Deila og drottna

Bergur Snorrason

January 29, 2024

Almennar nálganir lausna

- Þegar við leysum dæmi í keppnisforritun notumst við oftast við eina af eftirfarandi aðferðum:
  - *Ad hoc*.
  - *Tæmandi leit* eða *ofbeldis aðferðin* (e. *complete search, brute force*),
  - *Gráðug reiknirit* (e. *greedy algorithms*),
  - *Deila og drottna* (e. *divide and conquer*),
  - *Kvik bestun* (e. *dynamic programming*).
- Í síðustu vikum fjölluðum við um Ad hoc dæmi, tæmandi leit og gráðug reiknirit.
- Í þessari viku fjöllum við um deila og drottna reiknirit og kvika bestun.

Deila og drottna

- Sum dæmi má endurkvæmt skipta upp þangað til þau verða fáfengileg.
- Síðan má líma fáfengilegu lausnirnar saman í heildarlausn í lokinn.
- Slík reiknirit kallast *deila og drottna* reiknirit.
- Þessi flokkur er sjaldgæfastur í keppnum.
- Það eru þó mörg þekkt reiknirit sem nýta sér deila og drottna.

Deila og drottna, þekkt dæmi

- Sameiningarröðun (e. *mergesort*).
- Helmingunarleit (e. *binary search*).
- Þriðjungunarleit (e. *ternary search*).
- Margföldunarreiknirit Karatsuba.
- Margföldunarreiknirit Strassen.
- Nálægustu punktar í plani.
- Fourier ummyndun (e. *fast Fourier transform* (`FFT`)).

Sameining

- Gerum ráð fyrir að við séum með tvo raðaða lista, a og b.
- Búum til nýjan, tóman lista c.
- Berum saman fremstu stök a og b og tökum minna stakið og setjum aftast í c.
- Endurtökum þangað til a eða b er tómur.
- Skeytum svo því sem er eftir aftan á c.
- Nú inniheldur c þau stök sem voru í a og b áður.
- Einnig er c raðaður.
- Ef fjöldi staka í a og b er n þá er þetta $\mathcal{O}(n)$.

```
a = [1, 2, 5, 6, 8, 9]
b = [0, 3, 4, 7, 10]
c = []
```

```
a = [1, 2, 5, 6, 8, 9]
b = [3, 4, 7, 10]
c = [0]
```

```
a = [2, 5, 6, 8, 9]
b = [3, 4, 7, 10]
c = [0, 1]
```

```
a = [5, 6, 8, 9]
b = [3, 4, 7, 10]
c = [0, 1, 2]
```

```
a = [5, 6, 8, 9]
b = [4, 7, 10]
c = [0, 1, 2, 3]
```

```
a = [5, 6, 8, 9]
b = [7, 10]
c = [0, 1, 2, 3, 4]
```

```
a = [6, 8, 9]
b = [7, 10]
c = [0, 1, 2, 3, 4, 5]
```

```
a = [8, 9]
b = [7, 10]
c = [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6]
```

```
a = [8, 9]
b = [10]
c = [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]
```

```
a = [9]
b = [10]
c = [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]
```

```
a = []
b = [10]
c = [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]
```

```
a = []
b = []
c = [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]
```

Sameiningarröðun

- Við getum notað þessa aðferð til að raða almennum lista.
- Við skiptum listanum okkar í tvo jafna hluta og köllum endurkvæmt á fallið okkar þangað til við erum með tómann lista.
- Á leiðinni upp úr endurkvæmninni sameinum við svo helmingana eins og rætt var á undan.

```
void merge(int* a, int l, int m, int r)
{
    int i = l, j = m, b[r - l], c = 0;
    while (i < m && j < r) b[c++] = a[a[j] < a[i] ? j++ : i++];
    while (i < m || j < r) b[c++] = a[j < r ? j++ : i++];
    for (i = l; i < r; i++) a[i] = b[i - l];
}

void mergesort(int* a, int l, int r)
{
    if (r - l < 2) return;
    int m = (l + r)/2;
    mergesort(a, l, m), mergesort(a, m, r);
    merge(a, l, m, r);
}
```

- Sameiningarröðun er sígilt dæmi um deila og drottna reiknirit.
- Við helmingum alltaf listann og tökum svo saman í línulegum tíma.
- Hvert stak kemur fyrir í $\mathcal{O}(\log n)$ sameiningum, svo reikniritið er $\mathcal{O}(n \log n)$.
- Þetta er mjög algeng tímaflækja í deila og drottna reikniritum.

