Transformação Linear

$$T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

A função deve satisfazer adição e multiplicação escalar:

$$T(u + v) = T(u) + T(v)$$

$$T(cu) = cT(u)$$

Matriz de Transformações B e Vetor u

Considere a matriz de transformações B e vetor u:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

-> Calcule $T(u)$ usando a matriz B.

| Cálculo: |

Ou seja, multiplicamos B por u:

$$T(u) = B \cdot u = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Portanto, a transformação $T(u)$ resulta no vetor (8, 18).

Transformação Linear Simples

Considere a transformação linear dada por:

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 3y \\ 4x + 5y \end{pmatrix}$$

-> Encontre a matriz A que representa a transformação T:

| Cálculo: |

$$A = [T(e_1) \quad T(e_2)]$$

mas, antes, como chegar em $T(e_1)$ e $T(e_2)$?

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T(e_1) = T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \\ 4 \cdot 1 + 5 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$T(e_2) = T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \\ 4 \cdot 0 + 5 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Logo,

$$A = [T(e_1) \quad T(e_2)] = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

-> Calcule:

$$T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

| Cálculo: |

$$A \cdot T\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \\ 4 \cdot 1 + 5 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 14 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\14\end{pmatrix}$$

Rotação

Considere o vetor:

$$v=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

-> Aplique a transformação de rotação $R(90^\circ)$ ao vetor v. Qual é o novo vetor?

| Cálculo: |

A matriz de rotação é:

$$R(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

$$R(90^\circ)=\begin{pmatrix}\cos 90^\circ & -\sin 90^\circ\\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$R(90^\circ)\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$R(90^\circ)\begin{pmatrix}0.1-1.0\\ 1.1+0.0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Combinação de Transformações

Considere a transformação T que primeiro translada o vetor (x, y) por $(3, -2)$ e depois rotaciona o vetor resultante por 45°.

1. Escreva a fórmula combinada para a transformação T:

$$(x', y') = (x+3, y-2)$$

Então a fórmula combinada é:

$$T_{(x',y')} = R(45^\circ)(x+3, y-2)$$

2. Aplique T ao vetor $v = (1,1)$ e encontre o vetor resultante:

Primeiro fazemos a translação:

$$v = (1,1) \rightarrow (1+3, 1-2) = (4, -1)$$

Agora, a rotação:

$$R(45^\circ) \cdot (4, -1) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 4 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (-1) \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 4 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{4\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{2}}{2} \\ \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Logo, o vetor resultante que temos é $v = (\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2})$

Autovalores e Autovetores

- Autovetor: vetor que não muda de direção, nem rotaciona. Ele só aumenta ou diminui.
- Autovalor: quanto o vetor aumentou ou diminuiu.

$$(x, y) \to T(x, y) = (x + y, -2x + 4y)$$

-> Verifique se

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

é um autovetor de T:

| Cálculo: |

$$T\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+2\\-2\cdot 1+4\cdot 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix} = 3\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

3 -> autovalor
(1, 2) -> autovetor
Portanto, sim, $\vec{v} = (1, 2)$ é um autovetor de T.

Encontrar um Autovetor de T

$$(x, y) \rightarrow T(x, y) = (x + y, -2x + 4y)$$

Vamos imaginar que temos uma transformação representada por uma matriz A:

$$A = \begin{pmatrix}1 & 1\\-2 & 4\end{pmatrix} \rightarrow 1x + 1y, -2x + 4y$$

Precisamos dos autovalores e autovetores:

1º : Autovalores

$$A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$$

> A = matriz transformação
>
> v = autovetor
>
> $lambda$ = autovalor
>
> Agora subtraimos λ de A:
>
> $$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$
>
> - Lembrando que:
>
> $$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
>
> E calculamos o determinante:
>
> $$\det(A - \lambda I) = 0$$
>
> $$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 4-\lambda \end{pmatrix} = 0$$
>
> $$(1-\lambda)(4-\lambda) - (-2 \cdot 1) = 0$$
>
> $$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 2$$

2º : Autovetores

Agora, para cada autovalor, encontramos o autovetor correspondente:

Para $\lambda = 3$:

$$(A - 3I) \cdot \vec{v} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1-3 & 1 \\ -2 & 4-3 \end{pmatrix} \vec{v} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \vec{v} = 0$$

(1) $-2v_1 + v_2 = 0$

(2) $-2v_1 + v_2 = 0$

$v_2 = 2v_1$

Agora escolhemos um valor qualquer para v_1 (normalmente se escolhe 1)

$v_2 = 2.1 = 2$

Logo, um autovetor correspondente é $\vec{v} = (1, 2)$

No exercício passado, multiplicamos tudo por $\frac{1}{2}$ por conveniência:

$\vec{v} = (\frac{1}{2}, 1)$

Como conferir:

$$A \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} (1 \cdot \frac{1}{2}) + (1 \cdot 1) \\ (-2 \cdot \frac{1}{2}) + (4 \cdot 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lembra que o número em evidência é o autovalor, e a matriz é o autovetor?

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = (\frac{1}{2}, 1)$$

Então podemos afirmar que $\vec{v} = (\frac{1}{2}, 1)$ é um autovetor de T.

Agora, para $\lambda = 2$:

$$(A - 2I) \cdot \vec{v} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1-2 & 1 \\ -2 & 4-2 \end{pmatrix} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{v} = 0$$

(1) $-v_1 + v_2 = 0$

> (2) $-2v_1 + 2v_2 = 0$
>
> (1) $v_2 = v_1$
>
> Agora escolhemos um valor qualquer para v_1 (nesse caso, escolhi 1):
> $v_2 = 1$
>
> Logo, um autovetor correspondente é: $\vec{v} = (1, 1)$
>
> Como conferir:
>
> $$A \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$
>
> $$\begin{pmatrix} (1 \cdot 1) + (1 \cdot 1) \\ (-2 \cdot 1) + (4 \cdot 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
>
> Lembra que o número em evidência é o autovalor, e a matriz é o autovetor?
>
> $$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1, 1)$$
>
> Então podemos afirmar que $\vec{v} = (1, 1)$ é um autovetor de T.