"三角関数攻略への道！"

苦手な人も多い単元なので、そこで出てくる公式を一気にまとめてみます！
作り方さえつかんでしまえば、加法定理以外全て導出可能です！

※ $\cos\theta, \sin\theta$ がでれば $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ ででるので省略します！

スタート.

— 加法定理

① $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
② $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$
③ $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
④ $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

↙は $\ominus$ にするだけなので、①③さえ忘れなければ最悪 OK！

2倍角

①③で $\beta = \alpha$ とすると.

$$\begin{cases} \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \\ \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ \qquad = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha \end{cases}$$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ です。

ほぼ同一人物

発展

3倍角 $\cos 3\alpha = \cos(2\alpha+\alpha)$
$\qquad = \cos 2\alpha\cos\alpha - \sin 2\alpha\sin\alpha$
$\qquad = (2\cos^2\alpha - 1)\cos\alpha - 2\cos\alpha(1-\cos^2\alpha)$
$\qquad = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$.

ここから
$\sin 3\theta$ をこう出すのはマイナーかも

$\alpha = \theta + \frac{\pi}{2}$ とおいて ($\cos(3\theta + \frac{3}{2}\pi) \to \sin 3\theta$, $\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) \to -\sin\theta$ となります)
$\sin 3\theta = -4\sin^3\theta + 3\sin\theta$

どちらか片方を覚えて、$\oplus\ominus$ が逆になる。でもいいです。

尚、$(\cos\theta + i\sin\theta)^3$ ←(上より)3の展開
$= \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - i\sin^3\theta$
$= (\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta) + i(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta)$
$= (4\cos^3\theta - 3\cos\theta) + i(3\sin\theta - 4\sin^3\theta)$

実部が $\cos 3\theta$　　虚部が $\sin 3\theta$

という出し方もあります。
(何でできるかは理系の友達 or 宮崎まで)

半角 まだ余裕？

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ より
$\cos^2\alpha = \dfrac{1 + \cos 2\alpha}{2}$
$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ より
$\sin^2\alpha = \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{2}$

この α を $\frac{\alpha}{2}$ にすれば OK.

積和 ①から.

これは想像以上に簡単です！

たとえば、$\sin\alpha\cos\beta$ を和にしたいなら、それが登場する✓を書いて、相互.(—部)を消します。

$$\begin{cases} \sin(\alpha+\beta) = \underline{\sin\alpha\cos\beta} + \underline{\cos\alpha\sin\beta} \\ \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \end{cases}$$

今日は、辺々加えて
$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$
$\therefore \sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\}$

積 から 和 に.

和積 双子.

上とほぼ同じですが、たとえば、$\sin + \sin$ を積にしたいなら、

$$\begin{cases} \sin(\alpha+\beta) = \underline{\sin\alpha\cos\beta} + \cos\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha-\beta) = \underline{\sin\alpha\cos\beta} - \cos\alpha\sin\beta \end{cases}$$

— の $\sin + \sin$ に注目して. 辺々 足します.

すると、$\sin(\underset{A}{\underline{\alpha+\beta}}) + \sin(\underset{B}{\underline{\alpha-\beta}}) = 2\sin\alpha\cos\beta$ が得られます。

でもこれじゃ使いにくいので、$\begin{cases}A = \alpha+\beta \\ B = \alpha-\beta\end{cases}$ とおくと $\begin{cases}\alpha = \frac{A+B}{2} \\ \beta = \frac{A-B}{2}\end{cases}$

上の式ですね！

$\therefore \underset{和}{\underline{\sin A + \sin B}} = \underset{積}{\underline{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}}$ が得られます。

合成

上の和積は、$\sin \pm \sin$, $\cos \pm \cos$ にしか使えません。
では $a\sin\theta + b\cos\theta$ はどうするか.

$\sqrt{a^2+b^2}\left(\sin\theta\,\underset{1}{\underline{\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}} + \cos\theta\,\underset{2}{\underline{\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}}\right)$ と、(若干訳のわからん)変形をします。

すると、〜部は、$\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$ をみたすので、$\cos, \sin$ で表せるといえます。(詳しくは宮崎へ)

ここで加法定理使ってます.

このとき、〜1 が $\cos\alpha$, 〜2 が $\sin\alpha$ だったら、
$\sqrt{a^2+b^2}(\sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha) = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$ とかけます。

$\therefore a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$ $\left(\alpha は \begin{array}{l}\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{array}\right)$