0.0.1 問題設定

計測対象として，拍動周期 T の非圧縮性のニュートン流体による流れを考える．ここでは 3 次元を考え，MRI 領域 $\Omega_{\mathrm{m}} \subseteq \mathbb{R}^3$ におけるボクセルの大きさを $\Delta x_{\mathrm{m}} \times \Delta y_{\mathrm{m}} \times \Delta z_{\mathrm{m}}$ とし，1 周期中の計測数を N_m 回とする計測間隔 Δt_{m})．また，ボクセル i，時刻 $t_j \in (0, T]$ における MRI 速度を $\mathbf{v}_{\mathrm{m}}^{ij}$ と定義する．これに対し，数値計算を適用する計算領域を $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ とし，座標 $\mathbf{x} \in \Omega$，時刻 $t \in (0, T]$ での数値速度を $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \in \mathbf{H}^1_{0,\Gamma_{\mathrm{w}}}(\Omega)$ と定義する．データ同化の制御変数には，$t = 0$ における数値計算の初期速度場 $\mathbf{v}_0$ と，入口境界 Γ_{I} における境界速度 $\mathbf{V}(t)$ を用いる．

目的関数を

$$\mathcal{J}(\mathbf{v}, \mathbf{v}^0, \mathbf{V}) = \mathcal{D}(\mathbf{v}) + \mathcal{R}(\mathbf{v}^0, \mathbf{V}) \tag{1}$$

と定義する．右辺第 1 項は，計測速度と数値速度の時空間情報に対する誤差の和

$$\mathcal{D}(\mathbf{v}) = \frac{\alpha}{2} \sum_{j=1}^{N_{\mathrm{m}}} \sum_{i=1}^{M_{\mathrm{m}}} \left\| \mathcal{T}_{ij}^{\mathrm{ave}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{v}_{\mathrm{m}}^{ij} \right\|^2 \Delta x_m \Delta y_m \Delta z_m \Delta t_m \tag{2}$$

であり，α は誤差関数のハイパーパラメータである．$\mathcal{T}_{ij}^{\mathrm{ave}}$ は Töger ら [1] を参考にし，時空間方向の平滑化を考慮した計測オペレータ

$$\mathcal{T}_{ij}^{\mathrm{ave}} : \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \mapsto \left(\int_t w_t^j \, dt \right)^{-1} \left(\int_\Omega w_\Omega^i \, d\Omega \right)^{-1} \int_T \int_\Omega \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \, w_\Omega^i w_t^j \, d\Omega dt \tag{3}$$

とする．ここで，w_t^i と w_Ω^i は時間方向と空間方向の重み関数であり，Fig. 3.1にそれぞれの関数を示す．また，これらの式は

$$\begin{aligned} w_\Omega^i = {} & \mathrm{sinc}\left(\frac{x - x_i}{\Delta x_m} \right) \mathrm{sinc}\left(\frac{y - y_i}{\Delta y_m} \right) \mathrm{sinc}\left(\frac{z - z_i}{\Delta z_m} \right) \\ & \times \mathcal{X}\left(x; x_i, 4\Delta x_m, \sigma_{\mathrm{xyz}}\right) \mathcal{X}\left(y; y_i, 4\Delta y_m, \sigma_{\mathrm{xyz}}\right) \mathcal{X}\left(z; z_i, 4\Delta z_m, \sigma_{\mathrm{xyz}}\right) \end{aligned} \tag{4}$$

$$w_t^j = \mathcal{X}\left(t; t_j, \Delta t_m, \sigma_t\right) \tag{5}$$

と表される．ここで，$\mathcal{X}$ は平滑化関数として

$$\mathcal{X}(a; a_0, w, \sigma) = \frac{1}{1 + e^{-(a-(a_0-w/2))/\sigma}} - \frac{1}{1 + e^{-(a-(a_0+w/2))/\sigma}} \tag{6}$$

