CENTRO DE ENSEÑANZA TÉCNICA Y SUPERIOR
ESCUELA DE INGENIERÍA

Métodos Numéricos
Elian Javier Cruz Esquivel T032218

Repaso de Integrales Final

1) Para la ecuación $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ calcular:
   a) Volúmen
   b) Area
   c) Longitud del arco
   d) Superficie del sólido en revolución

A) Sabemos que la fórmula general para encontrar el volumen de un sólido de revolución está dada por

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

Por lo tanto, procedemos a despejar de la ecuación de la elipse otorgada por el problema:

$$y = \sqrt{9(1 + \frac{x^2}{4})} = 3\sqrt{\frac{4 - x^2}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{4 - x^2}$$

Por lo que tenemos multiplicando por dos tenemos la siguiente integral:

$$V = 2\pi \int_0^2 [\frac{3}{2}\sqrt{4 - x^2}]^2 dx = \frac{9\pi}{2} \int_0^2 (4 - x^2) dx$$

Resolviendo tenemos:

$$V = \frac{9\pi}{2}(4x - \frac{x^3}{3})\Big|_0^2 \approx 75.3982236862 = 24\pi$$

Utilizando el método de Simpson $\dfrac{1}{3}$ tenemos:

```
Función:  9pi/2 * sqrt(4+x^2) [0,2]
n: 6
Un Tercio, resultado:  75.39822368615502 , error:  1.4210854715202004e-14
```

Figura 1: Cálculo del volúmen mediante Simpson $\dfrac{1}{3}$

De acuerdo a la parpoximación, el volúmen de la elipse en revolución es de $75.39822u^3$

b) Para calcular el área debemos de en primer lugar graficar la ecuación: Como podemos ver,

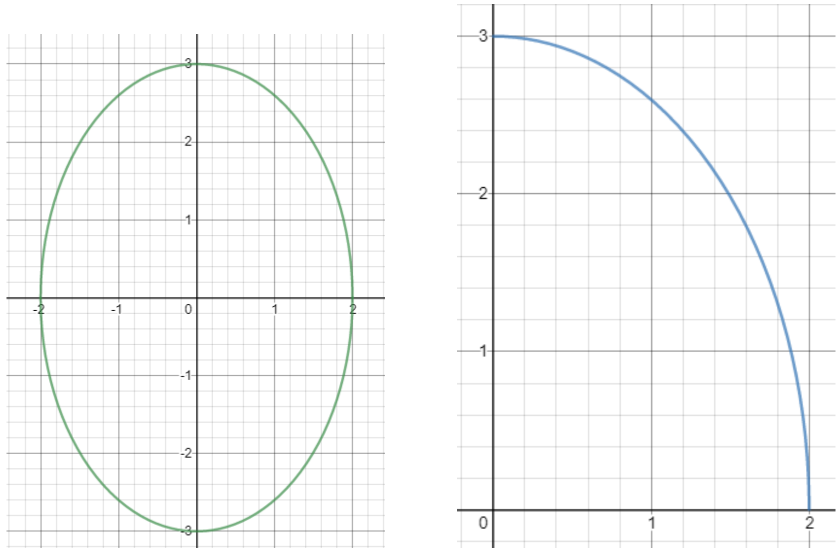

Figura 2: Izquierda: Elipse completa, derecha: Elipse en el primer cuadrante

podemos obtener el área de la funci¿n integrandola solamente en el primer cuadrante y multiplicandola por cuatro, por lo que tenemos que:

$$A = 4\frac{3}{2}\int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx = 6\int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx$$

Realizando una sustitución trigonométrica tenemos:

$$x = 2\sin(u), \quad dx = 2\cos(u)du, \quad u = \arcsin(\frac{x}{2})$$

$$6\int_0^2 2\cos(x)\sqrt{4+4\sin^2(x)}du = 6\int_0^2 2\cos^2(u)du$$

Ya hemos obtenido anteriormente la integral de $\sec^3(u)$ por lo que tenemos: Efectuando la correspondiente sustitución tenemos:

$$3x\sqrt{4-x^2} + 12\arcsin(\frac{x}{2})$$

Susituyendo $u = \arctan(\frac{x}{2})$ tenemos:

$$(3x\sqrt{4-x^2} + 12\arcsin(\frac{x}{2}))\Big|_0^2 = 6\pi$$

Mediante Simpson $\frac{3}{8}$ obtenemos la siguiente aproximación:

```
Función: 6 sqrt(4+x^2) [0,2]
n: 9
Tres octavos, resultado:  18.724586299613236 , error:  0.12496962192552274
```