Helmingunarleit

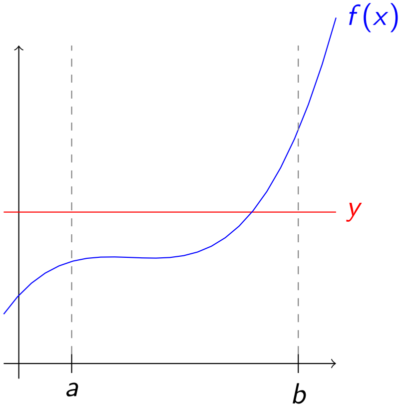
- Helmingunarleit er yfirleitt sett fram sem leit í röðuðum lista.
- Skoðum það fyrst og alhæfum svo.
- Látum a vera raðaðan lista af n tölum.
- Gerum ráð fyrir að við viljum finna t í listanum.
- Látum $m = \lfloor n/2 \rfloor$.
- Ef m-ta stakið í a er stærra en t þá getur t ekki verið í seinni helming listans.
- Ef m-ta stakið í a er minna en t þá getur t ekki verið í fyrri helming listans.
- Svo við getum útilokað helming listans í hverri ítrun.

```
int bs(int* a, int t, int l, int r)
{
    if (r - l == 1) return a[l] == t ? l : -1;
    int m = (l + r)/2;
    if (a[m] <= t) return bs(a, t, m, r);
    else return bs(a, t, l, m);
}
```

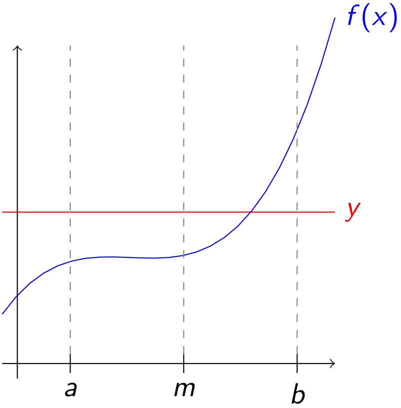
- Helmingunarleit er $\mathcal{O}(\log n)$, þar sem við helmingum stærð listans í hverri ítrun.
- Góð æfing í helmingunarleit er að útfæra leitina þannig að hún skili vísi á fyrstu (eða síðustu) endurtekningu staksins.
- Slíkar útgáfur að helmingunarleit nýtast þegar við förum að nota helmingunarleit í almennari mynd.

- Gerum ráð fyrir að við séum með vaxandi fall $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ og $y \in \mathbb{R}$.
- Getum við fundið $x \in [a, b]$ þannig að $f(x) = y$?
- Slíkt x þarf ekki að vera til, en ef f er samfellt og $y \in [f(a), f(b)]$ þá er það til.
- En hvernig finnum við slíkt x?
- Við getum notað nákvæmlega sömu hugmynd og í helmingunarleit í lista.
- Látum $m = (a + b)/2$.
- Ef $f(m) > t$ þá þarf $x \in [a, m]$.
- Ef $f(m) < t$ þá þarf $x \in [m, b]$.