と定義される．a 適当な変数，a_0 は対称軸の値，w と σ はパラメータである．目的関数のおける右辺第 2 項は正則化項を表し，各制御変数に対するノルムとして

$$\mathcal{R}(\mathbf{v}^0, \mathbf{V}) = \frac{\beta}{2} \int_T \int_{\Gamma_{\mathrm{I}}} \left[\|\partial_t \mathbf{V}\|^2 + \|\partial_s \mathbf{V}\|^2 \right] d\Gamma dt + \frac{\gamma}{2} \int_\Omega \left\| \partial_s \mathbf{v}^0 \right\|^2 \, \mathrm{d}\Omega \tag{7}$$

と定義する．

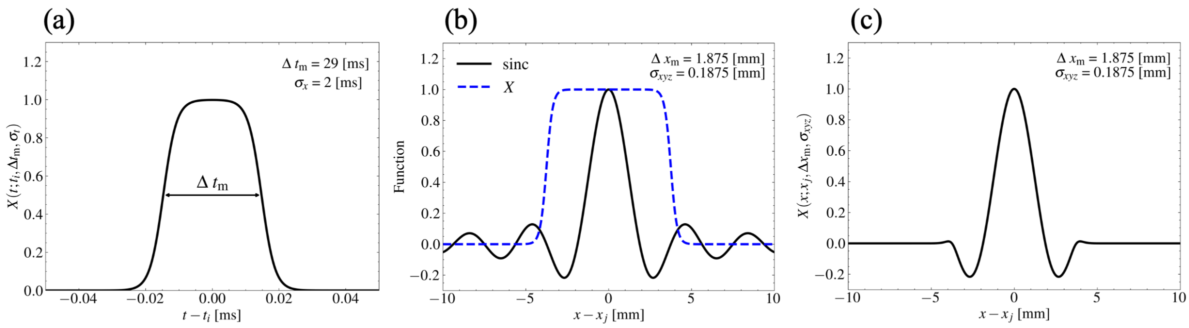

図1: Smoothing functions used in the observation operator $\mathcal{T}^{\mathrm{ave}}$ [1]. (a) Thetemporal smoothing function consisted of a box-like function with smoothed edges. The width was set to the temporal resolution of the 4D flow MRI data. (b) Spatial smoothing function - sinc function (continuous line) and smoothed truncation (dashed line). (c) Spatial smoothing function - final truncated form.

0.0.2 支配方程式

流体の支配方程式を，ナビエ・ストークス方程式と連続の式を用いて

$$\begin{aligned} \rho\partial_t \mathbf{v} + \rho\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v} + \nabla p - \mu\nabla^2\mathbf{v} + \frac{1}{\rho}\mathbf{K}(\phi)\mathbf{v} &= 0 \quad \text{in } \Omega\times(0,T] \\ \nabla\cdot\mathbf{v} &= 0 \quad \text{in } \Omega\times(0,T] \end{aligned} \tag{8}$$

と記述する．

0.0.3 変分法

式（8）を SUPG/PSPG 法により，

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left(\mathbf{v},p,\mathbf{V},\mathbf{w},q,\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\eta}\right) = & \int_\Omega \Big[\rho\,\mathbf{w}\cdot\partial_t\mathbf{v} \;+\; \rho\,\mathbf{w}\cdot\left(\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}\right) \;-\; p\left(\nabla\cdot\mathbf{w}\right) \;+\; \mu\nabla\mathbf{w}:\nabla\mathbf{v} \;+\; \mathbf{w}\cdot\mathbf{K}\,\mathbf{v}\Big]\,\mathrm{d}\Omega \\ & + \int_\Omega q\left(\nabla\cdot\mathbf{v}\right)\mathrm{d}\Omega + \sum_{e=1}^{M}\int_{\Omega_e}\Big[\rho\,\tau_e\left(\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{w}\right)\cdot\left(\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}\right) \;+\; \rho\,\tau_e\left(\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{w}\right)\cdot\partial_t\mathbf{v} \\ & + \;\tau_e\left(\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{w}\right)\cdot\nabla p + \;\tau_e\nabla q\cdot\partial_t\mathbf{v} + \;\tau_e\nabla q\cdot\left(\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}\right) \;-\; \frac{\tau_e}{\rho}\nabla q\cdot\nabla p\Big]\,\mathrm{d}\Omega \\ & - \int_{\Gamma_\mathrm{I}}\Big[\boldsymbol{\lambda}\cdot\left(\mathbf{v}-\mathbf{V}\right) \;+\; \boldsymbol{\eta}\cdot\left(\mathbf{w}-\mathbf{0}\right)\Big]\,\mathrm{d}\Gamma \end{aligned} \tag{9}$$

