

お気持ちでとらえる工学部の数学

kakekakemiya

1 はじめに

本プリントは、高校までは数学好きだったのに大学数学の厳密さに胃もたれした筆者が、同じような感覚を持っている人のためになればと、お気持ち重視の数学をまとめてみたものです。(というか筆者の備忘録！)

それ故に、「全くわからない or ただテスト前に式を暗記しただけ」→「何となく前より理解できた気がする！」となるのを目的としていますので、詳しくはちゃんとした本を読むようにしてください。^{*1}

2 テイラー展開・マクローリン展開

みなさんが教養の微積で習うテイラー展開ですが、高校生上がりには割と式がごつめです。

$x = \alpha$ 周りでのテイラー展開が

$$f(x) = f(\alpha) + f^{(1)}(\alpha) \cdot (x - \alpha) + \frac{f^{(2)}(\alpha)}{2} \cdot (x - \alpha)^2 \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} (x - \alpha)^n$$

$\alpha \rightarrow 0$ とすると、マクローリン展開

$$f(x) = f(0) + f^{(1)}(0) \cdot x + \frac{f^{(2)}(0)}{2} \cdot x^2 \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

となる。と習ったと思います。^{*2}

そしてテスト前になんとなく詰め込み、覚えてしまったという人も少なくないかと思いますので、ここでお気持ち数学に持ち込みたいと思います。

まず、テイラー展開で我々が何をやりたいかですが、色んな関数を x の多項式で表す！というのが狙いです。

$\sin x, \cos x, \log x \cdots$ 高校範囲だけでも、多項式でない関数というものはいくつも出てきますが、こういった関数を x^n ($n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) だけを用いて表しなoshたい。というわけです。これ自体は別にそんなに難しいモチベーションじゃないですね。

じゃあとりあえず、 $f(x)$ が多項式で表示できるとしてしまいましょう。すると、

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - \alpha)^n$$

と適当な係数を設定して置けることになりますね。

$(x - \alpha)$ だと無駄に難しく見えるので、 $\alpha = 0$ の場合^{*3}で考えてみると、

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

^{*1} 無論ガチプロさん向けじゃないので、強い方はあんまり読まないように...

^{*2} 筆者はこの時に収束半径がうんちゃらと言われて興味ない... となりました。

^{*3} 即ちマクローリン展開です。

となります。とても簡単な形ですね。

さて、ここで、 a_n は僕たちが適当に置いた係数な訳ですが、この a_n を求められれば、テイラー展開のやりたかったことは満たされることになるんですね！

それでは、 a_n を求める方法を考えてみましょう。

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

即ち、

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

という式をよく見てみます。

ここから a_0 を取り出せないでしょうか？

おそらく皆さんなら既にお気づきでしょうが、 $x = 0$ とすると、 $f(0) = a_0$ が得られます。よって、

$$f(x) = f(0) + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

と分かります。

さて、この調子で a_1, a_2, \dots と求めていきたいのですが、どうすればいいでしょうか？

ここは少し工夫が必要です。是非一度自分で考えてみてから進んでください。

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

のままでは、 a_1 は求まりませんが、一度両辺を微分してみましょう。すると、

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots$$

この式に $x = 0$ を代入してあげると、 $f'(0) = a_1$ が得られます。

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

次、 a_2 の求め方は...もうお分かりですかね。 $f''(x)$ を考えてみると、

$$f''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3 x + 4 \cdot 3a_4 x^2 + \cdots$$

ここで $x = 0$ とすれば、 $f''(0) = 2a_2$ 即ち、 $a_2 = \frac{f''(0)}{2}$ が得られます。従って

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

だいぶ形ができてきましたね。では次は一気に一般化して、 a_n を考えてみましょう。

まず a_n を考えるために使うのは、 $f^{(n)}(x)$ ですね、

$f^{(n)}(x)$ の 0 次の係数は $a_n x^n$ が 0 次となるまで微分されて出てきたものなので、

$a_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$ 即ち、 $a_n \cdot n!$ です。^{*4}

