

Nim

Bergur Snorrason

22. mars 2023

- ▶ Skoðum einfaldan leik.

- ▶ Skoðum einfaldan leik.
- ▶ Þú og einn andstæðingur eruð með hrúgu af n steinum.

- ▶ Skoðum einfaldan leik.
- ▶ Þú og einn andstæðingur eruð með hrúgu af n steinum.
- ▶ Þið skiptist á að taka einn eða tvo steina úr hrúgunni þar til hrúgan er tóm.

- ▶ Skoðum einfaldan leik.
- ▶ Þú og einn andstæðingur eruð með hrúgu af n steinum.
- ▶ Þið skiptist á að taka einn eða tvo steina úr hrúgunni þar til hrúgan er tóm.
- ▶ Sá sem á að gera þegar hrúgan er tóm tapar.

- ▶ Skoðum einfaldan leik.
- ▶ Þú og einn andstæðingur eruð með hrúgu af n steinum.
- ▶ Þið skiptist á að taka einn eða tvo steina úr hrúgunni þar til hrúgan er tóm.
- ▶ Sá sem á að gera þegar hrúgan er tóm tapar.
- ▶ Hver vinnur?
 - ▶ Sá sem byrjar?
 - ▶ Sá sem byrjar ekki?
 - ▶ Fer eftir öðrum aðstæðum?

- ▶ Við samasömum stöður í leiknum við fjölda steina í hrúgunni.

- ▶ Við samasömum stöður í leiknum við fjölda steina í hrúgunni.
- ▶ Við segjum því að 0 sé *tapstaða*.

- ▶ Við samasömunum stöður í leiknum við fjölda steina í hrúgunni.
- ▶ Við segjum því að 0 sé *tapstaða*.
- ▶ Staða er sögð *vinningsstaða* ef það er leikur sem breytir henni í tapstöðu.

- ▶ Við samasömum stöður í leiknum við fjölda steina í hrúgunni.
- ▶ Við segjum því að 0 sé *tapstaða*.
- ▶ Staða er sögð *vinningsstaða* ef það er leikur sem breytir henni í tapstöðu.
- ▶ Almennt er staða er sögð tapstaða ef það er enginn leikur sem breytir henni í tapstöðu.

- ▶ Við samasömum stöður í leiknum við fjölda steina í hrúgunni.
- ▶ Við segjum því að 0 sé *tapstaða*.
- ▶ Staða er sögð *vinningsstaða* ef það er leikur sem breytir henni í tapstöðu.
- ▶ Almennt er staða er sögð tapstaða ef það er enginn leikur sem breytir henni í tapstöðu.
- ▶ Munið að við getum annaðhvort fjarlægt einn eða tvo steina, svo stöðurnar 1 og 2 eru vinningsstöður.

- ▶ Við samasöfum stöður í leiknum við fjölda steina í hrúgunni.
- ▶ Við segjum því að 0 sé *tapstaða*.
- ▶ Staða er sögð *vinningsstaða* ef það er leikur sem breytir henni í tapstöðu.
- ▶ Almennt er staða er sögð tapstaða ef það er enginn leikur sem breytir henni í tapstöðu.
- ▶ Munið að við getum annaðhvort fjarlægt einn eða tvo steina, svo stöðurnar 1 og 2 eru vinningsstöður.
- ▶ Almennt fæst að staða n er tapstaða þá og því aðeins að n gangi upp í þrjá.

- ▶ Almennt fæst að staða n er tapstaða þá og því aðeins að n gangi upp í þrjá.

- ▶ Almennt fæst að staða n er tapstaða þá og því aðeins að n gangi upp í þrjá.
- ▶ Þetta fæst með þrepun.

- ▶ Almennt fæst að staða n er tapstaða þá og því aðeins að n gangi upp í þrjá.
- ▶ Þetta fæst með þrepun.
- ▶ Gerum ráð fyrir að $3 \cdot k$ sé tapstaða.

- ▶ Almennt fæst að staða n er tapstaða þá og því aðeins að n gangi upp í þrjá.
- ▶ Þetta fæst með þrepun.
- ▶ Gerum ráð fyrir að $3 \cdot k$ sé tapstaða.
- ▶ Þá eru stöður $3 \cdot k + 1$ og $3 \cdot k + 2$ vinningsstöður.

