Лекции по общей физике. Механика

Алексей А. Щербаков

24 октября 2019 г.

1 План лекций

1. Предмет физики. Физические величины, единицы измерений СИ и СГС, внесистемные единицы. Кинематика материальной точки. Системы отсчёта и системы координат (декартова, полярная, сферическая). Радиус-вектор, линейные и угловые скорости и ускорения. Нормальное, тангенциальное и полное ускорения. Описание движения вдоль плоской кривой, радиус кривизны траектории.

2. Динамика материальной точки. Задание состояния частицы в классической механике. Основная задача динамики. Инерциальные и неинерциальные системы отсчёта. Первый закон Ньютона. Импульс и сила. Инертная и гравитационная массы. Второй закон Ньютона. Уравнение движения частицы, роль начальных условий. Третий закон Ньютона. Закон сохранения импульса. Центр инерции (центр масс). Динамика системы частиц. Закон движения центра инерции. Движение тел с переменной массой.

3. Работа силы. Мощность. Консервативные и неконсервативные силы. Понятие силового поля. Потенциальная энергия, потенциал поля. Кинетическая энергия частицы. Закон сохранения энергии в механике. Общефизический закон сохранения энергии. Система центра инерции. Преобразование энергии при смене системы отсчёта. Теорема Кёнига.

4. Момент импульса материальной точки. Связь момента импульса материальной точки с секториальной скоростью. Момент импульса системы материальных точек. Момент силы. Уравнение моментов. Закон сохранения момента импульса. Движение тел в центральном поле. Закон всемирного тяготения. Потенциальная энергия в гравитационном поле. Законы Кеплера.

5. Вращение твёрдого тела вокруг неподвижной оси. Кинематика твёрдого тела. Теорема Эйлера. Мгновенная ось вращения. Угловая скорость как вектор, сложение вращений. Независимость угловой скорости вращения твёрдого тела от положения оси, к которой отнесено вращение. Момент инерции. Вычисление моментов инерции твёрдых тел. Теорема Гюйгенса–Штейнера. Уравнение моментов при вращении вокруг неподвижной оси. Кинетическая энергия вращающегося тела. Плоское движение твёрдого тела. Качение. Скатывание тел с наклонной плоскости. Регулярная прецессия свободного вращающегося симметричного волчка. Гироскопы.

6. Гармонические колебания материальной точки. Пружинный и математический маятники. Частота, круговая частота и период колебаний. Роль начальных условий. Энергия колебаний, связь средней кинетической и средней потенциальной энергий гармонического осциллятора. Механические колебания твёрдых тел. Физический маятник. Приведённая длина, центр качания. Теорема Гюйгенса о физическом маятнике. Комплексное описание колебаний. Затухающие колебания. Колебания под действием внешней силы.

7. Неинерциальные системы отсчёта. Относительное, переносное, кориолисово ускорения. Силы инерции: поступательная, центробежная, кориолисова. Второй закон Ньютона в неинерциальных системах отсчёта. Потенциальная энергия в поле центробежных сил. Вес тела, невесомость. Отклонение падающих тел от направления отвеса. Геофизические проявления кориолисовых сил. Маятник Фуко.

8. Элементы специальной теории относительности. Принцип относительности. Опыт Майкельсона и Морли. Определение величины скорости света Ремером, Бредли и Физо. Инвариантность скорости света

– опыты Физо и Саде. Предельность скорости света – опыт Бертоцци. Преобразования Галилея и Лоренца. Интервал и его инвариантность относительно смены системы отсчёта. Относительность понятия одновременности. Замедление времени, сокращение масштабов, собственная длина. Сложение скоростей. Эффект Доплера. Кинетическая энергия релятивистской частицы, энергия покоя, полная энергия. Инвариантность массы системы. Инвариант энергии-импульса.

2 Лекция 1

Предмет физики. Физические величины, единицы измерений СИ и СГС, внесистемные единицы. Кинематика материальной точки. Системы отсчёта и системы координат (декартова, полярная, сферическая). Радиус-вектор, линейные и угловые скорости и ускорения. Нормальное, тангенциальное и полное ускорения. Описание движения вдоль плоской кривой, радиус кривизны траектории.

2.1 Введение

Курс общей физики длится четыре семестра и включает лекционные, практические и лабораторные работы по механике, термодинамике и статистической физике, электромагнетизму, оптике, квантовой и ядерной физике. Мы начнем с механики как с исторического раздела физики, который появился самым первым. Механика – наука о равновесии и движении тел, закономерностях и причинах движения. Это связано с естественным путем познания человеком окружающей природы: все, что нас окружает, движется, и это движение и изучение закономерностей этого движения есть, пожалуй, первое, что может прийти на ум любознательному человеку.

Научный подход развивался на протяжении нескольких тысячелетий, и теперь можно сформулировать ряд положений, на которые опирается современная наука и современные исследователи. Это:

- стремление к объективности, изучение и обобщение опыта всего человечества на протяжении длительного времени. При этом неявно предполагается, что мы верим в существование некоторой объективной реальности, общей для на всех нас, в любые моменты времени и во всех точках пространства. Сейчас это предположение для большинства из нас представляется само собой разумеющимся, однако, по-видимому, например, в античные времена, и даже в средние века, это было не так, или этот вопрос вообще не ставился.

- выявление в совокупностях фактов общих закономерностей. Научное познание ориентировано на воспроизводимые во времени и пространстве результаты.

- комбинация эмпирического (опытного) и теоретическо путей познания. Все начинается и заканчивается на опыте. Опыт дает предпосылки для построения теоретических моделей. В свою очередь, предсказания теоретических моделей проверяются на опыте.

- возможность проверки: можно поставить ранее предложенные эксперименты и при сходных условиях получить те же результаты; предсказания теорий должно быть возможно проверить или опровергнуть, поставив подходящий эксперимент.

- моделирование. Наука формализует природу и оперирует с упрощенными моделями, которые имеют «конечную» сложность. Для изучения явления выбираются только те параметры, которые значимы для этого явления и изучаются только они. Например, в опытах по скатыванию шариков с наклонных поверхностей, с которыми мы скоро познакомимся, значимыми можно считать размеры и массы шариков, а их цвет или химический состав значения иметь не будут.

- языком физики является математика и без математики было бы невозможно бурное развитие физики. Мы не можем полностью описать природу, и поэтому нужно оперировать с абстрациями и их отношениями – математическими понятиями. Реальные объекты заменяются их идеализированными моделями. Задача физика – с одной стороны всесторонне изучить математические свойства этих моделей, а с другой – определить границы применимости моделей, то есть, условия, в которых правомерно эти модели применять для получения верных теоретических предсказаний.

- Что еще необходимо для воспроизведения экспериментов? Единый язык измерений – система единиц. Сейчас все ученые пользуются одинми и теми же единицами, такими как метры, секунды, граммы, и эти единцы определены для всех одинаково. Причем определены единицы измерений с очень большой точностью, что объясняется требованиями современной науки, которая описывает явления на масштабах от 10^{-35} м (Планковская длина волны) до 10^{26} м. Планковское время – 10^{-44} секунды, время жизни Вселенной 10^{17} секунд (скорость света 3×10^8 м/с)

[видео – масштабы вселенной: `https://www.youtube.com/watch?v=-a6JFX5U994`]

Изучаемая нами классическая механика как набор моделей механических явлений также обладает границами применимости. Во-первых, на рубеже 19-20 вв. было обнаружено, она верна только на малых скоростях – много меньше скорости света. Во-вторых, в первой половине двадцатого века было открыто множество законов микромира – явлений, проявляющихся на малых масштабах, скрытых от нашего повседневного опыта, и описываемых в рамках квантовой механики. Поэтому предмет нашего ближайшего изучения можно уточнить, назвав его нерелятивистской классической механикой. Расширение законов движения на случай релятивистских скоростей – скоростей, сравнимых со скоростью света, – мы рассмотрим на одной из последующих лекций. Формально релятистская теория включат классическую как предельный случай (это понятие мы подробнее разберем дальше). Однако мы начнем изучение с «менее» правильной теории, как с более простой и наглядной.

Обычно начало бурного развития науки, в частности, механики, свзявают с работами Галилея, Ньютона и их последователей. Возникает естественный вопрос, что же мешало отыскать законы движения до них? Одними из наиболее важных факторов, пожалуй, следует считать, во-первых, отсутствие измерительных приборов, обладающих достаточной точностью, и, во-вторых, недооценку важности постановки воспроизводимых экспериментов. Кроме того, немаловажным препятствием было и слепое следование тем или иным философским и религиозным традициям. Так, согласно Аристотелю тяжелые тела должны падать быстрее легких. Это утвеждение было в некотором смысле опровергнуто Галилеем.

Галилей был одним из первых, кто начал делать систематические опыты в области механики. Кроме него, следует также отметить вклад фламандского ученого Симона Стевина. Чтобы изучать движение тел, ему нужно было достаточно точно измерять промежутки времени и расстояния. Что значит, достаточно точно. Как минимум, чтобы достоверно обнаружить закономерности движения. Каковы масштабы движения тел небольших размеров? Масштабы длины будут порядка метров и сантиметров, а масштабы времени – порядка секунд и долей секунды. Основной проблемой было измерение небольших промежутков времени. Например, если тело падает с высоты 10 метров, время падения будет около полутора секунд. Чтобы обойти это ограничение Галилей использовал правило параллеограмма сложения сил (векторов), открытое Стевиным, и исследовал движение тел по наклонной плоскости. При малом угле на тело будет действовать сила $F = P \sin\alpha \sim P\alpha$. Основной закон, полученный Галилеем, это пропорциональность набранной скорости силе и времени движения (пропорциональность пройденным расстоянием квадрату времени движения):

$$v \sim Ft, s \sim t^2$$

До Галилея попытки проанализировать закон движения приводили к неверной пропорциональности скорости пройденному пути. Вторым достижением ученого было установление того, что под действием силы тяжести все тела приобретают одну и туже скорость.

[видео – падение тел в вакууме: `https://www.youtube.com/watch?v=E43-CfukEgs`]

В античные времени и средневековье промежутки времени измерялись водными, песочными, солнечными часами. Развитие физического эксперимента потребовало усовершенствования подхов измерению времени. Галилей предложил идею, которую позже воплотил Гюйгенс, использовать качания маятника для измерения равных равных временных промежутков. Так появились механические маятниковы часы, которые все более совершенствовались в 17-19 вв. Развитие экперимента также потребовало введения эталона времени. Единственным эталоном до дого времени могло служить только вращение Земли. При этом уже древние астрономы знали, что солнечные сутки на 4 минуты длиннее звездных – вследствие движения Земли по орбите. Понятия часа и секунды также использовались, по крайней мере, с античных времен. Сейчас одна секунда определяется как 9192631770 периодов излучения, соответствующих переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия-133, находящегося в покое при 0 К (1967 г., 1997 г.).

Метр появился во времена Французской революции. Специальная комиссия Французской академии наук предложила взять длину одной десятимиллионной доли четверти Парижского меридиана. Были эталоны метра, хранившиеся в разных странах. Сейчас метр – это расстояние, проходимое светом в вакууме за 1/299 792 458 долю секунды.

Метр и секунда – основные единицы системы единиц Си. Кроме них основными являются также масса (измеряется в кг), сила тока (Ампер), температура (Кельвин), количество вещества (моль) и сила света (Кандела). Остальные единицы – производные – могут быть выражены через основные. Так, например, единица ускорения

$$[a] = L/T^2 = m/s^2 \tag{1}$$

Другая популярная система единиц – Гауссова. СГС – сантиметр, грамм, секунда. Все остальные сводятся к этим трем.

2.2 Системы отсчета и системы координат

Для определния положения тел в пространстве вводят системы координат. В простейшем случае это декартовые системы координат x, y, z, орты которых взаимно перпендикулярны. Они бывают левые и правые (рисунок). В дальнейшем мы будем иметь дело только с правыми. Введение координат объектов предполагают, что измерения их положения производятся абсолютно точно. Можно рассматривать тела в одном, двух или трех измерениях. Наш повседневный опыт не позволяет представить нам более число измерений. Однако в физических моделях появляются пространства и более высокой размерности, которые оказываются более удобными, чем наш трехмерный мир. С одним из них мы встретися на лекции по релятивистской механике.

Обобщенные координаты – набор взаимно независимых параметров, число которых равно числу измерений, позволяющих однозначно определить положение тела в пространстве. Например, сферические координаты

[рисунок].

Сейчас мы будем иметь дело с классической механикой, которая основана на следующих важных предположениях:

- свойства пространства и времени не зависят от тел, участвующих во взаимодействии
- измерения не влияют на состояния тел

Кроме того, мы будем предполагать, что одновременные в одной инерциальной системе отсчета события являются одноверменный и в любой другой.

2.3 Кинематика материальной точки

Кинематика – наука о движении без выяснения причин этого движения. Сегодня мы будем иметь дело с такими физическими абстрациями как материальные точки – телами, размерами которых в задаче можно пренебречь, и твердыми телами – объектами заданной формы, все точки которых неподвижны относительно друг друга.

Движение материальной точки можно описать, задав зависимость координат от времени:

$$x(t), y(t), z(t)$$

Средняя скорость:

$$\boldsymbol{u}_{av} = \frac{\boldsymbol{r}(t_2) - \boldsymbol{r}(t_1)}{\Delta t}$$

Мгновенная скорость материальной точки вычисляется как производная

$$\boldsymbol{u} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$$

Производная по скорости – ускорение:

$$\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{u}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$$

[картинка]

Пространственная кривая $\boldsymbol{r}(t)$ называется трактрией. Годограф скорости – положения концов векторов скорости, отложенных из одной точки. По аналогии со скоростью, касательная к годографу показывает направление ускорения в данный момент. Оказывается, что первой и второй производной достаточно, чтобы полностью описать любые движения материальных точек (второй закон Ньютона будет на следующей лекции)!

Проинтегрируем:

$$\frac{dx}{dt} = \int adt = at + C_1 \Rightarrow x(t) = \int (at + C_1)\, dt = \frac{1}{2}at^2 + C_1 t + C_2 \Rightarrow C_1 = v_0, C_2 = x_0$$

так что получается известный из школы закон движения. Длина трактории вычисляется как $s = \int udt$.

Рассмотрим единичные касательный и нормальный вектора в данной точке траектории. Тогда полное ускорение материальной точки

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \frac{d}{dt}(u\vec{\tau}) = \frac{du}{dt}\vec{\tau} + u\frac{d\vec{\tau}}{dt} = a_\tau \vec{\tau} + u\frac{d\vec{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt} = a_\tau \vec{\tau} + u^2 \frac{d\vec{\tau}}{ds} = a_\tau \vec{\tau} + \frac{u^2}{R}\vec{n}$$

Здесь введены тангенциальное и нормальное (центростремительное) ускорение.

