三角形の面積公式まとめ

kakekakemiya

今回は、三角形の面積を導出する方法をまとめたプリントです。

高校数学の学習が進むにつれ、しれーっと三角形の面積公式は増えていくのですが、知らない間にちょっとずつ増えていくので抜けていそうで心配にな人も多いかと思います。

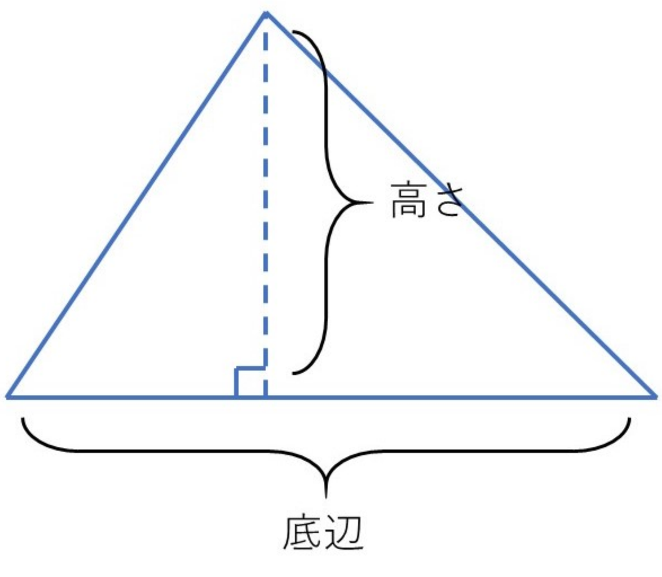
バイト前の暇つぶしに書き始めたのですべてのパターンを網羅する予定ではありませんが、**これだけ把握しておけばそうそう困ることはないよ**というレベルまでもっていくことを目指しています。

ベースとなる公式

小学校からお馴染みの三角形の面積公式

公式 1

$$S = \frac{1}{2} \times (\text{底辺}) \times (\text{高さ})$$



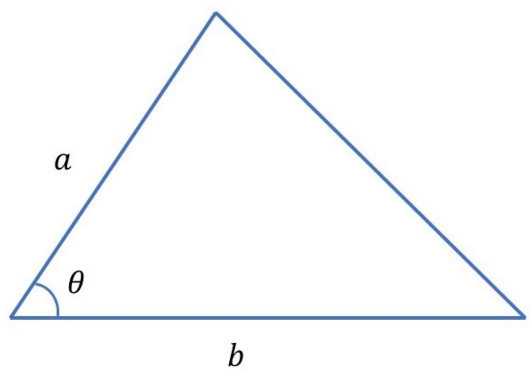
今回はこれをもとにして、色んな面積の公式を導いていきます。

三角関数を使った公式

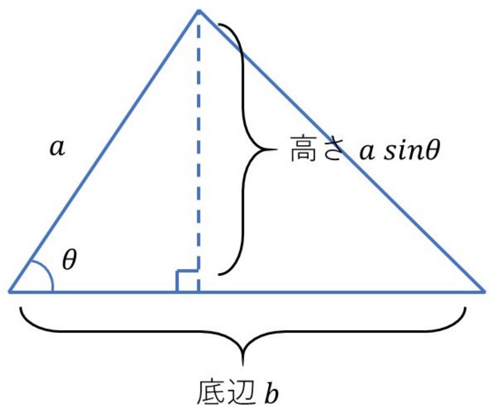
前述の通り

$$S = \frac{1}{2} \times (\text{底辺}) \times (\text{高さ})$$

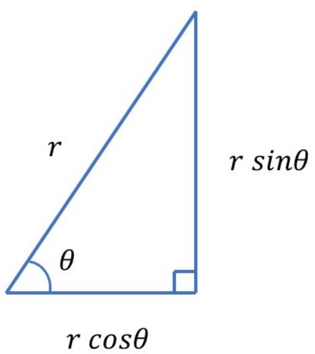
ですが、



図のように、二辺を a, b その間の角を θ とおくと、



底辺は b、高さは $asin\theta$ と置くことができるようになります。このとき、



を利用していることに注意してください。よって、

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2} \times (\text{底辺}) \times (\text{高さ}) \\
&= \frac{1}{2} \cdot b \cdot asin\theta \\
&= \frac{1}{2} absin\theta
\end{aligned}
$$