よって、 $f^{(n)}(x)$ は

$$f^{(n)}(x) = a_n \cdot n! + (x^1 \text{以上の項})$$

なので、 $f^{(n)}(0) = a_n \cdot n!$ が得られます。よって、

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

^{*4} ここで?となる人は、 a_3, a_4 と求めてみてください。

これで a_n が求められましたね！目的達成です！改めて最初の式を見てみましょう。
マクローリン展開

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \\ &= f(0) + f^{(1)}(0) \cdot x + \frac{f^{(2)}(0)}{2} \cdot x^2 \dots \end{aligned}$$

$x = \alpha$ でのテイラー展開

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} (x - \alpha)^n \\ &= f(\alpha) + f^{(1)}(\alpha) \cdot (x - \alpha) + \frac{f^{(2)}(\alpha)}{2} \cdot (x - \alpha)^2 \dots \end{aligned}$$

どうですか？前より親しみやすい、というか再現可能な式になったのではないのでしょうか？

このように、テイラー展開はお気持ちをつかんでおけば、簡単に再現可能な式になります。以上をテイラー展開パートとさせていただきます。^{*5}

3 フーリエ級数展開とフーリエ変換

でした！多くの理系大学生が一度は憎んだことのある有名なやつらです。しかし、その分教材は充実しているので、本プリントでは細かいことは本当においておいて、お気持ちの部分と、計算方法を中心に書くようにしようと思います。^{*6}

フーリエ解析の基本姿勢は、ある関数を（複素）正弦波を使って表そうぜ！というものです。普通の正弦波より複素正弦波の方が簡潔で本質的なので、複素正弦波で話を進めます。

...と言われても、複素正弦波知らんわ！って人もいなくはないと思うので、簡単に説明します。

3.1 複素正弦波

$z = y + jy = r(\cos\theta + j\sin\theta) = re^{j\theta}$ が今後基本的な波、複素正弦波です。^{*7} r が振幅、 θ が位相を表します。尚、

- オイラーの公式 $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$ を使っていること。
- $\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$, $\sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$ なる関係があること。

に注意してください。

そして、複素正弦波には、「正規直交系をなす」という重要な性質があります。

そもそも正規直交系とは、内積 $(\phi_m(t), \phi_n(t))$ に対して $(\phi_m(t), \phi_n(t)) = \delta_{n,m}$ なる関係を満たすものですが、複素正弦波 $\phi_n(t) = e^{jn\omega t}$ では内積 $(\phi_m(t), \phi_n(t))$ を

$$(\phi_m(t), \phi_n(t)) = \frac{1}{T} \int_0^T \phi_m(t) \overline{\phi_n(t)} dt \quad \left(T = \frac{2\pi}{\omega} \right)$$

と定義することで^{*8}、複素正弦波 $\phi_n(t) = e^{jn\omega t}$ は正規直交系になります。これはすぐに示せますし、どこにでも載ってるので証明しません！

^{*5} テイラー展開ができるか、収束するかはちゃんとした本で勉強してください。

^{*6} なお、お気持ちの部分のもっとちゃんとした説明は名著「物理学の直観的方法」などがわかりやすいです。

^{*7} j は虚数単位です！電気系なら i じゃなく j

^{*8} \int の前に $\frac{1}{T}$ がついているのに注意してください。

3.2 フーリエ級数展開

まずは先に結果を書きます。 $T \left(= \frac{2\pi}{\omega} \right)$ を 1 周期とする周期関数 $x(t)$ のフーリエ級数展開は

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{jn\omega t}$$

$$\alpha_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jn\omega t} dt$$

となる。まだこれは何のことかさっぱりわからないと思うので、お気持ちとともに導いていきます。

フーリエ級数展開の前にやったように、テイラー展開のお気持ちは、ある関数を $(x-a)^n$ ($n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) の和で表すぜ！でしたね。

それと同じことで、フーリエ解析の基本姿勢は、ある関数を $e^{jn\omega t}$ ($n \in \mathbb{Z}$) の和で表すぜ！です。そして、その時の係数を求めてしまえば勝ち！テイラー展開と同じです！

