

Métodos de Jacobi, Gauss-Seidel y descomposición LU

Problema 1

Resolver el sistema de ecuaciones lineales siguiente mediante el método de Jacobi y el de Gauss-Seidel.

$$4x - y + z = 7$$

$$4x - 8y + z = -21$$

$$-2x - y + 5z = 7$$

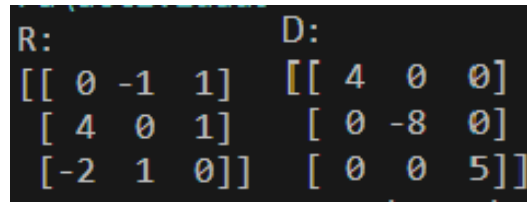
Hemos visto que ambos métodos, tanto Jacobi como Gauss-Seidel, son aplicables únicamente cuando se tiene dentro de la matriz representativa del si ésta es estrictamente diagonal dominante, entonces, para conocer si ambos métodos son aplicables representamos las ecuaciones otorgadas en el problema en su forma matricial:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 4 & -8 & 1 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ -21 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Podemos ver que en la matriz A , la diagonal principal es dominante, ya que: $|4| > |-1| + |1|$, $|-8| > |4| + |1|$ y $|5| > |-1| + |-2|$, por lo tanto ambos métodos son aplicables.

Método de Jacobi

Sabemos que el sistema puede ser expresado como $Ax = b$, de la misma forma, la matriz A puede ser expresada como $A = D - R$, siendo D la diagonal principal y R es la suma de L y D , siendo L el triángulo inferior de la matriz y U el triángulo superior de la matriz. Dichas matrices se muestran a continuación:



The image shows two matrices, R and D, displayed on a dark background. Matrix R is a 3x3 matrix with values [[0, -1, 1], [4, 0, 1], [-2, 1, 0]]. Matrix D is a 3x3 diagonal matrix with values [[4, 0, 0], [0, -8, 0], [0, 0, 5]].

$$R: \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D: \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Figura 1: Valores de D y R

Haciendo uso de la teoría establecida en clase, sabemos que:

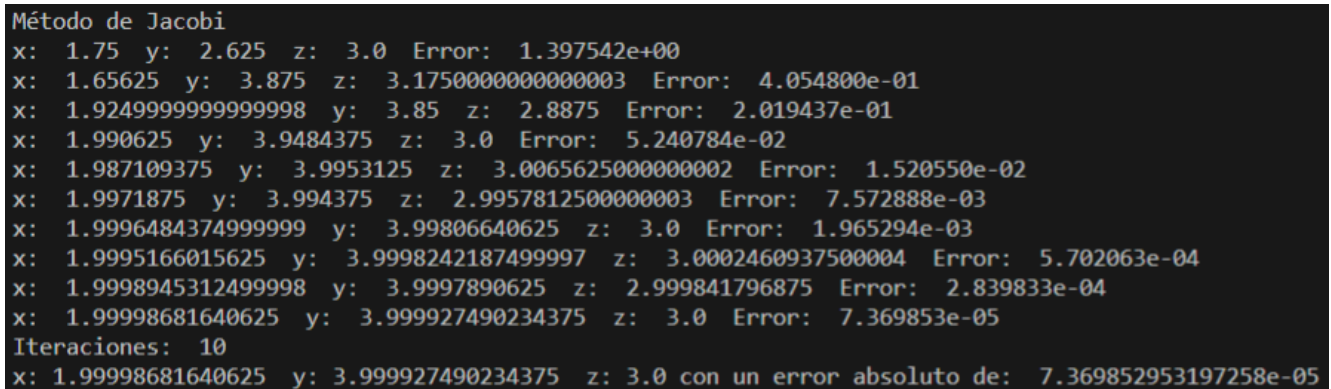
$$Ax = b \Rightarrow (D + L + U)x = b$$

$$Dx = (-L - U)x + b \Rightarrow x = D^{-1}(-L - U)x + D^{-1}b$$

Por lo tanto:

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(-L - U)x^k + D^{-1}b$$

Entonces, haciendo que el error sea menor a 0.0001 tenemos que:



The image shows the output of the Jacobi method, displaying the values of x, y, and z, and the error at each iteration. The error decreases significantly over 10 iterations, reaching a value of 7.369852953197258e-05.

```
Método de Jacobi
x: 1.75 y: 2.625 z: 3.0 Error: 1.397542e+00
x: 1.65625 y: 3.875 z: 3.1750000000000003 Error: 4.054800e-01
x: 1.9249999999999998 y: 3.85 z: 2.8875 Error: 2.019437e-01
x: 1.990625 y: 3.9484375 z: 3.0 Error: 5.240784e-02
x: 1.987109375 y: 3.9953125 z: 3.0065625000000002 Error: 1.520550e-02
x: 1.9971875 y: 3.994375 z: 2.9957812500000003 Error: 7.572888e-03
x: 1.9996484374999999 y: 3.99806640625 z: 3.0 Error: 1.965294e-03
x: 1.9995166015625 y: 3.9998242187499997 z: 3.0002460937500004 Error: 5.702063e-04
x: 1.9998945312499998 y: 3.9997890625 z: 2.999841796875 Error: 2.839833e-04
x: 1.99998681640625 y: 3.999927490234375 z: 3.0 Error: 7.369853e-05
Iteraciones: 10
x: 1.99998681640625 y: 3.999927490234375 z: 3.0 con un error absoluto de: 7.369852953197258e-05
```

Figura 2: Resultados del método de Jacobi

Método de Gauss-Seidel

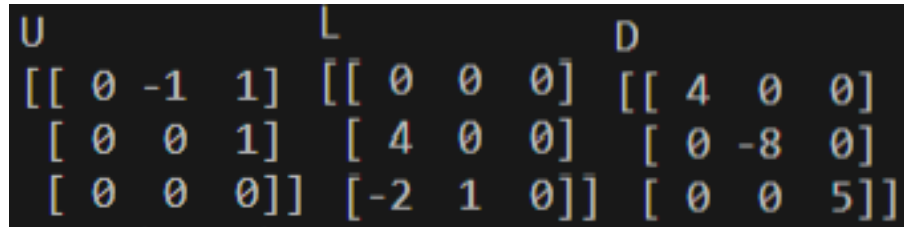
Por la teoría expuesta anteriormente sabemos que $Ax = b$ es igual a $(D+L+U)x = b$. Haciendo uso de la teoría tenemos que:

$$(D + L)x = Ux + b \Rightarrow x = (D - L)^{-1}(b - Ux)$$

por lo tanto:

$$x^{(k+1)} = (D - L)^{-1}(b - Ux^k)$$

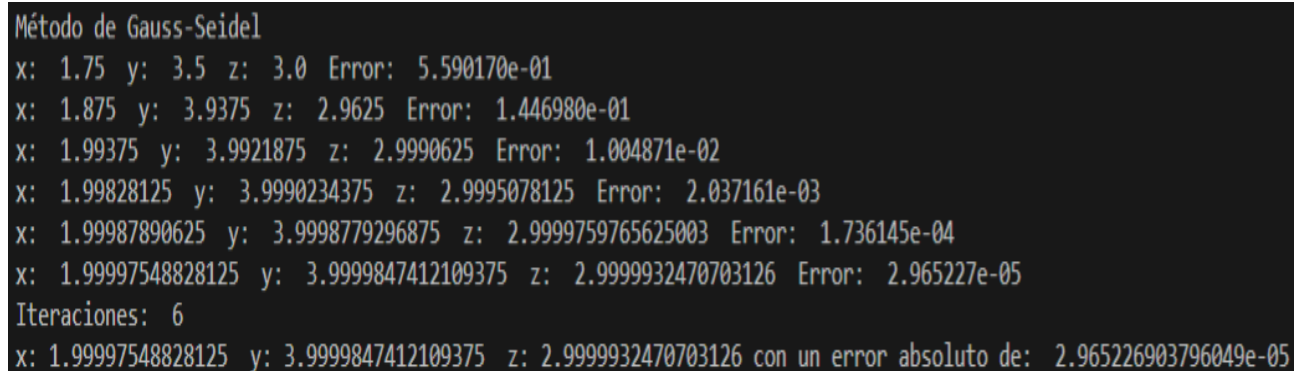
Entonces tenemos que D , L y U son iguales a:



The image shows three matrices labeled U, L, and D. Matrix U is a 3x3 matrix with values [[0, -1, 1], [0, 0, 1], [0, 0, 0]]. Matrix L is a 3x3 matrix with values [[0, 0, 0], [4, 0, 0], [-2, 1, 0]]. Matrix D is a 3x3 matrix with values [[4, 0, 0], [0, -8, 0], [0, 0, 5]].

