Fatoração LU

Use a fatoração LU para resolver o seguinte sistema linear: (x_1 + x_2 + x_3 = -2) (2x_1 + x_2 - x_3 = 1) (2x_1 - x_2 + x_3 = 3)

(Caso a explicação abaixo esteja um tanto confusa, vou colocar as imagens da minha ponderada (que está bem colorida) para ajudar)

Primeiro precisamos escrever a matriz (A): [A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \ 2 & 1 & -1 \ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \ x_2 \ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \ 1 \ 3 \end{pmatrix}]

[L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \ 0 & 1 & 0 \ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}] [U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \ 2 & 1 & -1 \ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}]

Precisamos que os valores 2,2,−1 virem 0. Para isso, iremos para a fase "Multiplicador".

Multiplicador 1

(m_{21} = \frac{L_{21}}{U_{11}} = \frac{2}{1} = 2)

((U_{21}) corresponde ao número que está na 2ª linha da 1ª coluna da matriz (U). (U_{11}) corresponde ao número que está na 1ª linha da 1ª coluna da matriz (U)).

Agora fazemos a substituição da matriz (L): (L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \ 2 & 1 & 0 \ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix})

E voltamos para (U): (U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \ 2 - 2(1) & 1 - 2(1) & -1 - 2(1) \ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \ 0 & -1 & -3 \ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix})

2 virou 0. Faltam 2 e -1!

Multiplicador 2

(m_{31} = \frac{L_{31}}{U_{11}} = \frac{2}{1} = 2) ((U_{31}) corresponde ao número que está na 3ª linha da 1ª coluna da matriz (U). (U_{11}) corresponde ao número que está na 1ª linha da 1ª coluna da matriz (U)).

Agora fazemos a substituição da matriz (L): (L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \ 2 & 1 & 0 \ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix})

E voltamos para (U): (U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \ 0 & -1 & -3 \ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix})

2 virou 0! Falta somente -1 (que, agora, virou -3).

Multiplicador 3

(m_{32} = \frac{L_{32}}{U_{22}} = \frac{-3}{-1} = 3) ((U_{32}) corresponde ao número que está na 3ª linha da 2ª coluna da matriz (U). (U_{22}) corresponde ao número que está na 2ª linha da 2ª coluna da matriz (U)).

Agora fazemos a substituição da matriz (L): (L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \ 2 & 1 & 0 \ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix})

E voltamos para (U): (U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \ 0 & -1 & -3 \ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix})

-1 virou 0!! Agora precisamos encontrar (x_1, x_2, x_3)!!

Encontrando valores de x

(Ax = b) (como (A = LU), podemos dizer que:) (LUx = b) (vamos trocar (Ux) por (y), porque os matemáticos fazem assim)

(Ly = b) (\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \ 2 & 1 & 0 \ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \ y_2 \ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \ 1 \ 3 \end{pmatrix})

(1y_1 + 0y_2 + 0y_3 = -2 \rightarrow y_1 = -2) (2y_1 + 1y_2 + 0y_3 = 1 \rightarrow 2(-2) + y_2 = 1 \rightarrow y_2 = 5) (2y_1 + 3y_2 + 1y_3 = 3 \rightarrow 2(-2) + 3(5) + y_3 = 3 \rightarrow y_3 = -8)

(Ux = y) (\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \ 0 & -1 & -3 \ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \ x_2 \ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \ 5 \ -8 \end{pmatrix})

(0x_1 + 0x_2 + 8x_3 = -8 \rightarrow x_3 = -1) (0x_1 - 1x_2 - 3x_3 = 5 \rightarrow -x_2 - 3(-1) = 5 \rightarrow x_2 = -2) (1x_1 + 1x_2 + 1x_3 = -2 \rightarrow x_1 + (-2) + (-1) = -2 \rightarrow x_1 = 1)

Prontinho! Encontramos (x_1, x_2, x_3).

Ponderada com imagens coloridas

(Ignorem o fato de quem tem dois exercícios. Só estamos fazendo o segundo)

1) Verifique que:
$T(k.(x,y)) = k.T(x,y),\ para\ todo\ (x,y) \in R\ e\ para\ todo\ k \in R$
Mostre todos os detalhes do que fizer.

2) Use a fatoração LU para resolver o seguinte sistema linear:
$x_1 + x_2 + x_3 = -2$
$2x_1 + x_2 - x_3 = 1$
$2x_1 - x_2 + x_3 = 3$

$1x_1 + 1x_2 + 1x_3 = -2$
$2x_1 + 1x_2 - 1x_3 = 1$
$2x_1 - 1x_2 + 1x_3 = 3$

Primeiro precisamos escrever a matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Precisamos que os valores $2, 2, -1$ virem 0. Para isso, iremos para a fase $Multiplicador$.

$Multiplicador\ 1$
$m_{21} = \frac{U_{21}}{U_{11}} = \frac{2}{1} = 2$
(U_{21} corresponde ao número que está na 2ª linha da 1ª coluna da matriz U. U_{11} corresponde ao número que está na 1ª linha da 1ª coluna da matriz U.)

Agora fazemos a substituição da matriz L:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

E voltamos para U:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 - (2.1) & 1 - (2.1) & -1 - (2.1) \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

2 virou 0. Faltam 2 e -1!

$Multiplicador\ 2$
$m_{31} = \frac{U_{31}}{U_{11}} = \frac{2}{1} = 2$
(U_{31} corresponde ao número que está na 3ª linha da 1ª coluna da matriz U. U_{11} corresponde ao número que está na 1ª linha da 1ª coluna da matriz U.)

Agora fazemos a substituição da matriz L:
$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

E voltamos para U:
$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 2-(2.1) & -1-(2.1) & 1-(2.1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix}$

2 virou 0. Falta somente -1 (que, agora, é -3).

$Multiplicador\ 3$
$m_{32} = \frac{U_{32}}{U_{22}} = \frac{-3}{-1} = 3$
(U_{32} corresponde ao número que está na 3ª linha da 2ª coluna da matriz U. U_{22} corresponde ao número que está na 2ª linha da 2ª coluna da matriz U.)

Agora fazemos a substituição da matriz L:
$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

E voltamos para U:
$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0-(3.0) & -3-(3.(-1)) & -1-(3.(-3)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

-1 virou 0!!! Agora precisamos encontrar x_1, x_2, x_3.

$Encontrando\ valores\ de\ x$

$Ax = b$ (como $A = L.U$, podemos dizer que:)

$LUx = b$ (vamos trocar Ux por y, porque os matemáticos fazem assim)

$Ly = b$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$1y_1 + 0y_2 + 0y_3 = -2 \rightarrow y_1 = -2$

$2y_1 + 1y_2 + 0y_3 = 1$

$2.(-2) + 1y_2 + 0y_3 = 1 \rightarrow y_2 = 5$

$2y_1 + 2y_2 + 1y_3 = 3$

$2.(-2) + 3.(5) + 1y_3 = 3 \rightarrow y_3 = -8$

$Ux = y$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ -8 \end{bmatrix}$$

$Ux = y$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ -8 \end{bmatrix}$$

$0x_1 + 0x_2 + 8x_3 = -8 \rightarrow x_3 = -1$

$0x_1 - 1x_2 - 3x_3 = 5$

$0x_1 - 1x_2 - 3.(-1) = 5 \rightarrow x_2 = -2$

$1x_1 + 1x_2 + 1x_3 = -2$

$1x_1 + 1.(-2) + 1.(-1) = -2 \rightarrow x_1 = 1$

Prontinho! Encontramos x_1 , x_2 , x_3.