[картинка]

2.4 Движение по окружности

По аналогии с линейным движением можно рассмотреть движение по окружности радиуса R (рисунок). Угловая скорость и ускорение

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{u}{R}, \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

Если рассматривать движение твердого тела, его движение можно разложить на поступательное и вращательное движение. Мгновенная ось вращения – неподвижная в данный момент в данной системе координат точка – распределение скоростей в теле будет таким же, как при вращении вокруг этой оси. Мгновенная ось перемещается как в теле, так и в пространстве (пример с катящимся колесом).

[картинка]

Рассмотрим качение колеса радиуса R без скольжения. В системе отсчета, связанной с центром колеса, оно вращается вокруг собственной оси с угловой скоростью ω, а все точки обода имеют скорость $u = \omega R$. В системе отсчета поверхности земли точка касания колеса является мгновенным центром вращения: скорость любой точки колеса может быть найдена как $u_1 = \omega r_1$, поскольку угловая скорость мгновенного вращения – та же. В движущейся системе координат для любой точки на ободе вращательное движение описывается уравнениями

$$x = R\sin\omega t$$
$$y = R\cos\omega t$$

2.5 Циклоида, брахистрона, и таутохрона

Рассмотрим катящееся колесо и найдем координаты произвольной точки на ободе как суперпозиции:

$$x = \omega Rt - R\sin\omega t = \varphi R - R\sin\varphi$$
$$y = R(1 - \cos\omega t) = R(1 - \cos\varphi)$$

Эта привая называется циклоидой. Одно из ее свойств: если ее перевернуть и сделать скат такой же формы, то время соскальзывания (без трения) малых тел с такого ската не будет зависеть от начального положения тела. Такая кривая еще называется изохронной или таутохронной. Другое свойства этой кривой – тела по ней будут съезжать быстрее всего.

[видео – циклоида: `https://www.youtube.com/watch?v=wFACJ9FXT8I`]

[видео – опыт с таутохроной: `https://www.youtube.com/watch?v=1BdO8J0iynY`]

На основании этих свойств Гюйгенс предложил особый маятник, период качаний которого не зависит от амплитуды – тело на подвесе движется по циклоиде.

[видео – маятник Гюйгенса: `https://www.youtube.com/watch?v=EI5zwTvfkqA`]

Найдем, к примеру, радиус кривизны ρ циклоиды в верхней точке. Ускорение в верхней точке одно и то же в любой системе координат, и равно $a_n = u^2/R$. Мгновенная же скорость – в два раза больше скорости качения $u_0 = 2u$. Поэтому $a_n = u_0^2/\rho$, откуда $\rho = 4R$.

2.6 Движение тел, брошенных под углом к горизонту

В качестве еще одного примера сложения движений рассмотрим движение тела, брошенного под углом к горизонту:

$$x = x_0 + u_0 t \cos\varphi$$
$$y = y_0 + u_0 t \sin\varphi - \frac{1}{2} g t^2$$

Скорости:

$$u_x = u_0 \cos\varphi$$
$$u_y = u_0 \sin\varphi - gt$$

Условие касания земли:

$$y = 0 \Rightarrow u_0 t \sin\varphi - \frac{1}{2} g t^2 = 0 \Rightarrow T = 2\frac{u_0}{g}\sin\varphi$$

Дальность полета и высота

$$L = x\left(T\right) = \frac{u_0^2}{g}\sin 2\varphi$$
$$H = y\left(T/2\right) = \frac{1}{2}\frac{u_0^2}{g}\sin^2\varphi$$

Максимальная дальность и высота:

$$\frac{dL}{d\varphi} = 2\frac{u_0^2}{g}\cos 2\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \pi/4$$
$$\frac{dH}{d\varphi} = \frac{u_0^2}{2g}\sin 2\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \pi/2$$

Проиллюстрируем понятие кривизны траектории расчетом этого параметра для тела, брошенного под углом к горизонту. С одной стороны, зная форму траектрии (парабола), можно воспользоваться математической формулой. С другой строны, можно применить знания, полученные в п. 2.3. Пусть требуется найти кривизну в момент t_0. Скорость тела всегда направлена по касательной к траектории, и ее составляющие в интересующий нас момент

$$u_x\left(t_0\right) = u_0 \cos\varphi$$
$$u_y\left(t_0\right) = u_0 \sin\varphi - g t_0$$

а полная скорость $u\left(t_0\right) = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \sqrt{u_0^2 + g^2 t_0^2 - 2u_0 g t_0 \sin\varphi}$. Угол по направлению к вертикали есть $\alpha = \arctan\left(u_x/u_y\right)$. Тело, на которое действует только сила притяжения к Земле, всегда движется с ускорением свободного падения g, которое направлено вертикально вниз вдоль оси y. Поэтому нормально ускорение (перпендикулярно скорости и касательной к траектории) в заданный момент времени будет

$$a_n = g\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = g\sin\left(\arctan\left(u_x/u_y\right)\right) = g\sin\left(\arcsin\left(u_y/u\right)\right) = g\frac{u_y}{u}$$

С другой стороны, мы знаем, что $a_n = u^2/R$. Отсюда найдем радиус кривизны как

$$R = \frac{u^2}{a_n} = \frac{u^3}{g u_y} = \frac{\left(u_0^2 + g^2 t_0^2 - 2u_0 g t_0 \sin\varphi\right)^{3/2}}{g\left(u_0 \sin\varphi - g t_0\right)}.$$

3 Лекция 2

Динамика материальной точки. Задание состояния частицы в классической механике. Основная задача динамики. Инерциальные и неинерциальные системы отсчёта. Первый закон Ньютона. Импульс и сила. Инертная и гравитационная массы. Второй закон Ньютона. Уравнение движения частицы, роль начальных условий. Третий закон Ньютона. Закон сохранения импульса. Центр инерции (центр масс). Динамика системы частиц. Закон движения центра инерции. Движение тел с переменной массой.

3.1 Инерциальные системы отсчета. Первый закон Ньютона

В кинематике все системы отсчета равноправны. Мы можем рассматривать движение в них независимо от того, как эти системы отсчета движутся. Иначе дело обстоит в динамике. Здесь различают принципиально важный класс – инерциальные системы отчета – системы, в которых все свободные тела движутся равномерно и прямолинейно. Свободные тела – тела, на которые не действуют силы. Сила – мера интенсивности взаимодействия тел, которая проявляется в изменении их количества движения. То есть, для поддержания движения сила не требуется, она нужна для изменения состояния движения. Первый закон Ньютона по сути является переформулировкой постулата существования инерциальных систем отсчета: тело, не подверженное внешним воздействиям (или когда внешние воздействия скомпенсированы), либо находится в покое, либо движется равномерно и прямолинейно. Такое движение называется свободным движением, или движением по инерции.

Галилей сформулировал следующий принцип относительности: законы механики одинаковы во всех инерциальных системах отсчета. Рассмотрим инерциальную систему отсчета и другую систему, движущуюся относительно первой со скоростью $\vec{V}$. Пусть радиус-вектор некоторой материальной точки в исходной система отсчета равен $\vec{r}$, в новой системе отсчета – $\vec{r}'$, а радиус-вектор начала координат новой системы отчета относительно начальной равен $\vec{R} = \vec{R}_0 + \vec{V}t$, $\vec{R}_0 = const$, $\vec{V} = const$. Тогда по правилу сложения векторов

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{R}_0 + \vec{V}t$$

Чтобы найти соотношение скоростей одной и той же материальной точки относительно этих двух систем координат, продифференцируем это равенство:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt} + \vec{V} \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}$$

Это равенство называется преобразованием Галилея. Здесь мы неявно предположили, что время течет одинаково в обеих системах отсчта, то есть, $t = t'$. Это предположение справедливо лишь в нерелятивистском случае. Преобразование можно продифференцировать еще раз и получить равенство ускорений: $\vec{a} = \vec{a}'$.

[картинка]

Позднее, уже в 20-м веке, Эйнштейн обобщил этот принцип: законы физики одинаковы во всех инерциальных системах отсчета (принцип относительности Эйнштейна).

3.2 Взаимодействия. Импульс тела

Выделяют четыре типа взаимодействий, которые являются причинами возникновения сил: электромагнитное, гравитационное, сильное и слабое. Гравитационное взаимодействие заметно проявляется только на макромасштабах – оно определяет движение небесных тел. Электромагнитное взаимодействие проявляется и на больших, и на малых масштабах. Оно ответственно как за эффекты в межзвездном пространстве, так и за трение, которое нас окружает, и за многие микроскопические эффекты в физике твердого тела. Сильное взаимодействие ответственно за связи частиц в ядрах атомов и стабильность самих этих частиц – протонов и нейтронов. Слабое взаимодействие управляет рядом процессов в мире элементарных частиц. Более подробно о сильно и слабом взаимодействии мы будем говорить в четвертом семестре.

Свободное тело – абстракция. На практике это означает, что действующими на тело силами можно либо пренебречь, либо попытаться их скомпенсировать. Чем слабее силы, тем сложнее их детектировать и учитывать. Например, отдельной областью астрофизики является детектирование чрезвычайно слабых взаимодействий, вызванных гравитационными волнами. Обнаружение таких волн было одним из самых громких открытий 2015 года. По сути оно стало очередным доказательством в цепочке проверок общей теории относительности.

[видео – гравитационные волны: `https://www.youtube.com/watch?v=B4XzLDM3Py8`]

Здесь мы видим, что у тел есть некая характеристика, называемая массой, которая определяет меру их гравитационного взаимодействия. Возвращаясь к движению тел под действием силы без уточнения природы этой силы, мы приходим к необходимости рассмотрения массы как меры инертности тела. На основании наблюдений было установлено, что инертная и гравитационная массы тела равны.

Как мы обсуждали в предыдущей лекции, в своих опытах Галилей обнаружил, что $v \sim Ft$. Масса здесь и выступает в виде коэффициента пропорциональности: $v = \dfrac{1}{m}Ft$. В качестве простейшего модельного примера рассмотрим изолированную систему из двух материальных точек. Пусть в результате взаимодействия между ними их скорости изменились. На основании опытных фактов эти скорости связаны как

$$m_1 \Delta \vec{u}_1 = -m_2 \Delta \vec{u}_2$$

Оказывается, что коэффициенты в этой формуле не зависят от времени воздействия и величины изменения скорости, а характеризуют сами взаимодействующие объекты. Они называются инерционными массами тел, а отношение масс оказывается равно отношению приращений скоростей. Поэтому массы можно измерять относительно друг друга, или относительно эталона. На протяжении длительного времени эталоном массы служила килограммовая гиря, с которой просто делали копии. В прошлом году определение массы, наконец, было привязано к одной из фундаментальных констант, постоянной Планка. Подробнее о связанных с эти определением экспериментах мы сможем поговорить, когда познакомимся элетромагнетизмом и начнем изучать квантовые явления.

Перепишем предыдующую формулу через начальную и конечную скорости первого и второго тела:

$$m_1 \vec{u}_1^{\text{нач}} + m_2 \vec{u}_2^{\text{нач}} = m_1 \vec{u}_1^{\text{кон}} + m_2 \vec{u}_2^{\text{кон}}$$

Отсюда можно видеть, что в процессе взаимодействия сохраняется величина произведения массы на скорость – импульс $\vec{p} = m\vec{v}$. То есть, суммарный импульс материальных точек не изменился: $\sum \vec{p} = const$. Это правило можно обобщить на любое другое число материальных точек, или твердых тел, так что получаем закон сохранения импульса: суммарный импульс замкнутой системы материальных (тел) точек постоянен.

Если при столкновении тел они соединяются в более крупные (слипаются, или химически соединяются), либо наоборот раскалываются, то мы можем записать в каких-либо двух инерциальных системах отсчета закон сохранения импульса:

$$m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2 = m\vec{u}$$
$$m_1 \vec{u}_1' + m_2 \vec{u}_2' = m\vec{u}'$$

Согласно закону преобразования Галилея, $\vec{u}_1 - \vec{u}_1' = \vec{u}_2 - \vec{u}_2' = \vec{u} - \vec{u}' = \vec{V}$. Отсюда $(m_1 + m_2)\vec{V} = m\vec{V} \Rightarrow m_1 + m_2 = m$. Это равенство выражает собой аддитивности массы в классической нерелятивистской механике: сумма масс веществ до взаимодействия равно сумме масс веществ после взаимодействия.

3.3 Второй закон Ньютона

Рассмотренное соотношение, которое получил Галилей, является частным случаем второго закона Ньютона: ускорение, приобретаемое телом прямо пропорционально приложенной силе и сонаправлено с линией действия этой силы. Также этот закон можно переписать через введенное понятие импульса:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{m}\vec{F} \Leftrightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

Как правило в динамике решается задача об определении координат тела при заданных внешних силах. Для координаты второй закон Ньютона приводит к следущему дифференциальному уравнению:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{1}{m}\vec{F}$$

Отсюда видно, что в рамках классической механики любые движения тел описываются дифференциальными уравнениями второго порядка (то есть уравнениями, максимальных порядок производных в который – второй), и производные высших порядков несущественны.

Силы подчиняются принципу суперпозиции: суммарная сила, действующая на материальную точку равна сумме действующих сил. При этом сумма подразумевается в смысле суммы векторов, или сумм проекций этих векторов на оси координат:

$$\vec{F}_{total} = \sum_i \vec{F}_i \Leftrightarrow \begin{cases} F_{total,x} = \sum_i F_{ix} \\ F_{total,y} = \sum_i F_{iy} \\ F_{total,z} = \sum_i F_{iz} \end{cases}$$

Отметим, что величина силы не меняется при преобразовании Галилея, то есть, сила инвариантна относительно преобразования Галилея.

В качестве примера рассмотрим классическую задачу об определении коэффициента трения путем измерения угла наклона, при котором начинается скольжение. Максимальная сила трения покоя может быть найдена из коэффициента трения покоя как $F_{fr} = \mu N$ (по модулю, поскольку эти силы направлены в разные стороны – сила трения направлена против движения, а нормальная реация опоры N – перпендикулярно поверхности, на которой лежит тело). Кроме указанных сил на тело, расположенное на наклонной плоскости, действует еще сила тяжести $\vec{F}_g = m\vec{g}$. Пока тело находится в покое $\vec{F}_{fr} + \vec{N} + m\vec{g} = 0$. Спроецируем данное равенство на оси координат, одна из которых перпендикулярна наклонной плоскости, а вторая – параллельна: $N - mg\cos\alpha = 0$, $mg\sin\alpha - F_{fr} = 0$. Тогда для момента начала скольжения получим $\mu = \tan\alpha$.