- ▶ Almennt fæst að staða n er tapstaða þá og því aðeins að n gangi upp í þrjá.
- ▶ Þetta fæst með þrepun.
- ▶ Gerum ráð fyrir að $3 \cdot k$ sé tapstaða.
- ▶ Þá eru stöður $3 \cdot k + 1$ og $3 \cdot k + 2$ vinningsstöður.
- ▶ Þetta eru líka einu stöðurnar sem maður kemst í frá stöðunni $3 \cdot (k + 1)$, svo hún er tapstaða.

- ▶ Tökum aðeins flóknara dæmi.

- ▶ Tökum aðeins flóknara dæmi.
- ▶ Gerum ráð fyrir að við séum með m hrúgur með n_1, \dots, n_m steinum í hverri hrúgu.

- ▶ Tökum aðeins flóknara dæmi.
- ▶ Gerum ráð fyrir að við séum með m hrúgur með n_1, \dots, n_m steinum í hverri hrúgu.
- ▶ Nú skiptast keppendur á að velja hrúgu og taka eins marga steina úr henni og þeir vilja (að minnsta kosti einn).

- ▶ Tökum aðeins flóknara dæmi.
- ▶ Gerum ráð fyrir að við séum með m hrúgur með n_1, \dots, n_m steinum í hverri hrúgu.
- ▶ Nú skiptast keppendur á að velja hrúgu og taka eins marga steina úr henni og þeir vilja (að minnsta kosti einn).
- ▶ Aftur tapar sá sem getur ekki gert.

- ▶ Tökum aðeins flóknara dæmi.
- ▶ Gerum ráð fyrir að við séum með m hrúgur með n_1, \dots, n_m steinum í hverri hrúgu.
- ▶ Nú skiptast keppendur á að velja hrúgu og taka eins marga steina úr henni og þeir vilja (að minnsta kosti einn).
- ▶ Aftur tapar sá sem getur ekki gert.
- ▶ Hvernig getum við lýst vinningsstöðunum og tapstöðunum?

- ▶ Tökum aðeins flóknara dæmi.
- ▶ Gerum ráð fyrir að við séum með m hrúgur með n_1, \dots, n_m steinum í hverri hrúgu.
- ▶ Nú skiptast keppendur á að velja hrúgu og taka eins marga steina úr henni og þeir vilja (að minnsta kosti einn).
- ▶ Aftur tapar sá sem getur ekki gert.
- ▶ Hvernig getum við lýst vinningsstöðunum og tapstöðunum?
- ▶ Þessi spurning er flóknari.

- ▶ Tökum aðeins flóknara dæmi.
- ▶ Gerum ráð fyrir að við séum með m hrúgur með n_1, \dots, n_m steinum í hverri hrúgu.
- ▶ Nú skiptast keppendur á að velja hrúgu og taka eins marga steina úr henni og þeir vilja (að minnsta kosti einn).
- ▶ Aftur tapar sá sem getur ekki gert.
- ▶ Hvernig getum við lýst vinningsstöðunum og tapstöðunum?
- ▶ Þessi spurning er flóknari.
- ▶ Hér samsömum við m -dir við stöður.

- ▶ Tökum aðeins flóknara dæmi.
- ▶ Gerum ráð fyrir að við séum með m hrúgur með n_1, \dots, n_m steinum í hverri hrúgu.
- ▶ Nú skiptast keppendur á að velja hrúgu og taka eins marga steina úr henni og þeir vilja (að minnsta kosti einn).
- ▶ Aftur tapar sá sem getur ekki gert.
- ▶ Hvernig getum við lýst vinningsstöðunum og tapstöðunum?
- ▶ Þessi spurning er flóknari.
- ▶ Hér samsömum við m -dir við stöður.
- ▶ Staðan (k_1, \dots, k_m) er tapstaða þá og því aðeins að $k_1 \oplus \dots \oplus k_m = 0$.

- Gerum ráð fyrir að við séum í stöðu (k_1, \dots, k_m) , látum $X = k_1 \oplus \dots \oplus k_m$ og gerum ráð fyrir að $X > 0$.

- ▶ Gerum ráð fyrir að við séum í stöðu (k_1, \dots, k_m) , látum $X = k_1 \oplus \dots \oplus k_m$ og gerum ráð fyrir að $X > 0$.
- ▶ Nú er $X \neq 0$ svo til er ℓ þannig að $X \oplus K_\ell < X$.

- ▶ Gerum ráð fyrir að við séum í stöðu (k_1, \dots, k_m) , látum $X = k_1 \oplus \dots \oplus k_m$ og gerum ráð fyrir að $X > 0$.
- ▶ Nú er $X \neq 0$ svo til er ℓ þannig að $X \oplus K_\ell < X$.
- ▶, sanna rétta hlutinn.

