Reiknirit Dijkstras (1959)

Bergur Snorrason

March 4, 2024

- Gerum ráð fyrir að við séum með vegið net $G = (V, E, w)$.

- Gerum ráð fyrir að við séum með vegið net $G = (V, E, w)$.
- Látum $u_1, u_2, \ldots, u_n$ vera vega í netinu (V, E).

- Gerum ráð fyrir að við séum með vegið net $G = (V, E, w)$.
- Látum $u_1, u_2, ..., u_n$ vera vega í netinu (V, E).
- Við segjum þá að *lengdin* á veginum sé

$$\sum_{j=1}^{n-1} w(u_j, u_{j+1}).$$

- Gerum ráð fyrir að við séum með vegið net $G = (V, E, w)$.
- Látum $u_1, u_2, \ldots, u_n$ vera vega í netinu (V, E).
- Við segjum þá að *lengdin* á veginum sé

$$\sum_{j=1}^{n-1} w(u_j, u_{j+1}).$$

- Við höfum nú áhuga á að vita hvernig við finnum stysta veg milli tiltekinna hnúta.

- Gerum ráð fyrir að við séum með vegið net $G = (V, E, w)$.
- Látum $u_1, u_2, \ldots, u_n$ vera vega í netinu (V, E).
- Við segjum þá að *lengdin* á veginum sé

$$\sum_{j=1}^{n-1} w(u_j, u_{j+1}).$$

- Við höfum nú áhuga á að vita hvernig við finnum stysta veg milli tiltekinna hnúta.
- Tökum þó eftir einu.

- Gerum ráð fyrir að við séum með vegið net $G = (V, E, w)$.
- Látum $u_1, u_2, \ldots, u_n$ vera vega í netinu (V, E).
- Við segjum þá að *lengdin* á veginum sé

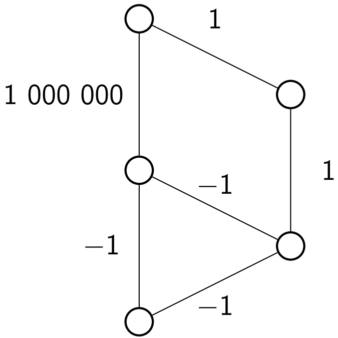
$$\sum_{j=1}^{n-1} w(u_j, u_{j+1}).$$

- Við höfum nú áhuga á að vita hvernig við finnum stysta veg milli tiltekinna hnúta.
- Tökum þó eftir einu.
- Þó svo að til sé vegur á milli hnúta þá þarf ekki að vera til stysti vegur.

- Gerum ráð fyrir að við séum með vegið net $G = (V, E, w)$.
- Látum $u_1, u_2, \ldots, u_n$ vera vega í netinu (V, E).
- Við segjum þá að *lengdin* á veginum sé

$$\sum_{j=1}^{n-1} w(u_j, u_{j+1}).$$

- Við höfum nú áhuga á að vita hvernig við finnum stysta veg milli tiltekinna hnúta.
- Tökum þó eftir einu.
- Þó svo að til sé vegur á milli hnúta þá þarf ekki að vera til stysti vegur.
- Tökum dæmi.


1
1 000 000
1
−1
−1
−1

- Vandamálin myndast þegar við getum gert rásir af neikvæðri lengd.

- Vandamálin myndast þegar við getum gert rásir af neikvæðri lengd.
- Við munum sníða tímabundið framhjá þessu með því að gera ráð fyrir að $w(e) > 0$ gildi fyrir öll e í E.

- Vandamálin myndast þegar við getum gert rásir af neikvæðri lengd.
- Við munum sníða tímabundið framhjá þessu með því að gera ráð fyrir að $w(e) > 0$ gildi fyrir öll e í E.
- Algengasta leiðin til að leysa þetta vandamál er með reikniriti Dijkstras.

- Vandamálin myndast þegar við getum gert rásir af neikvæðri lengd.
- Við munum sníða tímabundið framhjá þessu með því að gera ráð fyrir að $w(e) > 0$ gildi fyrir öll e í E.
- Algengasta leiðin til að leysa þetta vandamál er með reikniriti Dijkstras.
- Það er ekki ósvipað breiddarleit.

- Við merkjum alla hnúta „óséða“, nema einn sem við merkjum „séðan“.

- Við merkjum alla hnúta „óséða", nema einn sem við merkjum „séðan".
- Sá hnútur er kallaður *upphafsnúturinn*.

- Við merkjum alla hnúta „óséða", nema einn sem við merkjum „séðan".
- Sá hnútur er kallaður *upphafsnúturinn*.
- Við gefum svo öllum hnútum gildi sem upphafstillt er sem ∞, nema upphafshnúturinn hefur gildi 0.

- Við merkjum alla hnúta „óséða'', nema einn sem við merkjum „séðan''.
- Sá hnútur er kallaður *upphafsnúturinn*.
- Við gefum svo öllum hnútum gildi sem upphafstillt er sem ∞, nema upphafshnúturinn hefur gildi 0.
- Þetta gildi svara í raun til stysta vegur sem við höfum fundið hingað til.

- Við merkjum alla hnúta „óséða'', nema einn sem við merkjum „séðan''.
- Sá hnútur er kallaður *upphafsnúturinn*.
- Við gefum svo öllum hnútum gildi sem upphafstillt er sem ∞, nema upphafshnúturinn hefur gildi 0.
- Þetta gildi svara í raun til stysta vegur sem við höfum fundið hingað til.
- Við endurtökum svo eftirfarandi skref þangað til engir hnútar eru „séðir'':

- Við merkjum alla hnúta „óséða“, nema einn sem við merkjum „séðan“.
- Sá hnútur er kallaður *upphafsnúturinn*.
- Við gefum svo öllum hnútum gildi sem upphafstillt er sem ∞, nema upphafshnúturinn hefur gildi 0.
- Þetta gildi svara í raun til stysta vegur sem við höfum fundið hingað til.
- Við endurtökum svo eftirfarandi skref þangað til engir hnútar eru „séðir“:
  - Tökum þann „séða“ hnút u sem hefur minnsta gildi.