[картинка]

Если сила постоянна в течение некоторго промежутка времени, то второй закон Ньютона можно проинтегрировать и получить $\vec{p}_2 - \vec{p}_2 = \vec{F}\,(t_2 - t_1)$. Обобщением данной формулы будет

$$\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Величина, стоящая в правой части данного уравнения, называется импульсом силы. Последнее равенство показывает, что изменение импульса системы материальных точек равно импульсу суммы всех внешних сил. Кроме того, отсюда следует, что изменение количества движения зависит не только сил, но и от времени действия этих сил.

[видео – ломание палки на бумажных кольцах: `https://www.youtube.com/watch?v=111vVnQUvXI`]

3.4 Третий закон Ньютона

Вернемся к примеру с замкнутой системой из двух взаимодействующих материальных точек. Согласно закону сохранения импульса, их суммарный импульс не меняется во времени:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = const$$

Продифференцируем это равенство

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

Таким образом, получается третий закон Ньютона: силы взаимодействия двух равны по модулю, противоположно направлены и действуют вдоль прямой, соединяющей эти точки. Для всякого действия есть равное по величине и противоположное по направлению противодействие.

Для системы материальных точек импульс каждой точки меняется под действием сил со стороны других точек и результирующей внешней силы $\vec{F}_{ext}$:

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{k\neq i} \vec{F}_{ki} + \vec{F}_{ext,i}$$

Сложим все эти равнества и учтем, что при этом согласно третьему закону Ньютона все силы взаимодействия сократятся, поскольку войдут в правую часть итогового уравнения по два раза:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\sum_i \vec{p}_i}{dt} = \sum_i \vec{F}_{ext,i}$$

То есть, суммарный импульс системы материальных точек меняется только под действием внешних по отношению к этой системе сил.

дальнодействие, скорость распространения взаимодействий

3.5 Движение центра масс

Центром масс или центром инерции системы материальных точек называется воображаемая точка, радиус-вектор которой равен

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

где $m = \sum m_i$ – суммарная масса. Продифференцируем:

$$m\vec{v}_{cm} = \sum_i m_i \vec{v}_i = \sum_i \vec{p}_i \Rightarrow m\frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_{ext}$$

Центр масс системы движется как материальная точка с массой, равной суммарной массе системы, под действием силы, равной сумме всех внешних сил.

3.6 Движение тел с переменной массой

В качестве примера применения законов Ньютона рассмотрим реактивное движение – движение при котором часть массы тела выбрасывается для ускорения оставшейся части. Запишем изменение импульса системы «ракета – выхлопные газы» за малый промежуток времени dt:

$$(m + dm)(\vec{v} + d\vec{v}) + dm_{gas}\vec{v}_{gas} - m\vec{v} = \vec{F}dt$$

Раскроем скобки и пренебрежем величиной $dmd\vec{v}$, а также введем скорость вылета газов относительно ракеты $\vec{u} = \vec{v}_{gas} - \vec{v}$. В силу закона сохранения массы $m + m_{gas} = const \Rightarrow dm = -dm_{gas}$. Тогда

$$md\vec{v} + dm\vec{u}_{gas} = \vec{F}dt \Rightarrow m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{u} + \vec{F}$$

Это уравнение показывает, что кроме внешней силы на тело действует реактивная сила $\dfrac{dm}{dt}\vec{u}$. Это уравнение называется уравнением Мещерского. Теперь для простоты предположим, что на ракету не действуют внешние силы, а ракета движется прямолинейно. Поскольку скорость газа направлена в противоположном направлении движению ракеты, то проекция уравнения на направление движения будет

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{dm}{dt}u \Rightarrow dv = -u\frac{dm}{m} \Rightarrow \int\limits_{v_1}^{v_2} dv = -u\int\limits_{m_1}^{m_2}\frac{dm}{m} \Rightarrow \frac{v_2 - v_1}{u} = -\ln\frac{m_2}{m_1} \Rightarrow m_2 = m_1\exp\left(-\frac{\Delta v}{u}\right)$$

Последняя формула называется формулой Циолковского.

4 Лекция 3

Работа силы. Мощность. Консервативные и неконсервативные силы. Понятие силового поля. Потенциальная энергия, потенциал поля. Кинетическая энергия частицы. Закон сохранения энергии в механике. Общефизический закон сохранения энергии. Система центра инерции. Преобразование энергии при смене системы отсчёта. Теорема Кёнига. Столкновения.

4.1 Работа силы

Работа силы $\vec{F}$ на перемещении $d\vec{s}$ есть проекция силы на направление перемещения, умноженная на величину перемещения:

$$dA = \vec{F}\cdot d\vec{s} = Fds\cos\alpha$$

Полная работа вычисляется как сумма всех элементарных работ вдоль траектории тела и в пределе выражается с помощью интеграла

$$A = \int_S \vec{F}\cdot\vec{ds}$$

Так как этот интеграл берется вдоль траектории движения материальной точки, он называется криволинейным, а работа – это работа силы вдоль кривой. Сила здесь должна рассматриваться как суперпозиция сил, действующих на точку. Поэтому и работу можно разложить на сумму работ каждой силы в отдельности:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i \Rightarrow A = \int_S \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_S \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{s} = \sum_i \int_S \vec{F}_i\cdot d\vec{s} = \sum_i A_i$$

Мощностью называется работа в единицу времени (скорость приращения работы):

$$P = \frac{dA}{dt}$$

Рассмотрим работу сил по изменению положения материальной точки и применим второй закон Ньютона, а также учтем, что $d\vec{s} = \vec{v}dt$:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow A = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_S \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \vec{v}dt = \int_S d\vec{p} \cdot \vec{v} = m \int_S \vec{v} \cdot d\vec{v}$$

Чтобы переписать выражение под интагралом рассмотрим определение модуля вектора скорости: $v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$. Продифференцируем это выражение: $2vdv = d\vec{v} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot d\vec{v} = 2\vec{v} \cdot d\vec{v}$. Следовательно, скалярное произведение двух векторов можно заменить на модуль скорости умноженный на приращение модуля скорости. Если за какой-то промежуток времени при движении вдоль траектории скорость изменилась от v_1 до v_2, то

$$A = m \int\limits_{v_1}^{v_2} vdv = \left. \frac{1}{2} mv^2 \right|_{v_1}^{v_2} = \frac{1}{2} mv_2^2 - \frac{1}{2} mv_1^2 = K_2 - K_1$$

Здесь введена величина $K = \dfrac{mv^2}{2}$ – кинетическая энергия материальной точки. Мы получили, что суммарная работа сил при перемещении материальной точки равна приращению кинетической энергии этой материальной точки. Обобщая на систему материальных точек, можно сказать, что суммарная работа **всех** сил, действующих на систему материальных точек равна приращению кинетической энергии этой системы. Здесь учитываются как внешние, так и внутренние силы.

4.2 Единицы измерения

В системе единиц СИ работу измерядт в джоулях: 1 Дж – это работа силы 1 Н по перемещению тела на расстояние 1 м. Мощность измеряют в Ваттах: 1 Вт – это мощность работы 1 Дж за одну секунду.

4.3 Теорема Кёнига

Кинетическая энергия зависит от скорости, следовательно, от выбора системы отсчета. Выясним, как она преобразуется при преобразовании системы Галилея от одной инерциальной системы отсчета к другой. Согласно преобразованию Галилея (см. предыдующую лекцию), скорость относительно исходной системы равно скорости в новой системе отсчета плюс относительная скорость новой системы в исходной: $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}$. Тогда

$$v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = \left(\vec{v}' + \vec{V}\right) \cdot \left(\vec{v}' + \vec{V}\right) = v'^2 + V^2 + 2\vec{v}' \cdot \vec{V} \Rightarrow K = K' + \frac{mV^2}{2} + m\left(\vec{v}' \cdot \vec{V}\right) = K' + \frac{mV^2}{2} + \left(\vec{p}' \cdot \vec{V}\right)$$

Это соотношение справедливо для любой системы материальных точек, так как кинетическая энергия, масса и имульс аддитивны. При этом суммарный импульс системы точек выражается через скорость центра масс в новой системе отсчета: $\vec{p}' = \sum_i m_i \vec{v'}_i = m\vec{v'}_{cm}$. Если новая система отсчета есть система отсчета центра масс, то есть $\vec{v'}_{cm} = 0$, то

$$K = K' + \frac{mV_{cm}^2}{2}$$

Это соотношение называется теоремой Кёнига: кинетическая энергия системы материальных точек равна сумме кинетических энергий движения этих точек в системе отчета с началом координат в центре масс, которая движется поступательно со скоростью центра масс, и кинетической энергии всей массы системы, как если бы она была сосредоточена в центре масс и двигалась вместе с ним. Из этой теоремы следует, что кинетическая энергия в СЦМ минимальна.

4.4 Консервативные силы и потенциальная энергия

Рассмотрим для примера работу силы тяжести при малом изменении высоты: $dA = mgds\cos\alpha = -mgdz$ (ось Z вертикальна, минус). Тогда, разбивая произвольную траекторию тела на малые участи по высоте, получаем, что полная работа зависит только от разности высот и не зависит от формы траектории:

$$A = -\int\limits_{z_1}^{z_2} mgdz = mg\left(z_1 - z_2\right)$$

[рисунок: малое изменение высоты, криволинейная траектория, проекция силы]

Другой пример – центральные силы, например, гравитационная сила: $\vec{F} = F\left(r\right)\dfrac{\vec{r}}{r}$. Работа такой силы зависит только расстояния до силового центра:

$$dA = Fds\cos\alpha = Fdr \Rightarrow A = \int\limits_{r_1}^{r_2} F\left(r\right)dr$$

[рисунок: работа центральных сил]

Консервативные силы – силы, работа которых не зависит от траектории, соединяющей начальное и конечное положения материальной точки, а зависят только от этих начального и конечного положений. Рассмотрим перемещения по двум разным траекториям:

$$A_{12}^{(1)} = A_{12}^{(2)}$$

Если изменить направление движения по одной из траекторий, то $A_{21}^{(2)} = -A_{12}^{(2)}$. Следовательно, $A_{12}^{(1)} + A_{21}^{(2)} = 0$, то есть, работа консервативных по любому замкнутому контуру равна нулю.

Примером неконсервативной силы является сила трения – это диссипативная сила.

Работу консервативных сил можно рассматривать как изменение некоторой величины – потенциальной энергии, – которая является функцией только координат. Поскольку физически значимым является только относительно изменение такой величины, то точку отсчета потенциальной энергии можно выбирать произвольно. Тогда работа по перемещению из рассматриваемого положения в начало отсчета будет потенциальной энергией:

$$U_1 = A_{10}; U_2 = A_{20} \Rightarrow A_{12} = A_{10} + A_{02} = U_1 - U_2$$

то есть, работа равна убыли потенциальной энергии.

Еще одним примером потенциальной силы является сила упругости: $F = -kx$. Потенциальная энергия деформации

$$U = -\int\limits_{x}^{0} kxdx = \frac{kx^2}{2}$$

[рисунок: пружинка]

Рассмотрим работу потенциальных сил в общем случае:

$$dA = \vec{F}\cdot d\vec{r} = U\left(\vec{r}\right) - U\left(\vec{r} + d\vec{r}\right) = -dU$$

Для заданной функции U говорят, что в пространстве задано потенциальное поле. Потенциал, свою очередь определяет силовое поле. В проекциях на оси координат

$$F_x dx + F_y dy + F_z dx = -dU \Rightarrow F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \Rightarrow \vec{F} = -grad\left(U\right)$$

Этот оператор называется оператором градиента – из скалярной функции координат он делает векторную функцию. Например, $U = \dfrac{1}{2}\alpha r^2$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Тогда

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\alpha x, F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = -\alpha y, F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = -\alpha z \Rightarrow \vec{F} = -\alpha\vec{r}$$

4.5 Закон сохранени энергии

Пусть на систему действуют только консервативные силы. Тогда

$$A_{12} = U_1 - U_2 = K_2 - K_1 \Rightarrow K + U = E = const$$

То есть, в системе с одними только консервативными сила полная энергия остается постоянной. Если присутствуют еще и диссипативные силы, то

$$A_{12} = U_1 - U_2 + A_d = K_2 - K_1 \Rightarrow E_2 - E_1 = A_d$$

[видео – закон сохранения энергии: `https://www.youtube.com/watch?v=8lAlSHb-C5o`]
[видео – мертвая петля: `https://www.youtube.com/watch?v=dA_UO86MjLY`]

4.6 Столкновения частиц

Рассмотрим различные типы взаимодействия двух сталкивающихся частиц. Частицы могут упруго соударяться, либо взаимодействовать с образованием новых частиц. В зависимости от результата взаимодействия говорят, что реакция между двумя исходными частицами идет по различным каналам реакции. При упругом взаимодействии после столкновения остаются те же две частицы.

При всех типах столкновений выполняется закон сохранения импульса, если на систему частиц не действуют внешние силы:

$$\sum_i \vec{p}_i^{in} = \sum_i \vec{p}_i^{out}$$

При абсолютно упругом ударе также сохраняется кинетическая энергия:

$$\sum_i K_i^{in} = \sum_i K_i^{out}$$

Рассмотрим различные типы соударений двух частиц:

1. Абсолютно упругий центральный удар:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2$$
$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2$$

Кроме того,

$$m_1 \left(v_1^2 - u_1^2\right) = m_2 \left(u_2^2 - v_2^2\right)$$
$$m_1 \left(v_1 - u_1\right) = m_2 \left(u_2 - v_2\right)$$

Откуда

$$v_1 + u_1 = u_2 + v_2$$

Подставим это равенство в закон сохранения импульса:

$$(m_1 + m_2)\, u_1 = -\left(m_1 + m_2\right) v_1 + 2\left(m_1 v_1 + m_2 v_2\right) \Rightarrow u_1 = -v_1 + 2V_{cm}, V_{cm} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}; u_2 = -v_2 + 2V_{cm}$$

Если вторая частица до столкновения покоилась, то

$$u_1 = v_1 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}; u_2 = \frac{2 m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

Если при этом масса второй частицы очень велика (столкновение со стенкой)

$$u_1 \approx -v_1; u_2 \approx 0$$

Если сталкиваются две одинаковые частицы, то частицы «обмениваются» скоростями:

$$V_{cm} = \frac{v_1 + v_2}{2} \Rightarrow u_1 = v_2, ; u_2 = v_1$$

[видео – маятник Ньютона: `https://www.youtube.com/watch?v=zL01R7RAqvg`]

2. Абсолютно неупругое столкновение:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)\, u \Rightarrow u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

При этом часть начальной кинетической энергии перейдет в работу диссипативных сил:

$$\Delta E = K_1 + K_2 - K = \frac{1}{2}\left[m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 - (m_1 + m_2)\, u^2\right] = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\,(v_1 - v_2)^2$$

Здесь $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ – так называемая приведенная масса.