テイラー展開のときは、 $f(x)$ が

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

と置けるとして、 a_0 から順に a_i を求めていきました。^{*9}

では、 $x(t)$ が

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{jn\omega t}$$

と置ける場合はどうすれば α_n を求められるでしょうか？^{*10}

ここまでくるとパズルのクイズみたいなものですが、内積を利用します。具体的には、

$$(x(t), \phi_n(t))$$

を考えるのです。ただし、 $\phi_n(t) = e^{jn\omega t}$ です。

$$(x(t), \phi_n(t)) = \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m e^{jm\omega t}, e^{jn\omega t} \right)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m (e^{jm\omega t}, e^{jn\omega t})$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m \delta_{m,n}$$

$$= \alpha_n$$

なんと、これで一発で α_n が出てしまいます。

^{*9} 詳しくは上のテイラー展開の章を参照してください。

^{*10} 是非一旦手を止めて自分で考えてみてください。

さて、ここまで話が進んだところで、最初の式を見てみましょう。

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{jn\omega t}$$

$$\alpha_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jn\omega t} dt$$

これは、 $x(t)$ を $e^{jn\omega t}$ で表しなおしたいというお気持ちから、

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{jn\omega t}$$

ただし、この時の係数 α_n は

$$\alpha_n = (x(t), e^{jn\omega t})$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jn\omega t} dt$$

という意味だったのですね。これできっと式は思い出せるくらいにはなったでしょう。

3.3 フーリエ変換

フーリエ変換が周期関数だったのに対して、非周期関数に対して使えるのがフーリエ変換です。多くの教科書では、フーリエ級数展開を導入してから、周期 $T \rightarrow \infty$ の極限をとって導入しますが、微妙にお気持ち数学チックではないので、別のノリで行きます。^{*11}

フーリエ変換というのは、実は基底変換行為なんですね。同じ内容をもつものを時間領域と周波数領域で表したいというモチベーションなんです。

ざっとしたイメージですが、ある時間に得られる時間信号 $f(t)$ は、周波数領域にある分布を持っています。分かりやすい例でいうと、440Hz の音叉を一度たたいた時の音というのは、我々にはだんだんと弱まる「ラ」に聞こえるわけですが、逐一周波数解析を行うと、440Hz の部分にインパルス的に立つスペクトルが得られるはずですよ。

この場合だとあまり有用性がわからない感じがしますが、ここで同時に別の音叉をたたいてみることにしてみましょう。すると、いい耳を持った人には「ラ」と「別の音」が聞こえるかもしれませんが、僕のように素養のない者にはただの音としてしか聞こえません。この場合、スペクトル解析を行って、周波数領域上で二本のインパルスを観測するのは相応の意味があるでしょう。

このように、ある信号を時間の流れを踏まえてとらえる場合と、周波数領域上で信号をとらえる場合をうまく使い分けると良い場合というのがあります。

しかしながら、いちいち信号をスペクトル解析するのも大変なので、何か方法はないでしょうか？それを机上で実現できてしまうのが数学プレゼンツ、フーリエ変換です。^{*12}

実際どうするか

まず、細かい係数^{*13}は放っておいて、 $f(t)$ を周波数領域の基底 $e^{j\omega t}$ で表したいわけですから、

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

とします。

^{*11} いや、そっち知らんわって人は一回そっちを勉強してきてください。

^{*12} 少々誤解のある言い方をしてしまいましたが、フーリエ級数展開も同じモチベです。

^{*13} 学習済みの方はわかると思いますが、 $\frac{1}{2\pi}$ とかです。

おい待て待て、どういう意味だ？ってなった方はここから数行をじっくり理解してください。

高校数学とかで、ある三次関数があるという問題が出たとき、普通 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ と置くところを、 $f(3) = 5$ とわかっているとかなら、 $f(x) = a(x-3)^3 + b(x-3)^2 + c(x-3) + d$ とおいた経験があると思います。これは基底について、よく使われる x^n ではなく $(x-3)^n$ を利用したということです。

これと同じノリで、 $e^{j\omega t}$ を基底としたいのです。ただ、注意せねばならないのが、このときの各 ω に対応する係数は、積分表現を用いている為に、 a, b, c, d のように置くことができません。ではどうするかといえば、これはそれほど難しくなく、各 ω における「重み」を ω の関数 $F(\omega)$ としておいてやればいいのです。