と記述し，最適化における拘束条件とする．出口境界には traction-free を仮定した．煩雑を避けるため，以降の定式では SUPG/PSPG 項は省略する．目的関数・拘束条件を合わせた Lagrange 関数を

$$\mathcal{L}\left(\mathbf{v},p,\mathbf{v}_0,\mathbf{V},\mathbf{w},q,\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\eta}\right) = \mathcal{J}\left(\mathbf{v},\mathbf{v}_0,\mathbf{V}\right) - \int_T \mathcal{F}\left(\mathbf{v},p,\mathbf{V},\mathbf{w},q,\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\eta}\right)dt \tag{10}$$

とし，制約なし最小化問題を

$$\min_{\mathbf{v}^0,\mathbf{V}}\mathcal{L} \tag{11}$$

と定義する．

式（10）の時間方向の離散化を考える．はじめに，誤差関数におけるボクセル i，計測点 j での誤差を $\mathbf{v}_\mathrm{e}^{ij}$ と表す．誤差は各計測点の離散和であるため

$$\frac{\alpha}{2}\sum_{j=1}^{N_\mathrm{m}}\sum_{i=1}^{M_\mathrm{m}}\|\mathbf{v}_\mathrm{e}^{ij}\|^2\Delta x_m\Delta y_m\Delta z_m\Delta t_m \approx \frac{\alpha}{2}\int_T\sum_{i=1}^{M_\mathrm{m}}\|\mathbf{v}_\mathrm{e}^{i}\|^2\Delta x_m\Delta y_m\Delta z_m dt \tag{12}$$

として時間方向の連続関数とする．ここで $\mathbf{v}_\mathrm{e}^{i}$ はボクセル i における，3 次スプラインによる補間関数である．次に，式（10）を数値計算の時間刻み Δt で時間離散化すると

$$\mathcal{L} \;=\; \sum_{k=1}^{N}\mathcal{T}_k\,\Delta t \;-\; \sum_{k=0}^{N-1}\mathcal{F}_k\,\Delta t \;+\; \frac{\gamma}{2}\int_\Omega\left\|\partial_s\mathbf{v}^0\right\|^2\,\mathrm{d}\Omega \tag{13}$$

と表せる．N は数値計算の総ステップ数である．ここで，$\mathcal{T}_k$ は，時間ステップ k $(1\leq k\leq N)$ における初期条件の正則化項を除いた目的関数であり

$$\mathcal{T}_k = \frac{\alpha}{2}\sum_{i=1}^{M_\mathrm{m}}\|\mathbf{v}_\mathrm{e}^{ik}\|^2\Delta x_m\Delta y_m\Delta z_m \;+\; \frac{\beta}{2}\int_{\Gamma_\mathrm{I}}\left[\left\|\frac{\mathbf{V}^{k+1}-\mathbf{V}^k}{\Delta t}\right\|^2+\left\|\partial_s\mathbf{V}^k\right\|^2\right]d\Gamma \tag{14}$$