となります。

これが高校で習う最初の三角形の面積公式です。[*1]

公式 2 (sin を使った公式)

$$S = \frac{1}{2}absin\theta$$

ベクトルの内積を使った公式

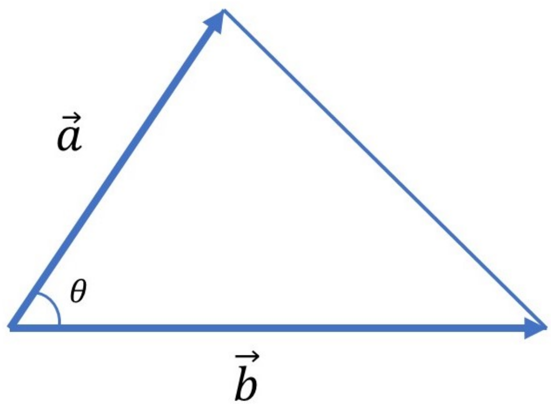
$$S = \frac{1}{2}absin\theta$$

ということですが、これは cos を使って書けないでしょうか？試しに書いてみましょう。

$$S = \frac{1}{2}ab\sqrt{1 - cos^2\theta}$$

ふむふむ。何が美味しいんだ？って感じですね。

あまりにも誘導チックですが、これをベクトルを使って書いてみましょう。a, b をベクトルの絶対値に直して



書くと

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}ab\sqrt{1 - cos^2\theta} \\ &= \frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sqrt{1 - cos^2\theta} \end{aligned}$$

ですね。ここまで何も面白くないですが、これをルートの中にぶち込んでみましょう。すると、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sqrt{1 - cos^2\theta} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\left(|\vec{a}||\vec{b}|\right)^2 - \left(|\vec{a}||\vec{b}|\right)^2 cos^2\theta} \end{aligned}$$

[*1] 僕は塾講 1 年目の時、これを中学生が知っていると誤認して解説に使ってしまった経験があります。

いや、随分といかついなおいって感じですが、次のように変形できるのです。

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\sqrt{\left(|\vec{a}||\vec{b}|\right)^2 - \left(|\vec{a}||\vec{b}|\right)^2 cos^2\theta} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\left(|\vec{a}||\vec{b}|\right)^2 - \left(|\vec{a}||\vec{b}|cos\theta\right)^2} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\left(|\vec{a}||\vec{b}|\right)^2 - \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{(\text{絶対値})^2 - (\text{内積})^2}
\end{aligned}
$$

ココまでくると実は欲しかった公式が得られています。ベクトルの単元の途中で何となく習うものの意外と影が薄くて忘れられがちな公式です。

公式 3 (ベクトルの内積を使った公式)

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{\left(|\vec{a}||\vec{b}|\right)^2 - \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2}$$

$S = \frac{1}{2}absin\theta$ の $sin\theta$ 部分を $\sqrt{1-cos^2\theta}$ で表現するために内積を引くのですね。式で覚えにくいって方は、

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{(\text{絶対値})^2 - (\text{内積})^2}$$

って言葉で覚えてもいいです。

ここからは少し余談ですが、今回の導出の上で気になる点として、

- $sin\theta = \pm\sqrt{1-cos^2\theta}$ ではなく $sin\theta = \sqrt{1-cos^2\theta}$ とできたのはなぜか。
- 線形独立な $\vec{a}, \vec{b}$ に対して S が定義できるはずなので、その時 $\sqrt{\ }$ 内が正というのは保証されているのか。

といった点が挙げられます。どちらも難しくないので是非考えてみてください。[*2]

外積を利用した公式

今、外積!?ってビビった方、安心してください。外積は高校範囲外ですし、知らなくても問題ないです。ただ、外積の背景知識がないと式変形で得られた訳わからん公式になってしまうので名前を出しただけです。[*3]

どの公式のことや？ってなってる方もいるかもしれないので先に公式を

公式 4 (ベクトルの外積を使った公式)

$\vec{p} = (a, b), \vec{q} = (c, d)$ が作る三角形の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}|ad - bc|$$

