CENTRO DE ENSEÑANZA TÉCNICA Y SUPERIOR
ESCUELA DE INGENIERÍA

Métodos Numéricos
Elian Javier Cruz Esquivel T032218

Actividad 1: Series de Taylor

Problema 1

Calcule π usando la serie, y diga el número de términos necesarios para tener un error de 10^{-3}

Para comenzar, sabemos que una serie geométrica converge en $\frac{1}{1-x}$ cuando $|x| < 1$, entonces, haciendo la serie para $-x^2$ tenemos:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + ...$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + ...$$

Integrando ambos lados tenemos:

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \int (1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + ...)dx =$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - ... =$$

$$\arctan x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i (x^{2i+1})}{2i+1}$$

Sabemos que $\frac{\pi}{4}$ es un valor que se encuentra en el rango de $\arctan x$, entonces despejando x tenemos:

$$\pi = 4 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i (x^{2i+1})}{2i+1}$$

Resultados:

```
Cálculo de π
Valor real:  3.141592653589793
Iteraciones : 1000
Aprocimación:  3.140592653839794 con un error de  9.999997e-04
```

Figura 1: Aproximación de π mediante serie de Taylor centrada en 0 (MacLaurin)

Problema 2

Calcule e y e^2 usando la serie, y diga el número de términos necesarios para tener un error de 10^{-3}

Sabemos que cualquier derivada de e^x es igual a la función misma, por lo tanto, haciendo uso de la serie de Taylor centrada en cero (o de MacLaurin) tenemos:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f'''(0)\frac{x^3}{3!} + f''''(0)\frac{x^4}{4!} + ... + f^n(0)\frac{x^n}{n!}$$

La derivada de e^x de cualquier orden evaluada en 0 siempre será 1, entomces tenemos:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^n}{n!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

Haciendo que $x = 1$, tenemos el valor de e:

$$e = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}$$

Para $x = 2$ tenemos que e^2 es igual a:

$$e^2 = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^i}{i!}$$

Para e tenemos: Para e^2:

```
Cálculo de e
Valor real:  2.718281828459045
Iteraciones : 7
Aprocimación:  2.7180555555555554 con un error de  2.262729e-04
```

Figura 2: Resultado de la aproximación de e^x mediante serie de MacLaurin para x = 1

```
Cálculo de e^2
Valor real:  7.38905609893065
Iteraciones : 10
Aprocimación:  7.3887125220458545 con un error de  3.435769e-04
```

Figura 3: Resultado de la aproximación de e^x mediante serie de MacLaurin para x = 2

Problema 3

Calcule $ln(2)$ usando la serie, y diga el número de términos necesarios para tener un error de 10^{-3}

Al igual que con π, utilizamos la convergencia de la serie geométrica para $|x| < 1$, pero ahora con $-x$:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + ...$$

Integrando ambos lados:

$$\int \frac{1}{1+x}dx = \int (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + ...)dx = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i x^{i+1}}{i+1}$$

Como resultado tenemos:

$$\ln(x+1) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i x^{i+1}}{i+1}$$

Resultado:

```
Cálculo de ln(2)
Valor real:  0.6931471805599453
Iteraciones : 500
Aprocimación:  0.6921481805579461 con un error de  9.990000e-04
```

Figura 4: Resultado de la aproximación de $ln(1 + x)$ mediante serie de MacLaurin para x = 1, es decir $ln(2)$

Problema 4

Calcule $e^x sin(x)$ usando la serie, y diga el número de términos necesarios para tener un error de 10^{-3}, evaluado en $\frac{\pi}{4}$

Sabemos que la multiplicación de dos series de Taylor nos otorga un polinomio de Taylor como resultado, por lo tanto, expresamos ambas funciónes en su forma de serie:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^n}{n!}$$

$$sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...$$

Entonces la serie resultante es:

$$(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ...)(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + ... + c_nx^n$$

Por lo tanto los coeficientes son:

$$c_0 = (1)(0) = 0$$

$$c_1 = (1)(1) + (0)(1) = 1$$

$$c_2 = (1)(0) + (1)(1) + (0)(\frac{1}{2!}) = 1$$

$$c_3 = (1)(\frac{-1}{3!}) + (1)(0) + (\frac{1}{2!})(1) + (\frac{1}{3!})(0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

$$c_4 = (1)(0) + (1)(\frac{-1}{3!}) + (\frac{1}{2})(0) + (\frac{1}{3!})(1) + (\frac{1}{4!})(0) = \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = 0$$

Siguiendo la misma técnica, tenemos que:

$$c_5 = \frac{1}{120} - \frac{1}{12} + \frac{1}{24} = \frac{-1}{30}$$

$$c_6 = \frac{1}{120} + \frac{1}{6}\frac{-1}{6} + \frac{1}{120} = \frac{1}{120} - \frac{1}{36} + \frac{1}{120} = \frac{-1}{90}$$

Por lo tanto, el polinomio de $e^x sin(x)$ hasta el grado 6 es igual a:

$$x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} - \frac{x^6}{90} + ...$$

Implementando ésta técnica para obtener los coeficientes del polinomio, el resultado es el presentado en la siguiente página:

```
e^x*sin(x) evaluado en π / 4
Valor real:  1.5508831969180255
Iteraciones : 6
Aprocimación:  1.5511699494659046 con un error de  2.867525e-04
```

Figura 5: Resultado de la aproximación de $e^x sin(x)$ para x = $\frac{\pi}{4}$