Билет 1

Кинематика материальной точки

[Теория: http://dx.ua/wNTAE]

Кинематика — наука о движении без выяснения причин этого движения.
Материальная точка — тело, размерами которого можно пренебречь

Движение материальной точки можно описать, задав зависимость координат от времени:

$$x(t), y(t), z(t)$$

Средняя скорость:

$$\boldsymbol{u}_{av} = \frac{\boldsymbol{r}(t_2) - \boldsymbol{r}(t_1)}{\Delta t}$$

Мгновенная скорость материальной точки вычисляется как производная

$$\boldsymbol{u} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$$

Производная по скорости – ускорение:

$$\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{u}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$$

Пространственная кривая $\boldsymbol{r}(t)$ называется траекторией. Годограф скорости – положения концов векторов скорости, отложенных из одной точки. По аналогии со скоростью, касательная к годографу показывает направление ускорения в данный момент. Оказывается, что первой и второй производной достаточно, чтобы полностью описать любые движения материальных точек (второй закон Ньютона будет на следующей лекции)!

Проинтегрируем:

$$\frac{dx}{dt} = \int a dt = at + C_1 \Rightarrow x(t) = \int (at + C_1)\, dt = \frac{1}{2}at^2 + C_1 t + C_2 \Rightarrow C_1 = v_0, C_2 = x_0$$

так что получается известный из школы закон движения. Длина трактории вычисляется как $s = \int u dt$.

Рассмотрим единичные касательный и нормальный вектора в данной точке траектории. Тогда полное ускорение материальной точки

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \frac{d}{dt}(u\vec{\tau}) = \frac{du}{dt}\vec{\tau} + u\frac{d\vec{\tau}}{dt} = a_\tau\vec{\tau} + u\frac{d\vec{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt} = a_\tau\vec{\tau} + u^2\frac{d\vec{\tau}}{ds} = a_\tau\vec{\tau} + \frac{u^2}{R}\vec{n}$$

Ускорения:
Если тело движется по криволинейной траектории, то его скорость направлена по касательной к этой траектории.
Так как направление скорости все время меняется, значит, в таком случае криволинейное движение всегда происходит с ускорением, также, если модуль скорости не меняется.
В большинстве случаев ускорение направлено под некоторым углом к скорости. Составляющую ускорения, которая направлена вдоль скорости, называют тангенциальным ускорением
Тангенциальное (касательное) ускорение. Тангенциальное ускорение описывает степень изменения скорости по модулю:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}$$

Нормальное ускорение a_n – составляющая ускорения, которая направлена к центру кривизны траектории, то есть она является нормалью (перпендикулярна) к скорости. Описывает степень изменения скорости по направлению:

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

где R — радиус кривизны траектории

Полное ускорение $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$

1.7. Нормальное и тангенциальное ускорение при криволинейном движении

Пусть материальная точка движется по криволинейной траектории. Рассмотрим общий случай, когда скорость движения меняется по величине и направлению.

Пусть материальная точка в положении *A* имела скорость $\vec{v}_1$ (рис. 1.9). Через промежуток времени Δt точка перешла в положение *B*, где ее скорость оказалась равной $\vec{v}_2$.

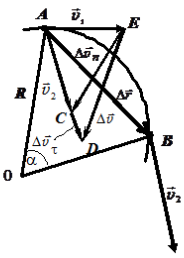


Рис. 1.9

Перенесем вектор $\vec{v}_2$ параллельно самому себе в точку *A* (вектор $\overrightarrow{AD}$) и найдем $\Delta\vec{v}$ равный $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$.

Так как в общем случае скорость может меняться по величине и направлению, то удобно разложить ускорение на две составляющие. Для этого разложим на две составляющие вектор $\Delta\vec{v}$.