- Við merkjum alla hnúta „óséða", nema einn sem við merkjum „séðan".
- Sá hnútur er kallaður *upphafsnúturinn*.
- Við gefum svo öllum hnútum gildi sem upphafstillt er sem ∞, nema upphafshnúturinn hefur gildi 0.
- Þetta gildi svara í raun til stysta vegur sem við höfum fundið hingað til.
- Við endurtökum svo eftirfarandi skref þangað til engir hnútar eru „séðir":
  - Tökum þann „séða" hnút u sem hefur minnsta gildi.
  - Táknum gildi u með g.

- Við merkjum alla hnúta „óséða”, nema einn sem við merkjum „séðan”.
- Sá hnútur er kallaður *upphafsnúturinn*.
- Við gefum svo öllum hnútum gildi sem upphafstillt er sem ∞, nema upphafshnúturinn hefur gildi 0.
- Þetta gildi svara í raun til stysta vegur sem við höfum fundið hingað til.
- Við endurtökum svo eftirfarandi skref þangað til engir hnútar eru „séðir”:
  - Tökum þann „séða” hnút u sem hefur minnsta gildi.
  - Táknum gildi u með g.
  - Fyrir alla leggi af gerðinni $e_v = (u, v)$ þá uppfærum við gildið hjá v ef það er stærra en $g + w(e_v)$.

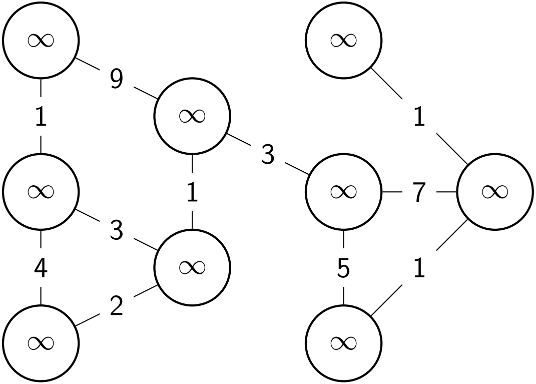
- Við merkjum alla hnúta „óséða”, nema einn sem við merkjum „séðan”.
- Sá hnútur er kallaður *upphafsnúturinn*.
- Við gefum svo öllum hnútum gildi sem upphafstillt er sem ∞, nema upphafshnúturinn hefur gildi 0.
- Þetta gildi svara í raun til stysta vegur sem við höfum fundið hingað til.
- Við endurtökum svo eftirfarandi skref þangað til engir hnútar eru „séðir”:
  - Tökum þann „séða” hnút u sem hefur minnsta gildi.
  - Táknum gildi u með g.
  - Fyrir alla leggi af gerðinni $e_v = (u, v)$ þá uppfærum við gildið hjá v ef það er stærra en $g + w(e_v)$.
  - Þetta þýðir í raun að til sé styttri vegur til v í gegnum u.

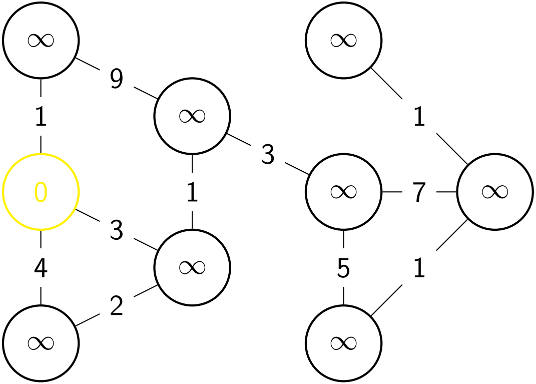
- Við merkjum alla hnúta „óséða", nema einn sem við merkjum „séðan".
- Sá hnútur er kallaður *upphafsnúturinn*.
- Við gefum svo öllum hnútum gildi sem upphafstillt er sem ∞, nema upphafshnúturinn hefur gildi 0.
- Þetta gildi svara í raun til stysta vegur sem við höfum fundið hingað til.
- Við endurtökum svo eftirfarandi skref þangað til engir hnútar eru „séðir":
  - Tökum þann „séða" hnút u sem hefur minnsta gildi.
  - Táknum gildi u með g.
  - Fyrir alla leggi af gerðinni $e_v = (u, v)$ þá uppfærum við gildið hjá v ef það er stærra en $g + w(e_v)$.
  - Þetta þýðir í raun að til sé styttri vegur til v í gegnum u.
  - Síðan merkjum við u sem „kláraðann".

- Tökum eftir að ef $w(e) = 1$ fyrir alla leggi $e \in E$ þá er þetta breiddarleit.

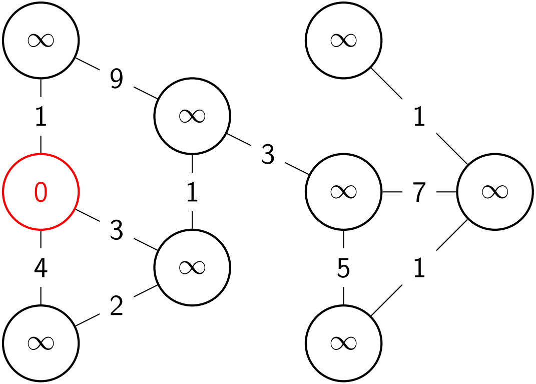
- Tökum eftir að ef $w(e) = 1$ fyrir alla leggi $e \in E$ þá er þetta breiddarleit.
- Þetta reiknirit er gráðugt og við munum ekki sanna að það skili alltaf réttum gildum.

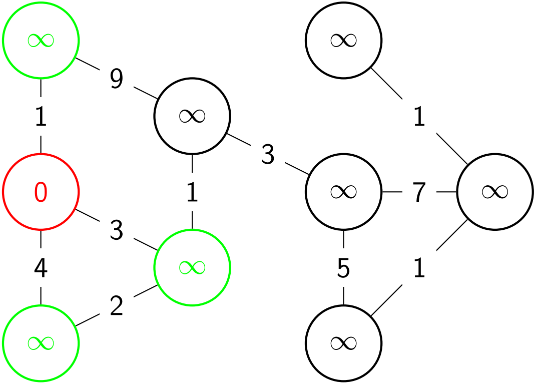
- Tökum eftir að ef $w(e) = 1$ fyrir alla leggi $e \in E$ þá er þetta breiddarleit.
- Þetta reiknirit er gráðugt og við munum ekki sanna að það skili alltaf réttum gildum.
- Reikniritið skilar í raun stysta veg frá upphafshnútnum í alla hnúta.