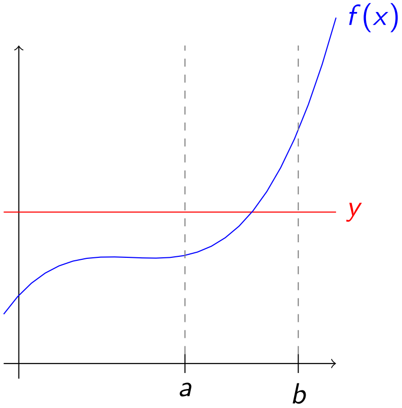
Sýnidæmi



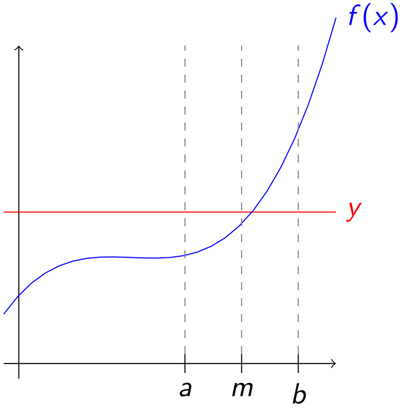
Sýnidæmi



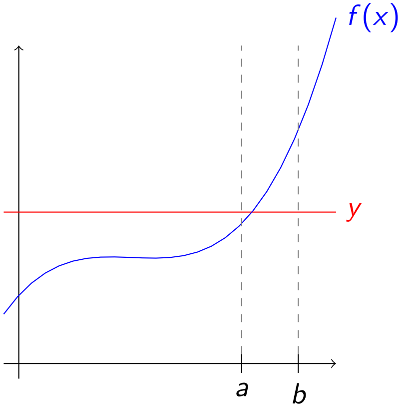
Sýnidæmi



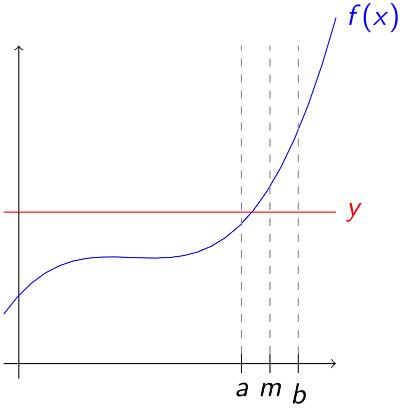
Sýnidæmi



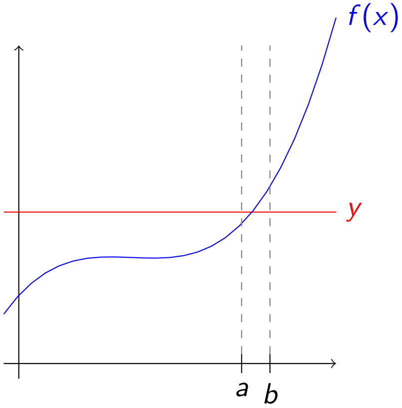
Sýnidæmi



Sýnidæmi



Sýnidæmi



- Takið eftir við munum ekki beint finna $x \in [a, b]$ þannig að $f(x) = y$.
- Það sem við finnum er $x \in [a, b]$ þannig að $|f(x) - y| < \varepsilon$, fyrir hvaða $\varepsilon > 0$ sem vera skal.
- Það er þó aldrei ætlast til annars í keppnisforritun og skekkjan er alltaf gefin í úttakslýsingu dæma.

- Við getum alhæft frekar.
- Tökum dæmi.
- Þú átt k ketti og n bæli fyrir kettina þína, með $2 \leq k \leq n$.
- Öll bælin eru staðsett á gangi í íbúðinni þinni.
- Ganginum má lýsa sem talnalínu og staðsetningar kattabælanna eru þá tölurnar $0 < x_1 < x_2 < ... < x_n < 10^9$ á talnalínunni.
- En kettir eru einfarar svo þeir vilja hafa sem mesta fjarlægð í næsta kött.
- Þú átt að raða köttum á bælin þannig að nálægustu kettirnir eru sem lengst frá hvorum öðrum.