- ▶ Gerum ráð fyrir að við séum með leik þar sem:
 - ▶ Engar huldar upplýsingar.
 - ▶ Leikurinn klárast eftir endanlegan fjölda leikja.
 - ▶ Fyrir tiltekna stöðu geta báðir spilarar gert það sama.
 - ▶ Leikurinn klárast þegar það er enginn löglegur leikur og sá sem á að gera tapar.

- ▶ Gerum ráð fyrir að við séum með leik þar sem:
 - ▶ Engar huldar upplýsingar.
 - ▶ Leikurinn klárast eftir endanlegan fjölda leikja.
 - ▶ Fyrir tiltekna stöðu geta báðir spilarar gert það sama.
 - ▶ Leikurinn klárast þegar það er enginn löglegur leikur og sá sem á að gera tapar.
- ▶ Þá getum við úthlutað hverjum leik heiltölu endurkvæmt.

- ▶ Gerum ráð fyrir að við séum með leik þar sem:
 - ▶ Engar huldar upplýsingar.
 - ▶ Leikurinn klárast eftir endanlegan fjölda leikja.
 - ▶ Fyrir tiltekna stöðu geta báðir spilarar gert það sama.
 - ▶ Leikurinn klárast þegar það er enginn löglegur leikur og sá sem á að gera tapar.
- ▶ Þá getum við úthlutað hverjum leik heiltölu endurkvæmt.
- ▶ Ef engin löglegur leikur er í boði fær staðan heiltöluna 0.

- ▶ Gerum ráð fyrir að við séum með leik þar sem:
 - ▶ Engar huldar upplýsingar.
 - ▶ Leikurinn klárast eftir endanlegan fjölda leikja.
 - ▶ Fyrir tiltekna stöðu geta báðir spilarar gert það sama.
 - ▶ Leikurinn klárast þegar það er enginn löglegur leikur og sá sem á að gera tapar.
- ▶ Þá getum við úthlutað hverjum leik heiltölu endurkvæmt.
- ▶ Ef engin löglegur leikur er í boði fær staðan heiltöluna 0.
- ▶ Annars fær staðan minnstu jákvæðu heiltöluna sem er ekki hægt að komst í úr stöðunni.

- ▶ Gerum ráð fyrir að við séum með leik þar sem:
 - ▶ Engar huldar upplýsingar.
 - ▶ Leikurinn klárast eftir endanlegan fjölda leikja.
 - ▶ Fyrir tiltekna stöðu geta báðir spilarar gert það sama.
 - ▶ Leikurinn klárast þegar það er enginn löglegur leikur og sá sem á að gera tapar.
- ▶ Þá getum við úthlutað hverjum leik heiltölu endurkvæmt.
- ▶ Ef engin löglegur leikur er í boði fær staðan heiltöluna 0.
- ▶ Annars fær staðan minnstu jákvæðu heiltöluna sem er ekki hægt að komst í úr stöðunni.
- ▶ Við höfum þá að staða er tapstaða þá og því aðeins að henni sé úthlutað töluna 0.

- ▶ Gerum ráð fyrir að við séum með leik þar sem:
 - ▶ Engar huldar upplýsingar.
 - ▶ Leikurinn klárast eftir endanlegan fjölda leikja.
 - ▶ Fyrir tiltekna stöðu geta báðir spilarar gert það sama.
 - ▶ Leikurinn klárast þegar það er enginn löglegur leikur og sá sem á að gera tapar.
- ▶ Þá getum við úthlutað hverjum leik heiltölu endurkvæmt.
- ▶ Ef engin löglegur leikur er í boði fær staðan heiltöluna 0.
- ▶ Annars fær staðan minnstu jákvæðu heiltöluna sem er ekki hægt að komst í úr stöðunni.
- ▶ Við höfum þá að staða er tapstaða þá og því aðeins að henni sé úthlutað töluna 0.
- ▶ Þessar tölur kallast Grundy tölur staðanna.

- Gerum ráð fyrir að við séum að spila marga leiki í einu, þar sem hver leikur er eins og lýst var að ofan.

- ▶ Gerum ráð fyrir að við séum að spila marga leiki í einu, þar sem hver leikur er eins og lýst var að ofan.
- ▶ Hver aðgerð felur þá í sér að velja einn af leikjunum sem er verið að spila og framkvæm leik í honum.