Из точки *A* по направлению скорости $\vec{v}_2$ отложим вектор $\overrightarrow{AC}$, по модулю равный вектору $\vec{v}_1$. Очевидно, что вектор $\overrightarrow{CD}$, равный $\Delta\vec{v}_\tau$, характеризует изменение скорости по величине. Вектор $\Delta\vec{v}_n$ характеризует изменение скорости по направлению

$\Delta\vec{v} = \Delta\vec{v}_\tau + \Delta\vec{v}_n$. (1.19)

Полное ускорение

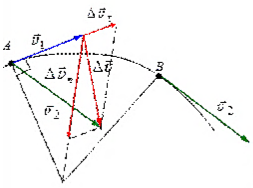
$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}_\tau}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}_n}{\Delta t} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n;$$

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n. \qquad (1.21)$$

Составляющая ускорение $\vec{a}_\tau$ называется ***тангенциальным ускорением.*** **Оно характеризует быстроту изменения скорости по величине.** Его численное значение равно первой производной по времени от модуля скорости:

$a_\tau = \frac{dv}{dt}$ **. (1.22)**

Определим направление вектора $\vec{a}_\tau$. При $\Delta t \to 0$ направление вектора $\Delta\vec{v}_\tau$ стремится к направлению вектора $\vec{v}$ в точке *A* траектории. Значит, вектор $\vec{a}_\tau$ направлен по касательной к траектории (рис. 1.10).



$\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$; $\Delta\vec{v} = \Delta\vec{v}_\tau + \Delta\vec{v}_n$; (1.23) $\vec{a}_\tau \uparrow\uparrow \Delta\vec{v}_\tau$; $\vec{a}_n \uparrow\uparrow \Delta\vec{v}_n$.

Рис. 1.10

Составляющая ускорения $\vec{a}_n$ называется ***нормальным ускорением***. **Оно характеризует быстроту изменения скорости по направлению.** Нормальное ускорение направлено по радиусу к центру кривизны траектории.

Диффузия, закон Фика, температурная зависимость коэффициента диффузии, связь подвижности и коэффициента диффузии.

Диффузия – процесс перераспределения компонент смеси относительно друг друга. Упрощенно это одно из явления переноса – перенос по массе (а перенос импульса связывают с вязкостью, тепла – с теплопроводностью)
Относительная концентрация веществ 1 и 2:

$$c_1 = \frac{n_1}{n}; c_2 = \frac{n_2}{n} \Longrightarrow c_1 + c_2 = 1$$

Коэффициент диффузии – количественная характеристика скорости диффузии, равная количеству вещества, проходящего в единицу времени через участок единичной площади в результате теплового движения молекул при градиенте концентрации, равном единице.

$$D = \frac{1}{3}\langle v\rangle\langle\lambda\rangle \sim \frac{\langle v\rangle}{n\sigma} \sim \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}\frac{1}{\sqrt{2}n\sigma}$$

$\langle v\rangle$ – средняя скорость теплового движения молекул,
$\langle\lambda\rangle$ – средняя длина свободного пробега,
$\sigma = \pi d^2$ – площадь поперечного сечения радиуса d,
n – концентрация
Плотность потока частиц – кол-во частиц, проходящих через единичную площадки в виде времени.
Потоки компонентов определяются законом Фика (можно считать экспериментальным)

$$j_1 = -Dn\frac{dc_1}{dx}; j_2 = -Dn\frac{dc_2}{dx}$$

где D – коэфф. Диффузии $\left[\frac{\text{м}^2}{c}\right]$, n – концентрация
Тогда получается, раз уж $c_1 + c_2 = 1 = const$, то

$$j_1 + j_2 = -Dn\left(\frac{dc_1}{dx} + \frac{dc_2}{dx}\right) = -Dn\overbrace{\frac{d}{dx}(c_1 + c_2)}^{\substack{\text{производная}\\\text{константы}}} = 0$$

Диффузия не приводит к изменению плотности среды, а только меняет относительные концентрации смеси в разных точках.