3. Величина $Q = \Delta E = K^{out} - K^{in} = E^{in}_{internal} - E^{out}_{internal}$ – энергия реакции. Если $Q > 0$ то реакция называется экзоэнергетическая (экзотермическая), если $Q < 0$ – эндоэнергетическая (эндотермическая). Эндоэнергетические реакции $K_1 = K_2 + |Q|$ идут только начиная с определенной энергии налетающей частицы, которая называется порогом реакции. В системе центра инерции все образующиеся в реации частицы неподвижны. Для примера рассмотрим частицу массы m_1, которая налетает на неподвижную частицу массы m_2:

$$m\vec{v} = (m_1 + m_2)\,\vec{u} = p$$

Пусть для реакции требуется энергия ε. Тогда пороговая энергия первой частицы

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m_1} - \frac{p^2}{2\,(m_1 + m_2)} = \frac{p^2}{2m_1}\left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) \Rightarrow K_{min} = \frac{p^2}{2m_1} = \frac{m_1 + m_2}{m_2}\varepsilon > \varepsilon$$

Во внутреннюю энергию может перейти только энергия относительного движения частиц:

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m_1}\left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) = \frac{\mu v^2}{2}$$

4. Пусть теперь векторы скоростей упруго сталкивающихся частиц не лежат на одной прямой. Законы сохранения можно записать как

$$\vec{p}_1^{(0)} + \vec{p}_2^{(0)} = \vec{p}_1^{(1)} + \vec{p}_2^{(1)}$$

$$\frac{\left(p_1^{(0)}\right)^2}{2m_1} + \frac{\left(p_2^{(0)}\right)^2}{2m_2} = \frac{\left(p_1^{(1)}\right)^2}{2m_1} + \frac{\left(p_2^{(1)}\right)^2}{2m_2}$$

Пусть до столкновения вторя частица покоилась: $\vec{v}_2^{(0)} = 0$. В системе центра масс, который движется со скоростью $\vec{V}_c = \dfrac{m_1 \vec{v}_1^{(0)}}{m_1 + m_2}$,

$$\vec{v}_1^{(0)} = \vec{v}_{1c}^{(0)} + \vec{V}_c, \vec{v}_1^{(1)} = \vec{v}_{1c}^{(1)} + \vec{V}_c \Rightarrow \vec{v}_{1c}^{(1)} = \frac{m_2 \vec{v}_1^{(0)}}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{p}_{1c}^{(0)} + \vec{p}_{2c}^{(0)} = \vec{p}_{1c}^{(1)} + \vec{p}_{2c}^{(1)} = 0 \Rightarrow \vec{p}_{1c}^{(0)} = -\vec{p}_{2c}^{(0)}, \vec{p}_{1c}^{(1)} = -\vec{p}_{2c}^{(1)}$$

$$\frac{\left(p_{1c}^{(0)}\right)^2}{2m_1} + \frac{\left(p_{2c}^{(0)}\right)^2}{2m_2} = \frac{\left(p_{1c}^{(1)}\right)^2}{2m_1} + \frac{\left(p_{2c}^{(1)}\right)^2}{2m_2} \Rightarrow p_{1c}^{(0)} = p_{1c}^{(1)}, p_{2c}^{(0)} = p_{2c}^{(1)}$$

поэтому в системе центра масс не меняются модули скоростей частиц: $v_{1c}^{(0)} = v_{1c}^{(1)}, v_{2c}^{(0)} = v_{2c}^{(1)}$. Если построить векторную диаграмму скоростей частиц в системе центра масс, отложенных из одной точки, то концы векторов начальной и конечной скорости первой частицы будут лежать на одной окружности, а угол ее отклонения будет зависет от соотношения длин векторов $\vec{v}_{1c}^{(0)}$ и $\vec{V}_c$. Если $m_1 < m_2$, рассеяние может произойти на любой угол, а при $m_2 < m_1$ имеем

$$\sin\theta_{max} = \frac{v_{1c}^{(2)}}{V_c} = \frac{m_2}{m_1}$$

Если $m_1 = m_2$, то частицы всегда будут разлетаться под прямым углом.
[рисунок – векторная диаграмма скоростей]

5 Лекция 4

Момент импульса материальной точки. Связь момента импульса материальной точки с секториальной скоростью. Момент импульса системы материальных точек. Момент силы. Уравнение моментов. Закон сохранения момента импульса. Движение тел в центральном поле. Закон всемирного тяготения. Потенциальная энергия в гравитационном поле. Законы Кеплера.

[видео с мотоциклами – `https://www.youtube.com/watch?v=_Hn8YOPwV2g`]

5.1 Момент импульса и момент силы

До сих пор мы рассматривали динамику поступательного движения, и импульс материальной точки являтся мерой такого движения. При вращательном движении мерой является момент имульса.

Рассмотрим некоторую точку O. Пусть $\boldsymbol{r}$ – радиус-вектор, отложенный из этой точки в начало некоторого вектора $\boldsymbol{V}$. Моментом $\boldsymbol{V}$ относительно O называется векторное произведение $[\boldsymbol{r}\boldsymbol{V}] \equiv \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{V}$. Свойства момента (следуют из свойств векторного произведения):

1. момент вектора не изменится, если начальную точку $\boldsymbol{V}$ перенести в любую другую точку, расположенную на линии $\boldsymbol{V}$.

2. если $\boldsymbol{r}||\boldsymbol{V}$, то $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{V}=0$.

3. если $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}_1+\boldsymbol{V}_2$, то $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{V}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{V}_1+\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{V}_2$.

Момент силы, действующей на материальную точку относительно начала (полюса) O: $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$. Момент импульса материальной точки относительно полюса $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$.

Моменты силы и импульса зависят от выбора начала координат. Пусть радиусы материальных точек относительно начальной системы отсчета $\boldsymbol{r}_k$, относительно новой системы отсчета – $\boldsymbol{r}'_k$, радиус-вектор и скорость новой системы относительно старой – $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{V}$

$$\boldsymbol{r}_k=\boldsymbol{r}'_k+\boldsymbol{R}, \boldsymbol{v}_k=\boldsymbol{v}'_k+\boldsymbol{R}$$

$$\boldsymbol{L}=\sum_k m_k\boldsymbol{r}_k\times\boldsymbol{v}_k=\sum_k m_k\boldsymbol{r}'_k\times\boldsymbol{v}'_k+\sum_k m_k\boldsymbol{r}'_k\times\boldsymbol{V}+\sum_k m_k\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{v}'_k+\sum_k m_k\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{V}=\boldsymbol{L}'+M\boldsymbol{R}^{'}_{cm}\times\boldsymbol{V}+\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{p}'+M\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{V}$$

Если начало новой системы отсчета совпадает с центром масс, то суммарный импульс в системе центра масс $\boldsymbol{p}'=0$, и $\boldsymbol{R}^{'}_{cm}=0$ по определению. Тогда мы получаем аналог доказанной на предыдущей лекции теоремы Кенига:

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}'_{cm}+M\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{V}_c$$

то есть, момент импульса система материальных точек относительно произвольной точки равен сумме момента импульса относительно центра масс и момента импульса системы как целого, если считать, что вся масса системы сосредоточена в центре масс.

5.2 Закон сохранения момента импульса

Продифференцируем момент импульса материальной точки:

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times\boldsymbol{p}+\boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}=\boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}=\boldsymbol{M}$$

так как $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}$, следовательно $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times\boldsymbol{p}=\dfrac{1}{m}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v}=0$. Мы получили уравнение моментов: производная момента импульса материальной точки относительно некоторого неподвижного начала O равна моменту сил, действующих на эту точку относительно того же начала. Для системы материальных точек имеем:

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}=\sum_k\frac{d\boldsymbol{L}_k}{dt}=\sum_k\left(\frac{d\boldsymbol{r}_k}{dt}\times\boldsymbol{p}_k+\boldsymbol{r}_k\times\frac{d\boldsymbol{p}_k}{dt}\right)=\sum_k\boldsymbol{r}_k\times\left(\boldsymbol{F}_k^{\text{внеш}}+\sum_{i\neq k}\boldsymbol{F}_{ki}\right)$$

$$= \sum_k \sum_{i \neq k} (\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_i) \times \boldsymbol{F}_{ki} + \sum_k \boldsymbol{r}_k \times \boldsymbol{F}_k^{\text{внеш}} = \sum_k \boldsymbol{r}_k \times \boldsymbol{F}_k^{\text{внеш}} = \boldsymbol{M}^{\text{внеш}}$$

так как $(\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_i) \,||\boldsymbol{F}_{ki}$ по третьему закону Ньютона. То есть, производная момента импульса системы материальных точек относительно некоторого неподвижного начала O равна геометрической сумме моментов всех ***внешних*** сил относительно того же начала.

Закон сохранения момента импульса: если момент внешних сил относительно неподвижной точки O равен нулю, то момент импульса системы материальных точек относительно того же начала остается постоянным во времени. В частном случае можно рассматривать сохранение отдельних компонент момента импульса в проекции на какие-либо оси, например,

$$M_x = 0 \Rightarrow L_x = const$$

5.3 Момент импульса относительно оси

Момент вектора относительно точки – вектор, момент вектора относительно оси – проекция на эту ось момента относительно какой-нибудь точки, лежащей на оси. Рассмотрим, например, ось z. Посклько векторное произведение перпендикулярно обоим сомножителям, то

$$L_z = [\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}]_z = \left[\left(\boldsymbol{r}_{||} + \boldsymbol{r}_\perp\right) \times \left(\boldsymbol{p}_{||} + \boldsymbol{p}_\perp\right)\right]_z = [\boldsymbol{r}_\perp \times \boldsymbol{p}_\perp]_z = r_\perp p_\perp \sin\varphi$$

где $r = R\sin\theta$, а вектора разложены на составляющие параллельные и перпендикулярные оси z.

Если материальная точка вращается вокруг оси z, то $R = const$, $v = \omega R$, $p = mv = v\omega R$ и

$$L_z = m\omega R^2$$

а уравнение вращательного движения запишется как

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z = RF_\perp \sin\varphi_F = lF_\perp \Rightarrow mR^2\frac{d\omega}{dt} = lF_\perp$$

Здесь l называется плечом силы – кратчайшим расстоянием до линии действия силы.

[рисунок]

[видео с падающим поездом – `https://www.youtube.com/watch?v=8ktMe0xclxA`]

[видео с прыжками на качелях – `https://www.youtube.com/watch?v=sxSGz6TY-jw`]

5.4 Вращение относительно движущегося центра

Пусть теперь начало системы отсчета движется с некоторой скоростью $\boldsymbol{V}_O$. $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$, где $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ – в лабораторной системе отсчета.

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{V}_O) \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{M} = \boldsymbol{M} - \boldsymbol{V}_O \times \boldsymbol{p}$$

Здесь $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ – относительная скорость материальной точки. Для системы материальных точек

$$\boldsymbol{L} = \sum_k \boldsymbol{r}_k \times \boldsymbol{p}_k, \boldsymbol{M} = \sum_k \boldsymbol{r}_k \times \boldsymbol{F}_k, \boldsymbol{p} = \sum_k m_k \boldsymbol{v}_k$$

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \sum_k \left(\frac{d\boldsymbol{r}_k}{dt} \times \boldsymbol{p}_k + \boldsymbol{r}_k \times \frac{d\boldsymbol{p}_k}{dt}\right) = \sum_k (\boldsymbol{v}_k - \boldsymbol{V}_O) \times \boldsymbol{p}_k + \boldsymbol{M}_{ext} = \boldsymbol{M} - \boldsymbol{V}_O \times \boldsymbol{p}$$

Тогда, если движущаяся система отсчета – система центра масс, то есть $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}_c = \left(\sum_k m_k\right)\boldsymbol{v}_c$, то $\boldsymbol{V}_O \times \boldsymbol{p} = \boldsymbol{v}_c \times m\boldsymbol{v}_c = 0$, и уравнение вращательного движения принимает тот же вид, что и в случае неподвижного центра:

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{M}$$

5.5 Секториальная скорость

При движении материальной точки по некоторой траектории ее радиус-вектор «заметает» некоторую площадь. Скорость изменения этой площади называется секториальной скоростью:

$$\boldsymbol{v}_s = \frac{d\boldsymbol{S}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{r}\left(t\right)\times\boldsymbol{r}\left(t+dt\right)\right] = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{r}\left(t\right)\times\left(\boldsymbol{r}\left(t\right)+d\boldsymbol{r}\right)\right] = \frac{1}{2}\boldsymbol{r}\left(t\right)\times\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{1}{2}\boldsymbol{r}\left(t\right)\times\boldsymbol{v} = \frac{1}{2m}\boldsymbol{L}$$

[рисунок]

Рассмотрим частный случай центрального поля, когда сила, действующая на материальную точку

$$\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{r}\right) = F\left(r\right)\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

Момент этой силы относительно силового центра $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} = F\left(r\right)\frac{\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r}}{r} = 0$. Так как $\boldsymbol{L} = const$, то в силу определения момента импульса вектор скорости всегда ортогонален этому постоянному вектору, и все перемещения происходят в плоскости, ортогональной $\boldsymbol{L}$. Это значит, что движение в центральном поле является плоским. Отсюда же следует, что и секториальная скорость материальной точки постоянна.

5.6 Движение в гравитационном поле

Сила гравитации является частным случаем центральной силы:

$$F = \gamma\frac{m_1 m_2}{r^2}, \boldsymbol{F} = -\gamma\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

Гравитационная постоянная есть $\gamma = 6.67\cdot 10^{-11}\frac{m^3}{kg\cdot s^2}$. Гравитационным полем называется область пространства, где в любой точке на помещенные туда тело действует сила гравитации. Напряженность гравитационного поля:

$$\boldsymbol{g} = \frac{\boldsymbol{F}}{m_2} = -\gamma\frac{m_1}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

Если имеется несколько притягивающих центров (например, задача о полете спутника в Солнечной системе), то

$$\boldsymbol{g} = \sum_k \boldsymbol{g}_k = -\gamma\sum_k\frac{m_k}{r_k^2}\frac{\boldsymbol{r}_k}{r_k}$$

Потенциальная энергия в гравитационном поле

$$\Pi = -\gamma\frac{m_1 m_2}{r} + const$$

При движении в гравитационном поле сохраняются энергия и момент импульса:

$$E = \frac{mv^2}{2} - \gamma\frac{mM}{r} = const$$

$$\boldsymbol{L} = m\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v} = const$$

Для такого движения справедливы три закона Кеплера (опубликованы в 1609, 1618 гг.):

1. материальная точка (планета) движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится притягивающий центр (Солнце)

2. радиус-векторы планет за равные промежутки времени заметают равные площади (секториальная скорость постоянна)

3. квадраты времен обращения планет относятся как кубы больших полуосей эллиптических орбит, по которым планеты движутся вокруг Солнца:

$$\frac{T^2}{a^3} = const$$

Закон сохранения импульса:

$$L = mrv_\perp = mr^2\frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow \frac{d\varphi}{dt} = \frac{L}{mr^2}$$

Тогда полная энергия

$$E = \frac{mv^2}{2} - \gamma\frac{mM}{r} = \frac{mv_r^2}{2} + \frac{mv_\perp^2}{2} - \gamma\frac{mM}{r} = \frac{m}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(\frac{L^2}{2mr^2} - \gamma\frac{mM}{r}\right)$$

[рисунок]

То есть слагаемое $\frac{L^2}{2mr^2} - \gamma\frac{mM}{r}$ можно рассматривать как эффективную потенциальную энергию. Ее график имеет минимум, и, если полная энергия $E < 0$, то тело движется по замкнутой траектории – эллипсу (финитное движение). Если $E \geq 0$, то движение инфинитное – тело уходит на бесконечность от притягивающего центра.