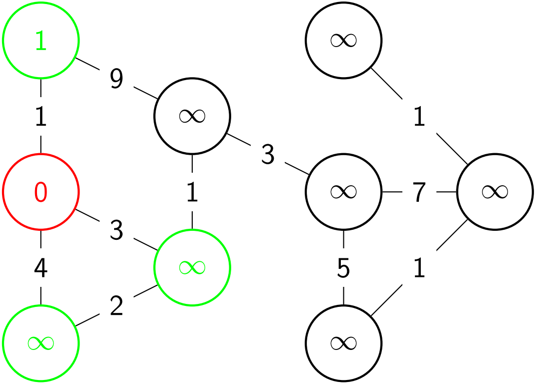

∞
∞
∞
∞
∞
∞
∞
∞
∞
9
1
3
1
3
4
2
1
7
5
1

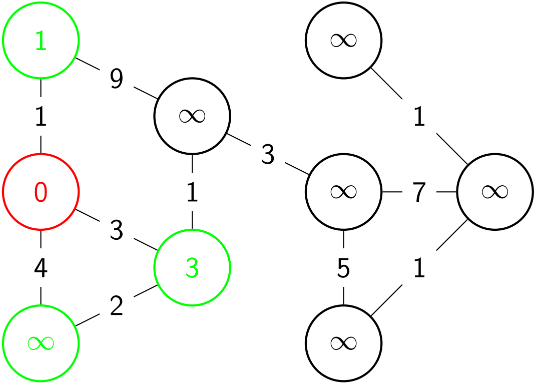


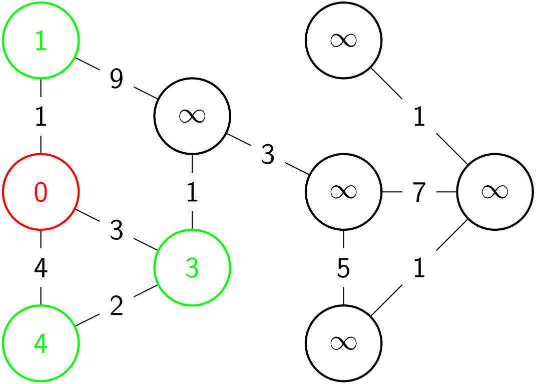
∞
9
1
∞
3
0
1
∞
7
∞
3
∞
5
1
4
2
∞
∞
∞

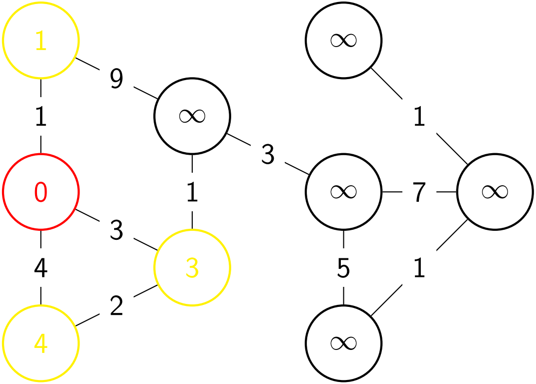

∞
9
1
∞
3
0
1
∞
7
∞
3
4
∞
5
1
2
∞
∞
1
∞

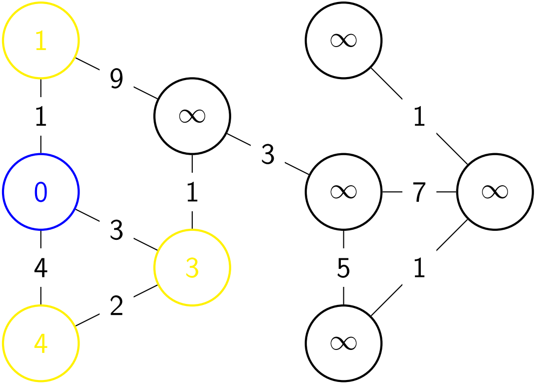

∞
9
1
∞
0
3
1
3
∞
4
∞
2
∞
1
∞
7
∞
5
1
∞

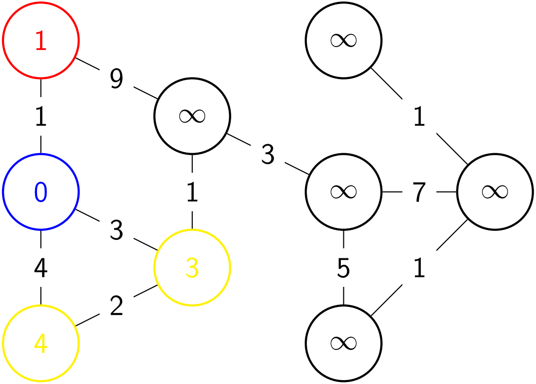

1
9
∞
1
∞
1
3
0
∞
7
∞
1
3
∞
4
5
1
2
∞
∞

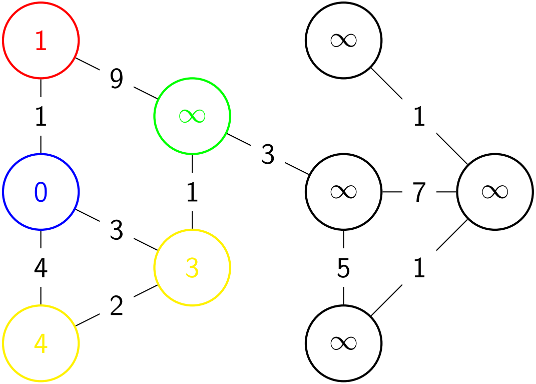

1
∞
9
1
∞
1
3
0
∞
7
∞
1
3
3
4
5
1
2
∞
∞

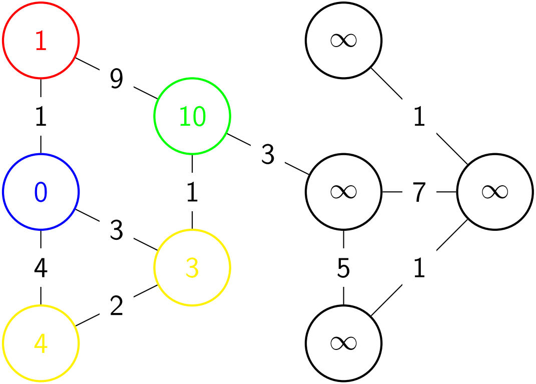

1
∞
9
∞
1
1
3
0
∞
7
∞