と表す．また，$\mathcal{F}_k$ は時間ステップ k $(0\leq k\leq N-1)$ における拘束条件であり

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_k = \int_\Omega\Bigg[&\mathbf{w}^{k+1}\cdot\rho\frac{\mathbf{v}^{k+1}-\mathbf{v}^k}{\Delta t}+\mathbf{w}^{k+1}\cdot\rho\left(\frac{3\mathbf{v}^k-\mathbf{v}^{k-1}}{2}\right)\cdot\nabla\left(\frac{\mathbf{v}^k+\mathbf{v}^{k-1}}{2}\right)+p^{k+1}(\nabla\cdot\mathbf{w}^{k+1})\\ &-\mu\nabla\mathbf{w}^{k+1}:\nabla\left(\frac{\mathbf{v}^k+\mathbf{v}^{k-1}}{2}\right)+\mathbf{w}^{k+1}\cdot\frac{1}{\rho}\mathbf{K}(\phi)\left(\frac{\mathbf{v}^k+\mathbf{v}^{k-1}}{2}\right)+q^{k+1}(\nabla\cdot\mathbf{v}^{k+1})\Bigg]\,\mathrm{d}\Omega\\ &-\int_{\Gamma_\mathrm{I}}\lambda^{k+1}\cdot(\mathbf{v}^{k+1}-\mathbf{V}^{k+1})\,\mathrm{d}\Gamma-\int_{\Gamma_1}\boldsymbol{\eta}^{k+1}\cdot(\mathbf{w}^{k+1}-\mathbf{0})\,\mathrm{d}\Gamma=\mathbf{0}\end{aligned} \tag{15}$$

と表す．ここで，時間微分項に対して 1 次オイラー法を用い，移流項，粘性項，Darcy 項には Crank-Nicolson 法を用いて離散化した．また，移流速度を 2 次精度 Adams-Bashforth 法により線形化した．

制御変数の感度導出にあたり，随伴変数法を用いる．主問題は，$\mathbf{w}$，q，$\boldsymbol{\lambda}$ に関するガトー微分より，

$$ {}^t\left\langle\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{w}},\delta\mathbf{w}\right\rangle=\begin{pmatrix}\left\langle\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{w}^1},\delta\mathbf{w}^1\right\rangle\\ \vdots\\ \left\langle\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{w}^N},\delta\mathbf{w}^N\right\rangle\end{pmatrix}=\mathbf{0},\quad {}^t\left\langle\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q},\delta q\right\rangle=\begin{pmatrix}\left\langle\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q^1},\delta q^1\right\rangle\\ \vdots\\ \left\langle\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q^N},\delta q^N\right\rangle\end{pmatrix}=\mathbf{0},\quad {}^t\left\langle\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\boldsymbol{\lambda}},\delta\boldsymbol{\lambda}\right\rangle=\begin{pmatrix}\left\langle\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\boldsymbol{\lambda}^1},\delta\boldsymbol{\lambda}^1\right\rangle\\ \vdots\\ \left\langle\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\boldsymbol{\lambda}^N},\delta\boldsymbol{\lambda}^N\right\rangle\end{pmatrix}=\mathbf{0} \tag{16}$$

と表され，時間ステップ k $(1 \leq k \leq N)$ において

$$
\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{w}^k}, \delta \mathbf{w}^k \right\rangle = & \int_\Omega \Bigg[\delta \mathbf{w}^k \cdot \rho \frac{\mathbf{v}^k - \mathbf{v}^{k-1}}{\Delta t} + \delta \mathbf{w}^k \cdot \rho \left(\frac{3\mathbf{v}^k - \mathbf{v}^{k-1}}{2} \right) \cdot \nabla \left(\frac{\mathbf{v}^k + \mathbf{v}^{k-1}}{2} \right) \\
& + p^k (\nabla \cdot \delta \mathbf{w}^k) - \mu \nabla \delta \mathbf{w}^k : \left(\frac{\mathbf{v}^k + \mathbf{v}^{k-1}}{2} \right) + \delta \mathbf{w}^k \cdot \frac{1}{\rho} \mathbf{K}(\phi) \left(\frac{\mathbf{v}^k + \mathbf{v}^{k-1}}{2} \right) \Bigg] \mathrm{d}\Omega \\
& - \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{\eta}^k \cdot \delta \mathbf{w}^k \, \mathrm{d}\Gamma = 0
\end{aligned}
\tag{17}
$$

$$
\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k}, \delta q^k \right\rangle = \int_\Omega \delta q^k (\nabla \cdot \mathbf{v}^{k+1}) \, \mathrm{d}\Omega = 0 \tag{18}
$$

$$
\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\lambda}^k}, \delta \boldsymbol{\lambda}^k \right\rangle = \int_{\Gamma_1} \delta \boldsymbol{\lambda}^k \cdot (\mathbf{v}^k - \mathbf{V}^k) \, \mathrm{d}\Gamma = 0 \tag{19}
$$

