

Talnafræði

Veldishafning

Bergur Snorrason

17. mars 2021

- ▶ Í talnafræðidæmum er algengt að skila eigi leif svars.

- ▶ Í talnafræðidæmum er algengt að skila eigi leif svars.
- ▶ Þetta er gert því leif er takmörkuð, en í talningarfræði er algengt að fá mjög stórar tölur.

- ▶ Í talnafræðidæmum er algengt að skila eigi leif svars.
- ▶ Þetta er gert því leif er takmörkuð, en í talningarfræði er algengt að fá mjög stórar tölur.
- ▶ Tökum dæmi.

Veldishafning

- ▶ Gefnar eru þrjár jákvæðar heiltölur x , n og m .

Veldishafning

- ▶ Gefnar eru þrjár jákvæðar heiltölur x , n og m .
- ▶ Finnið $x^n \bmod m$.

- ▶ Þetta er lítið mál að gera í $\mathcal{O}(n)$ tíma.

- Petta er lítið mál að gera í $\mathcal{O}(n)$ tíma.

```
4 int main()
5 {
6     ll x, n, m, r = 1;
7     scanf("%lld%lld%lld", &x, &n, &m);
8     while (n != 0) r = (r*x)%m;
9     printf("%lld\n", r);
10    return 0;
11 }
```


- Þetta er lítið mál að gera í $\mathcal{O}(n)$ tíma.

```
4 int main()
5 {
6     ll x, n, m, r = 1;
7     scanf("%lld%lld%lld", &x, &n, &m);
8     while (n-- != 0) r = (r*x)%m;
9     printf("%lld\n", r);
10    return 0;
11 }
```

- Við getum þó leyst þetta hraðar.

- ▶ Þetta er lítið mál að gera í $\mathcal{O}(n)$ tíma.

```
4 int main()
5 {
6     ll x, n, m, r = 1;
7     scanf("%lld%lld%lld", &x, &n, &m);
8     while (n-- != 0) r = (r*x)%m;
9     printf("%lld\n", r);
10    return 0;
11 }
```

- ▶ Við getum þó leyst þetta hraðar.
- ▶ Sú lausn byggir á að deila og drottna.

- ▶ Þetta er lítið mál að gera í $\mathcal{O}(n)$ tíma.

```
4 int main()
5 {
6     ll x, n, m, r = 1;
7     scanf("%lld%lld%lld", &x, &n, &m);
8     while (n != 0) r = (r*x)%m;
9     printf("%lld\n", r);
10    return 0;
11 }
```

- ▶ Við getum þó leyst þetta hraðar.
- ▶ Sú lausn byggir á að deila og drottna.
- ▶ Takið eftir að $x^{2n} = x^n \cdot x^n$ og $x^{2n+1} = x^n \cdot x^n \cdot x$.

- ▶ Þetta er lítið mál að gera í $\mathcal{O}(n)$ tíma.

```
4 int main()
5 {
6     ll x, n, m, r = 1;
7     scanf("%lld%lld%lld", &x, &n, &m);
8     while (n != 0) r = (r*x)%m;
9     printf("%lld\n", r);
10    return 0;
11 }
```

- ▶ Við getum þó leyst þetta hraðar.
- ▶ Sú lausn byggir á að deila og drottna.
- ▶ Takið eftir að $x^{2n} = x^n \cdot x^n$ og $x^{2n+1} = x^n \cdot x^n \cdot x$.
- ▶ Því getum við í hverju skrefi helmingað veldisvísinn.

- ▶ Við getum útfært þetta endurkvæmt.

► Við getum útfært þetta endurkvæmt.

```
4 ll modpow(ll x, ll n, ll m)
5 {
6     if (n == 0) return 1;
7     ll r = modpow(x, n/2, m);
8     r = (r*r)%m;
9     return n%2 == 0 ? r : (r*x)%m;
10 }
```

- ▶ Við getum útfært þetta endurkvæmt.

```
4 ll modpow(ll x, ll n, ll m)
5 {
6     if (n == 0) return 1;
7     ll r = modpow(x, n/2, m);
8     r = (r*r)%m;
9     return n%2 == 0 ? r : (r*x)%m;
10 }
```

- ▶ Við getum líka gert þetta með einfaldri for-lykkju.

- ▶ Við getum útfært þetta endurkvæmt.

```
4 ll modpow(ll x, ll n, ll m)
5 {
6     if (n == 0) return 1;
7     ll r = modpow(x, n/2, m);
8     r = (r*r)%m;
9     return n%2 == 0 ? r : (r*x)%m;
10 }
```

- ▶ Við getum líka gert þetta með einfaldri for-lykkju.

```
4 ll modpow(ll x, ll n, ll m)
5 {
6     ll r = 1;
7     while (n > 0)
8     {
9         if (n%2 == 1) r = (r*x)%m;
10        n = n/2;
11        x = (x*x)%m;
12    }
13    return r;
14 }
```


- ▶ Eins og sagt var áðan þá helmingast veldisvísirinn í hverju skrefi.

- ▶ Eins og sagt var áðan þá helmingast veldisvísirinn í hverju skrefi.
- ▶ Svo tímaflækjan er $\mathcal{O}(\quad)$.

- ▶ Eins og sagt var áðan þá helmingast veldisvísirinn í hverju skrefi.
- ▶ Svo tímaflækjan er $\mathcal{O}(\log n)$.

