CENTRO DE ENSEÑANZA TÉCNICA Y SUPERIOR
ESCUELA DE INGENIERÍA

Métodos Numéricos
Elian Javier Cruz Esquivel T032218

Métodos de Jacobi, Gauss-Seidel y descomposición LU

Problema 1

Resolver el sístema de ecuaciones lineales siguiente mediante el método de Jacobi y el de Gauss-Seidel.

$$4x - y + z = 7$$

$$4x - 8y + z = -21$$

$$-2x - y + 5z = 7$$

Hemos visto que ambos métodos, tanto Jacobi como Gauss-Seidel, son aplicables únicamente cuando se tiene dentro de la matriz representativa del si ésta es estrictamente diagonal dominante, entonces, para conocer si ambos métodos son aplicables representamos las ecuaciones otorgadas en el problema en su forma matricial:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 4 & -8 & 1 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ -21 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Podemos ver que en la matriz A, la diagonal principal es dominante, ya que: $|4| > |-1| + |1|$, $|-8| > |4| + |1|$ y $|5| > |-1| + |-2|$, por lo tanto ambos métodos son aplicables.

Método de Jacobi

Sabemos que el sístema puede ser expresado como $Ax = b$, de la misma forma, la matriz A puede ser expresada como $A = D - R$, siendo D la diagonal principal y R es la suma de L y D, siendo L el triángulo inferior de la matríz y U el triángulo superior de la matriz. Dichas matrices se muestran a continuación:

```
R:                  D:
[[ 0 -1  1]        [[ 4  0  0]
 [ 4  0  1]         [ 0 -8  0]
 [-2  1  0]]        [ 0  0  5]]
```

Figura 1: Valores de D y R

Haciendo uso de la teoría establecida en clase, sabemos que:

$$Ax = b \Rightarrow (D + L + U)x = b$$

$$Dx = (-L - U)x + b \Rightarrow x = D^{-1}(-L - U)x + D^{-1}b$$

Por lo tanto:

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(-L - U)x^k + D^{-1}b$$

Entonces, haciendo que el error sea menor a 0.0001 tenemos que:

```
Método de Jacobi
x:  1.75  y:  2.625  z:  3.0  Error:  1.397542e+00
x:  1.65625  y:  3.875  z:  3.1750000000000003  Error:  4.054800e-01
x:  1.9249999999999998  y:  3.85  z:  2.8875  Error:  2.019437e-01
x:  1.990625  y:  3.9484375  z:  3.0  Error:  5.240784e-02
x:  1.987109375  y:  3.9953125  z:  3.0065625000000002  Error:  1.520550e-02
x:  1.9971875  y:  3.994375  z:  2.9957812500000003  Error:  7.572888e-03
x:  1.9996484374999999  y:  3.99806640625  z:  3.0  Error:  1.965294e-03
x:  1.9995166015625  y:  3.9998242187499997  z:  3.0002460937500004  Error:  5.702063e-04
x:  1.9998945312499998  y:  3.9997890625  z:  2.999841796875  Error:  2.839833e-04
x:  1.99998681640625  y:  3.999927490234375  z:  3.0  Error:  7.369853e-05
Iteraciones:  10
x: 1.99998681640625  y: 3.999927490234375  z: 3.0 con un error absoluto de:  7.369852953197258e-05
```

Figura 2: Resultados del método de Jacobi

Método de Gauss-Seidel

Por la teoría expuesta anteriormente sabemos que $Ax = b$ es igual a $(D+L+U)x = b$. Haciendo uso de la teoría tenemos que:

$$(D + L)x = Ux + b \Rightarrow x = (D - L)^{-1}(b - Ux)$$

por lo tanto:

$$x^{(k+1)} = (D - L)^{-1}(b - Ux^k)$$

Entonces tenemos que D, L y U son iguales a:

```
U               L               D
[[ 0 -1  1]     [[ 0  0  0]     [[ 4  0  0]
 [ 0  0  1]      [ 4  0  0]      [ 0 -8  0]
 [ 0  0  0]]     [-2  1  0]]     [ 0  0  5]]
```

Figura 3: Matrices D, L y U

Por lo tanto, utilizando el método de Gauss-Seidel, y haciendo que el error sea menor a 0.0001 tenemos que el resultado es:

```
Método de Gauss-Seidel
x:  1.75  y:  3.5  z:  3.0  Error:  5.590170e-01
x:  1.875  y:  3.9375  z:  2.9625  Error:  1.446980e-01
x:  1.99375  y:  3.9921875  z:  2.9990625  Error:  1.004871e-02
x:  1.99828125  y:  3.9990234375  z:  2.9995078125  Error:  2.037161e-03
x:  1.99987890625  y:  3.9998779296875  z:  2.9999759765625003  Error:  1.736145e-04
x:  1.99997548828125  y:  3.9999847412109375  z:  2.9999932470703126  Error:  2.965227e-05
Iteraciones:  6
x: 1.99997548828125  y: 3.9999847412109375  z: 2.9999932470703126 con un error absoluto de:  2.965226903796049e-05
```

Figura 4: Resultados del método Gauss-Seidel

Problema 2

Un mueblero fabrica sillas, mesas para cafe y mesas para comedor. Se necesitan 10 minutos para lijar una silla, 6 para pintarla y 12 para barnizarla. Se necesitan 12 minutos para lijar una mesa para café, 8 para pintarla y 12 para barnizarla. Se necesitan 15 minutos para lijar una mesa para comedor, 12 para pintarla y 18 para barnizarla. La mesa de lijado está disponible 16 horas a la semana,la mesa de pintura 11 horas ala semana y la mesa de barnizado 18 horas.
¿Cuántas unidades de cada mueble deben fabricarse por semana de modo que las mesas de trabajo se ocupen todo el tiempo disponible?

Expresando lo expuesto en el problema, tenemos que el sístema $Ax = b$ que lo representa está dado por:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 12 & 15 \\ 6 & 8 & 12 \\ 12 & 12 & 18 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 960 \\ 600 \\ 1080 \end{pmatrix}$$

Es facil observar que la matriz A no cumple con la condición de ser una matriz estrictamente diagnal dominante, por lo tanto, esta vez se utilizará el método de descomposición LU de Doolittle para obtener el valor de x que represente la cantidad de sillas, mesas para café y mesas oara comedor se producieron. A partir de la teoría vista en clase sabemos que tenemos dos sístemas:

$$Ly = b, \quad Ux = y$$

. Entonces, aplicando el método por medio de un algoritmo tenemos que los resultados son los siguientes:

```
L
[[ 1.   0.   0. ]
 [ 0.6  1.   0. ]
 [ 1.2 -3.   1. ]]
U
[[10.  12.  15. ]
 [ 0.   0.8  3. ]
 [ 0.   0.   9. ]]
y
[960.0, 84.0, 179.99999999999963]
x
[30.000000000000007, 30.000000000000007, 19.99999999999999]
```

Figura 5: Resultados por medio de la descomposición LU

Como aclaración, tanto x, como y son vectores 3×1, pero se muestran como 1×3 por convenciencia. En conclusión, de acuerdo a la implementación de la descomposición LU, se fabricaron 30 sillas, 30 mesas para café y 20 mesas de comedor.