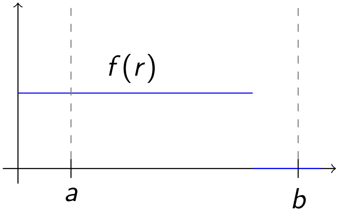
- Þetta dæmi má leysa með helmingunarleit.
- Byrjum á að svara annari spurningu:
  - Er hægt að raða köttunum þannig að nálægustu kettirnir séu að minnsta kosti með fjarlægð r?
- Þetta dæmi má leysa gráðugt.
- Við töpum aldrei á því að setja kött á bælið staðsett á x_1.
- Við megum þá ekki setja kött á bæli sem liggja í $[x_1, x_1 + r]$.
- Útilokum þau og veljum minnsta bælið sem er eftir, og endurtökum.
- Ef við komum fyrir k, eða fleiri, köttum svona þá er svarið við nýju spurningunni "já", en annars "nei".
- Þetta tekur $\mathcal{O}(n)$.

- Tökum þó eftir að ef við komum fyrir öllum köttunum með fjarlægð r_0 þá gerum við það líka fyrir $r < r_0$.
- Skilgreinum fall

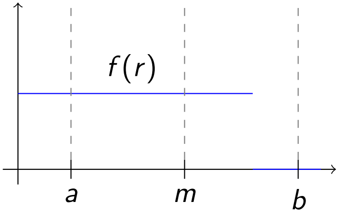
$$f(r) = \begin{cases} 1, & \text{ef koma má fyrir } k, \\ & \text{eða fleiri, köttum með fjarlægð } r \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

- Við getum nú umorðað upprunarlega dæmið sem: "Finnið stærsta r þannig að $f(r) = 1$".
- En nú er fallið f minnkandi (samkvæmt efsta punktinum á glærunni), svo við getum fundið slíkt gildi með helmingunar leit.

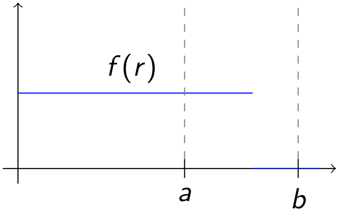
Sýnidæmi



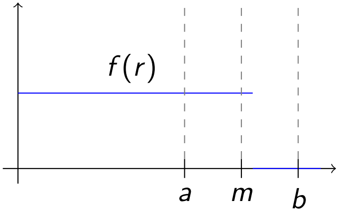
Sýnidæmi



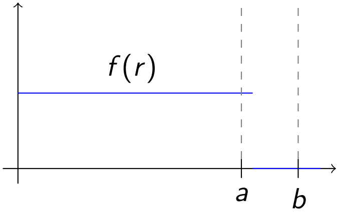
Sýnidæmi



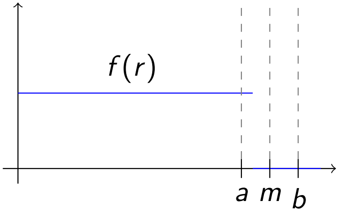
Sýnidæmi



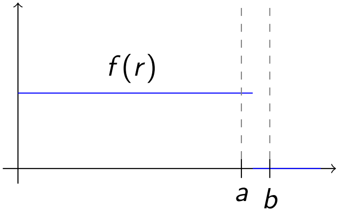
Sýnidæmi



Sýnidæmi



Sýnidæmi



- Ef við látum $M = 10^9/\varepsilon$, þar sem ε er leyfileg skekkja í dæminu, þá er lausnin $\mathcal{O}(n \log M)$.
- Hér gerum við ekki ráð fyrir að svarið sé heiltala.
- Ef við gerum ráð fyrir því verður tímaflækjan eins, nema með $M = 10^9$.

- Það sem við gerðum í raun var að breyta dæminu úr “finnið minnsta/stærsta gildið þannig að...” yfir í “tökum ákveðið gildi og athugum hvort að...”.
- Þetta er algengasta notkunin á helmingunarleit í keppnisforritun.
- Algengt er að helmingunarleit af þessum toga sé hluti af erfiðum dæmum.

```
int gradugt_check(int *x, int n, int k, int m)
{
    int i, j, r = 0;
    for (i = 0, j = -2*m; i < n; i++) if (x[i] >= j) j = x[i] + m, r++;
    return r >= k;
}

int main()
{
    int i, r, s, n, k;
    scanf("%d%d", &n, &k);
    int x[n];
    for (i = 0; i < n; i++) scanf("%d", &x[i]);
    r = 0, s = 1000000000;
    while (r < s)
    {
        int m = (r + s)/2;
        if (gradugt_check(x, n, k, m)) r = m + 1;
        else s = m;
    }
    printf("%d\n", r - 1);
    return 0;
}
```