- ▶ Gerum ráð fyrir að við séum að spila marga leiki í einu, þar sem hver leikur er eins og lýst var að ofan.
- ▶ Hver aðgerð felur þá í sér að velja einn af leikjunum sem er verið að spila og framkvæm leik í honum.
- ▶ Sá tapar sem lendir í því að eiga engan löglegan leik.

- ▶ Gerum ráð fyrir að við séum að spila marga leiki í einu, þar sem hver leikur er eins og lýst var að ofan.
- ▶ Hver aðgerð felur þá í sér að velja einn af leikjunum sem er verið að spila og framkvæm leik í honum.
- ▶ Sá tapar sem lendir í því að eiga engan löglegan leik.
- ▶ Ef við gerum ráð fyrir að undirleikirnir hafi Grundy tölurnar k_1, \dots, k_m þá er Grundy tala sameinaða leiksins $k_1 \oplus \dots \oplus k_m$.

- ▶ Útfærum núna nokkur dæmi.

- ▶ Útfærum núna nokkur dæmi.
- ▶ Gerum ráð fyrir að við séum

- ▶ Tökum nýtt dæmi.

- ▶ Tökum nýtt dæmi.
- ▶ Gerum ráð fyrir að við teiknum n kassa á blað í línu, nema það er búið að krota yfir kassann í miðjunni.

- ▶ Tökum nýtt dæmi.
- ▶ Gerum ráð fyrir að við teiknum n kassa á blað í línu, nema það er búið að krota yfir kassann í miðjunni.

- ▶ Tökum nýtt dæmi.
- ▶ Gerum ráð fyrir að við teiknum n kassa á blað í línu, nema það er búið að krota yfir kassann í miðjunni.
- ▶ Hver leikur felur í sér að krota yfir eins marga aðliggjandi kassa og manni lystir (að minnsta kosti einn).

- ▶ Tökum nýtt dæmi.
- ▶ Gerum ráð fyrir að við teiknum n kassa á blað í línu, nema það er búið að krota yfir kassann í miðjunni.
- ▶ Hver leikur felur í sér að krota yfir eins marga aðliggjandi kassa og manni lystir (að minnsta kosti einn).
- ▶ Sá sem getur ekki leikið tapar.

- ▶ Þegar við kortum yfir aðliggjandi reiti erum við í rauninni að skipta einum leik í tvo.

- ▶ Þegar við kortum yfir aðliggjandi reiti erum við í rauninni að skipta einum leik í tvo.
- ▶ Gerum ráð fyrir að það séu n reitir (númeraðir $1, 2, \dots, n$) og að Grundy tala leiks fyrir k reiti sé g_k .

- ▶ Þegar við kortum yfir aðliggjandi reiti erum við í rauninni að skipta einum leik í tvo.
- ▶ Gerum ráð fyrir að það séu n reitir (númeraðir $1, 2, \dots, n$) og að Grundy tala leiks fyrir k reiti sé g_k .
- ▶ Ef við krotum yfir reiti $i, i + 1, \dots, j - 1, j$ skiptist leikurinn í tvennt, annar undirleikurinn með $i - 1$ kassa og hinn með $n - j$ kassa.

- ▶ Þegar við kortum yfir aðliggjandi reiti erum við í rauninni að skipta einum leik í tvo.
- ▶ Gerum ráð fyrir að það séu n reitir (númeraðir $1, 2, \dots, n$) og að Grundy tala leiks fyrir k reiti sé g_k .
- ▶ Ef við krotum yfir reiti $i, i+1, \dots, j-1, j$ skiptist leikurinn í tvennt, annar undirleikurinn með $i-1$ kassa og hinn með $n-j$ kassa.
- ▶ Grundy talan fyrir þennan nýja yfirleik er $g_{i-1} \oplus g_{n-j}$ ef $i > 1$, og g_{n-j} ef $i = 1$.

```

5 int mex(int* a, int n)
6 {
7     int b[n], i;
8     for (i = 0; i < n; i++) b[i] = 0;
9     for (i = 0; i < n; i++) if (a[i] < n) b[a[i]] = 1;
10    for (i = 0; i < n; i++) if (!b[i]) break;
11    return i;
12 }
13
14 int d[MAXN];
15 int dp_lookup(int x)
16 {
17     if (x == 0) return 0;
18     if (d[x] != -1) return d[x];
19     int i, j, a[x*x + 1];
20     for (a[0] = 0, i = 0; i < x; i++) for (j = i; j < x; j++)
21         a[i+a[0]] = dp_lookup(i)^dp_lookup(x - j - 1);
22     return d[x] = mex(a + 1, a[0]);
23 }