[видео – трактории комет: `https://www.youtube.com/watch?v=Ia1k4Jec1Dc`]

Уравнение эллиптической орбиты в координатах xy:

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} = 1$$

Уравнение орбиты в координатах $r\varphi$:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}, p = \frac{L^2}{\gamma M m^2}, e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\gamma^2 M^2 m^3}}$$

При $e < 1$ (эксцентриситет) получается эллипс. При финитном движении по эллипсу $r_{min} = \frac{p}{1+e}$, $r_{max} = \frac{p}{1-e}$. Большая полуось: $a = \frac{1}{2}(r_{max} + r_{min}) = -\frac{GMm}{2E}$.

Первая космическая скорость – скорость движения спутника по круговой орбите:

$$m\frac{v^2}{R} = \gamma\frac{mM}{R^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{\gamma M}{R}}$$

Для Земли $M = 6 \cdot 10^{24}$ кг, $R = 6380$ м, и $v = 7.9$ км/с. Вторая космическая скорость – минимальная скорость, которую нужно сообщить телу для его удаления на бесконечность:

$$E = 0 \Rightarrow \frac{mv^2}{2} - \gamma\frac{mM}{R} = 0 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2\gamma M}{R}} = 11.2\text{км/с}$$

6 Движение твердого тела

Вращение твёрдого тела вокруг неподвижной оси. Кинематика твёрдого тела. Теорема Эйлера. Мгновенная ось вращения. Угловая скорость как вектор, сложение вращений. Независимость угловой скорости вращения твёрдого тела от положения оси, к которой отнесено вращение. Момент инерции. Вычисление моментов инерции твёрдых тел. Теорема Гюйгенса–Штейнера. Уравнение моментов при вращении вокруг неподвижной оси. Кинетическая энергия вращающегося тела. Плоское движение твёрдого тела. Качение. Скатывание тел с наклонной плоскости. Регулярная прецессия свободного вращающегося симметричного волчка. Гироскопы.

6.1 Элементы кинематики твердого тела

До сих пор мы рассматривали движение материальных точек и конечных систем материальных точек. Когда в физических моделях приходится иметь дело с протяженными телами, часто используют модель твердого тела – объекта, в котором расстояние между любыми двумя точками которого неизменно. В общем случае твердое тело может поступательно премещаться в пространстве и вращаться. Чтобы описать такое составное движение необходимо ввести угловую скорость как векторную величину. Для простоты начнем с материальной точки и рассмотрим ее движение по окружности: введем вектор малого поворота $d\boldsymbol{\varphi}$, модуль которого равен малому приращению угла $d\varphi$, а направление определяется по правилу правого винта: если смотреть на вращающуюся материальную точку из конца этого вектора, то ее вращение должно происходить против часовой стрелки.

[рисунок]

Тогда угловая скорость будет сонаправлена с введенным вектором и равна

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt} \tag{2}$$

Если начало отсчета находится в некоторой точке O, не совпадающей с центром вращения, то этому определению будет соответствовать формула

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} \tag{3}$$

Теперь вернемся к движению твердого тела, которе можно рассматривать как бесконечную совокупность материальных точек. Радиус-вектор некоторой точки

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{R}_0 + \boldsymbol{r}_0 \tag{4}$$

где $\boldsymbol{r}_0$ – положение точки в системе отсчета, связанной с телом, и началом в точке $\boldsymbol{R}_0$. Пусть тело вращается вокруг точки $\boldsymbol{R}_0$. Тогда

$$d\boldsymbol{r} = d\boldsymbol{R}_0 + d\boldsymbol{r}_0, d\boldsymbol{r}_0 = d\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{r}_0 \Rightarrow \boldsymbol{v} = \boldsymbol{V}_0 + \boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{r}_0 \tag{5}$$

Если выбрать другую точку отсчета $\boldsymbol{R}_1$, то $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{c}$ и

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{V}_1 + \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{V}_1 + \boldsymbol{\omega}_1 \times (\boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{V}_1 + \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{r}_0 \tag{6}$$

Поскольку точка, для который расчитывается скорость, выбрана произвольно, а угловая скорость при фиксированной точке отсчета в твердом теле должна быть одна и та же для всех точек твердого тела, то

$$\boldsymbol{\omega}_0 = \boldsymbol{\omega}_1; \boldsymbol{V}_0 = \boldsymbol{V}_1 + \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{c} \tag{7}$$

То есть, угловая скорость тела не зависит от выбора начала отсчета.

Рассмотрим плоское движение твердого тела, когда векторы скоростей всех точек в любой момент времени параллельны некоторой неподвижной плоскости. В этом случае всегда можно найти точку пространства $\boldsymbol{r}_a$ которая является мгновенной осью вращения – точкой для которой в данный момент времени движение тела является чистым вращением, то есть,

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{V}_a + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_a, \boldsymbol{V}_a = 0 \tag{8}$$

Чтобы найти эту точку, рассмотрим движение тела в некоторой системе координат:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{V}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_0 \tag{9}$$

Тогда, как и ранее, пусть вектор $\boldsymbol{c}_a$ задает положение мгновенной оси в этой системе, и

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{V}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_c, \boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{r}_c + \boldsymbol{c}_a \Rightarrow \boldsymbol{V}_0 = -\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{c}_a \tag{10}$$

Так как при плоском движении $\boldsymbol{V}_0 \perp \boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\omega} \perp \boldsymbol{c}_a$, то это уравнение будет иметь решение

$$\boldsymbol{c}_a = \frac{\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{V}_0}{\omega^2} \tag{11}$$

[рисунок]

6.2 Момент инерции

На прошлой лекции мы получили формулу для момента импульса материальной точки, вращающейся вокруг некоторой оси (обозначим эту ось z): $L_z = m\omega R^2$, где R – кратчайшее расстояние от точки до оси. Если теперь вокруг этой оси вращается система материальных точек с одной и той же угловой скоростью, то

$$L_z = \sum L_{zi} = \omega \sum m_i R_i^2 \tag{12}$$

Величина $I_z = \sum m_i R_i^2$ называется моментом инерции тела относительно оси z. В случае твердого тела нужно сложить бесконечное число бесконечно малых масс, и сумма превращается в интеграл:

$$I_z = \int\limits_V r^2 dm = \int\limits_V r^2 \rho dV = \int\limits_V r^2 \rho dx dy dz \tag{13}$$

где было учтено, что масса dm в малом объеме dV выражается через плотность тела ρ, а трехмерный объем малого параллелепипеда равен произведению его сторон $dV = dx \cdot dy \cdot dz$. Интегрирование производится по всему объему тела.

Для примера рассмотрим момент инерции тонкого стержня длины l относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его центр:

$$I_z = \int\limits_V r^2 dm = \int\limits_{-l/2}^{l/2} x^2 \left(m\frac{dx}{l} \right) = \frac{m}{l} \int\limits_{-l/2}^{l/2} x^2 dx = \frac{m}{3l}\ x^3\Big|_{-l/2}^{l/2} = \frac{ml^2}{12} \tag{14}$$

В случае цилиндра радиуса R и высоты h и оси, проходящей через центр цилиндра (колесо):

$$I_z = \int\limits_V r^2 \frac{m}{\pi R^2 h} dx dy dz = \frac{m}{\pi R^2 h} \int\limits_R r^2 dx dy \int\limits_0^h dz = \frac{m}{\pi R^2} \int\limits_R r^2 dx dy \tag{15}$$

Чтобы проинтегрировать по круговому сечению, перейдем к координатам r, φ:

$$I_z = \frac{m}{\pi R^2} \int\limits_0^R r^2 r dr \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2m}{R^2} \int\limits_0^R r^3 dr = \frac{mR^2}{2} \tag{16}$$

[рисунок]

Рассмотрим теперь, как связаны моменты инерции тела относительно двух разных осей, параллельных друг другу. Обозначим радиус-векторы точек тела относительно первой оси как $\boldsymbol{r}_1$, относительно второй оси – $\boldsymbol{r}_2$, а радиус-вектор второй оси относительно первой – $\boldsymbol{R}$. Тогда момент инерции тела

$$I_1 = \int\limits_V r_1^2 dm = \int\limits_V \boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_1 dm = \int\limits_V (\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{R}) \cdot (\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{R})\, dm = \int\limits_V \left(r_2^2 + R^2 + 2\boldsymbol{r}_2 \cdot \boldsymbol{R} \right) dm = I_2 + mR^2 + 2\boldsymbol{R} \cdot \int\limits_V \boldsymbol{r}_2 dm \tag{17}$$

Если вторая ось проходит через центр масс тела, то $\int_V \boldsymbol{r}_2 dm = 0$ по определению центра масс, и

$$I_1 = I_{2cm} + mR^2 \tag{18}$$

То есть, момент инерции тела относительно какой-либо оси равен моменту инерции относительно параллельной оси, проходящей через центр масс, плюс произведение массы тела на квадрат расстояния между осями. Это утверждение называется теоремой Гюйгенса-Штайнера.

6.3 Динамика твердого тела

Уравнение вращательного движения материальной точки было получено на предыдущей лекции:

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{M} \tag{19}$$

Спроецируем это уравнение на некоторую ось z для каждой материальной точки тела и просуммируем (проинтегрируем) по всем точкам тела:

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z \tag{20}$$

Последнее уравнение можно переписать через известный момент инерции

$$I\frac{d\omega}{dt} = M_z \tag{21}$$

В качестве примера рассмотрим маятник Максвелла [рисунок] – маховик радиуса R и массы m на нитях, намотанных на оси радиуса r. Уравнения динамики поступательного и вращательно движения:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - 2T \tag{22}$$

$$I\frac{d\omega}{dt} = 2Tr, I = \frac{1}{2}mR^2 \tag{23}$$

При этом скорость связана с угловой скостью $v = \omega r$. Откуда находим ускорение поступательного движения маятника

$$\frac{dv}{dt} = \frac{g}{1 + \frac{I}{mr^2}} = \frac{g}{1 + \frac{R^2}{2r^2}} < g \tag{24}$$

Если $r \ll R$, то $a \approx 2\left(\frac{r}{R}\right)^2 g \ll g$.

видео – маятник Максвелла: `https://www.youtube.com/watch?v=0HVy5dXxP3I&t=8s`

При скатывании массивного цилиндра с горки

$$m\frac{dv}{dt} = mg\sin\alpha - F_{fr} \tag{25}$$

$$I\frac{d\omega}{dt} = F_{fr}R \tag{26}$$

$$v = \omega R \Rightarrow \frac{dv}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} \tag{27}$$

Откуда ускорение

$$a = \frac{g\sin\alpha}{1 + I/mR^2} = \frac{2}{3}g\sin\alpha \tag{28}$$

6.4 Кинетическая энергия вращательного движения

Кинетическая энергия вращяющегося тела складывается из кинетических энергий составляющих его точек:

$$K = \int \frac{v^2}{2}dm = \int \frac{\omega^2}{2}r^2 dm = \frac{\omega^2}{2}\int r^2 dm = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{L\omega}{2} = \frac{L^2}{2I} \tag{29}$$

6.5 Аналогии между поступательным и вращательным движениями

Момент инерции показывает, насколько сложно раскрутить или остановить вращение тела, подобно тому, как масса показывает, насколько легко или сложно разогнать или затормозить тело. Можно провести следующие аналогии между поступательным и вращательным движением:

Поступательное движение:	Вращательное движение:
Координата $\boldsymbol{r}$	Угловая координата $\boldsymbol{\varphi}$
Скорость $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$	Угловая скорость $\dfrac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt}$
Ускорение $\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$	Угловое ускорение $\dfrac{d^2\boldsymbol{\varphi}}{dt^2}$
Масса m	Момент инерции $I = \int r^2 dm$
Импульс $\int \boldsymbol{v} dm$	Момент импульса $L = \int [\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}]\, dm$
Сила $\boldsymbol{F}$	Момент Силы $M = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$
Кинетическая энергия поступательного движения $\dfrac{mv^2}{2} = \dfrac{p^2}{2m}$	Кинетическая энергия вращательного движения $\dfrac{I\omega^2}{2} = \dfrac{L^2}{2I}$

Примеры проявления закона сохранения и изменения момента импульса:
видео – вращение фигуристки `https://www.youtube.com/watch?v=VqOjw8tkcQk`
видео – скамья Жуковского `https://www.youtube.com/watch?v=U_ASf1wf5tw`

6.6 Гироскопы

Рассмотрим быстровращающееся тело с угловой скоростью ω с достаточно большим моментом инерции (гироскоп). Вектор момента импульса направлен вдоль оси вращения. Если момент инерции велик, то тело достаточно сложно остановить – уменьшить модуль вектора момента импульса. Но этот вектор можно повернуть, приложив некоторую силу так, чтобы ее момент был перпендикулярен вектору момента импульса. Движение вектора момента импульса гироскопа под действием внешних сил называется прецессией гироскопа. Если это движение является медленным по сравнению с вращением гироскопа вокруг своей оси, то можно приблизительно считать, что оно не влияет на момент импульса, и тогда

$$\frac{dL}{dt} = L\Omega = M \tag{30}$$

где Ω – угловая скорость медленного вращения гироскопа. Учтем, что $L = I\omega$. Тогда

$$\Omega = \frac{M}{I\omega} \tag{31}$$

[рисунок]

[видео – прецессия гироскопа `https://www.youtube.com/watch?v=ty9QSiVC2g0&t=138s`]

[видео – трюки с гироскопом `https://www.youtube.com/watch?v=p9zhP9Bnx-k`, `TheCubli_acubethatcanjumpup,balance,and'walk'.mp4`]

7 Гармонические колебания

Гармонические колебания материальной точки. Пружинный и математический маятники. Частота, круговая частота и период колебаний. Роль начальных условий. Энергия колебаний, связь средней кинетической и средней потенциальной энергий гармонического осциллятора. Механические колебания твёрдых тел. Физический маятник. Приведённая длина, центр качания. Теорема Гюйгенса о физическом маятнике. Комплексное описание колебаний. Затухающие колебания. Вынужденные колебания.