1
3
3
4
5
1
2
4
∞

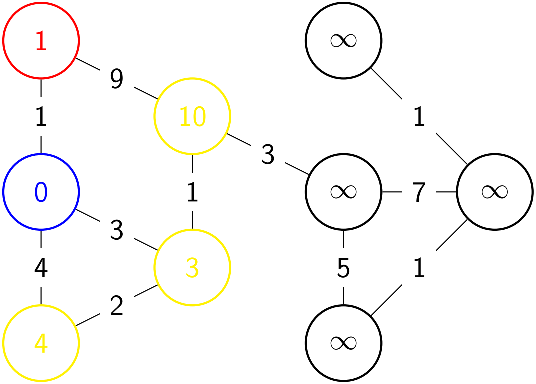

1
9
1
∞
0
3
1
3
4
2
4
∞
1
3
∞
7
∞
5
1
∞

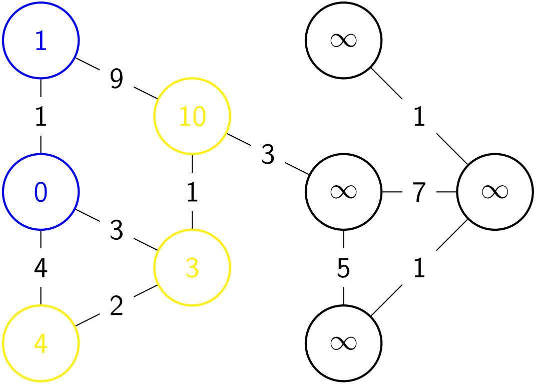

1
9
1
0
3
1
3
4
2
4
3
∞
∞
∞
∞
∞
7
5
1
1


1
9
1
∞
3
0
3
1
∞
7
∞
3
4
2
5
1
4
∞
∞
∞

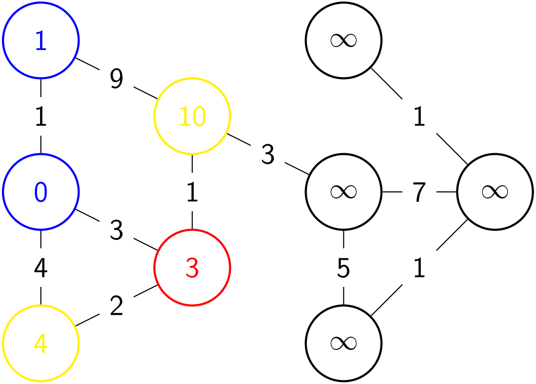

1
9
1
∞
3
0
1
3
3
4
2
4
∞
1
∞
7
∞
5
1
∞

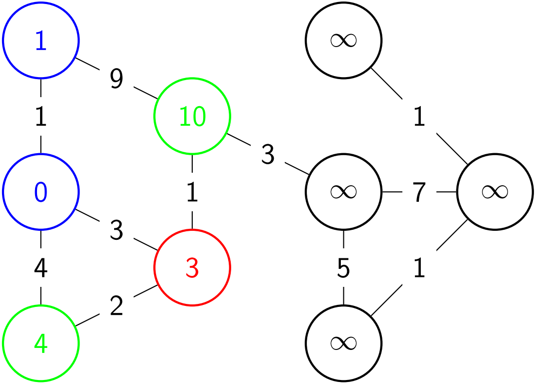

1
∞
9
1
10
1
3
0
1
∞
7
∞
3
3
4
5
1
2
4
∞

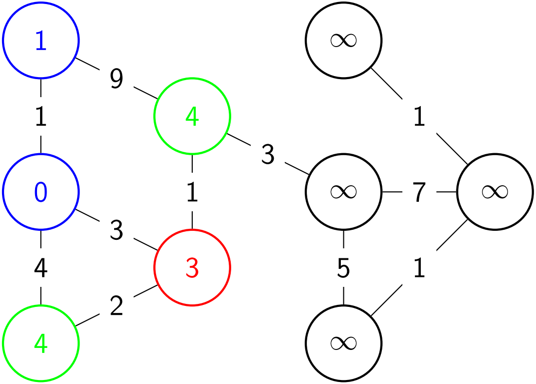

1
9
1
10
3
0
1
3
3
4
4
2
∞
1
∞
7
∞
5
1
∞

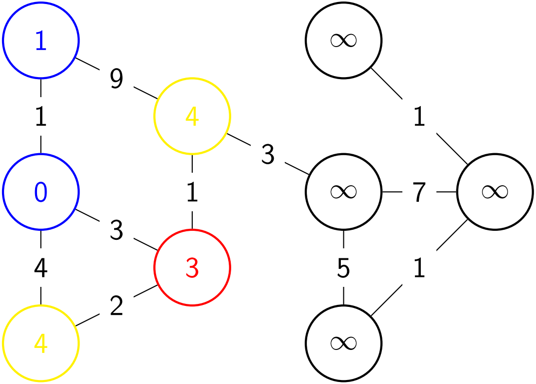


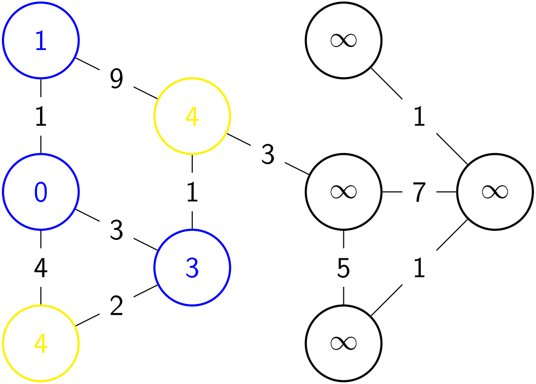
1
9
1
10
3
0
1
3
3
4
2
4
∞
1
∞
7
∞
5
1
∞