```

```

14 int d[MAXN];
15 int dp_lookup(int x)
16 {
17     if (x == 0) return 0;
18     if (d[x] != -1) return d[x];
19     int i, j, a[x*x + 1];
20     for (a[0] = 0, i = 0; i < x; i++) for (j = i; j < x; j++)
21         a[i+a[0]] = dp_lookup(i)^dp_lookup(x - j - 1);
22     return d[x] = mex(a + 1, a[0]);
23 }
24
25 void finna_besta_leik(int *a, int n)
26 {
27     int i, j, k, x, y;
28     for (i = 0; i < n; i++) for (j = i; j < n; j++)
29     {
30         for (k = i; k <= j; k++) if (!a[k]) break;
31         if (k <= j) continue;
32         for (k = i; k <= j; k++) a[k] = 0;
33         for (x = y = k = 0; k <= n; k++)
34         {
35             if (k == n || !a[k]) x ^= dp_lookup(y), y = 0;
36             else y++;
37         }
38         if (!x) return;
39         for (k = i; k <= j; k++) a[k] = 1;
40     }
41     for (k = 0; k < n; k++) if (a[k]) break;
42     a[k] = 0;
43 }

```

- Til að finna Grundy tölu á stöðu í einfalda leiknum þurfum við að reikna n gildi, og hvert gildi er reiknað í $\mathcal{O}(n)$ tíma.

- Til að finna Grundy tölu á stöðu í einfalda leiknum þurfum við að reikna n gildi, og hvert gildi er reiknað í $\mathcal{O}(n)$ tíma.

- ▶ Til að finna Grundy tölu á stöðu í einfalda leiknum þurfum við að reikna n gildi, og hvert gildi er reiknað í $\mathcal{O}(n)$ tíma.
- ▶ Svo það tekur $\mathcal{O}()$ tíma að reikna allar Grundy tölurnar.

- ▶ Til að finna Grundy tölu á stöðu í einfalda leiknum þurfum við að reikna n gildi, og hvert gildi er reiknað í $\mathcal{O}(n)$ tíma.
- ▶ Svo það tekur $\mathcal{O}(n^2)$ tíma að reikna allar Grundy tölurnar.

- ▶ Til að finna Grundy tölu á stöðu í einfalda leiknum þurfum við að reikna n gildi, og hvert gildi er reiknað í $\mathcal{O}(n)$ tíma.
- ▶ Svo það tekur $\mathcal{O}(n^2)$ tíma að reikna allar Grundy tölurnar.
- ▶ Til að finna best leikinn í hverri stöðu þrófum við alla mögulega leiki, svo það tekur $\mathcal{O}(\quad)$ tíma.

- ▶ Til að finna Grundy tölu á stöðu í einfalda leiknum þurfum við að reikna n gildi, og hvert gildi er reiknað í $\mathcal{O}(n)$ tíma.
- ▶ Svo það tekur $\mathcal{O}(n^2)$ tíma að reikna allar Grundy tölurnar.
- ▶ Til að finna best leikinn í hverri stöðu þrófum við alla mögulega leiki, svo það tekur $\mathcal{O}(n^2)$ tíma.

- ▶ Til að finna Grundy tölu á stöðu í einfalda leiknum þurfum við að reikna n gildi, og hvert gildi er reiknað í $\mathcal{O}(n)$ tíma.
- ▶ Svo það tekur $\mathcal{O}(n^2)$ tíma að reikna allar Grundy tölurnar.
- ▶ Til að finna best leikinn í hverri stöðu prófum við alla mögulega leiki, svo það tekur $\mathcal{O}(n^2)$ tíma.
- ▶ Í heildina tekur þetta því $\mathcal{O}(n^3)$ tíma.

- ▶ Til að finna Grundy tölu á stöðu í einfalda leiknum þurfum við að reikna n gildi, og hvert gildi er reiknað í $\mathcal{O}(n)$ tíma.
- ▶ Svo það tekur $\mathcal{O}(n^2)$ tíma að reikna allar Grundy tölurnar.
- ▶ Til að finna best leikinn í hverri stöðu prófum við alla mögulega leiki, svo það tekur $\mathcal{O}(n^2)$ tíma.
- ▶ Í heildina tekur þetta því $\mathcal{O}(n^2)$ tíma.