Þriðjungunarleit

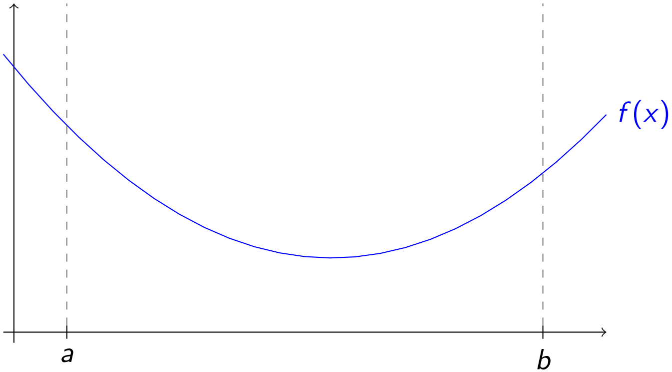
- Gerum ráð fyrir að við séum með kúpt fall $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$.
- Munið að fall er kúpt ef $f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$, fyrir öll $t \in [0,1]$ og $x_1, x_2 \in [a,b]$.
- Hvernig finnum við útgildi (há- og lággildi) fallsins?
- Auðvelt er að finna hágildi.
- Gerum ráð fyrir að $f(a) \leq f(b)$.
- Fyrir öll $x \in [a,b]$ gildir þá að

$$f(x) = f(at + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$$

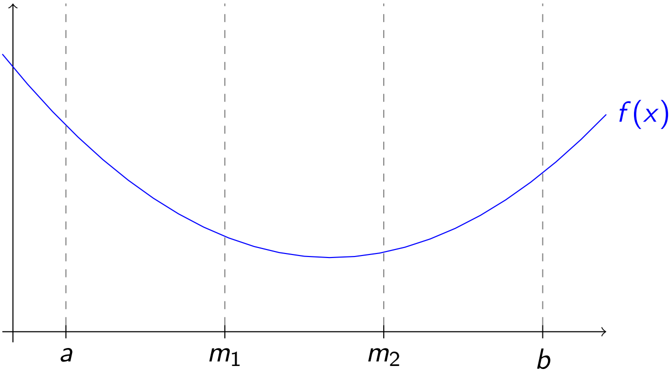
$$\leq tf(b) + (1-t)f(b) = f(b),$$

  með $t = (x-b)/(a-b)$.
- Svo hágildi fæst í endapuntkunum a eða b.

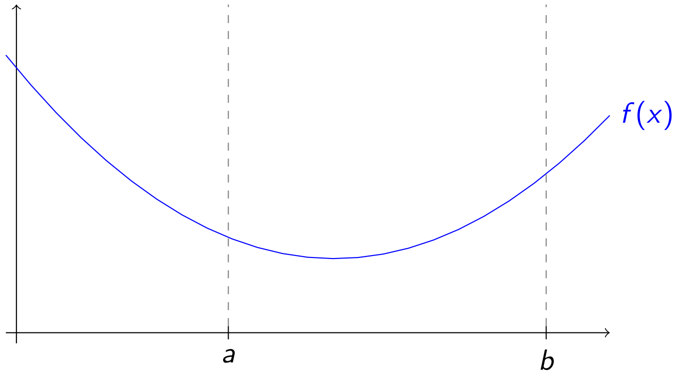
- Við getum fundið lággildið tölulega, svipað og með helmingunarleit.
- Við veljum punkta $m_1, m_2 \in [a, b]$ þannig að bilin $[a, m_1]$, $[m_1, m_2]$ og $[m_2, b]$ séu jafn löng.
- Við skoðum svo fallgildin $f(m_1)$ og $f(m_2)$.
- Ef $f(m_1) < f(m_2)$ þá getur lággildið ekki legið á bilinu $[m_2, b]$, svo við getum útilokað það bil í leitinni.
- Ef $f(m_2) < f(m_1)$ þá getur lággildið ekki legið á bilinu $[a, m_1]$, svo við getum útilokað það bil í leitinni.
- Ef $f(m_2) = f(m_1)$ þá þarf lággildið að liggja á bilinu $[m_1, m_2]$.
- Þetta stafar allt af því að kúpt föll taka hágildi í öðru hvorum endapunkta sinna.