これを踏まえうえで最初の式を見てみると、

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

各 ω における重み $F(\omega)$ を基底 $e^{j\omega t}$ につけて、総和を取る \int という意味であったことが分かります。

さて、そういわれても、重み $F(\omega)$ をどうやって求めるねん問題が起きます。御尤もな意見です。これは少し後出しじゃんけんになってしまうのですが、 $F(\omega)$ を求めるために、 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{j\omega t}$ が正規直交基底たることを使います。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{j\omega_1 t} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{j\omega_2 t} \right)^* dt = \delta(\omega_1 - \omega_2)$$

ただし、内積 $(\phi_1(t), \phi_2(t))$ を

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_1(t) \overline{\phi_2(t)} dt$$

で定義しています。

ある関数と、ある基底との内積をとれば、その基底に対応する重み（係数）が出ますので、ある ω に対する重み $F(\omega)$ は

$$F(\omega) = \left(f(t), \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{j\omega t} \right)$$

となります。

よって、

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \left(f(t), \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{j\omega t} \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{j\omega t} \right)^* dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \end{aligned}$$

となります。

これでフーリエ変換の式を導出できた！と言いたいのですが、初めに少し述べたように、今回は係数についての説明をいろいろとサボっています。ただここは形式的にでてしまうあまり面白くないものである上に、流派がたくさんあるので、各々の自習に任せたいと思います。

ここでは一応電気系の流派に従ったものを載せておきます。

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \\ f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \end{aligned}$$

なんやこれ？となりがちな式ですが、

- ω での重みを求めるフーリエ変換は内積を取るから $e^{-j\omega t}$ とマイナスがつく。
- フーリエ逆変換は、新しい基底 $e^{j\omega t}$ に重み $F(\omega)$ をつけて $f(t)$ を表しなおす。

と覚えておけばすぐに思い出せるでしょう。

余談ですが、信号解析分野でよく使われる表記

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$$

は余計な係数が不要でより綺麗です。

割と雑な説明が続いてしまいましたが、ここまでをフーリエパートとさせていただきます。

4 常微分方程式

次は常微分方程式を扱っていこうと思います。常微分方程式は僕はめちゃめちゃ嫌いなのですが、数学の中では結構好きな方という東大生が割と多くて困惑しています。^{*14}

本プリントでは、線形常微分方程式の基本的な解法と、非線形の特解型の解き方を中心に紹介していきます。

4.1 線形常微分方程式の解法

4.1.1 変数分離型

これはいけるって人が多いでしょう。

関数が x, y の式に分離できてしまうなら、

$$g(y) \frac{dy}{dx} = f(x)$$

$$g(y)dy = f(x)dx$$

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx$$

というように積分を実行してしまえばいい！って形です。高校数学でも少し扱いますね。

4.1.2 同次型

これはお名前の通り、 x, y が同次数であったときに使える方法です。

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

の形に持ってくることでさえできれば、新たな変数 $u = \frac{y}{x}$ を定義してあげると、

$y = ux$ から $\dot{y} = \dot{u}x + u\dot{x}$ がまず言えて、それを上の式に代入してあげれば、

$$\dot{u}x + u = f(u)$$

^{*14} 筆者は常微分方程式というか微積分アレルギーです。

が得られます。これのどこが嬉しいんだ？って感じですが、実は

$$\begin{aligned}\dot{u}x + u &= f(u) \\ \dot{u}x &= f(u) - u \\ \frac{1}{f(u) - u} \dot{u} &= \frac{1}{x} \\ \frac{1}{f(u) - u} \frac{du}{dx} &= \frac{1}{x} \\ \frac{1}{f(u) - u} du &= \frac{1}{x} dx\end{aligned}$$

となり、変数分離ができるのです！^{*15} これで同次型は倒せました。

4.1.3 定数変化法

この辺りから顔が曇り始める人もいないのでしょうか？非斉次線型の常微分方程式で扱うことが多いです。

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = u(x)$$

を解くことを考えましょう。

まず、方針ですが、斉次方程式 ($u(x) = 0$ としたもの)

