CENTRO DE ENSEÑANZA TÉCNICA Y SUPERIOR
ESCUELA DE INGENIERÍA

Métodos Numéricos
Elian Javier Cruz Esquivel T032218

Actividad de Repaso

Problema 1

Sea la función $f(x) = ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

a) Calcule la serie de Taylor centrada en $x = 0$

b) Determine qué valor de x debemos usar si deseamos calcular $ln(7)$

c) Calcule $ln(7)$ usando la serie, y diga el número de términos necesarios para tener un error de 10^{-5}

---

a) Sabemos que $ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = ln(1+x) - ln(1-x)$. De la misma forma, sabemos que la serie para $ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + ...$, entonces, agregando el signo negativo a todas las x tendremos la serie para $ln(1-x)$

$$ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} - ...$$

Resolviendo:

$$ln(1+x) - ln(1-x) = (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + ...) - (-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} - ...)$$

De forma clara es posible apreciar que todos los términos con exponente par se cancelarán, entonces queda:

$$ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + ... = 2\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{2i+1}}{2i+1}$$

b) Para tener $ln(7)$, la expresión $\frac{1+x}{1-x} = 7$, entonces, multiplicando por (1-x) ambos lados tenemos:

$$1 + x = 7(1-x)$$
$$1 + x = 7 - 7x$$
$$8x = 6$$
$$x = \frac{3}{4}$$

Por lo tanto, $x = \frac{3}{4}$

c) Resultados:

```
Serie de MacLaurin para ln((1+x)/(1-x)), evaluada en 0.75 para obtener ln(7)
S: 1.5 error: 4.459101e-01
S: 1.78125 error: 1.646601e-01
S: 1.876171875 error: 6.973827e-02
S: 1.9143101283482142 error: 3.160002e-02
S: 1.930995614188058 error: 1.491453e-02
S: 1.938674729830259 error: 7.235419e-03
S: 1.942329693525345 error: 3.580456e-03
S: 1.9441114883266992 error: 1.798661e-03
S: 1.9449958350111949 error: 9.143140e-04
S: 1.9454409173885892 error: 4.692317e-04
S: 1.9456674325270844 error: 2.427165e-04
S: 1.9457837677476704 error: 1.263813e-04
S: 1.9458439712243236 error: 6.617784e-05
S: 1.945875327201747 error: 3.482186e-05
S: 1.945891748543372 error: 1.840052e-05
S: 1.945900389612251 error: 9.759448e-06
iteraciones:  16
1.945900389612251 con un error absoluto de:  9.759448e-06
```

Figura 1: Aproximación de $ln(7)$

Problema 2:

Sea la función $f(x) = 11x - 2e^x$, encuentre las raices con un error de 10^{-5} usando

a) Método de bisección.

b) Método de Newton

c) Método del punto fijo

---

a) Bisección:

```
Calculo de raices para 11x-2e^x mediante método de bisección
Raíz 1:
a_N: 0 b_N: 1 m_N: 0.5 error: 2.715086e-01
a_N: 0 b_N: 0.5 m_N: 0.25 error: 2.150860e-02
a_N: 0 b_N: 0.25 m_N: 0.125 error: 1.034914e-01
a_N: 0.125 b_N: 0.25 m_N: 0.1875 error: 4.099140e-02
a_N: 0.1875 b_N: 0.25 m_N: 0.21875 error: 9.741400e-03
a_N: 0.21875 b_N: 0.25 m_N: 0.234375 error: 5.883600e-03
a_N: 0.21875 b_N: 0.234375 m_N: 0.2265625 error: 1.928900e-03
a_N: 0.2265625 b_N: 0.234375 m_N: 0.23046875 error: 1.977350e-03
a_N: 0.2265625 b_N: 0.23046875 m_N: 0.228515625 error: 2.422500e-05
a_N: 0.2265625 b_N: 0.228515625 m_N: 0.2275390625 error: 9.523375e-04
a_N: 0.2275390625 b_N: 0.228515625 m_N: 0.22802734375 error: 4.640563e-04
a_N: 0.22802734375 b_N: 0.228515625 m_N: 0.228271484375 error: 2.199156e-04
a_N: 0.228271484375 b_N: 0.228515625 m_N: 0.2283935546875 error: 9.784531e-05
a_N: 0.2283935546875 b_N: 0.228515625 m_N: 0.22845458984375 error: 3.681016e-05
iteraciones:  14
0.228485107421875 con un error absoluto de:  6.292578e-06

Raíz 2:
a_N: 2 b_N: 3 m_N: 2.5 error: 1.968200e-01
a_N: 2.5 b_N: 3 m_N: 2.75 error: 5.318000e-02
a_N: 2.5 b_N: 2.75 m_N: 2.625 error: 7.182000e-02
a_N: 2.625 b_N: 2.75 m_N: 2.6875 error: 9.320000e-03
a_N: 2.6875 b_N: 2.75 m_N: 2.71875 error: 2.193000e-02
a_N: 2.6875 b_N: 2.71875 m_N: 2.703125 error: 6.305000e-03
a_N: 2.6875 b_N: 2.703125 m_N: 2.6953125 error: 1.507500e-03
a_N: 2.6953125 b_N: 2.703125 m_N: 2.69921875 error: 2.398750e-03
a_N: 2.6953125 b_N: 2.69921875 m_N: 2.697265625 error: 4.456250e-04
a_N: 2.6953125 b_N: 2.697265625 m_N: 2.6962890625 error: 5.309375e-04
a_N: 2.6962890625 b_N: 2.697265625 m_N: 2.69677734375 error: 4.265625e-05
a_N: 2.69677734375 b_N: 2.697265625 m_N: 2.697021484375 error: 2.014844e-04
a_N: 2.69677734375 b_N: 2.697021484375 m_N: 2.6968994140625 error: 7.941406e-05
a_N: 2.69677734375 b_N: 2.6968994140625 m_N: 2.69683837890625 error: 1.837891e-05
a_N: 2.69677734375 b_N: 2.69683837890625 m_N: 2.696807861328125 error: 1.213867e-05
iteraciones:  15
2.6968231201171875 con un error absoluto de:  3.120117e-06
```