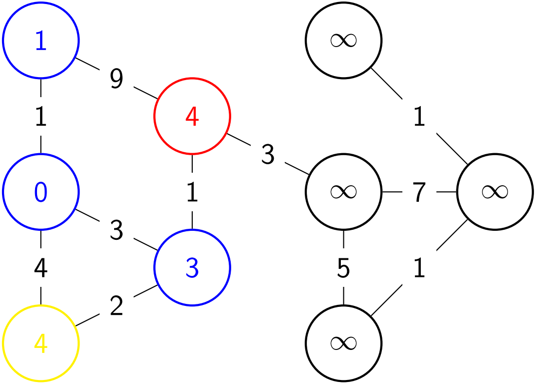

1
9
10
1
3
0
1
7
3
3
4
5
1
2
4
∞
∞
∞
∞
∞
1
1

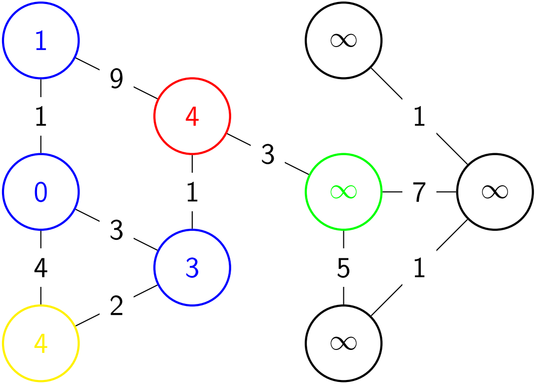

1
0
4
10
3
∞
∞
∞
∞
9
1
3
1
3
4
2
1
7
5
1


1
9
1
4
3
0
1
3
4
4
3
2
3
∞
1
∞
7
∞
5
1
∞

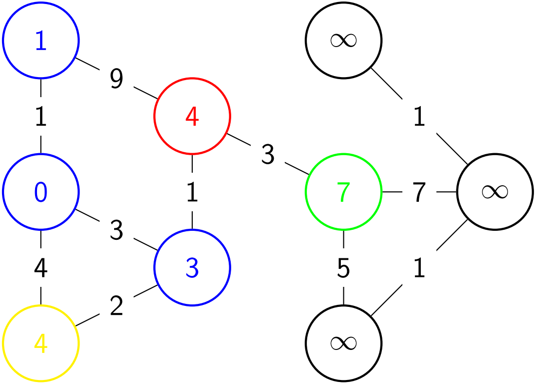

1
9
4
1
3
0
1
7
3
3
4
5
1
2
4
∞
∞
∞
∞
∞

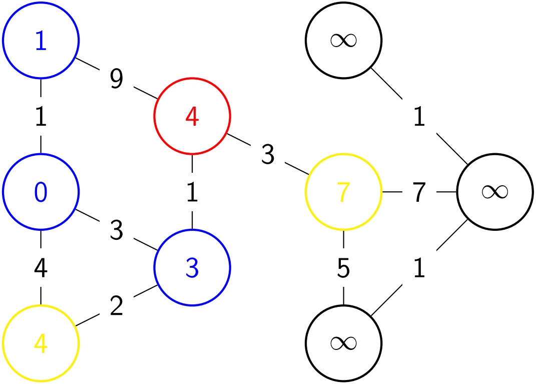

1
9
4
1
3
∞
1
0
∞
7
∞
1
3
3
4
5
1
2
4
∞

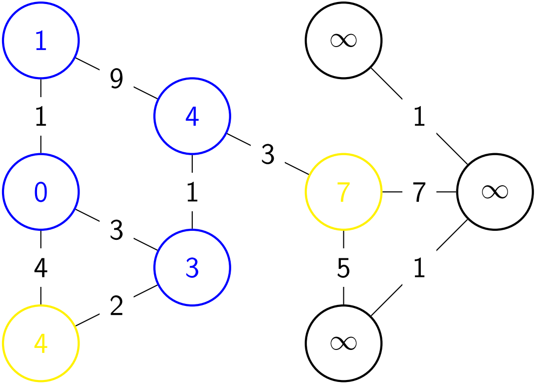

1
9
4
1
3
0
1
3
3
4
2
4
∞
1
∞
7
∞
5
1
∞

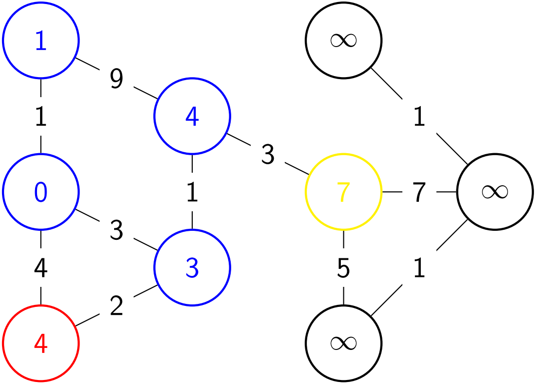


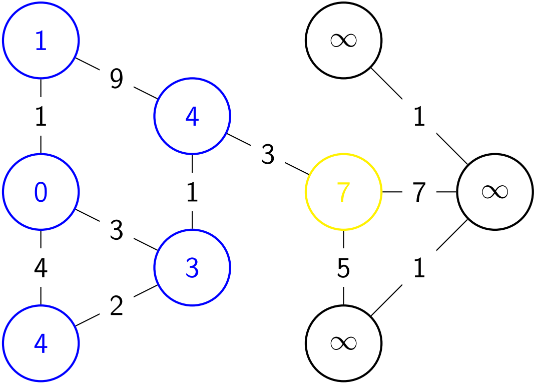
1
0
4
4
3
∞
∞
∞
∞
9
1
3
4
2
1
3
1
7
5
1

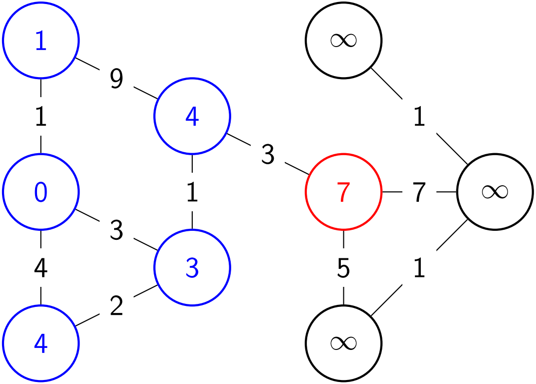

1
9
1
4
3
∞
1
0
1
7
7
∞
3
3
4
5
1
2
4
∞

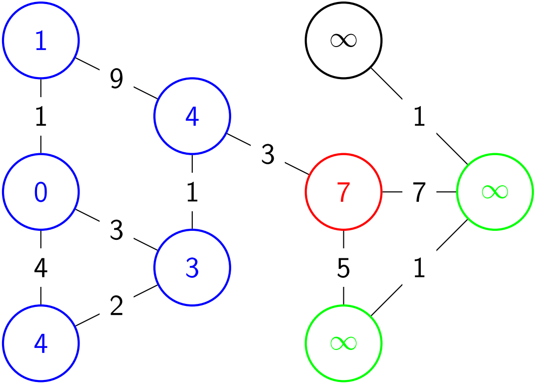

1
9
4
1
3
0
1
7
∞
3
7
∞
3
4
5
1
4
2
∞

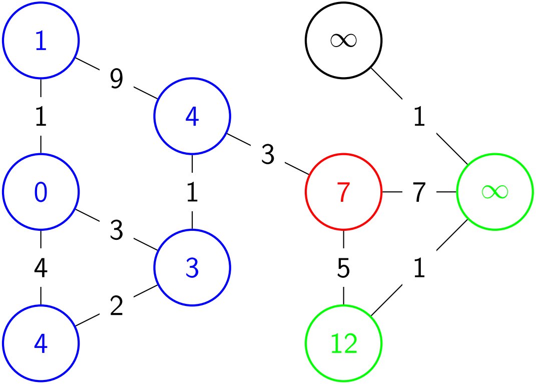

1
∞
9
1
4
1
3
0
1
7
7
∞
3
3
4
5
1
2
4
∞

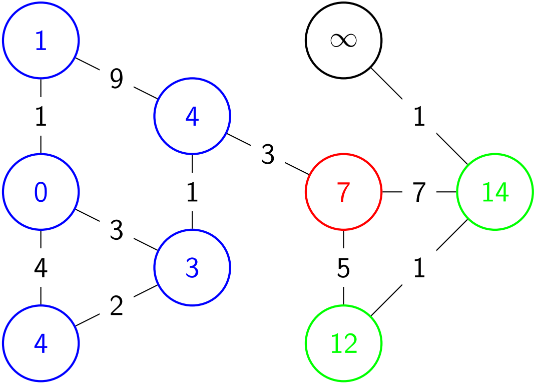

1
9
4
1
3
0
1
7
3
3
∞
1
7
∞
4
4
2
5
1
∞

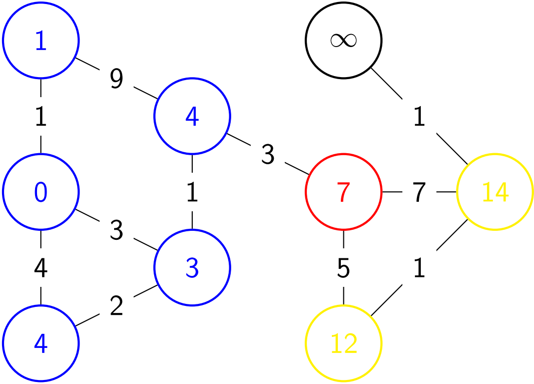

1
9
1
4
3
0
7
1
3
7
4
3
5
4
2
∞
1
∞
1
∞

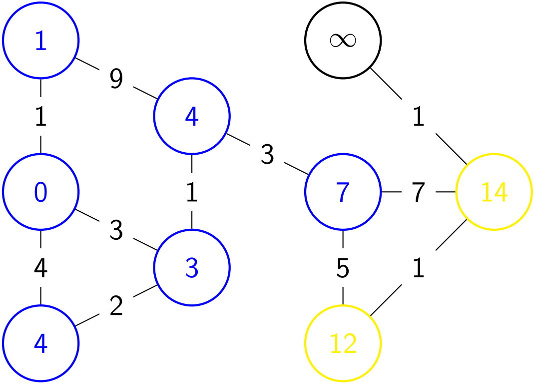

1
9
4
1
3
0
1
7
7
∞
1
∞
3
3
4
5
1
2
4
∞

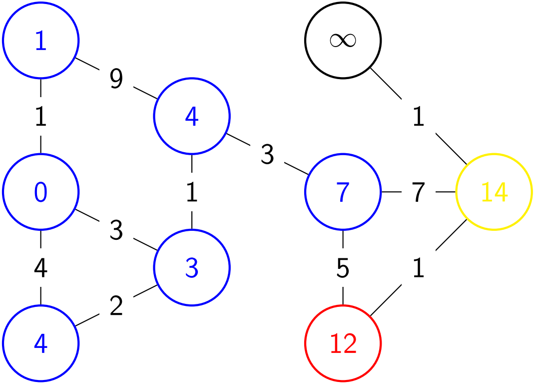

1
9
4
1
∞
1
0
3
7
7
∞
1
3
4
3
5
1
4
2
∞

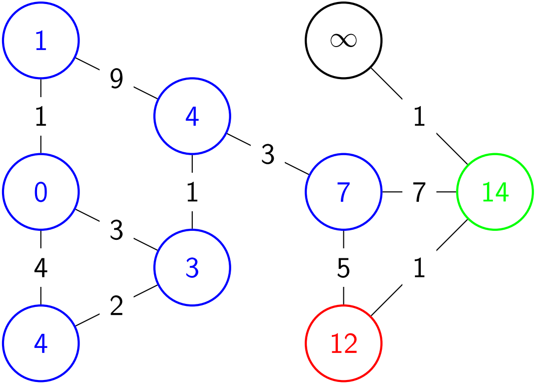

1
∞
9
1
4
1
3
0
1
7
7
∞
3
4
3
5
1
2
4
12

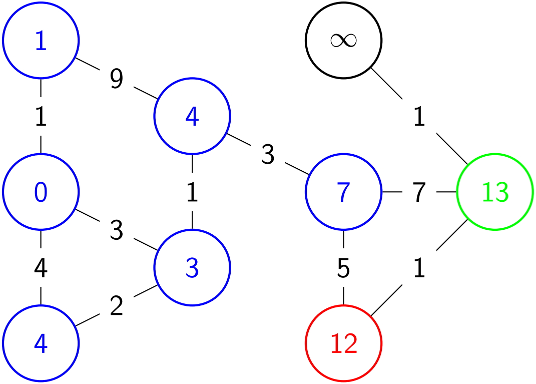

1
9
∞
1
4
1
3
0
1
7
7
14
3
4
3
5
1
2
4
12

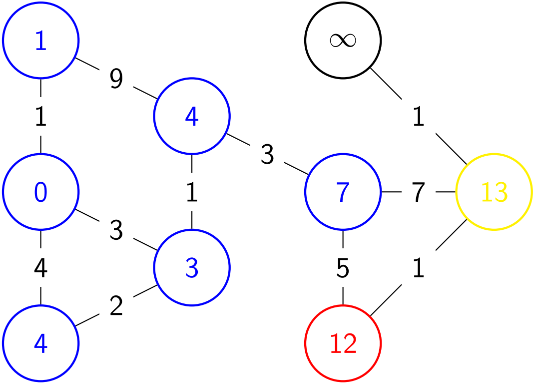

1
9
4
1
3
0
1
7
∞
1
7
14
3
4
3
5
1
2
4
12