「なんだ、知ってるやつやったわ」ってなったら嬉しいです。こいつです。

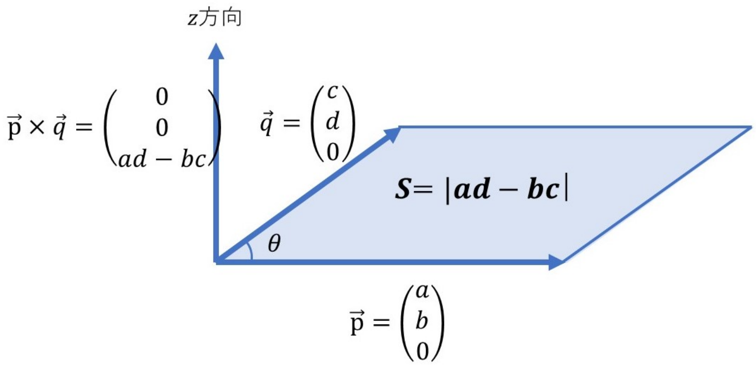
この公式なんですが、実はベクトルの外積の性質のひとつである、

$\vec{p} = (a, b, 0), \vec{q} = (c, d, 0)$ が張る平行四辺形の面積 S は $|(\vec{p}\times\vec{q})_z| = |ad - bc|$ **となる。**という特徴を利用しています。

訳わからないと思うので図にすると、次のような感じです。詳細が気になる人は外積について調べるか、先

[*2] 後者を考える際に、ベクトルの性質からコーシーシュワルツまで繋げられた方がいれば上出来です。

[*3] 第一、外積と聞いて取り乱さない高校生は数物オタクか「新・物理入門」(駿台文庫) 信者くらいでしょう。



生とかに聞いてみてください。とりあえずは、二つのベクトル $\vec{p}=(a,b),\vec{q}=(c,d)$ が張る平行四辺形の面積が $|ad-bc|$ で出ることが知られているってことがつかんでいただければ結構です。

平行四辺形の面積が $|ad-bc|$ であるならば、三角形はその半分、$\frac{1}{2}|ad-bc|$ で表現するために内積を引くのですね。よって前述の通り、

公式 4 (ベクトルの外積を使った公式)

$\vec{p}=(a,b),\vec{q}=(c,d)$ が作る三角形の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}|ad-bc|$$

となります。

なんでこんな訳のわからないことを教えられているんだって感じかもしれませんが、実はこの公式、現在の教育課程では綺麗な証明方法がないのです。行列を習っていた旧課程では行列式に帰着できたのですが、現在の新課程では適当に計算したらこれが出てきた風に教えるしかなくなっているのです。[*4]

言い訳がましくなってしまったので、一応現在の教科書チックな証明も書いておきます。

$S=\frac{1}{2}\sqrt{\left(|\vec{a}||\vec{b}|\right)^2-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2}$ において、$\vec{a}=(a,b),\vec{b}=(c,d)$ とおくと、

$$\begin{aligned}
S&=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}\right)^2-(ac+bd)^2}\\
&=\frac{1}{2}\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ac+bd)^2}\\
&=\frac{1}{2}\sqrt{a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2-a^2c^2-2abcd-b^2d^2}\\
&=\frac{1}{2}\sqrt{\cancel{a^2c^2}+a^2d^2+b^2c^2+\cancel{b^2d^2}-\cancel{a^2c^2}-2abcd-\cancel{b^2d^2}}\\
&=\frac{1}{2}\sqrt{a^2d^2-2abcd+b^2c^2}\\
&=\frac{1}{2}\sqrt{(ad-bc)^2}\\
&=\frac{1}{2}|ad-bc|
\end{aligned}$$

よって成立。となるのです。

[*4] 「てかそもそも外積としてよりも 2×2 の行列式として説明するべきだろ！」って思った方もいるかもしれません。僕もどちらかといえばそっち派ですが、普通の高校生にとって行列は未知すぎる一方で、外積なら知っている可能性が高いかと思い外積という表現にしました。

いや、正しいのは正しいってわかるけど、全然面白くないやん…って感じですよね。なので今回は外積を利用させていただきました。

重要公式なので 3 回目の掲載です。

公式 4 (ベクトルの外積を使った公式)

$\vec{p} = (a, b), \vec{q} = (c, d)$ が作る三角形の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}|ad - bc|$$