Figura 3: Matrices D, L y U

Por lo tanto, utilizando el método de Gauss-Seidel, y haciendo que el error sea menor a 0.0001 tenemos que el resultado es:



The image shows the output of the Gauss-Seidel method. It starts with the title 'Método de Gauss-Seidel' and then displays several lines of results. Each line shows the values of x, y, and z, followed by the error. The error decreases significantly over iterations. The final line shows the results after 6 iterations, with an absolute error of 2.965226903796049e-05.

```
Método de Gauss-Seidel
x: 1.75 y: 3.5 z: 3.0 Error: 5.590170e-01
x: 1.875 y: 3.9375 z: 2.9625 Error: 1.446980e-01
x: 1.99375 y: 3.9921875 z: 2.9990625 Error: 1.004871e-02
x: 1.99828125 y: 3.9990234375 z: 2.9995078125 Error: 2.037161e-03
x: 1.99987890625 y: 3.9998779296875 z: 2.9999759765625003 Error: 1.736145e-04
x: 1.99997548828125 y: 3.9999847412109375 z: 2.9999932470703126 Error: 2.965227e-05
Iteraciones: 6
x: 1.99997548828125 y: 3.9999847412109375 z: 2.9999932470703126 con un error absoluto de: 2.965226903796049e-05
```

Figura 4: Resultados del método Gauss-Seidel

Problema 2

Un mueblero fabrica sillas, mesas para café y mesas para comedor. Se necesitan 10 minutos para lijar una silla, 6 para pintarla y 12 para barnizarla. Se necesitan 12 minutos para lijar una mesa para café, 8 para pintarla y 12 para barnizarla. Se necesitan 15 minutos para lijar una mesa para comedor, 12 para pintarla y 18 para barnizarla. La mesa de lijado está disponible 16 horas a la semana, la mesa de pintura 11 horas a la semana y la mesa de barnizado 18 horas.

¿Cuántas unidades de cada mueble deben fabricarse por semana de modo que las mesas de trabajo se ocupen todo el tiempo disponible?

Expresando lo expuesto en el problema, tenemos que el sistema $Ax = b$ que lo representa está dado por:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 12 & 15 \\ 6 & 8 & 12 \\ 12 & 12 & 18 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 960 \\ 600 \\ 1080 \end{pmatrix}$$

Es fácil observar que la matriz A no cumple con la condición de ser una matriz estrictamente diagonal dominante, por lo tanto, esta vez se utilizará el método de descomposición LU de Doolittle para obtener el valor de x que represente la cantidad de sillas, mesas para café y mesas para comedor se produjeron. A partir de la teoría vista en clase sabemos que tenemos dos sistemas:

$$Ly = b, \quad Ux = y$$

. Entonces, aplicando el método por medio de un algoritmo tenemos que los resultados son los siguientes:

```
L
[[ 1.  0.  0. ]
 [ 0.6 1.  0. ]
 [ 1.2 -3. 1. ]]
U
[[10. 12. 15. ]
 [ 0.  0.8 3. ]
 [ 0.  0.  9. ]]
y
[960.0, 84.0, 179.99999999999996]
x
[30.000000000000007, 30.000000000000007, 19.999999999999999]
```

Figura 5: Resultados por medio de la descomposición LU

Como aclaración, tanto x , como y son vectores 3×1 , pero se muestran como 1×3 por convención. En conclusión, de acuerdo a la implementación de la descomposición LU, se fabricaron 30 sillas, 30 mesas para café y 20 mesas de comedor.