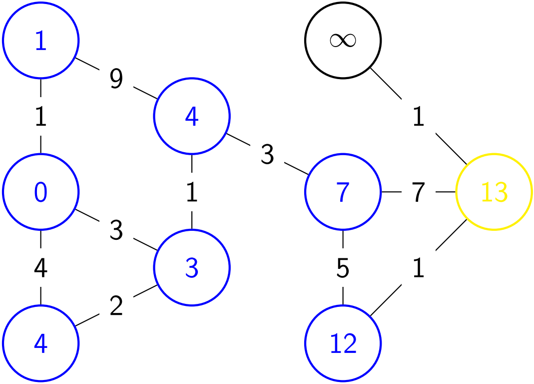

1
9
4
1
3
0
1
3
7
7
14
4
2
3
5
1
4
12
∞
1

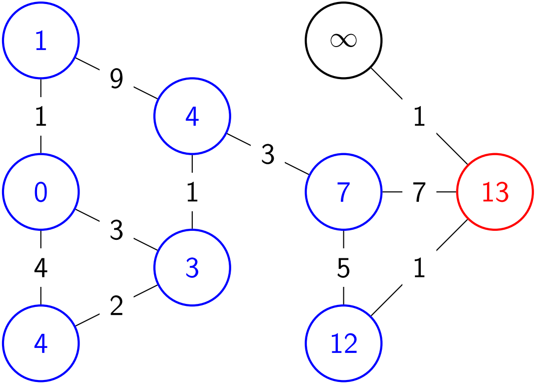

1
9
4
1
1
3
0
3
1
7
7
14
3
4
5
1
4
2
12
∞
1

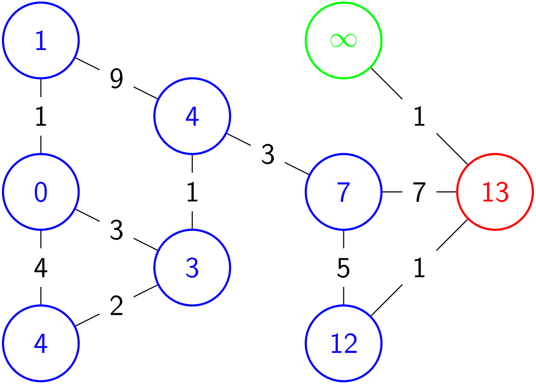

1
9
4
1
∞
1
0
3
1
7
7
14
3
4
3
5
1
2
4
12

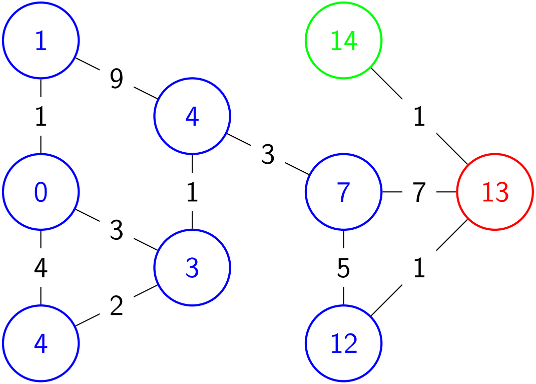

1
9
4
1
1
0
3
7
7
13
3
4
3
5
1
4
2
12
∞
1

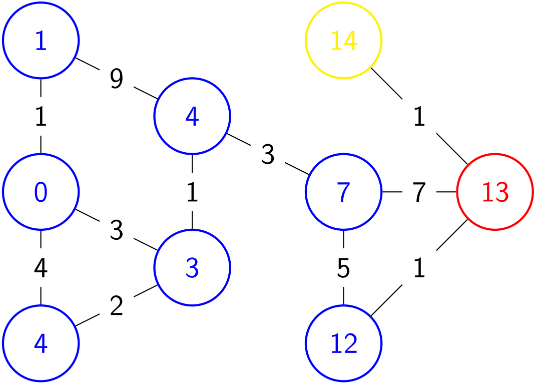

1
9
4
1
0
3
1
3
4
2
4
∞
1
3
7
7
13
5
1
12

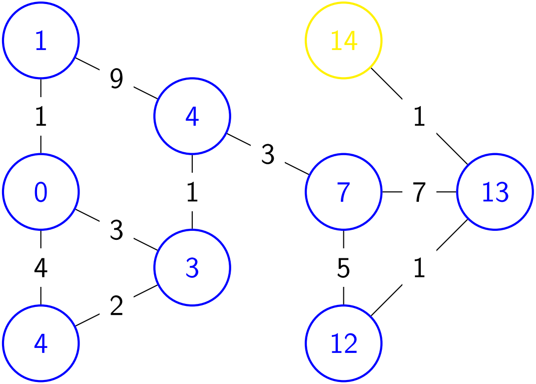

1
4
0
3
4
∞
7
13
12
9
1
3
1
3
4
2
1
7
5
1

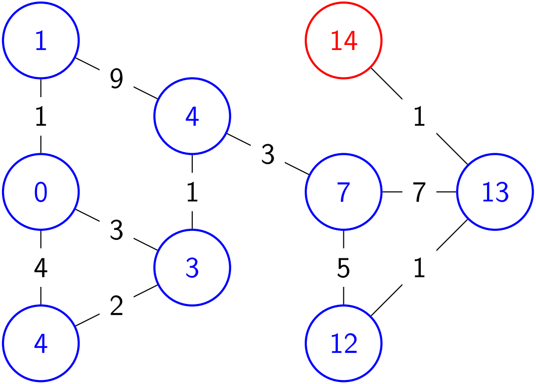

1
∞
9
1
4
1
3
0
1
7
7
13
3
4
3
5
1
4
2
12

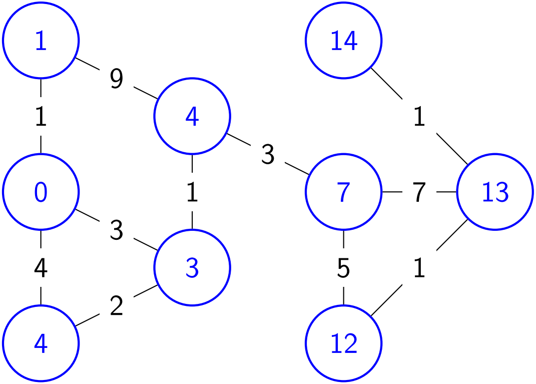

1
9
4
1
3
0
1
7
7
13
∞
1
3
3
4
2
4
5
1
12


1
14
9
1
1
4
3
0
7
7
13
1
3
3
4
5
1
2
4
12


1
14
9
1
4
1
3
0
1
7
7
13
3
3
4
5
1
2
4
12


1
14
9
4
1
1
3
0
1
7
7
13
3
3
4
5
1
2
4
12


1
14
9
1
1
4
3
3
0
1
7
7
13
3
3
4
5
1
2
4
12


1
14
9
1
4
1
3
0
1
7
7
13
3
3
4
5
1
2
4
12

- Við útfærum þetta líkt og breiddarleit, nema í stað biðraðar notum við forgangsbiðröð.

- Við útfærum þetta líkt og breiddarleit, nema í stað biðraðar notum við forgangsbiðröð.
- Við þurfum þó að passa okkur á einu.

- Við útfærum þetta líkt og breiddarleit, nema í stað biðraðar notum við forgangsbiðröð.
- Við þurfum þó að passa okkur á einu.
- Þegar við uppfærum gildið á hnút v bætum við nýja gildinu í forgangsbiðröð.

- Við útfærum þetta líkt og breiddarleit, nema í stað biðraðar notum við forgangsbiðröð.