とそれぞれ記述できる．

次に，随伴問題は，$\mathbf{v}$，p，$\boldsymbol{\eta}$ に関するガトー微分より

$$
{}^t\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}}, \delta \mathbf{v} \right\rangle = \begin{pmatrix} \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}^1}, \delta \mathbf{v}^1 \right\rangle \\ \vdots \\ \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}^N}, \delta \mathbf{v}^N \right\rangle \end{pmatrix} = \mathbf{0}, \quad {}^t\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p}, \delta p \right\rangle = \begin{pmatrix} \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p^1}, \delta p^1 \right\rangle \\ \vdots \\ \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p^N}, \delta p^N \right\rangle \end{pmatrix} = \mathbf{0}, \quad {}^t\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\eta}}, \delta \boldsymbol{\eta} \right\rangle = \begin{pmatrix} \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\eta}^1}, \delta \boldsymbol{\eta}^1 \right\rangle \\ \vdots \\ \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\eta}^N}, \delta \boldsymbol{\eta}^N \right\rangle \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{20}
$$

と表せる．時間ステップ k $(1 \leq k \leq N)$ では

$$
\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}^k}, \delta \mathbf{v}^k \right\rangle = & \int_\Omega \Bigg[\rho \frac{\mathbf{w}^k - \mathbf{w}^{k+1}}{\Delta t} \cdot \delta \mathbf{v}^k + \frac{\rho}{4} \mathbf{w}^k \cdot \left(3\mathbf{v}^{k-1} - \mathbf{v}^{k-2} \right) \cdot \nabla \delta \mathbf{v}^k + \frac{3\rho}{4} \mathbf{w}^{k+1} \cdot \delta \mathbf{v}^k \cdot \nabla \mathbf{v}^{k+1} \\
& + \frac{\rho}{4} \mathbf{w}^{k+1} \cdot \left(3\mathbf{v}^k - \mathbf{v}^{k-1} \right) \cdot \nabla \delta \mathbf{v}^k - \frac{\rho}{4} \mathbf{w}^{k+2} \cdot \delta \mathbf{v}^k \cdot \nabla \mathbf{v}^{k+1} - \frac{\rho}{4} \mathbf{w}^{k+2} \cdot \delta \mathbf{v}^k \cdot \nabla \mathbf{v}^k \\
& - \frac{\mu}{2} \left(\nabla \mathbf{w}^k + \nabla \mathbf{w}^{k+1} \right) : \nabla \delta \mathbf{v}^k + \frac{1}{2\rho} \left(\mathbf{w}^k + \mathbf{w}^{k+1} \right) \cdot \mathbf{K}(\phi) \delta \mathbf{v}^k \Bigg] \mathrm{d}\Omega \\
& + q^k (\nabla \cdot \delta \mathbf{v}^k) + \int_{\Gamma_1} \lambda^k \cdot \delta \mathbf{v}^k \, \mathrm{d}\Gamma = \alpha \sum_{i=1}^{M_\mathrm{m}} \mathbf{v}_\mathrm{e}^{ik} \cdot \delta \mathbf{v}^k \Delta x_m \Delta y_m \Delta z_m
\end{aligned}
\tag{21}
$$

$$
\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p^k}, \delta p^k \right\rangle = \int_\Omega \delta p^k (\nabla \cdot \mathbf{w}^k) \, \mathrm{d}\Omega = 0 \tag{22}
$$

$$
\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\eta}^k}, \delta \boldsymbol{\eta}^k \right\rangle = \int_{\Gamma_1} \delta \boldsymbol{\eta}^k \cdot \mathbf{w}^k \, \mathrm{d}\Omega = 0 \tag{23}
$$

とそれぞれ書き下せる（Appendix A）．ここで，式（21）に関して

$$
\begin{cases}
\mathbf{v}^{k-2} = \mathbf{v}^0 & \text{for } k = 1 \\
\mathbf{w}^{k+2} = \mathbf{0} & \text{for } k = N-1 \\
\mathbf{w}^{k+1} = \mathbf{w}^{k+2} = \mathbf{0} & \text{for } k = N
\end{cases}
\tag{24}
$$