7.1 Колебания материальной точки

Колебательное движение в общем смысле – это движение, которое повторяется во времени. Колебательные процессы – одни из самых распространенных процессов в природе. Самым простым типом колебаний называются гармонические колебания, они описываются уравнениями

$$x = a\cos(\omega t + \varphi_0) \tag{32}$$

Здесь x – некотороая изменяющаяся величина (например, координата или угол), a – амплитуда колебаний, ω – частота колебаний, φ_0 – начальная фаза колебаний. Указанные функции строго периодичны, $x\left(t+nT\right)=x\left(t\right), n\in Z$, где $T=2\pi/\omega$ – период колебаний. Аргумент гармонической функции можно представить как изменяющуюся во времени фазу колебаний $\varphi\left(t\right)=\omega t+\varphi_0$. По такому закону, например, изменяется проекция радиус-вектора материальной точки, равномерно движущейся по окружности. Гармонические колебания можно также описать с помощью функции

$$x=a_1\cos\left(\omega t\right)+a_2\cos\left(\omega t\right), a_1=a\cos\varphi_0, a_2=a\sin\varphi_0, \tag{33}$$

[рисунок]

Продифференцируем два раза зависимость $x=a\cos\left(\omega t+\varphi_0\right)$:

$$\frac{dx}{dt}=-a\omega\sin\left(\omega t+\varphi_0\right), \frac{d^2x}{dt^2}=-a\omega^2\cos\left(\omega t+\varphi_0\right) \tag{34}$$

Отсюда видно, что вторая производная связана со значение функции следующим уравнением:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0 \tag{35}$$

Это уравнение называется уравнением гармонических колебаний. Оно описывает множество колебательных процессов различной физической природы. Вне зависимости, какую величину описывает функция $x\left(t\right)$, если для этой функции получено уравнение, то множитель, стоящий перед вторым членом уравнения будет квадратом частоты.

Амплитуда и фаза колебаний определяются начальными значениями величины x и ее производной в определенный момент времени (например, $t=0$): если $x\left(0\right)=x_0$, $\frac{dx}{dt}\left(0\right)=v_0$, то

$$x_0=a\cos\left(\varphi_0\right), v_0=-a\omega\sin\left(\varphi_0\right)\Rightarrow a=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}, \tan\varphi_0=-\frac{v_0}{\omega x_0} \tag{36}$$

В качестве первого примера рассмотрим математический маятник – материальную точку, подвешенную на невесомой нерастяжимой нити. Для произвольной точки запишем второй закон Ньютона и учтем, что отклонения происходят на малый угол $\theta\approx\sin\theta$:

$$ma_\tau=-mg\sin\theta\Rightarrow l\frac{d^2\theta}{dt^2}\approx-g\theta\Rightarrow\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\theta=0\Rightarrow\omega=\sqrt{\frac{g}{l}}, T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{37}$$

В случае материальной точки находящейся на горизонтальной плоскости и прикрепленной к стенке упругой пружинкой:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx\Rightarrow\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0\Rightarrow\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}, T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{38}$$

В обоих рассмотренных примерах колебания обладали свойством изохронности – независимости периода от амплитуды колебаний. В математическом маятнике изохронность достигается приближенно при малых углах, когда $\sin\theta\approx\theta$. При колебаниях материальной точки на пружинке изохронность справедлива при условии линейной зависимости силы упругости от растяжения пружины.

Теперь запишем закон сохранения энергии в рассмотренных случаях. Для математического маятника

$$K+E_p=const\Rightarrow\frac{1}{2}m\left(l\frac{d\theta}{dt}\right)^2+mgl\left(1-\cos\theta\right)=const \tag{39}$$

Продифференцируем по времени:

$$ml^2\frac{d\theta}{dt}\frac{d^2\theta}{dt^2}+mgl\sin\theta\frac{d\theta}{dt}=0\Rightarrow\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\theta\approx0 \tag{40}$$

Аналогично для пружинного маятника

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}kx^2=const\Rightarrow m\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}+kx\frac{dx}{dt}=0\Rightarrow\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0 \tag{41}$$

То есть, мы получаем то же самое уравнение колебаний. Данный факт можно обобщить: уравнение колебаний можно получить либо из динамических уравнений, либо дифференцированием закона сохранения энергии. Заметим, что в случае с математическим маятником потенциальную энергию можно переписать как

$$E_p = mgl\left(1-\cos\theta\right) \approx \frac{1}{2}mgl\theta^2 = \frac{1}{2}\beta\theta^2 \tag{42}$$

то есть, как и в случае с пружинным маятником? эта величина оказывается пропорциональна квадрату некоторой обобщенной координаты (в данном случае – углу). В общем случае закон сохранения энергии можно записать в виде

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\gamma x^2 = const \tag{43}$$

где x – некоторая обобщенная координата, а $\dfrac{dx}{dt}$ – обобщенная скорость.

Вернемся к закону колебаний и запишем изменение кинетической и потенциальной энергии во времени:

$$E_p = \frac{1}{2}\beta x^2 = \frac{1}{2}\beta a^2\cos^2\left(\omega t+\varphi_0\right) = \frac{1}{4}\beta a^2\left[1+\cos 2\left(\omega t+\varphi_0\right)\right] \tag{44}$$

$$K = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}ma^2\omega^2\sin^2\left(\omega t+\varphi_0\right) = \frac{1}{2}\beta a^2\sin^2\left(\omega t+\varphi_0\right) = \frac{1}{4}\beta a^2\left[1-\cos 2\left(\omega t+\varphi_0\right)\right] \tag{45}$$

Отсюда видно, что кинетическая и потенциальная энергии также периодически изменяются – совершают гармонические колебания – около среднего значения $\dfrac{1}{4}\beta a^2$ с удвоенной частотой 2ω. При этом полная энергия $E = K + E_p = \dfrac{1}{2}\beta a^2$

7.2 Комплексное представление колебаний

Формы записи комплексных чисел (через действительную и мнимую части, через модуль и аргумент, в экспоненциальной форме через формулу Эйлера):

$$z = \Re z + i\Im z = |z|\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right) = |z|\exp\left(i\varphi\right) \tag{46}$$

Отсюда

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}\right), \sin\varphi = \frac{1}{2i}\left(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}\right) \tag{47}$$

Поэтому зависимость координаты от времени можно представлять также с помощью комплексной экспоненты, имея в виду, что для вычисления измеримых величин необходимо брать действительную часть этой экспоненты:

$$x\left(t\right) = a\Re\left[\exp\left(i\omega t + i\varphi_0\right)\right] = \Re\left[\left(ae^{i\varphi_0}\right)\exp\left(i\omega t\right)\right] \tag{48}$$

Как правило уравнение колебаний удобно решать на множестве комплексных чисел, а для получения физически измеримых координат – брать действительные части решения.

7.3 Затухающие колебания

Если в системе присутствуют потери энергии, которые зависят от скорости тела, то уравнение гармонических колебаний изменяется. Посмотрим это на примере пружинного маятника, который движется в вязкой среде, сила сопротивления которой пропорциональна скорости $\boldsymbol{F} = \beta\boldsymbol{v}$:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \beta\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \gamma = \frac{\beta}{2m} \tag{49}$$

Величина γ называется коэффициентом затухания, ω_0 – собственная частота осциллятора. Перейдем к комплексной записи уравнения

$$\frac{d^2z}{dt^2} + 2\gamma\frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = 0 \tag{50}$$

и будем искать решения в виде $z(t) = z_0 \exp(i\Omega t)$, имея в виду, что решение исходного уравнения будет $x(t) = \Re z(t)$:

$$z_0 \exp(i\Omega t)\left[-\Omega^2 + 2i\gamma\Omega + \omega_0^2\right] = 0 \Rightarrow \Omega = -i\gamma \pm \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \tag{51}$$

Тогда общее решение уравнения затухающих колебаний есть суперпозиция гармонических членов с двумя полученными частотами:

$$z(t) = e^{-\gamma t}\left[z_{01}\exp\left(i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}t\right) + z_{02}\exp\left(-i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}t\right)\right] \tag{52}$$

Постоянные z_{01}, z_{02} определяются начальной коодинатой и скоростью материальной точки. Если, например, константы $z_{01} = z_{02}$ и затухание мало, $\gamma < \omega_0$, то

$$x(t) = 2z_{01}e^{-\gamma t}\cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}t\right) \tag{53}$$

то есть, получаются гармонические колебания с частотой $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$, амплитуда которых экспоненциально уменьшается со временем как $a(t) = 2z_{01}e^{-\gamma t}$.

[график]

В общем виде выделение действительной части записывается как

$$x(t) = e^{-\gamma t}\Re\left[z_{01}\exp(i\omega t) + z_{02}\exp(-i\omega t)\right] = 2e^{-\gamma t}\Re\left[(z_{01} + z_{02})\cos(\omega t) + i(z_{01} - z_{02})\sin(\omega t)\right] \tag{54}$$

$$= 2e^{-\gamma t}\left[x_{01}\cos(\omega t) + x_{02}\sin(\omega t)\right], x_{01} = \Re(z_{01} + z_{02}), x_{02} = -\Im(z_{01} - z_{02}) \tag{55}$$

Если затухание велико, $\gamma > \omega_0$, то

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left[\Re(z_{01})\exp\left(-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}t\right) + \Re(z_{02})\exp\left(\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}t\right)\right] \tag{56}$$

Второй член в этой формуле описывает колебания, амплитуда которых экспоненциально возрастает со временем. В рассматриваемой системе с диссипацией подобное решение является нефизичным и поэтому необходимо положить $z_{02} \equiv 0$.

7.4 Вынужденные колебания

Теперь усложним задачу и добавим к осциллятору с затуханием (тело на пружнке в вязкой среде) внешнюю гармоническую силу, раскачивающую осциллятор на некоторой частоте Ω:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \beta\frac{dx}{dt} + F_0\cos(\Omega t) \tag{57}$$

Перепишем это уравнение в стандартной форме с единичным коэффициентом перед второй производной:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0\cos(\Omega t), f_0 = \frac{F_0}{m} \tag{58}$$

Запишем соответствующее уравнение на комплексную функцию времени $z = x + iy$:

$$\frac{d^2z}{dt^2} + 2\gamma\frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = f_0 e^{i\Omega t} \tag{59}$$

Таким образом, для нахождения зависимости смещения от времени, можно решить последнее уравнение на комплексную функцию и взять действительную часть, как мы делали выше для затухающих колебаний. Будем искать решение, соответствующее вынужденным колебаниям, в виде $z = z_0 e^{i\Omega t}$:

$$z_0 e^{i\Omega t}\left(-\Omega^2 + 2i\gamma\Omega + \omega_0^2\right) = f_0 e^{i\Omega t} \Rightarrow z_0 = \frac{f_0}{-\Omega^2 + i\gamma\Omega + \omega_0^2} \Rightarrow z = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \Omega^2 + i\gamma\Omega}e^{i\Omega t} \tag{60}$$

Зависимость амплитуды z_0 от частоты Ω называется частотной характеристикой. Для нахождения искомого решения выделим действительную амплитуду и фазу:

$$|\omega_0^2 - \Omega^2 + i\gamma\Omega| = \sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + \gamma^2\Omega^2}, \psi = \arg\left(\omega_0^2 - \Omega^2 + i\gamma\Omega\right) = \arctan\frac{\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \tag{61}$$

поэтому

$$z = Ae^{-i\psi}e^{i\Omega t} \Rightarrow x = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + \gamma^2\Omega^2},} \cos\left(\Omega t + \arctan\frac{\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right) \tag{62}$$

Если построить графики зависимости амплитуды вынужденных колебаний от частоты внешней силы, то окажется, что при малом затухании на частоте $\Omega \approx \omega_0$ наблюдается резонанс – явление резкого увеличения амплитуды колебаний. В строгой формулировке максимум амплитуды находится из условия $\frac{dA}{d\Omega} = 0$. Отсюда получается $\Omega_{res} = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/2}$ – резонансная частота вынуждающей силы. При этом максимальная амплитуда $A_{max} \approx \frac{f_0}{\gamma\omega_0}$.

[рисунок]

Сложные и составные физические системы могут совершать колебания на большом количестве частот. Если воздействовать на эти системы гармонической внешней силой, частота которой близка к одной из этих собственных частот, то и будет наблюдаться резонанс.

[видео – колебания моста: `https://www.youtube.com/watch?v=WEQrt_w7gN4`]

7.5 Физический маятник

Физическим маятником называется любое твердое тело, которое может совершать колебания вокруг некоторой неподвижной точки O.

[рисунок]

Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси описывается уравнением

$$\frac{dL}{dt} = M \Rightarrow I_O\frac{d^2\theta}{dt^2} = M \tag{63}$$

где I – момент инерции этого тела относительно этой оси (см. предыдущую лекцию). Если движение происходит под действием момента силы тяжести, то

$$\boldsymbol{M} = \int\limits_V \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{g} dm = \left(\int\limits_V \boldsymbol{r} dm\right) \times \boldsymbol{g} = m\boldsymbol{R}_c \times \boldsymbol{g} \Rightarrow M = -mga\sin\theta \tag{64}$$

Здесь $a = |\boldsymbol{R}_c|$ – расстояние от оси вращения до центра масс. Тогда уравнение движения для малых углов отклонения будет

$$I_O\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mga\sin\theta \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mga}{I_O}\theta = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{mga}{I_O}, T = 2\pi\sqrt{\frac{I_O}{mga}} \tag{65}$$

Проводя аналогию с математическим маятником, можно ввести так называемую приведенную длину $l_{\text{пр}} = \frac{I_O}{ma}$. Эта длина показывает, какой длины математический маятник нужно взять с той же массой, что и масса твердого тела, чтобы он совершал колебания с такой же частотой. Подставляя теорему Гюйгенса-Штейнера, получаем

$$l_{\text{пр}} = \frac{1}{ma}I_O = \frac{1}{ma}\left(I_c + ma^2\right) = a + \frac{I_c}{ma} \tag{66}$$

Точка маятника, отстоящая от точки подвеса на расстояние $l_{\text{пр}}$, называется центром качания.

Для центра качания справедлива теорема Гюйгенса: если подвесить физический маятник за центр качания, то период колебаний не изменится, а первоначальная точка подвеса станет новым центром качания. Этот результат получается, если посчитать приведенную длину для новой точки подвеса:

$$l'_{\text{пр}} = a' + \frac{I_c}{ma'}, a + a' = l_{\text{пр}} \Rightarrow a' = l_{\text{пр}} - a = \frac{I_c}{ma}, l'_{\text{пр}} = \frac{I_c}{ma} + \frac{I_c}{m\left(I_c/ma\right)} = \frac{I_c}{ma} + a = l_{\text{пр}} \tag{67}$$

Если не меняется приведенная длина, то не изменится и период колебаний.