- Við þurfum þó að passa okkur á einu.
- Þegar við uppfærum gildið á hnút v bætum við nýja gildinu í forgangsbiðröð.
- Gamla gildið er þó ennþá í biðröðinni svo við þurfum að passa okkur á ítra þá ekki í gegnum alla nágranna v aftur.

- Við útfærum þetta líkt og breiddarleit, nema í stað biðraðar notum við forgangsbiðröð.
- Við þurfum þó að passa okkur á einu.
- Þegar við uppfærum gildið á hnút v bætum við nýja gildinu í forgangsbiðröð.
- Gamla gildið er þó ennþá í biðröðinni svo við þurfum að passa okkur á ítra þá ekki í gegnum alla nágranna v aftur.
- Við gerum þetta með því að bera saman gildið sem er í forgangsbiðröðinni og besta gildið sem við höfum núþegar fundið.

- Við útfærum þetta líkt og breiddarleit, nema í stað biðraðar notum við forgangsbiðröð.
- Við þurfum þó að passa okkur á einu.
- Þegar við uppfærum gildið á hnút v bætum við nýja gildinu í forgangsbiðröð.
- Gamla gildið er þó ennþá í biðröðinni svo við þurfum að passa okkur á ítra þá ekki í gegnum alla nágranna v aftur.
- Við gerum þetta með því að bera saman gildið sem er í forgangsbiðröðinni og besta gildið sem við höfum núþegar fundið.
- Forgangsbiðraðir í `C++` skila líka alltaf stærsta gildinu.

- Við útfærum þetta líkt og breiddarleit, nema í stað biðraðar notum við forgangsbiðröð.
- Við þurfum þó að passa okkur á einu.
- Þegar við uppfærum gildið á hnút v bætum við nýja gildinu í forgangsbiðröð.