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$$

を解きます。そしてその答えが $y = c \cdot z(x)$ (c は定数) だとします。おそらくここまではそんなに難しくないはずです。^{*16}

さて、次にいよいよ本当に求めたい非斉次の方程式

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = u(x)$$

の解について考えてみましょう。

まず、この解はどんな形をしているのでしょうか？斉次の解 $y = c \cdot z(x)$ をうまく使えないのでしょうか？もちろん断言はできませんが、これになんとかくに形が似ているかもしれません。^{*17}

ただもちろん、 $y = c \cdot z(x)$ がそのまま解になるということはないので、ちょっと解を変形してみましょう。具体的には、 $y = c \cdot z(x)$ の定数 c の部分を x の関数 $a(x)$ に置き換えてみるのです。

そして無謀にも、 $y = a(x)z(x)$ が $\frac{dy}{dx} + p(x)y = u(x)$ の解だとして話を進めるのです。

$y = a(x)z(x)$ が $\frac{dy}{dx} + p(x)y = u(x)$ を満たすとする、

$$\begin{aligned}\dot{a}z + a\dot{z} + p\{az\} &= u(x) \\ \dot{a}z + a\{\dot{z} + pz\} &= u(x)\end{aligned}$$

^{*15} 先ほど変数分離を扱ったばかりなのでいかにも教科書的です。

^{*16} 変数分離が適応できます。

^{*17} これは確信があるわけではなく、なんとなくです。

$z(x)$ は $\dot{z} + pz = 0$ を満たすから

$$\begin{aligned}\dot{a}z &= u(x) \\ \frac{da(x)}{dx}z(x) &= u(x) \\ \frac{da(x)}{dx} &= \frac{u(x)}{z(x)} \\ a(x) &= \int \frac{u(x)}{z(x)} dx + c\end{aligned}$$

よって、元に戻すと

$$y(x) = a(x)z(x) = \left(\int \frac{u(x)}{z(x)} dx + c \right) z(x)$$

となる。

このようにして、「斉次の解の定数部分を関数に変化させれば非斉次の解になるんじゃない？」というお気持ちで行われ、割と成功できてしまうのが定数変化法です。^{*18}

4.1.4 完全微分方程式型

こいつはちょっと変わった微分方程式で、毛色が違います。

$$\begin{aligned}P(x, y) + Q(x, y) \frac{dy}{dx} &= 0 \\ P(x, y)dx + Q(x, y)dy &= 0\end{aligned}$$

という形の微分方程式に対して、この式をじーっと見ていると、

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

の部分が、 $f(x, y)$ の全微分

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

に似ていると感じられなくもないですね？^{*19}

では仮に、

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0$$

という微分方程式を考えると、これは単に

$$f = \text{const}$$

という間抜けのような答えが得られますね。^{*20}

では、いよいよ本題です。もしも、 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ がある関数 $f(x, y)$ の $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$ に対応しているとするならば、この微分方程式はめっちゃめっちゃ簡単に解けるのではないのでしょうか？

すなわち、ある関数 $f(x, y)$ に対し、

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= P(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= Q(x, y)\end{aligned}$$

^{*18} 今回は一階線形非斉次でしたが、もっと複雑なパターンでも対応し得る割と万能な子です。

^{*19} あくまでも似ている程度です。

^{*20} 二変数関数嫌いで定数関数になるのイメージできないよって人はなんとなくですっ飛ばしてもらっても構いません。

が成立すれば実質勝ちということになります。

しかし、世の中そんなに甘くないですね、そもそも本当にこんな $f(x, y)$ があるのか？という疑問が残っています。次はそれについて考えてみましょう。

結論から言ってしまうと、

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

が成立すれば、先ほど述べたような条件を満たす $f(x, y)$ が存在します。

ぱっと見、シンプルだけどテストでちょっと自信なくなる式ですが、これは上の流れからのモチベーションを押さえておけば暗記不要です。

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= P(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= Q(x, y)\end{aligned}$$