7.6 Пример расчета периода колебаний

Для примера рассмотрим задачу о нахождении периода колебаний сплошного цилиндра радиуса R и массы m, лежащего на плоскости и прикрепленного за ось вращения двумя пружинами жесткости k к вертикальной стенке. Предположим, что колебания происходят так, что цилиндр катится без проскальзывания. Запишем уравнение движения цилиндра:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_{fr} - 2kx \tag{68}$$

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -F_{fr}R \tag{69}$$

При этом горизонтальное смещение связано углом поворота цилиндра вокруг оси как $x = R\varphi \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = R\frac{d^2\varphi}{dt^2}$. Тогда

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2kR^2}{I+mR^2}x = 0 \Rightarrow \omega = R\sqrt{\frac{2k}{I+mR^2}} = 2\sqrt{\frac{k}{3m}} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\frac{3m}{k}} \tag{70}$$

Тот же самый результат можно получить, записав и продифференцировав закон сохранения энергии:

$$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}I\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = const \Rightarrow kx\frac{dx}{dt} + m\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + I\frac{d\varphi}{dt}\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0 \tag{71}$$

8 Неинерциальные системы отсчета

Неинерциальные системы отсчёта. Относительное, переносное, кориолисово ускорения. Силы инерции: поступательная, центробежная, кориолисова. Второй закон Ньютона в неинерциальных системах отсчёта. Потенциальная энергия в поле центробежных сил. Вес тела, невесомость. Отклонение падающих тел от направления отвеса. Геофизические проявления кориолисовых сил. Маятник Фуко.

8.1 Силы инерции

До сих пор мы рассматривали только переходы между различными инерциальными системами отсчета. Важным свойством таких преобразований является неизменность сил, действующих на материальные частицы и твердые тела. Если преобразования происходит от инерциальной системы отчета к неинерциальной, то оказывается, что к физическим силам необходимо добавить так называемые силы инерции, возникающие из формул преобразования к новой системе отсчета. Рассмотрим подробно такое преобразование.

[рисунок]

Пусть имеется начальная инерциальная система отсчета $OXYZ$, в которой материальная точка движется с ускорением $\boldsymbol{a} = d^2\boldsymbol{r}/dt^2$, и некоторая неинерциальная система отсчета $O'X'Y'Z'$, так что $\vec{OO'} = \boldsymbol{R}$, движение которой можно представить как суперпозицию поступательного движения со мгновенной скоростью $\boldsymbol{V} = d\boldsymbol{R}/dt$ и вращательного движения с угловой скоростью ω. Радиус-вектор материальной точки в исходной и новой системах можно разложить по ортам $\boldsymbol{r} = x\hat{\boldsymbol{i}} + y\hat{\boldsymbol{j}} + z\hat{\boldsymbol{k}}$, $\boldsymbol{r}' = x'\hat{\boldsymbol{i}}' + y'\hat{\boldsymbol{j}}' + z'\hat{\boldsymbol{k}}'$. Производная радиус вектора в исходной системе есть скорость

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{\boldsymbol{i}} + \frac{dy}{dt}\hat{\boldsymbol{j}} + \frac{dz}{dt}\hat{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{v} \tag{72}$$

При дифференцировании радиус-вектора в неинерциальной системе координат нужно учесть, что новые орты $\hat{\boldsymbol{i}}', \hat{\boldsymbol{j}}', \hat{\boldsymbol{k}}$ не являются постоянными, а вращатся с угловой скоростью ω:

$$\frac{d\boldsymbol{r}'}{dt} = \frac{dx'}{dt}\hat{\boldsymbol{i}}' + \frac{dy'}{dt}\hat{\boldsymbol{j}}' + \frac{dz'}{dt}\hat{\boldsymbol{k}}' + x'\frac{d\hat{\boldsymbol{i}}'}{dt} + y'\frac{d\hat{\boldsymbol{j}}'}{dt} + z'\frac{d\hat{\boldsymbol{k}}'}{dt} \tag{73}$$

$$= \boldsymbol{v}' + x'\left[\boldsymbol{\omega} \times \hat{\boldsymbol{i}}'\right] + y'\left[\boldsymbol{\omega} \times \hat{\boldsymbol{j}}'\right] + z'\left[\boldsymbol{\omega} \times \hat{\boldsymbol{k}}'\right] \tag{74}$$

$$= \boldsymbol{v}' + \left[\boldsymbol{\omega} \times \left(x'\hat{\boldsymbol{i}}' + y'\hat{\boldsymbol{j}}' + z'\hat{\boldsymbol{k}}'\right)\right] = \boldsymbol{v}' + [\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'] \tag{75}$$

Поэтому

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{R} \Rightarrow \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + [\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'] + \boldsymbol{V} \tag{76}$$

Сумма $[\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'] + \boldsymbol{V}$ называется переносной скоростью. Этой скоростью обладают материальные точки, покоящиеся в новой системе координат.

Теперь найдем закон преобразования укорений. Продифференцдируем формулу скорости:

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{\boldsymbol{i}} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{\boldsymbol{j}} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{a} \tag{77}$$

есть ускорение в исходной системе координат. В новой системе:

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}'}{dt^2} = \frac{d^2x'}{dt^2}\hat{\boldsymbol{i}}' + \frac{d^2y'}{dt^2}\hat{\boldsymbol{j}}' + \frac{d^2z'}{dt^2}\hat{\boldsymbol{k}}' + 2\frac{dx'}{dt}\frac{d\hat{\boldsymbol{i}}'}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\hat{\boldsymbol{j}}'}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\hat{\boldsymbol{k}}'}{dt} + x'\frac{d^2\hat{\boldsymbol{i}}'}{dt^2} + y'\frac{d^2\hat{\boldsymbol{j}}'}{dt^2} + z'\frac{d^2\hat{\boldsymbol{k}}'}{dt^2} \tag{78}$$

$$= \boldsymbol{a}' + 2\left(\frac{dx'}{dt}\left[\boldsymbol{\omega} \times \hat{\boldsymbol{i}}'\right] + \frac{dy'}{dt}\left[\boldsymbol{\omega} \times \hat{\boldsymbol{j}}'\right] + \frac{dz'}{dt}\left[\boldsymbol{\omega} \times \hat{\boldsymbol{k}}'\right]\right) + x'\frac{d}{dt}\left[\boldsymbol{\omega} \times \hat{\boldsymbol{i}}'\right] + y'\frac{d}{dt}\left[\boldsymbol{\omega} \times \hat{\boldsymbol{j}}'\right] + z'\frac{d}{dt}\left[\boldsymbol{\omega} \times \hat{\boldsymbol{k}}'\right] \tag{79}$$

$$= \boldsymbol{a}' + 2\left[\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}'\right] + \left[\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \boldsymbol{r}'\right] + [\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}']] \tag{80}$$

Поэтому

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{R} \Rightarrow \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + [\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'] + \boldsymbol{V} \Rightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' + 2\left[\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}'\right] + \left[\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \boldsymbol{r}'\right] + [\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}']] + \frac{d\boldsymbol{V}}{dt} \tag{81}$$

Слагаемые, входящие в ускорение можно разделить на три типа. Во-первых, это ускорение материальной точки относительно новой системы кооднат $\boldsymbol{a}'$, рассчитанное через вторые производные новых координат от времени. Во-вторых, это, так называемое, переносное ускорение

$$\boldsymbol{a}_{\text{пер}} = \frac{d\boldsymbol{V}}{dt} + \left[\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \boldsymbol{r}'\right] + [\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}']] \tag{82}$$

Это то ускорение, которым бы обладала материальная точка, если бы покоилась в новой системе. Последний член назвается Корилисовым ускорением

$$\boldsymbol{a}_{\text{кор}} = 2\left[\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}'\right] \tag{83}$$

и обусловлен движением в неинерциальной системе координат. Это ускорение возникает даже в случае, когда в новой системе материальная точка движется равномерно и прямолинейно.

Если наблюдатель будет находится в неинерциальной системе координат, то матетериальные точки будут двигаться как если бы на них действовали дополнительные силы, соответствующие компонентам ускорения. Запишем второй закон Ньютона:

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} \Rightarrow m\left(\boldsymbol{a}' + \boldsymbol{a}_{\text{пер}} + \boldsymbol{a}_{\text{кор}}\right) = \boldsymbol{F} \Rightarrow m\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_{in} \tag{84}$$

где сила инерции складывается из поступательной силы инерции $\boldsymbol{F}_{\text{пост}} = -m\dfrac{d\boldsymbol{V}}{dt}$, центробежной силы инерции $\boldsymbol{F}_{\text{цб}} = -m\left[\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}']\right] - m\left[\dfrac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \boldsymbol{r}'\right]$, и кориолисовой силы инерции $\boldsymbol{F}_{\text{кор}} = -2m\left[\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}'\right]$. Если материальная точка покоится в новой системе координат, то на нее действует переносная сила

$$\boldsymbol{F}_{\text{пер}} = -m\boldsymbol{a}_{\text{пер}} = \boldsymbol{F}_{\text{пост}} + \boldsymbol{F}_{\text{цб}} = -m\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} - m\left[\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}']\right] - m\left[\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \boldsymbol{r}'\right] \tag{85}$$

8.2 Примеры проявления сил инерции

В простейшем случае неинерциальная система отсчета движется прямолинейно, так что $\omega = 0$, а материальная точка покоится в этой системе ($\boldsymbol{v}' = 0$, $\boldsymbol{a}' = 0$). Тогда

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{V} \tag{86}$$

$$0 = m\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_{in} = \boldsymbol{F} - m\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} \tag{87}$$

Если, например, человек стоит в ускоряющемся вагоне метро, то на него действует сила тяжести $m\boldsymbol{g}$, сила инерции, обусловленная ускорением вагона $-m\dfrac{d\boldsymbol{V}}{dt}$, и реакция пола вагона $\boldsymbol{N}$. Чтобы оставаться на месте, человеку нужно скомпенсировать все эти силы, наклонившись под углом α к горизонту:

$$0 = m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{N} - m\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{a}{g} \tag{88}$$

В другихс лучаях начало новой системы отсчета может покоится ($\boldsymbol{V} = 0$), но при этом она вращается с некоторой постоянной угловой скоростью $\omega = const$. Если подвесить математический маятник на вращающейся платформе, то устойчивым положением равновесия в такой системе будет не вертикальное положение нити, а положение материальной точки, когда она отклонилась на некоторый угол. Учитывая, что в положении равновесия $\boldsymbol{v}' = 0$, $\boldsymbol{a}' = 0$, имеем,

$$0 = m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{T} - m\left[\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}']\right] \tag{89}$$

При этом $|\left[\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}']\right]| = \omega^2 R = \omega^2 l \sin\alpha$. Тогда

$$\begin{array}{c} 0 = T\cos\alpha - mg \\ 0 = -T\sin\alpha + m\omega^2 l \sin\alpha \end{array} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{g}{\omega^2 l} \tag{90}$$

Интересно, что при $\omega < \sqrt{g/l}$ груз не будет отклоняться.

При рассмотрении тел в системе отсчет Земли можно учесть ее вращение вокруг собственной оси. Пусть широта измерения веса $\boldsymbol{P}$ тела равна φ. Тогда по второму закону Ньютона

$$0 = m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{P} - m\left[\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}']\right] = m\boldsymbol{g}_{eff} + \boldsymbol{P} \tag{91}$$

где $\boldsymbol{g}_{eff}$ – некоторое эффективное ускорение свободного падения. Оно равно векторной сумме

$$\boldsymbol{g}_{eff} = \boldsymbol{g} + \boldsymbol{a}_{\text{цб}} \tag{92}$$

где $|\boldsymbol{a}_{\text{цб}}| = \Omega^2 R\cos\varphi$. Обозначим угол между $\boldsymbol{g}$ и $\boldsymbol{g}_{eff}$ как α. Тогда

$$\boldsymbol{g}_{eff} \times \boldsymbol{g} = \boldsymbol{a}_{\text{цб}} \times \boldsymbol{g} \Rightarrow g_{eff} g \sin\alpha = \Omega^2 R\cos\varphi g\sin\varphi \Rightarrow [g_{eff} \approx g] \Rightarrow \sin\alpha \approx \frac{\Omega^2 R}{2g}\sin 2\varphi \tag{93}$$

$$|\boldsymbol{g}_{eff}| = \sqrt{(\boldsymbol{g} + \boldsymbol{a}_{\text{цб}})^2} \approx \sqrt{g^2 + 2\left(\boldsymbol{g}\boldsymbol{a}_{\text{цб}}\right)} = \sqrt{g^2 + 2\left(\boldsymbol{g}\boldsymbol{a}_{\text{цб}}\right)} \approx \sqrt{g^2 - 2g\Omega^2 R\cos\varphi} \approx g - 2\Omega^2 R\cos\varphi \tag{94}$$

Подставляя $R = 6.4 \cdot 10^7$м, $\Omega = 7.3 \cdot 10^{-5}$с$^{-1}$получаем,

$$\max\frac{g - g_{eff}}{g} \approx \frac{\Omega^2 R}{g} \approx 0.34\%, \max\alpha \sim 0.1^\circ \tag{95}$$

В более сложных ситуациях, когда тело движется в неинерциальной системе отсчета, может возникнуть сила Кориолиса

$$\boldsymbol{F}_{\text{кор}} = -2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}' \tag{96}$$

Например, если материальная точка движется по поверхности Земли вдоль меридиана, эта сила будет направлена в разные стороны в зависимости от того, в каком полушарии происходит это движение. Действием этой силы обусловлены такие явления, как более быстрый износ одно из рельсов поездов, или разная скорость размывания берегов рек.

Вращение Земли можно продемонстрировать с помощью так называемого маятника Фуко – массивного тела, подвешенного на длинной нити (пример маятника, который находился в Исакиевском соборе – 98 м). Если рассмотреть маятник, расположенный на полюсе Земли, то по закону сохранения момента импульса, его плоскость качания будет поворачиваться на полный оборот за одни сутки. Если маятник расположен на широте φ, угловую скорость вращения Земли можно разложить на две составляющие: по направлению к центру Земли $\Omega_{||}$ и перпендикулярная ей $\Omega_{\perp}$. Первая составляющая будет описывать вращение плоскости качания. Тогда период оборота плоскости будет

$$T = \frac{2\pi}{\Omega_{||}} = \frac{T}{\sin\varphi} \tag{97}$$

С точки зрения неинерциальной системы отсчета, связанной с поверхностью Земли, движение маятника обусловлено действием силы Кориолиса.

9 Элементы релятивистской механики

Элементы специальной теории относительности. Принцип относительности. Инвариантность скорости света – опыты Физо и Саде. Предельность скорости света. Преобразования Галилея и Лоренца. Интервал и его инвариантность относительно смены системы отсчёта. Относительность понятия одновременности. Замедление времени, сокращение масштабов, собственная длина. Сложение скоростей. Эффект Доплера. Кинетическая энергия релятивистской частицы, энергия покоя, полная энергия. Инвариантность массы системы. Инвариант энергии-импульса.

