

(Ignorem o fato de quem tem dois exercícios. Só estamos fazendo o segundo)

1) Verifique que:

$$T(k.(x, y)) = k.T(x, y), \text{ para todo } (x, y) \in R \text{ e para todo } k \in R$$

Mostre todos os detalhes do que fizer.

2) Use a fatoração LU para resolver o seguinte sistema linear:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -2$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 1$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 = 3$$

$$1x_1 + 1x_2 + 1x_3 = -2$$

$$2x_1 + 1x_2 - 1x_3 = 1$$

$$2x_1 - 1x_2 + 1x_3 = 3$$

Primeiro precisamos escrever a matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Precisamos que os valores 2, 2, -1 virem 0. Para isso, iremos para a fase *Multiplificador*.

Multiplificador 1

$$m_{21} = \frac{U_{21}}{U_{11}} = \frac{2}{1} = 2$$

(U_{21} corresponde ao número que está na 2ª linha da 1ª coluna da matriz U . U_{11} corresponde ao número que está na 1ª linha da 1ª coluna da matriz U .)

Agora fazemos a substituição da matriz L :

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

E voltamos para U :

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 - (2.1) & 1 - (2.1) & -1 - (2.1) \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

2 virou 0. Faltam 2 e -1!

Multiplicador 2

$$m_{31} = \frac{U_{31}}{U_{11}} = \frac{2}{1} = 2$$

(U_{31} corresponde ao número que está na 3ª linha da 1ª coluna da matriz U . U_{11} corresponde ao número que está na 1ª linha da 1ª coluna da matriz U .)

Agora fazemos a substituição da matriz L :

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

E voltamos para U :

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 2 - (2 \cdot 1) & -1 - (2 \cdot 1) & 1 - (2 \cdot 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

2 virou 0. Faltava somente -1 (que, agora, é -3).

Multiplicador 3

$$m_{32} = \frac{U_{32}}{U_{22}} = \frac{-3}{-1} = 3$$

(U_{32} corresponde ao número que está na 3ª linha da 2ª coluna da matriz U . U_{22} corresponde ao número que está na 2ª linha da 2ª coluna da matriz U .)

Agora fazemos a substituição da matriz L :

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

E voltamos para U :

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 - (3 \cdot 0) & -3 - (3 \cdot (-1)) & -1 - (3 \cdot (-3)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

-1 virou 0!!! Agora precisamos encontrar x_1, x_2, x_3 .

Encontrando valores de x

$Ax = b$ (como $A = L.U$, podemos dizer que:)

$LUx = b$ (vamos trocar Ux por y , porque os matemáticos fazem assim)

$$Ly = b$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$1y_1 + 0y_2 + 0y_3 = -2 \rightarrow y_1 = -2$$

$$2y_1 + 1y_2 + 0y_3 = 1$$

$$2.(-2) + 1y_2 + 0y_3 = 1 \rightarrow y_2 = 5$$

$$2y_1 + 2y_2 + 1y_3 = 3$$

$$2.(-2) + 3.(5) + 1y_3 = 3 \rightarrow y_3 = -8$$

$$Ux = y$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ -8 \end{bmatrix}$$

$$Ux = y$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ -8 \end{bmatrix}$$

$$0x_1 + 0x_2 + 8x_3 = -8 \rightarrow x_3 = -1$$

$$0x_1 - 1x_2 - 3x_3 = 5$$

$$0x_1 - 1x_2 - 3.(-1) = 5 \rightarrow x_2 = -2$$

$$1x_1 + 1x_2 + 1x_3 = -2$$

$$1x_1 + 1.(-2) + 1.(-1) = -2 \rightarrow x_1 = 1$$

Prontinho! Encontramos x_1, x_2, x_3 .