が成立してほしいのですが、今回求める f に対して

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

が（きっと）成り立ちます。^{*21}。ちょっと書き換えると

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} P(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} Q(x, y) \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial Q}{\partial x}\end{aligned}$$

となります。これは上に書いた条件式ですね！簡単に再現できました！

余談ですが、他の覚え方としては、

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ 0 \end{pmatrix}$$

として $\nabla \times \boldsymbol{v}$ の z 成分が 0 になる。というのもあります。^{*22}

4.1.5 定数係数線型方程式

a_k を定数として、

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k}{dx^k} y = a_0 y + a_1 y' + a_2 y'' + a_3 y^{(3)} + \cdots + a_n y^{(n)} = 0$$

という微分方程式を考えるとしましょう。

まずこの解はどんな形をしているのでしょうか？

まずは $n = 1$ の場合を考えてみると、

$$a_0 y + a_1 y' = 0$$

まあ $a_1 \neq 0$ を想定しているので、両辺 a_1 で割って移項すると、

$$y' = -\frac{a_0}{a_1} y$$

^{*21} ヤングの定理を見ればいいのか？偏微分の順序交換可能性判定は僕のできる仕事ではない…。

^{*22} どこまでメジャーかは知りません。

これは $y = A \exp\left(-\frac{a_0}{a_1}x\right)$ が解ですね。

これは自然に求められた解なのですが、これをあえて初めの式に入れてみましょう。

$$a_0 y + a_1 y' = 0$$

$$a_0 \left\{ A \exp\left(-\frac{a_0}{a_1}x\right) \right\} + a_1 \frac{d}{dx} \left\{ A \exp\left(-\frac{a_0}{a_1}x\right) \right\} = 0$$
$$\left\{ A \exp\left(-\frac{a_0}{a_1}x\right) \right\} \left[a_0 + a_1 \left(-\frac{a_0}{a_1}\right) \right] = 0$$

すると、式を 0 にする役割は、[] の中の部分が担っていたことがわかります。すなわち、

$$a_0 y + a_1 y' = 0$$

の場合は、 λ についての一次方程式

$$a_0 + a_1 \lambda = 0$$

の解がわかれば実質勝ちであったということになります。これを一般の n の場合にも応用できないでしょうか？

つまり、

$$a_0 y + a_1 y' + a_2 y'' + a_3 y^{(3)} + \cdots + a_n y^{(n)} = 0$$

という式から、一気に解に飛べないかと考えるわけです。

これは結論から言うと思いのほかシンプルで、

$$a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda^3 + \cdots + a_n \lambda^n = 0$$

を考えればいいのです。 n 階微分のところを λ^n に置き換えたのですね。^{*23}

この一連の流れのお気持ちをもって特性方程式を正当化してみます。微分方程式

$$a_0 y + a_1 y' + a_2 y'' + a_3 y^{(3)} + \cdots + a_n y^{(n)} = 0$$

のが、 $y = A \exp(\lambda x)$ の形 (A は定数) だとすると、それを代入してあげれば、

$$A \exp(\lambda x) \{ a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda^3 + \cdots + a_n \lambda^n \} = 0$$

が成立するはずですが、 $A \exp(\lambda x) \neq 0$ から、 $\{ \}$ の中が 0 になるはずなので、

$$a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda^3 + \cdots + a_n \lambda^n = 0$$

と言えます。これで特性方程式が導けました。^{*24}

4.2 特殊型の解法

ここからは、特殊な形の常微分方程式の解き方を見ていきます。特殊型はどうしても、お気持ちというよりは、なんか発見されたうまくいく方法を集めただけという感じなので、切羽詰まってない人、あんまり好きじゃない人は飛ばしてもらって構いません。