Por lo tanto, el valor del área de la elipse es de $18.724586u^2$

c) Para calcular la longitud del arco de la elipse, utilizamos la formula siguiente:

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx$$

Sin embargo, aplicando el mismo principio de calcular solamente la sección del primer cuadrante de la figura y multiplicando por cuatro tenemos, en primer lugar, que la derivada de la funcrión es la siguiente:

$$f'(x) = \frac{3}{2}\frac{d(\sqrt{4-x^2})}{dx} = \frac{-3x}{2\sqrt{4-x^2}}$$

Susituyendo tenemos:

$$\ell = 4\int_0^2 \sqrt{1 + \frac{9x^2}{4(4-x^2)}} = 2\int_0^2 \sqrt{\frac{16+5x^2}{(4-x^2)}} \approx 15.8654395228$$

Dicho resultado no puede ser conocido mediante integración en papel, por lo tanto, de acuerdo a Desmos, el valor de nuestra aproximación debería estar cercanos a 15.8654395228. Mediante Simpson $\frac{1}{3}$ tenemos:

```
Función: 2 sqrt((16+5x^2)/(4-x^2)) [0,2]
n: 20
Un Tercio, resultado:  15.902959238301609 , error:  0.037519715501609596
```

Figura 3: Aproximación de ℓ

Por lo que la longitud del arco de la elipse (o su perímetro) es de $15.902959u$

d) Para encontrar la superficie del solido en revolución podemos aplicar la siguiente fórmula derivada en clase:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

Sustituyendo los valores ya conocidos tenemos que:

$$S = 4\pi \int_0^2 \frac{3}{4}\sqrt{4 - x^2}\sqrt{\frac{16 + 5x^2}{(4 - x^2)}}dx = 3\pi \int_0^2 \sqrt{16 + 5x^2}dx$$

Realizando sustitución trigonométrica tenemos:

$$x = 4\tan(u), \quad dx = 4\sec^2(u), \quad u = \arctan\frac{x}{2}$$

$$3\pi \int 4\sec^2(u)\sqrt{16 + 16\tan^2(u)}du = 48\pi \int \sec^3(u)du$$

Ya hemos derivado el valor de la integral de $\sec^3(x)$, por lo que sustituyendo:

$$48\pi\frac{(\sec(u)\tan(u) - \ln(\sec(u) + \tan(u)))}{2}$$

Simplificando y sustituyendo u tenemos que:

$$S = \left(\frac{24\ln(\sqrt{16 + 5x^2} + \sqrt{5}x)}{\sqrt{5}} + \frac{3\pi x}{2}\sqrt{5x^2 + 16}\right)\Big|_0^2 \approx 89.0007373719$$

Mediante Simpson $\frac{1}{3}$ y una $n = 6$ tenemos que la aproximación es la siguiente:

```
Función: 3pi sqrt(16+5x^2) [0,2]
n: 6
Un Tercio, resultado:  89.00053961410475 , error:  0.00019775779524877635
```

Figura 4: Aproximación a S

Podemos decir entonces que la superficie de la elipse en revolución es de $89.00053u^2$

2) Encontrar el área de la supericicie de un estanque con distancias entre ambas orillas de magnitud:

$$[0, 10, 15, 20, 18, 16, 20, 23, 21, 18, 18, 16, 17, 15, 0]$$

Sabiendo que $a = 0$, $b = 210$, $n = 14$ y $h = 15$

Utilizando los métodos de Trapecio y Simspon $\frac{1}{3}$ modificados para aceptar la lista con los datos de las distancias descitas anteriormente obtenemos los siguientes resultados de aproximación a la superficie del estanque: Como podemos apreciar, de acuerdo al método del trapecio, el área es

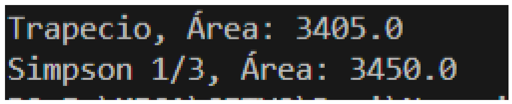

Figura 5: Aproximaciones al área del estanque mediante los métodos mencionados.

igual a $3405u^2$, mientras que con Simpson $\frac{1}{3}$ el área es igual a $3450u^2$.