CENTRO DE ENSEÑANZA TÉCNICA Y SUPERIOR
ESCUELA DE INGENIERÍA

Métodos Numéricos

Elian Javier Cruz Esquivel T032218

Ajuste de curvas 2

Problema 1

En un estudio ecológico se investiga el número de especies distintas de plantas por superficie. Para ello se ha llevado a cabo las siguientes observaciones:

S (m^2)	1	2	4	8	16	32	64
N (número de especies)	2	4	7	11	16	19	21

Figura 3: superficies

Con el objetivo de estudiar el número de especies a partir de la superficie, realice los ajustes logarítmico $y = a + bLn(x)$ y potencial $y = ax^b$, y razone cuál de ellos es más adecuado. Para una superficie de 20 m^2 , ¿cuál es el número de especies estimada?

Para comenzar, tenemos que el número de especies en el estudio es dependiente de la cantidad de m^2 disponibles, por lo tatno consideramos que x está representada por S y los valores de y por N, con esto en mente podemos proceder a realizar las regresiones.

Para hacer la regresión logarítmica es necesario saber que la ecuación general de este tipo regresión está dado por la $y = a + bLn(x)$, de tal forma que nos queda un sistema de la forma $\vec{y} = A\vec{v}$:

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & ln(x_0) \\ 1 & ln(x_1) \\ \vdots & \vdots \\ 1 & ln(x_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

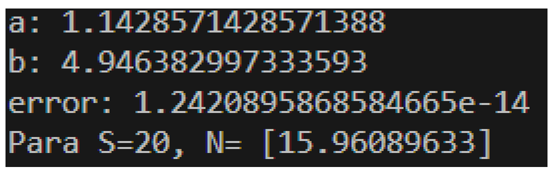
Podemos aislar al vector $\vec{v}$ al multiplicar ambos lados por la transpuesta de A, de tal forma que quede:

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ \\ ln(x_0) & ln(x_1) & ... & ln(x_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ \\ y_1 \\ \\ \vdots \\ \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ \\ ln(x_0) & ln(x_1) & ... & ln(x_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & ln(x_0) \\ \\ 1 & ln(x_1) \\ \\ \vdots & \vdots \\ \\ 1 & ln(x_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ \\ b \end{bmatrix}
$$

el cual puede ser reducido a la forma:

$$
\begin{bmatrix} a \\ \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum ln(x_i) \\ \\ \sum ln(x_i) & \sum ln(x_i)^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \\ \sum y_i ln(x_i) \end{bmatrix}
$$

Siendo ésta últimala forma necesaria para encontrar el vector solución $\vec{v}$, por lo tanto, implementando el algoritmo para regresión logarítmica nos queda que el resultado es el siguiemte:



```
a: 1.1428571428571388
b: 4.946382997333593
error: 1.2420895868584665e-14
Para S=20, N= [15.96089633]
```

Figura 1: Resultados de regresión logarítmica

Por lo que tenemos a la función que representa el número de especies presentes por metro cuadrado como:

$$
y = 1.1428571428571388 + 4.946382997333593 \ln x
$$

Cuya gráfica es la siguiente:

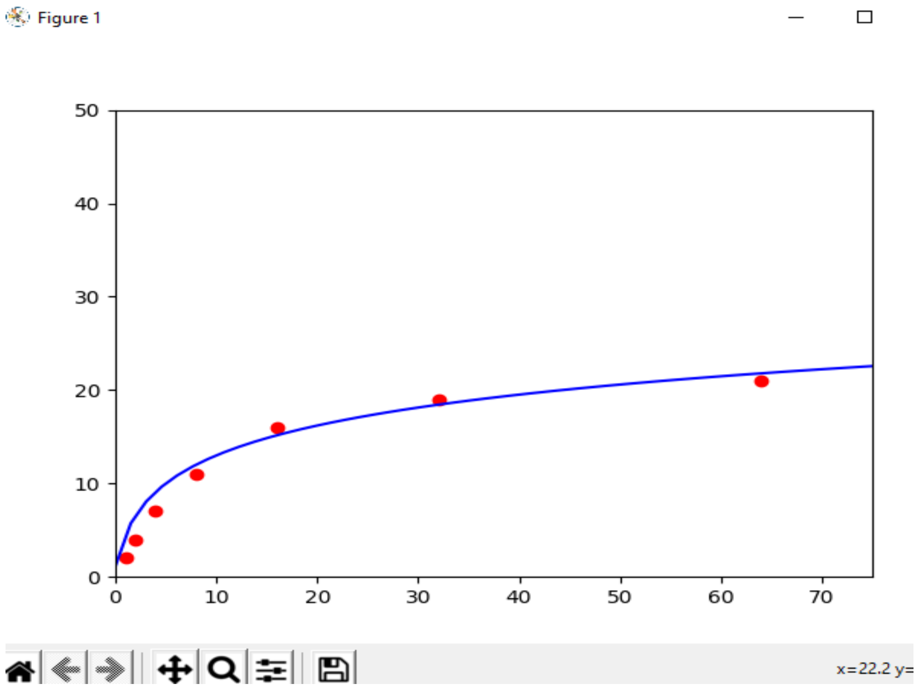


Figura 2: Caption

En cuyo caso, haciendo que $x = 20$, tenemos que para $20m^2$ disponibles se tendrán 15.96089633 especies distintas, es decir, aproximadamente 16.:

$$y = 1.1428571428571388 + 4.946382997333593 \ln 20 = 15.96089633$$

Para la regresión potencial, tenemos que su forma general es $y = ax^b$, por lo aplicando logaritmos de ambos lados de la ecuaci tenemos:

$$ln(y) = ln(ax^b) \rightarrow ln(y) = ln(a) + bln(x)$$

Cuya notación matricial sería de la forma $\vec{y} = A\vec{v}$ de tal manera que:

$$\begin{bmatrix} ln(y_0) \\ ln(y_1) \\ \vdots \\ ln(y_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & ln(x_0) \\ 1 & ln(x_1) \\ \vdots & \vdots \\ 1 & ln(x_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ln(a) \\ b \end{bmatrix}$$

Aplicando la transversa de A a ambos lados de la igualación tenemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ ln(x_0) & ln(x_1) & ... & ln(x_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ln(y_0) \\ ln(y_1) \\ \vdots \\ ln(y_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ ln(x_0) & ln(x_1) & ... & ln(x_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & ln(x_0) \\ 1 & ln(x_1) \\ \vdots & \vdots \\ 1 & ln(x_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ln(a) \\ b \end{bmatrix}$$

Y reduciendo nos queda:

$$\begin{bmatrix} ln(a) \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum ln(x_i) \\ \sum ln(x_i) & \sum ln(x_i)^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum ln(y_i) \\ \sum ln(y_i) ln(x_i) \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, aplicando el algoritmo correspondiente tenemos que el resultado es el siguiente: En

```
a: 2.6939181695188O8
b: 0.566623299041638
error: 0.7316472573311934
Para S=20, N= 14.708836068968562
```

Figura 3: Resultados de regresión potencia

base a los resultados de la regresión podemos ver la ecuación obtenida es:

$$y = 2.693918169518808x^{.566623299041638}$$

Y haciendo que $x = 20$, tenemos que en $20m^2$ se pueden acomodar 14.70883606896968562 especies, es decir, aproximadamente 15.

$$y = (2.693918169518808)20^{.566623299041638} = 14.70883606896968562$$

Por último tenemos la gráfica correspondiente a la ecuación y los puntos de dispersión:

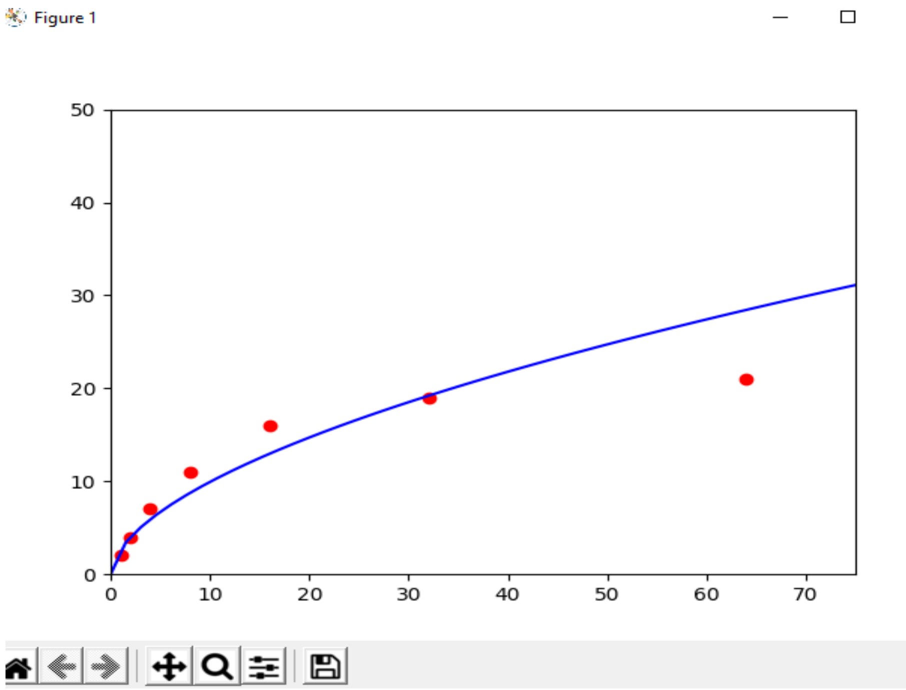


Figura 4: Gráfica para regresión potencia

En base a los resultados de ambos modelos de regresión, podemos apreciar claramente que el modelo que mejor se ajusta a los datos otorgados por el problema es el generado a partir de regresión logarítmica, una forma analítica de verlo es comparando los errores mínimos cuadrados de ambas aproximaciones.

Podemos ver que para regresión logarítmica el error es de $1.2420895868584665 * 10^{-14}$, mientras que para la regresión potencia el error es de 0.7316472573311934, demostrando que hay una diferencia del orden de 10^{-13} en cuanto a los errores de ambas, por lo tanto, una mejor aproximación para la colección de puntos del problema es la la logarítmica.

Problema 2

Realizar una interpolación polinomial con los puntos $(1,1)$,$(2,1)$,$(3,2)$, $(4,6)$

Sabemos que para realizar una interpolación polinomial, se requieren n puntos para obtener una ecuación de grado máximo $n-1$, por lo tanto, al tener 4 puntos, tendremos una ecuación cúbica cuya forma es la siguiente:

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Sabemos que el método de interpolación polinómica utiliza la matriz de Vandermonde, la cual tiene la forma:

$$V = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^{n-1} \\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3^2 & \dots & \alpha_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

Figura 5: Matriz de Vandermonde

Podemos demostrar que dicha matríz es la misma que la utilizada en la regresión polinomial dentro del sístema $A\vec{v} = \vec{y}$, puesto que si esto es cierto, podemos aplicar el método de regresión para obtener la interpolación polinomial de los puntos dados.

Por lo tanto, si tenemos n puntos para los cuales queremos hacemos hacer la interpolación, obtnedremos una ecuación de grado máximo $n-1$, por lo tanto, asumiendo que n es el número de puntos, nuestra ecuación será:

$$y = a_n x_i^{n-1} + a_{n-1}x_i^{n-2} + a_{n-2}x_i^{n-3} + ... + a_1 x_i + a_0 x_i^0$$

Entonces, haciendo la matriz representativa de los valores de las x_i para los diferentes valores de x de los puntos dados tenemos que:

$$\begin{bmatrix} x_0^{n-1} & ... & x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_1^{n-1} & ... & x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^{n-1} & ... & x_2^2 & x_2 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^{n-1} & ... & x_n^2 & x_n & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo que podemos ver, los valores de las x expresadas de esta forma, claramente tenemos que multiplicar dichos valores por sus respectivos coeficientes, por lo tanto podemos utilizar dicha matriz para expresar el sístema $\vec{y} = A\vec{v}$ tal que:

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & ... & x_0^{n-1} \\ 1 & x_1 & x_1^2 & ... & x_0^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & ... & x_0^{n-1} \\ 1 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & ... & x_0^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Entonces, multiplicando por la transpuesta:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & ... & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 & ... & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0^{n-1} & x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & ... & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & ... & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 & ... & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0^{n-1} & x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & ... & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & ... & x_0^{n-1} \\ 1 & x_1 & x_1^2 & ... & x_0^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & ... & x_0^{n-1} \\ 1 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & ... & x_0^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Simplificando, tenemos que:

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i & \sum x_i^2 & ... & \sum x_i^n \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & ... & \sum x_i^{n+1} \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 & ... & \sum x_i^{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum x_i^n & \sum x_i^{n+1} & \sum x_i^{n+2} & ... & \sum x_i^{2n-2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ \sum x_i^2 y_i \\ \vdots \\ \sum x_i^{n-1} y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Entonces, aplicando el algortimo de regresión para una ecuación cúbica, debido que ya establecimos que n es el número de puntos, entonces, $n = 4$, por lo tanto la ecuación será cúbica, tenemos:

```
a: 0.3333333333332291 b: -1.4999999999986358 c: 2.166666666663332 d: 2.7284841053187847e-12
La ecuación es: 0.3333333333332291x^3-1.4999999999986358x^2+2.166666666663332x+2.7284841053187847e-12
```