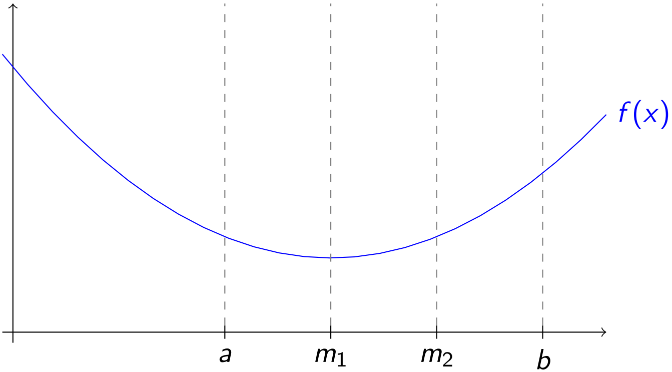


$f(x)$
a
b

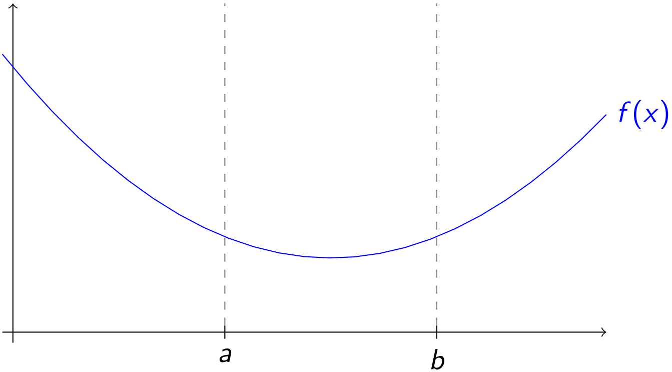


$f(x)$
a
m_1
m_2
b

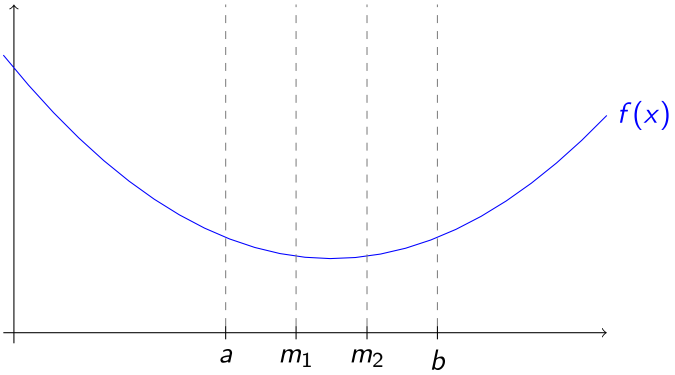

f(x)
a
b

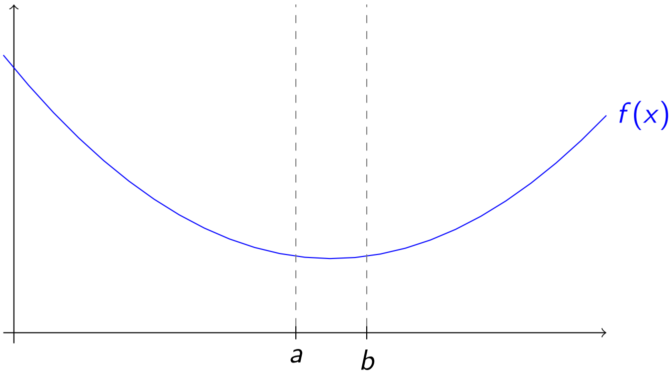


$f(x)$
a
m_1
m_2
b

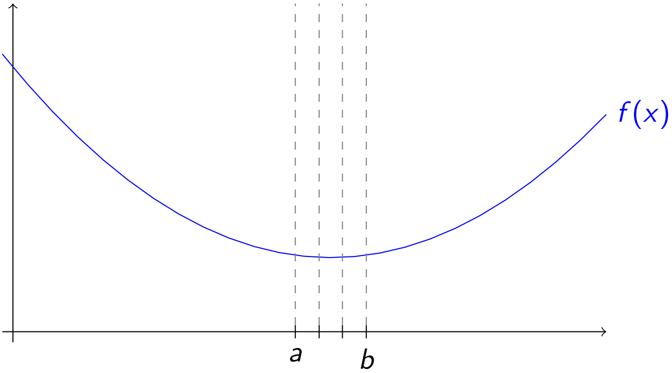


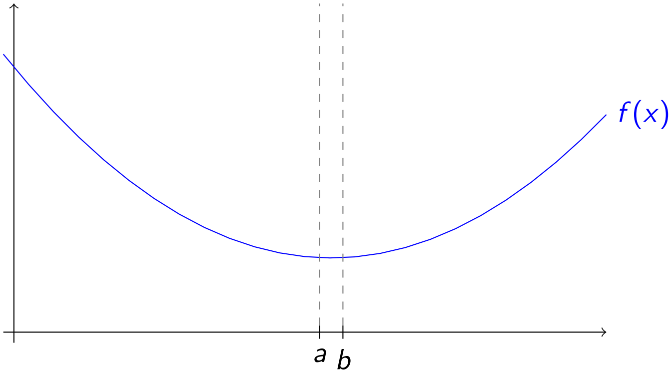
f(x)
a
b


$f(x)$
a
m_1
m_2
b



$f(x)$
a
b


f(x)
a
b



f(x)
a
b

- Við notum okkur oft að tvídiffranlegt fall er kúpt ef og aðeins ef önnur afleiðan er jákvæð.
- Umfjöllunin okkar heimfærist á eðlilegan hátt yfir á hvelf föll.
- Þriðjungunarleit er algeng í rúmfræði því Evklíðska firðin er kúpt.

```c
#define EPS 1e-9
double f(double x)
{
    return 5.0 - 1.2*x + 0.1*x*x;
}

int main()
{
    double a = 1.0, b = 10.0, m1, m2;
    while (b - a > EPS)
    {
        m1 = (a + a + b)/3.0, m2 = (a + b + b)/3.0;
        if (f(m1) > f(m2)) a = m1;
        else b = m2;
    }
    printf("f(%.2f) = %.2f\n", a, f(a));
    return 0;
}
```

- Tökum eitt hefðbundið sýnidæmi í lokinn.
- Þú vilt skortselja gjaldmiðil, vitandi framtíðargengi, þannig að þú græðir sem mestan pening.