9.1 Скорость света

На первой лекции мы говорили о противопоставлении классической механики, которую мы изучали на предыдущих лекциях, механике релятивистской. Основополагающим отличием этих двух теорий является предположение классической механики о мгновенности передачи информации, как следствие, абсолютности одновременности (одновременные события являются таковыми во всех инерциальных системах отсчета). В релятивистском случае постулируется существование конечной скорости передачи информации – скорости света – во всех инерциальных системах отсчета.

Таким образом, основные постулаты релятивистской механики:

1. Принцип относительности: все физические законы при одинаковых начальных условиях протекают одинаково во всех инерциальных системах отсчета
2. Скорость света в вакууме конечна и постоянна во всех инерциальных системах отсчета независимо от того, как движутся источник и наблюдатель

Релятивистская механика была развита на рубеже 19-20 вв., однако первые измерения, в которых была зафиксирована конечность скорости света, были проведены еще в 1676 г. датским астрономом Оле Ремером. Наблюдая за затмениями спутников Юпитера, он обнаружил, что когда Земля находится ближе к Юпитеру, моменты затмения наступают раньше, чем это можно было бы ожидать по усредненным значениям, а когда Земля находится дальше – затмения немного запаздывают.

[видео - измерения Ремера: `https://www.youtube.com/watch?v=jx9YLRJEc7w`]

9.2 Преобразования Лоренца

Постоянство скорости света приводит к необходимости отказаться от преобразований Галилея, поскольку противоречит им. Одним из следствий данного факта является необходимость рассматривать пространство и время как единое пространство-время. При этом возникает вопрос, как синхронизовать часы (колебательные системы) в разных точках пространства. Для этого можно рассмотреть следующие методы синхронизации часов расположенных в каких-то двух точках пространства A и B: (1) из точки A в точку B в некоторый момент времени t_1 посылается сигнал, который отражается в точке B и возвращается обратно в A за время

T. Тогда на часах в точке B нужно установить время $t_1 + T/2$. (2) можно послать сигнал из точки C, расположенной посередине между A и B, так что прием сигнала в каждой из точек будет обозначать начало отсчета времени.

Найдем закон преобразования координат и времени при переходе из одной инерциальной системы отсчета (O, x, y, z) в другую (O', x', y', z') в частном случае, когда движение происходит вдоль осей Ox, $O'x'$ со скорость V. Пусть мы имеет возможность установить начало отсчета времени в обеих системах отсчета, когда точки O и O' совпадают. Ввиду однородности и изотропности пространства $y = y'$, $z = z'$. Координаты точки O' в системах K и K' равны, соответственно,

$$\begin{aligned} x_{O'} &= Vt \\ x'_{O'} &= 0 \end{aligned} \tag{98}$$

Это значит, что преобразование координат должно быть линейно и иметь вид $x' = \alpha\,(x - Vt)$, причем коэффиент пропорциональности α может зависеть только от относительной скорости V. Из тех же соображений можно заключить, что $x = \alpha\,(x' + Vt')$ (скорость противоположна, если мы рассматриваем движение K относительно K'). Пусть в нулевой момент времени в начале координат происходит вспышка. Координата, до которой распространился световой сигнал от вспышки в начале коодинат системы K есть

$$\begin{matrix} x = ct \\ x' = ct' \end{matrix} \;\Rightarrow\; \begin{matrix} \alpha\,(c+V)\,t' = ct \\ \alpha\,(c-V)\,t = ct' \end{matrix} \;\Rightarrow \alpha^2\left(c^2 - V^2\right) = c^2 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \tag{99}$$

Таким, образом, преобразование координаты и времени запишеся как

$$\begin{aligned} x &= \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},\; x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\ t &= \frac{t' + \left(V/c^2\right)x'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},\; t' = \frac{t - \left(V/c^2\right)x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \end{aligned} \tag{100}$$

Это и есть преобразование Лоренца. В предельном случае, когда отношение $V/c \ll 1$, преобразование переходит в известное из предыдущих лекций преобразование Галилея.

Из преобразований Лоренца можно получить закон преобразования скоростей:

$$\begin{matrix} \Delta x' = \dfrac{\Delta x - V\Delta t}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \Rightarrow dx' = \dfrac{dx - V dt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\ \Delta t' = \dfrac{\Delta t - \left(V/c^2\right)\Delta x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \Rightarrow dt' = \dfrac{dt - \left(V/c^2\right)dx}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \end{matrix} \;\Rightarrow v'_{x'} = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - V dt}{dt - (V/c^2)\,dx} = \frac{v_x - V}{1 - (v_x V/c^2)} \tag{101}$$

или

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{v'_{x'} + V}{1 + (v'_{x'}V/c^2)} \tag{102}$$

Но нужно учесть, что при этом поменяются также и перпендикулярные проекции скоростей:

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'\sqrt{1 - V^2/c^2}}{dt' + (V/c^2)\,dx'} = \frac{v'_{y'}\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + (v'_{x'}V/c^2)} \tag{103}$$

9.3 Следствия преобразований Лоренца

Из полученных преобразований для координаты и времени в релятивистском случае можно сделать ряд выводов, которые могут показаться необычными с точки зрения нашего повседневного опыта. Во-первых, одновременные в некоторой инерциальной системе отсчета события не являются одновременными в другой инерциальной системе. Чтобы это увидеть, рассмотрим снова две системы K и K' , движущиеся друг относительно друга со скоростю V вдоль Ox и $O'x'$. Пусть в системе K в точках x_1 и x_2 в момент τ одновременно произошли два события. Тогда согласно преобразованию Лоренца пространственно-временные координаты этих событий в другой системе отсчета будут

$$\begin{matrix} x'_1 = \dfrac{x_1 - V\tau}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, x'_2 = \dfrac{x_2 - V\tau}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\ \tau'_1 = \dfrac{\tau - \left(V/c^2\right)x_1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \tau'_2 = \dfrac{\tau - \left(V/c^2\right)x_2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \end{matrix} \;\Rightarrow \tau'_2 - \tau'_1 = -\frac{V}{c^2}\frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \neq 0 \tag{104}$$

Здесь нужно иметь в виду, что эти события причинно не связаны друг с другом. Если это не так, то во всех системах отсчета событие-причина будет предшествовать событию-следствию. Этот факт не будет противоречить преобразованиям Лоренца, поскольку причинно-следственная связь подразумевает взаимодействие, а предельная скорость распространения любых взаимодействий есть скорость света. Поэтому, если в какой-то системе отсчета событие в точке x_1 вызвало событие в точке x_2, то промежуток времени между ними будет не меньше, чем $t_2 - t_1 \geq \left|x_2 - x_1\right|/c$, и

$$t_2' - t_1' = \frac{t_2 - t_1 - \left(V/c^2\right)(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \geq \left|x_2 - x_1\right| \frac{1 - (V/c)}{c\sqrt{1 - V^2/c^2}} > 0 \tag{105}$$

Другим следствием является минимальность так называемого собственного времени (времени, измеряемого в той системе отсчета, где тело покоится). Пусть теперь в K' произошли два события в одной и той же точке x в моменты времени t_1' и t_2'. Тогда соответствующий промежуток времени в K будет

$$t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} > t_2' - t_1' \Rightarrow \Delta t' = \Delta t\sqrt{1 - V^2/c^2} \tag{106}$$

Также оказывается, что длина, измеренная в разных системах отсчета, будет разной. Например, длина одного и того же стежня в собственной системе K', которая движется вместе с ним со скоростью V, и в исходной, будут

$$l = x_2 - x_1,\, l' = x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \Rightarrow l = l'\sqrt{1 - V^2/c^2} \tag{107}$$

Здесь предполагается, что длина измеряется через положение концов стержная в один и тот же момент времени. То есть, длина, измеренная в собственной системе отчета, оказывается максимальной. Этот эффект называется лоренцевским сокращением длины. Однако, если попытаться фиксировать форму быстро пролетающих объектов с помощью фотокамеры, то можно показать, что сокращение длины будет в точности скомпенсировано разностью хода лучей, и никаких искажений формы не обнаружися.

9.4 Эффект Допплера

Эффект Допплера – эффект изменения частоты сигнала, когда источник и приемник движутся друг относительно друга. В повседневной жизни его легко наблюдать, когда мимо наблюдателся проносится гудящий поезд и частота принимаемых звуковых волн менятся в зависимости от того, приближается поезд или удаляется.

Для рассмотрения релятивистского эффекта рассмотрим источник, который движется со скоростью V по направлению к приемнике и посылает сигналы через однаковые промежутки времени T_0 по собственным часам. Вычислим интервалы T, через которые премник эти сигналы принимает. Рассмотрим излучение в системе отсчета неподвижного приемника. Если первый сигнал испущен в момент t_0,когда источник находился на расстоянии L от приемника, то этот сигнал будет зарегистрирован через $t_1 = t_0 + L/c$. Допустим, второй сигнал был испущен в момент $t_0 + T_1$ и источник находился при этом на расстоянии $L - VT_1$, так что приемник зарегистрирует это сигнал в момент $t_2 = t_0 + T_1 + (L - VT_1)/c$. Тогда промежуток между принимаемыми сигналами будет $T = t_2 - t_1 = T_1(1 - V/c)$. Промежуток T_1 между испукаемыми сигналами в системе отсчета приемника и промежуток T_0 связаны уже выведенной формулой замедления времени: $T_0 = T_1\sqrt{1 - V^2/c^2}$. Тогда период, который будет регистрировать приемник равен

$$T = T_1(1 - V/c) = T_0\frac{1 - V/c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = T_0\sqrt{\frac{1 - V/c}{1 + V/c}} \tag{108}$$

Если бы источник удаляется от приемника, то в последней формуле нужно поменять знак у скорости.

Хорошей иллюстрацией того, как можно было бы воспринимать окружающие предметы, если бы скорость света была бы сравнимой с масштабами повседневных скоростей, является игра, созданная в Массачусетском технологическом институте. Несмотря на то, что форма предметов не меняется, воспринимаемое излучение меняет свою частоту, то есть, цвет:

[http://gamelab.mit.edu/games/a-slower-speed-of-light/]

9.5 Интервал

В обычном евклидовом пространстве расстояния между точками измеряются с помощью теоремы Пифагора:

$$\Delta l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2} \tag{109}$$

Оно не изменяется при переходе от одной инерциальной системе координат к другой. В четрехмерном пространстве-времени оказывается, что расстояние между событиями нужно измерять как

$$\Delta s = \sqrt{(c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2} \tag{110}$$

так что в любой инерциальной системе отсчета эта величина сохраняется. Это факт следует из преобразования Лоренца. Например, при движении систем K и K' друг относительно друга со скоростью V вдоль Ox и $O'x'$:

$$(\Delta s')^2 = (c\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 - (\Delta y')^2 - (\Delta z')^2 \tag{111}$$

$$= \left(c\frac{\Delta t - \left(V/c^2\right)\Delta x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\right)^2 - \left(\frac{\Delta x - V\Delta t}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\right)^2 - (\Delta y')^2 - (\Delta z')^2 \tag{112}$$

$$= \frac{(c\Delta t)^2 + \left(V/c^2\right)^2 (\Delta x)^2 - 2V\Delta x\Delta t}{1 - V^2/c^2} - \frac{(\Delta x)^2 - V^2/c^2\,(c\Delta t)^2 - 2V\Delta x\Delta t}{1 - V^2/c^2} - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 \tag{113}$$

$$= \frac{(c\Delta t)^2\left(1 - V^2/c^2\right) - (\Delta x)^2\left(1 - V^2/c^2\right)}{1 - V^2/c^2} - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 = (\Delta s)^2 \tag{114}$$

Говорят, что интервал инвариантен относительно преобразования Лоренца.

9.6 Импульс и энергия

Чтобы правильно записать релятивистский импульс материальной точки, нужной найти такое выражение, которое в пределе v/c будет совпадать с классическим импульсом mv, и удовлетворять закону сохранению импульса при любых скоростях вне зависиомости от того, в какой инерциальной системе рассматривается столкновение. Рассмотрим пример: пусть в системе K две частицы (шара) с одинаковыми массами сближаются с одинаковыми скоростями в плоскости xy и, претерпев упругое столкновение, разлетаются под каким-либо углом.

[рисунок]

Если есть некоторая система отсчета, движущаяся вдоль оси Ox, то скорость, измеренная вдоль оси Oy будет вообще говоря разной в засисмости от скорости этой системы отсчета. Поскольку импульс должен сохраняться в проекции на обе оси, для определения импульса нужно использовать величины, которые не будут зависеть от того, в какой системе отсчета рассматривается столкновение. При преобразовании Лоренца к системе отсчета, движущейся вдоль оси Ox, как мы уже выяснили, сохраняются смещения по оси Oy и собственное время частицы. Поэтому импульс нужно определить как

$$p_y = m\frac{dy}{d\tau} = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\frac{dy}{dt} = \frac{mv_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{115}$$

$$\boldsymbol{p} = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{116}$$

Как и в классической механике таким образом определенный импульс будет сохраняться для замкнутой системы во всех инерциальных системах отсчета.

Чтобы найти выражение для энергии в релятивистском случае запишем мощность по ускорению материальной точки:

$$\frac{dA}{dt} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{v}\frac{d}{dt}\left(\frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) \tag{117}$$

$$= \boldsymbol{v}\left(m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + mv^2\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) = \frac{mv\dfrac{dv}{dt}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + m\frac{v^2}{c^2}\frac{v\dfrac{dv}{dt}}{(1-v^2/c^2)\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{118}$$

$$= \frac{m}{(1-v^2/c^2)\sqrt{1-v^2/c^2}}v\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) \tag{119}$$

Здесь был использован доказанный в одной из предыдущих лекциях факт, что $\boldsymbol{v}d\boldsymbol{v} = vdv$. Поскольку работа идет на изменение кинетической энергии, то после интегрирования получаем:

$$K = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + const \tag{120}$$

При нулевой скорости кинетическая энергия также должна быть равна нулю, поэтому

$$K = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - mc^2 \tag{121}$$

То есть, полная энергия есть сумма кинетической энергии движения и так называемой энергии покоя mc^2:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = K + mc^2 \tag{122}$$

В пределе малых скоростей получается классическое выражение:

$$K = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - mc^2 \approx mc^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) - mc^2 = \frac{1}{2}mv^2 \tag{123}$$

Выражение для энергии при нулевой скорости $E_0 = mc^2$ показывает запасенную в покое внутреннюю энергию частицы, часть которой может превращаться в кинетическую энергию и обратно. Нужно иметь в виду, что здесь не учитывается потенциальная энергия, и под полной энергией в релятивитсткой механике подразумевается сумма $K + mc^2$.