $n$  heiltölur ásamt heiltölunum  $m < n$  og  $t$ .
- ▶ Á hversu marga vegu má velja nákvæmlega  $m$  af tölunum þannig að summa þeirra sé nákvæmlega  $t$ ?
- ▶ Ef við beitum hefðbundinni tæmandi leit fáum við tímaflækjuna  $\mathcal{O}(n \cdot 2^n)$ .
- ▶ En hvað ef  $n = 30$ ?
- ▶ Þá er hefðbundin tæmandi leit of hæg.

- ▶ Skiptum tölunum í tvennt og reiknum summur allra hlutmengja þeirra og geymum eftir því hversu margar tölur eru í hlutmenginu.
- ▶ Ítrúm síðan í gegnum öll hlutmengin í annari skiptingunni og notum helmingunarleit til að telja hversu mörg hlutmengi í hinni skiptingunni hafa réttan fjölda talna og rétta summu.

```

14 void bf(int *a, int n, int *u)
15 {
16     int i, j;
17     for (i = 0; i < (1 << n); i++)
18     {
19         u[i] = 0;
20         for (j = 0; j < n; j++) if (i & (1 << j)) u[i] += a[j];
21     }
22 }
23
24 int bs(int *a, int t, int n)
25 {
26     int r = -1, s;
27     for (s = n; s >= 1; s /= 2) while (r + s < n && a[r + s] < t) r += s;
28     return r + 1;
29 }
30
31 int solve_internal(int *a, int *b, int n, int m, int x, int t)
32 {
33     int r = 0, i, j, z, u[1 << n], v[1 << m], e, l[m + 1], h[m + 1][1 << m];
34     for (i = z = 0; i < m + 1; i++) l[i] = 0;
35     bf(a, n, u), bf(b, m, v);
36     for (i = 0; i < (1 << m); z = __builtin_popcount(++i)) h[z][l[z]++] = v[i];
37     for (i = 0; i < m + 1; i++) qsort(h[i], l[i], sizeof *h[i], cmp);
38     for (i = z = 0; i < (1 << n); z = __builtin_popcount(++i))
39     {
40         if (x - z < 0 || x - z > m || t < u[i]) continue;
41         r += bs(h[x - z], t - u[i] + 1, l[x - z]);
42         r -= bs(h[x - z], t - u[i], l[x - z]);
43     }
44     return r;
45 }
46
47 int solve(int *a, int n, int x, int t)
48 {
49     return solve_internal(a, a + n/2, n/2, (n + 1)/2, x, t);
50 }

```

- ▶ Með þessari aðferð erum við aðeins að framkvæma tæmandi leit á helming listans, sem svarar til kvarðatrótsminnkunar á stærð lausnarrúmsins.
- ▶ Tæmandi leitin hefur tímaflækjuna  $\mathcal{O}(n \cdot 2^{n/2})$ .
- ▶ Sameining lausnanna hefur tímaflækjuna

$$\mathcal{O}(2^{n/2} \cdot \log 2^{n/2}) = \mathcal{O}(n \cdot 2^{n/2}).$$

- ▶ Heildartímaflækjan er því  $\mathcal{O}(n \cdot 2^{n/2})$ .

## Tæmandi leit, kostir og gallar

- ▶ Það eru ýmsir kostir við tæmandi leit.
- ▶ Til að mynda er lausnin sem reikniritin skila alltaf rétt (við sjáum seinna aðferðir þar sem það gildir ekki)
- ▶ Tæmandi leit á það til að vera auðveld í útfærslu (með smá æfingu).
- ▶ Á keppnum er tæmandi leit yfirleitt í léttu dæmunum, ef hún er í keppninni á annað borð.
- ▶ Keppnir innihalda frekar dæmi þar sem tæmandi leit er aðeins hluti af lausninni.