^{*23} これを特性方程式といいます。

^{*24} お気持ちを話そうとした結果、むしろややこしい導入になった気がします。反省です。

4.2.1 Liouville 型

$$y'' + P(x)y' + Q(y)(y')^2 = 0$$

の形をしたものですが、辺々 y' で割ってやると、

$$\frac{y''}{y'} + P(x) + Q(y)y' = 0$$

これは

$$\log y' + \int^x P(x)dx + \int^y Q(y)dy = \text{const}$$

を x で微分したもののなので、倒せます。

4.2.2 Bernoulli 型

$$y' + P(x)y = Q(x)y^m$$

という形をしたものです。

ここで新たな変数を $z = y^k$ と置いてみると、 $z' = ky^{k-1}y'$ が言えます。それを踏まえた上で、先ほどの式の両辺に ky^{k-1} をかけて

$$\begin{aligned} ky^{k-1}y' + P(x)ky^k &= Q(x)ky^{k-1+m} \\ z' + P(x)z &= kQ(x)y^{k-1+m} \end{aligned}$$

ここでは、何がおいしいの？って感じですが、右辺が y^0 になるように、即ち $k = 1 - m$ とおくと、

$$z' + (1 - m)P(x)z = (1 - m)Q(x)$$

となります。実はこれは、前節でやった定数変化法で倒せる形になっているんですね。

4.2.3 Riccati 型

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$$

という形をしたものです。

これは、他の特殊型と少し毛色が違って、確実にうまくできる方法があるわけではなく、条件付きです。

もし、特殊解 $y = f(x)$ が一つ求まったとして、^{*25}新たな変数 z を $z = y - f(x)$ と定義すると、

$$\begin{aligned} z' &= y' - f'(x) \\ &= P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) - f'(x) \\ &= P(x)\{z + f(x)\}^2 + Q(x)\{z + f(x)\} + R(x) - f'(x) \\ &= P(x)z^2 + \{2P(x)f(x) + Q(x)\}z + \{P(x)(f(x))^2 + Q(x)f(x) + R(x) - f'(x)\} \end{aligned}$$

$\{P(x)(f(x))^2 + Q(x)f(x) + R(x) - f'(x)\}$ が 0 になることに注意すると、

$$\begin{aligned} z' &= P(x)z^2 + \{2P(x)f(x) + Q(x)\}z \\ z' - \{2P(x)f(x) + Q(x)\}z &= P(x)z^2 \end{aligned}$$

これは z について Bernoulli 型で $m = 2$ の場合なので、解けてしまいます。その z を用いて、 $y = z + f(x)$ が解になります。^{*26}

^{*25} これが重要な条件です。

^{*26} 戻し忘れないようにしてください。

4.2.4 d'Alembert 型

$$y = xf(y') + g(y')$$

という形が d'Alembert 型です。^{*27}これはちょっと変わった倒し方をしますので、よく理解するようにしてください。

まず、 $p = y'$ とおくと、

$$y = xf(p) + g(p)$$

辺々 x で微分すると、

$$p = f(p) + \frac{dp}{dx}\{xf'(p) + g'(p)\}$$

移項して

$$p - f(p) = \frac{dp}{dx}\{xf'(p) + g'(p)\}$$

このとき、 $p \neq f(p)$ であれば、

$$\frac{dx}{dp} = \frac{xf'(p) + g'(p)}{p - f(p)} = -\frac{f'(p)}{f(p) - p}x - \frac{g'(p)}{f(p) - p}$$

これにより、 x をパラメタ p で表せるようになる。

4.2.5 Clairaut 型

d'Alembert 型の途中で仮定した、 $p \neq f(p)$ が成立しない場合、即ち、 $p = f(p)$ が成立するときが Clairaut 型です。^{*28}

$$p - f(p) = \frac{dp}{dx}\{xf'(p) + g'(p)\}$$

で $p = f(p)$ なので、

$$\frac{dp}{dx}\{xf'(p) + g'(p)\} = 0$$

この後は $\frac{dp}{dx} = 0$ か $xf'(p) + g'(p) = 0$ で場合分けして倒してあげれば OK です。

5 終わりに

T_EX の練習として書き始めたプリントなため、構成を深く考えずに書いた雑なプリントになってしまいました。が、まあ自分で読む分には良いのかなと思います。

なお、内容の正確さは保証できませんので、参考にする場合は自己責任でよろしくお願いします。

^{*27} 読めなかったそこの貴方、安心してください。「ダランベール」です。

^{*28} これは読めましたか？「クレロー」です。