であり，$k = N$ の場合のみ $\mathbf{w}^{k+1}$ もしくは $\mathbf{w}^{k+2}$ の時間ステップに依存せず独立に連立方程式が解けることから，随伴方程式は時間逆発展方程式となる．最後に，主問題，随伴問題より得た変数から，初期速度と，時間

ステップ k $(1 \leq k \leq N)$ における入口境界速度の感度

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}^0}, \delta \mathbf{v}^0 \right\rangle = \gamma \int_\Omega \left(\mathbf{v}^0 \cdot \delta \mathbf{v}^0 + \partial_s \mathbf{v}^0 \cdot \delta \mathbf{v}^0 \right) \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \left(\rho \frac{\mathbf{w}^1}{\Delta t} \cdot \delta \mathbf{v}^0 - \frac{3\rho}{4} \mathbf{w}^1 \cdot \delta \mathbf{v}^0 \cdot \nabla \mathbf{v}^1 - \frac{\rho}{2} \mathbf{w}^1 \cdot \mathbf{v}^0 \cdot \nabla \delta \mathbf{v}^k \right.$$
$$\left. + \frac{\rho}{4} \mathbf{w}^2 \cdot \delta \mathbf{v}^0 \cdot \nabla \mathbf{v}^1 + \frac{\rho}{4} \mathbf{w}^2 \cdot \delta \mathbf{v}^0 \cdot \nabla \mathbf{v}^0 + \frac{\mu}{2} \nabla \mathbf{w}^1 : \nabla \delta \mathbf{v}^0 - \frac{1}{2\rho} \mathbf{w}^1 \cdot \mathbf{K}(\phi) \delta \mathbf{v}^0 \right) \mathrm{d}\Omega \tag{25}$$

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{V}^k}, \widetilde{\mathbf{V}}^k \right\rangle = \beta \int_{\Gamma_\mathrm{I}} \left(\mathbf{V}^k \cdot \widetilde{\mathbf{V}}^k + \partial_s \mathbf{V}^k \cdot \widetilde{\mathbf{V}}^k + \dot{\mathbf{V}}^k \cdot \widetilde{\mathbf{V}}^k + \partial_s \dot{\mathbf{V}} \cdot \widetilde{\mathbf{V}}^k \right) \mathrm{d}\Gamma - \int_{\Gamma_\mathrm{I}} \lambda \cdot \widetilde{\mathbf{V}}^k \mathrm{d}\Gamma \tag{26}$$

を導出し，これらを用いて，制御変数を

$$\mathbf{v}_{n+1}^0 = \mathbf{v}_n^0 - \tau_1 \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}^0}, \delta \mathbf{v}^0 \right\rangle \tag{27}$$

$$\mathbf{V}_{n+1}^k = \mathbf{V}_n^k - \tau_2 \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{V}^k}, \delta \mathbf{v}^k \right\rangle \tag{28}$$

と最急降下法に基づき逐次更新する．n は最適化ステップ数を表し，τ_1 と τ_2 は Armijo 条件 [2] より決定したそれぞれの更新幅である．

空間離散化については，定常流の場合と同様に有限要素法を用いた．

参考文献

[1] J. Töger., M. J. Zahr., N. Aristokleous., K. M. Bloch., M. Carlsson., and P.-O. Persson. Blood flow imaging by optimal matching of computational fluid dynamics to 4D-flow data. *Magnetic Resonance in Medicine*, 84 (4) (2020), pp. 2231–2245. doi: 10.1002/mrm.28269.

[2] L. Armijo. Minimization of functions having Lipschitz continuous first partial derivatives. *Pacific Journal of Mathematics*, 16 (1) (1966), pp. 1–3. doi: 10.2140/pjm.1966.16.1.