Figura 6: Resultados de la interpolación mediante regresión

Por lo tanto, la ecuación que pasa por los cuatro puntos es la siguiente:

$y = 0.3333333333332291x^3 - 1.4999999999986358x^2 + 2.166666666663332x + 2.7284841053187847 * 10^{-12}$

Que expresado en forma de fracción sería, redondeando y haciendo que el término sin x sea 0 debido a que es demasiado pequeño.

$$y = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \frac{13x}{6}$$

La siguiente gráfica muestra los puntos originales y la ecuación obtenida:

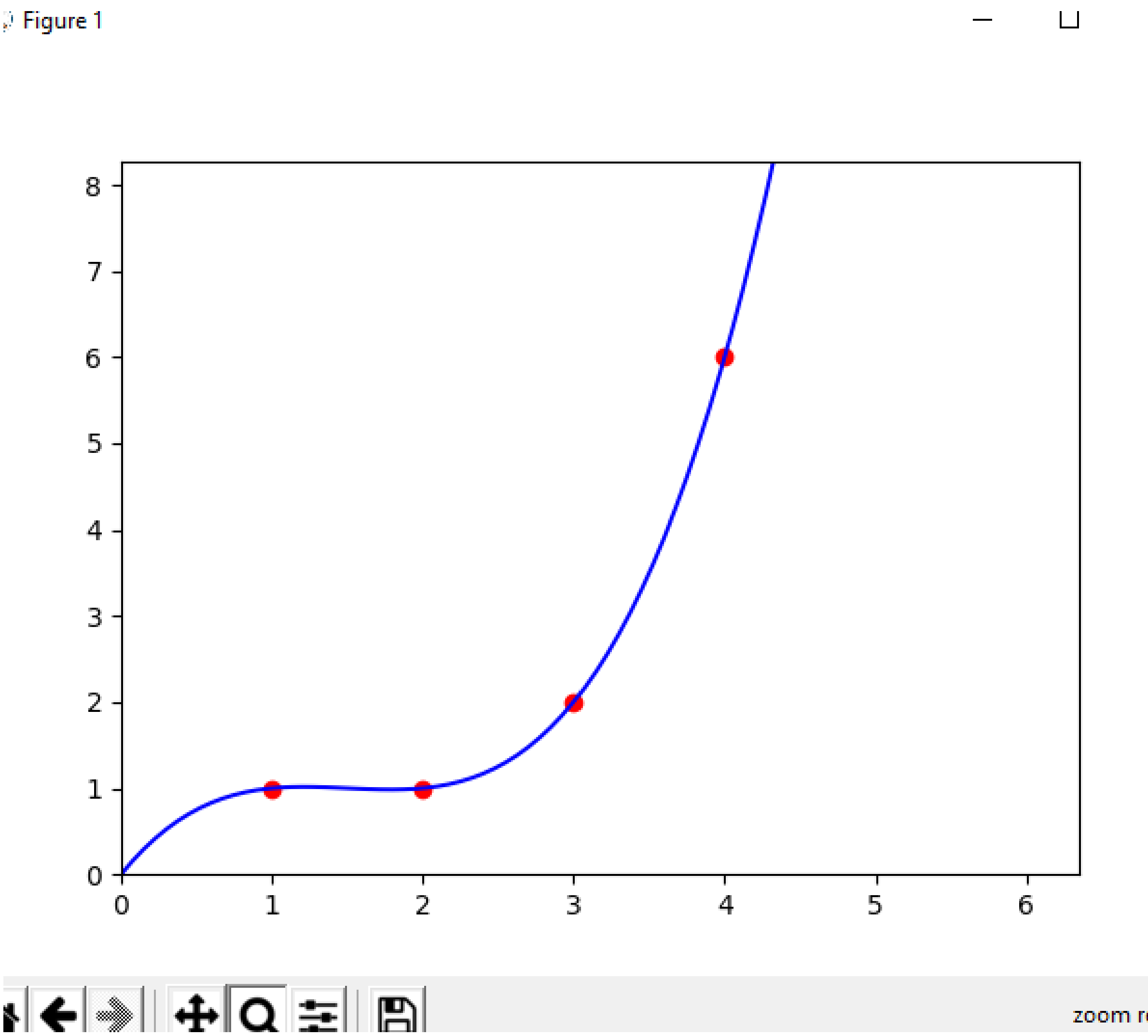


Figura 7: Gráfica resultado de interpolación polinomial