test

長尾 昂青

2025 年 9 月 27 日

目次

1　クーロン散乱の量子論

主に [1] や [2] を参照されたい．

クーロン散乱の波動関数は，シュレーディンガー方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\phi_C(\boldsymbol{k};\boldsymbol{r})+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_P q_T}{r}\phi_C(\boldsymbol{k};\boldsymbol{r})=E\phi_C(\boldsymbol{k};\boldsymbol{r}) \tag{1}$$

を満たす．これは，

$$\left[\nabla^2+k^2-\frac{2\eta k}{r}\right]\phi_C(\boldsymbol{k};\boldsymbol{r})=0 \tag{2}$$

変形することができる．ここで，η はゾンマーフェルトパラメータであり，

$$\eta=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_P q_T}{\hbar v} \tag{3}$$

である．また，q_T, q_P はそれぞれ，標的核と入射核の電荷であり，$k=\sqrt{2\mu E}/\hbar$，μ は換算質量である．

クーロン力は長距離力なので，波動関数は平面波には漸近しない．この方程式を解くために，入射ビームの方向を z 軸にとり，

$$\phi_C(\boldsymbol{k};\boldsymbol{r})=Ce^{ikz}g(r-z) \tag{4}$$

と置く．クーロン力を 0 とする $(\eta\to 0)$ と，$g\to 1$ となる．極座標 (r,θ,φ) を放物線座標 (ξ,ζ,φ) へと変換する．ここで，

$$\xi=r-z=r(1-\cos\theta),\quad \zeta=r+z=r(1+\cos\theta) \tag{5}$$

である．

ここで，ξ が定数の局面は，原点を共通の焦点としての z の方向に開いた放物線を z 軸回りに回転してできる回転放物面の集まりである．また，ζ が定数の局面も同様に，z の負の方向に開いた回転放物面の集まりである．これは，式 5 の形から明らかである．

波動関数を式 4 のように置いたが，これは散乱波を含む波動関数の漸近的な振る舞いが

$$\psi(\boldsymbol{k};\boldsymbol{r})\to e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}+f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r} \tag{6}$$

であり，e^{-ikr} の形を含んでいない．このことから e^{ikz} という位相因子を取り出したときに，$g(r+z)$ ではなくて $g(r-z)$ となることが予想されるのである．

放物線座標でのラプラシアンを求める．これには，極座標のラプラシアンから出発するのがよいだろう．

$$\nabla^2=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \tag{7}$$

式 5 を参照しながら，式 7 に出てくる各項を求める．

$$r = \frac{\xi + \zeta}{2}, \quad r^2 \sin^2\theta = \xi\zeta$$

であり，偏微分項は,

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial \xi}{\partial r}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \zeta}{\partial r}\frac{\partial}{\partial \zeta} = (1-\cos\theta)\frac{\partial}{\partial \xi} + (1+\cos\theta)\frac{\partial}{\partial \zeta} = \frac{\xi}{r}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\zeta}{r}\frac{\partial}{\partial \zeta}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial \xi}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \zeta}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial \zeta} = r\sin\theta\frac{\partial}{\partial \xi} - r\sin\theta\frac{\partial}{\partial \zeta}$$

よって,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) &= \frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\left(\frac{\xi}{r}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\zeta}{r}\frac{\partial}{\partial \zeta}\right)\right] \\
&= r\frac{\partial}{\partial r}\left(\xi\frac{\partial}{\partial \xi} + \zeta\frac{\partial}{\partial \zeta}\right) + \left(\xi\frac{\partial}{\partial \xi} + \zeta\frac{\partial}{\partial \zeta}\right) \\
&= \left(\xi\frac{\partial}{\partial \xi} + \zeta\frac{\partial}{\partial \zeta}\right)\left(\xi\frac{\partial}{\partial \xi} + \zeta\frac{\partial}{\partial \zeta}\right) + \left(\xi\frac{\partial}{\partial \xi} + \zeta\frac{\partial}{\partial \zeta}\right) \\
&= \left(\xi^2\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \zeta^2\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + 2\xi\zeta\frac{\partial^2}{\partial \xi\partial \zeta}\right) + 2\left(\xi\frac{\partial}{\partial \xi} + \zeta\frac{\partial}{\partial \zeta}\right)
\end{aligned}$$