- Nánar, þú ætlar að fá lánaðar 100 danskar krónur á einhverjum degi og skipta þeim um leið í íslenskar krónur.
- Eftir einhvern fjölda daga þarft þú svo að kaupa 100 danskar krónur til að borga lánið, ásamt því að borga K íslenskar krónur á dag í lánakostnað.
- Hver er mesti fjöldi íslenska króna sem þú getur grætt?
- Fyrsta lína inntaksins inniheldur tvær tölur, $1 \leq n \leq 10^5$ og $1 \leq k \leq 100$.
- Næsta lína inniheldur n heiltölur $1 \leq x_1, x_2, ..., x_n \leq 10^5$.
- Hér tákna x_i fjölda íslenska króna sem ein dönsk króna kostar á i-ta degi.

- Skoðum sýniinntök.

```
Sample input 1                      Sample output 1
5 10                                98950
1000 980 960 940 10


Sample input 2                      Sample output 2
5 100                               100
100 100 100 103 100
```

- Í fyrra tilfellinu viljum við taka lánið á fyrsta degi og borga það á síðasta degi.
- Við fáum $100 \cdot 1000 = 10^5$ íslenskar krónur á fyrst degi og borgum $100 \cdot 10 = 10^3$ íslenskar krónur á síðasta degi.
- Við borgum svo $5 \cdot 10 = 50$ íslenskar krónur í lánakostnað.
- Svo við endum með $10^5 - 10^3 - 50 = 98950$ íslenskar krónur.