しっかり使えるようになってくださいね。

この公式が一番計算が楽で使用頻度が高いかもしれません。

ここからは番外編で、知っておくとよい公式をざっと紹介していきます。

ヘロンの公式

証明するのは面倒な上に、あまり使う機会が無いのですが、その割に認知度が高いのでとりあえず知っておいてほしい公式です。

公式 5 (ヘロンの公式)

三角形の三辺 a, b, c に対して、$s = \dfrac{a+b+c}{2}$ とおくと、

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

三辺の長さがわかっていれば絶対に面積が求まるという、実用上では最強かもしれない公式です。[*5]

なにこれって感じだと思いますが、幾何が特段好きでない人はなにこれって感じのままでもいいと思います。まあそうは言っても色々面白いところはある公式で、この $\sqrt{}$ の中身は負にならないのか？とか考えてみるべきですね。

もっと深くこの公式を学びたい人はネットや参考書で調べてみてください。

内接円を利用した公式

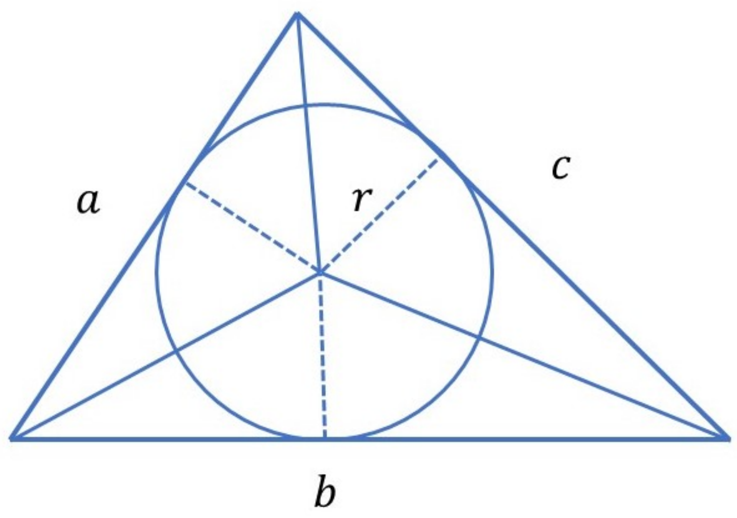
公式 6 (内接円を利用した公式)

三角形の三辺の長さを a, b, c、内接円の半径を r とすると、

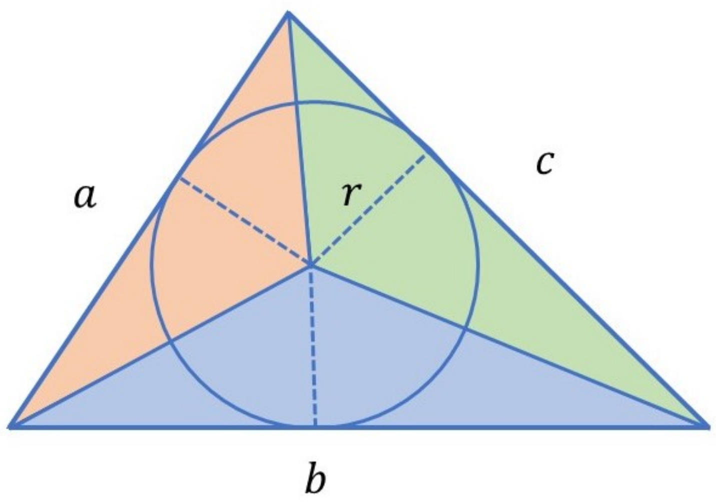
$$S = \frac{1}{2}r(a+b+c)$$

この公式は面積を求めるよりも内接円の半径を求めるのに利用する場合が多いですが、結構使用頻度が高いので使えるようになってください。割と模試とかでよく出る印象があります。

[*5] 電卓と定規があれば求められますからね。



こういう図ですね。この公式は意外とシンプルで、



3 つの三角形 (図のオレンジ、青、緑です。) に分割してその和を取ります。r が各三角形の高さになっていることに注意して式で書くと

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr \\ &= \frac{1}{2}r(a+b+c) \end{aligned}$$

となります。これで導けましたね。

終わりに

今回は三角形の面積についてのプリントでしたがいかがでしたでしょうか。まとめてみると高校数学範囲でも意外と沢山公式あるんだなあという感じですね。

入試でもよく使う部分なので、問題演習を重ねて自分のものにしていってください。