b) Newton:

```
Calculo de raices para 11x-2e^x mediante método de Nexton
Raíz 1:
x_0:  0 x:  0.2222222222222222
x_0:  0.2222222222222222 x:  0.22848561911378537
iteraciones:  2
0.22848561911378537 con un error absoluto de:  5.780886e-06

Raíz 2:
x_0:  2 x:  3.911506970657685
x_0:  3.911506970657685 x:  3.271564859680672
x_0:  3.271564859680672 x:  2.870705475399712
x_0:  2.870705475399712 x:  2.717564168642493
x_0:  2.717564168642493 x:  2.6971576933816057
x_0:  2.6971576933816057 x:  2.6968223039053285
iteraciones:  6
2.6968223039053285 con un error absoluto de:  2.303905e-06
```

c) Punto fijo:

Escogí distintos $g(x)$ para las dos raices debido a que para la función que utilizaba para calcular la mas cercana del orígen, el método comenzaba a comportarse de manera divergente al calcular la más alejada del origen.

Para la primer raíz utilicé la $g(x)$ más sencilla:

$$11x - 2e^x = 0$$

$$g(x) = \frac{2e^x}{11}$$

Sin embargo, dicha función exhibe un comportamiento divergente al calcular la segunda raíz, por lo que haciendo uso de la definición del método $(x = x + f(x) = g(x))$ hice lo siguiente:

$$11x = 2e^x$$

$$11x = 2e^{x-1}e$$

$$e^{x-1} = \frac{11x}{2e}$$

Aplicando logaritmo natural a ambos lados:

$$x - 1 = ln\left(\frac{11x}{2e}\right) \longrightarrow g(x) = ln\left(\frac{11x}{2e}\right) + 1$$

Y utilizando dicha $g(x)$ mostraba un comportamiento convergente, por lo tanto fué la que utilicé. Los resultados se muestran en la imágen de la suguiente página.

```
Calculo de raices para 11x-2e^x mediante método de Punto Fijo
Raíz 1:
g(x) = 2e^x/11
x_0:  0.2 x:  0.2
x_0:  0.22207322875639451 x:  0.22207322875639451
x_0:  0.22702960228024313 x:  0.22702960228024313
x_0:  0.22815763896645336 x:  0.22815763896645336
x_0:  0.22841515436955095 x:  0.22841515436955095
x_0:  0.22847398236433436 x:  0.22847398236433436
x_0:  0.22848742342592845 x:  0.22848742342592845
iteraciones:  7
0.22848742342592845 con un error absoluto de:  3.976574e-06

Raíz 2:
g(x)=ln(11x/2e)+1
x_0:  2.6 x:  2.6
x_0:  2.660259537265862 x:  2.660259537265862
x_0:  2.6831717806730513 x:  2.6831717806730513
x_0:  2.6917476872279824 x:  2.6917476872279824
x_0:  2.6949387727441603 x:  2.6949387727441603
x_0:  2.6961235775079735 x:  2.6961235775079735
x_0:  2.6965631215925763 x:  2.6965631215925763
x_0:  2.6967261364718382 x:  2.6967261364718382
x_0:  2.696786587477342 x:  2.696786587477342
x_0:  2.6968090036682737 x:  2.6968090036682737
x_0:  2.696817315819436 x:  2.696817315819436
iteraciones:  11
2.696817315819436 con un error absoluto de:  2.684181e-06
```