- Skoðum sýniinntök.

```
Sample input 1                Sample output 1
5 10                          98950
1000 980 960 940 10


Sample input 2                Sample output 2
5 100                         100
100 100 100 103 100
```

- Í seinna tilfellinu viljum við taka lánið á fjórða degi og borga það á síðasta degi.
- Við fáum $100 \cdot 103 = 10300$ íslenskar krónur á fyrst degi og borgum $100 \cdot 100 = 10^4$ íslenskar krónur á síðasta degi.
- Við borgum svo $2 \cdot 100 = 200$ íslenskar krónur í lánakostnað.
- Svo við endum með $10300 - 10^4 - 200 = 100$ íslenskar krónur.

- Til að nota deila og drottna þurfum við að taka eftir einu.
- Gerum ráð fyrir að engin lánakostnaður sé greiddur síðasta daginn.
- Það einfaldar reikninga og við getum alltaf bætt honum við eftir á.
- Táknum með $f(i, j)$ þann gróða (eða tap) sem fæst með því að taka lánið á i-ta degi og borga það á j-degi degi, og $g(i)$ vera gengið á i-ta degi.
- Við fáum nú að $f(i, j) = 100 \cdot g(i) - 100 \cdot g(j) - (j - i) \cdot k$.
- Ef a, b og c eru heiltölur þannig að $1 \leq a < b < c \leq n$ þá fæst

$$\begin{aligned} f(a, b) + f(b, c) =& 100 \cdot (g(a) - g(b)) - (b - a) \cdot k \\ & + 100 \cdot (g(b) - g(c)) - (c - b) \cdot k \\ =& 100 \cdot (g(a) - g(c)) - (c - a) \cdot k \\ =& f(a, c). \end{aligned}$$

- Látum nú $m = \lfloor n/2 \rfloor$.
- Þá gildir eitt af þrennu, fyrir tiltekna lausn:
  - Báðir endapunktar bestu lausnarinnar liggja á $[1, m-1]$.
  - Báðir endapunktar bestu lausnarinnar liggja á $[m, n]$.
  - Annar endapunktur bestu lausnarinnar liggur á $[1, m-1]$ og hinn liggur á $[m, n]$.
- Fyrri tvö tilfellin má leysa með einfaldri endurkvæmni.
- Fyrir síðasta tilfellið nýtum við gegnvirknina af fyrri glærunni.
- Við viljum finna bestu lausnina sem liggur í gegnum m-ta stakið.
- Gegnvirknin segir þó að okkur nægir að finna fyrst bestu lausnina sem endar í m-ta stakinu, finna svo bestu lausnina sem byrjar í m-ta stakinu og sameina svo lausnirnar.

```
ll foo(ll* a, ll l, ll r, ll k)
{
    if (r - l < 5)
    {
        ll i, j, mx = 0;
        for (i = l; i < r; i++) for (j = i + 1; j < r; j++)
            mx = max(mx, 100*(a[i] - a[j]) - k*(j - i));
        return mx;
    }
    ll m = (l + r)/2, i, j;
    ll v1 = foo(a, l, m, k), v2 = foo(a, m, r, k), mx1 = 0, mx2 = 0;
    for (i = l; i < m; i++) mx1 = max(mx1, 100*(a[i] - a[m]) - k*(m - i));
    for (i = m; i < r; i++) mx2 = max(mx2, 100*(a[m] - a[i]) - k*(i - m));
    return max(max(v1, v2), mx1 + mx2);
}

int main()
{
    ll i, j;
    int x, n, k;
    scanf("%d%d", &n, &k);
    ll a[n];
    for (i = 0; i < n; i++) scanf("%d", &a[i]);
    printf("%lld\n", max(0, foo(a, 0, n, k) - k));
    return 0;
}
```