Appendix A　v に対するガトー微分

ラグランジュ関数の $\mathbf{v}$ でのガトー微分について，式 (20) のベクトル k 成分は，

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}^k}, \delta \mathbf{v}^k \right\rangle = \begin{cases} \left\langle \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{v}^k}, \delta \mathbf{v}^k \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \mathcal{F}_{k-1}}{\partial \mathbf{v}^k}, \delta \mathbf{v}^k \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \mathcal{F}_{k}}{\partial \mathbf{v}^k}, \delta \mathbf{v}^k \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \mathcal{F}_{k+1}}{\partial \mathbf{v}^k}, \delta \mathbf{v}^k \right\rangle & \text{for } 1 \leq k < N-1 \\ \left\langle \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{v}^k}, \delta \mathbf{v}^k \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \mathcal{F}_{k-1}}{\partial \mathbf{v}^k}, \delta \mathbf{v}^k \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \mathcal{F}_{k}}{\partial \mathbf{v}^k}, \delta \mathbf{v}^k \right\rangle & \text{for } k = N-1 \\ \left\langle \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{v}^k}, \delta \mathbf{v}^k \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \mathcal{F}_{k-1}}{\partial \mathbf{v}^k}, \delta \mathbf{v}^k \right\rangle & \text{for } k = N \end{cases} \tag{29}$$

である．式 (29) の右辺はそれぞれ

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{v}^k}, \delta \mathbf{v}^k \right\rangle = \alpha \sum_{j=1}^{M_\mathrm{m}} \left(\mathcal{T}_j^{\mathrm{ave}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t_k) - \mathbf{v}_\mathrm{m}^{\mathrm{spline}}(\mathbf{x}_j, t_k) \right) \cdot \delta \mathbf{v}^k \Delta x_\mathrm{m} \Delta y_\mathrm{m} \Delta z_\mathrm{m} \tag{30}$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \mathcal{F}_{k-1}}{\partial \mathbf{v}^k}, \delta \mathbf{v}^k \right\rangle = \int_\Omega \Bigg(& \mathbf{w}^k \cdot \rho \frac{\delta \mathbf{v}^k}{\Delta t} + \frac{\rho}{4} \mathbf{w}^k \cdot \left(3\mathbf{v}^{k-1} - \mathbf{v}^{k-2} \right) \cdot \nabla \delta \mathbf{v}^k - \frac{\mu}{2} \nabla \mathbf{w}^k : \nabla \delta \mathbf{v}^k \\ & + \frac{1}{2\rho} \mathbf{w}^k \cdot \mathbf{K}(\phi) \delta \mathbf{v}^k + q^k (\nabla \cdot \delta \mathbf{v}^k) \Bigg) \mathrm{d}\Omega \end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \mathcal{F}_{k}}{\partial \mathbf{v}^k}, \delta \mathbf{v}^k \right\rangle = \int_\Omega \Bigg(& - \mathbf{w}^{k+1} \cdot \rho \frac{\delta \mathbf{v}^k}{\Delta t} + \frac{3\rho}{4} \mathbf{w}^{k+1} \cdot \delta \mathbf{v}^k \cdot \nabla \mathbf{v}^{k+1} + \frac{\rho}{4} \mathbf{w}^{k+1} \cdot \left(3\mathbf{v}^k - \mathbf{v}^{k-1} \right) \cdot \nabla \delta \mathbf{v}^k \\ & - \frac{\mu}{2} \nabla \mathbf{w}^{k+1} : \nabla \delta \mathbf{v}^k + \frac{1}{2\rho} \mathbf{w}^{k+1} \cdot \mathbf{K}(\phi) \delta \mathbf{v}^k \Bigg) \mathrm{d}\Omega \end{aligned} \tag{32}$$

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{F}_{k+1}}{\partial \mathbf{v}^k}, \delta \mathbf{v}^k \right\rangle = \int_\Omega \left(- \frac{\rho}{4} \mathbf{w}^{k+2} \cdot \delta \mathbf{v}^k \cdot \nabla \mathbf{v}^{k+1} - \frac{\rho}{4} \mathbf{w}^{k+2} \cdot \delta \mathbf{v}^k \cdot \nabla \mathbf{v}^k \right) \mathrm{d}\Omega \tag{33}$$

と表せる．