θ の微分項は,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\right) &= \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(r\sin^2\theta\frac{\partial}{\partial \xi} - r\sin^2\theta\frac{\partial}{\partial \zeta}\right) \\
&= \frac{2\cos\theta}{r}\left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \zeta}\right) + \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \zeta}\right) \\
&= \frac{2\cos\theta}{r}\left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \zeta}\right) + \frac{\sin\theta}{r}\left(r\sin\theta\frac{\partial}{\partial \xi} - r\sin\theta\frac{\partial}{\partial \zeta}\right)\left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \zeta}\right) \\
&= \frac{2\cos\theta}{r}\left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \zeta}\right) + \left(\sin^2\theta\frac{\partial}{\partial \xi} - \sin^2\theta\frac{\partial}{\partial \zeta}\right)\left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \zeta}\right) \\
&= \frac{\zeta - \xi}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \zeta}\right) + \frac{1}{r^2}\left(\xi\zeta\frac{\partial}{\partial \xi} - \xi\zeta\frac{\partial}{\partial \zeta}\right)\left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \zeta}\right) \\
&= \frac{\zeta - \xi}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \zeta}\right) + \frac{\xi\zeta}{r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} - 2\frac{\partial^2}{\partial \xi\partial \zeta}\right)
\end{aligned}$$

であるため，

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\\
&=\frac{\xi+\zeta}{r^2}\left(\xi\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\zeta\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\right)+\frac{\xi+\zeta}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)\\
&=\frac{2}{r}\left(\xi\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial}{\partial\xi}+\zeta\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}+\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)\\
&=\frac{4}{\xi+\zeta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\right)+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)\right]
\end{aligned}
$$

を得る．よって，式 7 は，放物線座標では，

$$
\nabla^2=\frac{4}{\xi+\zeta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\right)+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)\right]+\frac{1}{\xi\zeta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \tag{8}
$$

となる．

式 8 を用い，式 2 に式 4 を代入する．ここで，

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\xi}e^{ikz}&=\frac{\partial}{\partial\xi}e^{ik(\zeta-\xi)/2}=-\frac{ik}{2}e^{ikz}\\
\frac{\partial}{\partial\zeta}e^{ikz}&=\frac{\partial}{\partial\zeta}e^{ik(\zeta-\xi)/2}=\frac{ik}{2}e^{ikz}
\end{aligned}
$$

であることと，$g(r-z)=g(\xi)$ が ζ に依らないことから，

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi\frac{\partial}{\partial\xi}e^{ikz}g(\xi)\right)&=\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\xi\left(\frac{-ik}{2}e^{ikz}g(\xi)+e^{ikz}g'(\xi)\right)\right]\\
&=e^{ikz}\left[\frac{-ik}{2}g(\xi)+g'(\xi)+\xi\left(-\frac{k^2}{4}g(\xi)-ikg'(\xi)+g''(\xi)\right)\right]\\
\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta}e^{ikz}g(\xi)\right)&=\left(\frac{ik}{2}-\zeta\frac{k^2}{4}\right)g(\xi)e^{ikz}
\end{aligned}
$$

となる．

よって，それぞれ足し合わせることで，

$$
\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\right)+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)\right]e^{ikz}g(\xi)=\left[-\frac{k^2}{4}(\xi+\zeta)g(\xi)+(1-ik\xi)g'(\xi)+\xi g''(\xi)\right]e^{ikz}
$$

となるため，式 2 に 4 を代入すると，

$$
\left[-k^2g(\xi)+\frac{4}{\xi+\zeta}(1-ik\xi)g'(\xi)+\frac{4\xi}{\xi+\zeta}g''(\xi)+k^2g(\xi)-\frac{4\eta k}{\xi+\zeta}g(\xi)\right]e^{ikz}=0 \tag{9}
$$

であり，変形して，

$$
\xi g''(\xi)+(1-ik\xi)g'(\xi)-\eta kg(\xi)=0 \tag{10}
$$

が，$g(\xi)$ の従う微分方程式である．この微分方程式の解は合流型超幾何関数であり，

$$z\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}z^2}+(b-z)\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}-aF=0 \tag{11}$$

の解を，$F(a,b,z)$ と書く．

よって，式 10 において，$s=ik\xi$ と変数変換をし，$f(s)=g(\xi)$ と置き換えることで，

$$\begin{aligned}
&\frac{s}{ik}(ik)^2f''(s)+(1-s)(ik)f'(s)-\eta kf(s)=0\\
&sf''(s)+(1-s)f'(s)-(-i\eta)f(s)=0
\end{aligned}$$

となる．よって 2 の解は,

$$\phi_C(\boldsymbol{k};\boldsymbol{r})=Ce^{ikz}F(-i\eta,1,ik(r-z)) \tag{12}$$

である.

1.1 合流型超幾何関数

[3] を参照されたい.

References

[1] L. Canto and M. Hussein, *Scattering theory of molecules, atoms, and nuclei*, G - Reference,Information and Interdisciplinary Subjects Series (World Scientific, 2013).

[2] L. I. Schiff and 健. 井上, **量子力学**, 新版, 物理学叢書 / 小谷正雄 [ほか] 編 2,9 (吉岡書店, 1971).

[3] 嘉. 小野寺, 昭. 小出, and 龍. 阿部, **物理のための応用数学** (裳華房, 1988).