- Gamla gildið er þó ennþá í biðröðinni svo við þurfum að passa okkur á ítra þá ekki í gegnum alla nágranna v aftur.
- Við gerum þetta með því að bera saman gildið sem er í forgangsbiðröðinni og besta gildið sem við höfum núþegar fundið.
- Forgangsbiðraðir í C++ skila líka alltaf stærsta gildinu.
- Við höfum þó áhuga a minnsta gildinu, svo við skiptum um formerki á tölunum sem við látum inn í forgangsbiðröðina.

```
vi dijkstra(vvii& g, int s)
{
    int i, x, w, n = g.size();
    vi d(n, INF);
    priority_queue<ii> q;
    q.push(ii(-0, s)), d[s] = 0;
    while (q.size() > 0)
    {
        w = -q.top().first, x = q.top().second, q.pop();
        if (w > d[x]) continue;
        for (i = 0; i < g[x].size(); i++)
        {
            if (d[g[x][i].first] <= w + g[x][i].second) continue;
            q.push(ii(-(w + g[x][i].second), g[x][i].first));
            d[g[x][i].first] = w + g[x][i].second;
        }
    }
    return d;
}
```

- Fyrir hvern legg í netinu gætum við þurft að bæta í forgangsbiðröðina.

- Fyrir hvern legg í netinu gætum við þurft að bæta í forgangsbiðröðina.
- Við heimsækjum hver hnút að mestu einu sinni.

- Fyrir hvern legg í netinu gætum við þurft að bæta í forgangsbiðröðina.
- Við heimsækjum hver hnút að mestu einu sinni.
- Svo tímaflækjan er $\mathcal{O}($ $)$.

- Fyrir hvern legg í netinu gætum við þurft að bæta í forgangsbiðröðina.
- Við heimsækjum hver hnút að mestu einu sinni.
- Svo tímaflækjan er $\mathcal{O}((V + E)\log E)$.