Билет 2

Движение тел, брошенных под углом к горизонту (дальность полета, высота полета, кривизна траектории)

[Видео: http://dx.ua/nxBUf]
[Теория: http://dx.ua/Cnf2W]

В качестве еще одного примера сложения движений рассмотрим движение тела, брошенного под углом к горизонту:

$$x = x_0 + u_0 t \cos\varphi$$
$$y = y_0 + u_0 t \sin\varphi - \frac{1}{2} g t^2$$

Скорости:

$$u_x = u_0 \cos\varphi$$
$$u_y = u_0 \sin\varphi - gt$$

Условие касания земли:

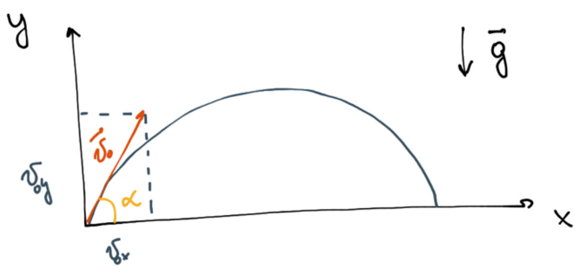
$$y = 0 \Rightarrow u_0 t \sin\varphi - \frac{1}{2} g t^2 = 0 \Rightarrow T = 2\frac{u_0}{g}\sin\varphi$$

Дальность полета и высота

$$L = x(T) = \frac{u_0^2}{g}\sin 2\varphi$$
$$H = y(T/2) = \frac{1}{2}\frac{u_0^2}{g}\sin^2\varphi$$

Максимальная дальность и высота:

$$\frac{dL}{d\varphi} = 2\frac{u_0^2}{g}\cos 2\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \pi/4$$
$$\frac{dH}{d\varphi} = \frac{u_0^2}{2g}\sin 2\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \pi/2$$



$$\begin{cases} v_{ox} = v_0 \cos\alpha \\ v_{oy} = v_0 \sin\alpha - gt \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = v_x t - v_0 t \cos\alpha \\ y = v_{oy} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Фазовые переходы, уравнение Клапейрона-Клаузиуса

Кривая ТР (температура, давление) способна описать состояние т/д системы. На ее графике есть точки перехода из одной фазы в другую. Они называются критическими

Рассмотрим кривую динамического равновесия. При смещении вдоль кривой

$$d\varphi_1(P,T) = d\varphi_2(P,T), d\varphi = -sdT + vdP \Rightarrow v_1 dP - s_1 dT = v_2 dP - s_2 dT \tag{84}$$

$$\Rightarrow \frac{dP}{dT} = \frac{s_1 - s_2}{v_1 - v_2} \tag{85}$$

Здесь v_1, v_2, s_1, s_2 – удельные объемы и энтропии вещества в двух фазах. При изменении фазы выделяется или поглощается тепло. При переходе из газообразного состояния в жидкое выделяется теплота $q_{12} = T(s_2 - s_1)$. В общем случае это удельная теплота фазового превращения. Подставляя удельную теплоту в предыдущее уравнение, получаем уравнение Клапейрона-Клаузиуса:

$$\frac{dP}{dT} = \frac{1}{T}\frac{q_{12}}{v_2 - v_1} \tag{86}$$

Если дальше рассматривать фазовый переход жидкость-пар, то в простейшем случае можно предположить, что удельная теплота не зависит от температуры, пренебречь удельным объемом жидкости по сравнению с удельным объемом пара $v_2 \gg v_1$, и описывать пар с помощью модели идеального газа. Тогда

$$\frac{dP}{dT} \approx \frac{q}{Tv}, Pv = \frac{1}{\mu}RT \Rightarrow \frac{dP}{dT} \approx \frac{\mu q}{RT^2}P \Rightarrow \frac{dP}{P} \approx \frac{\mu q}{R}\frac{dT}{T^2} \Rightarrow \ln P = -\frac{\mu q}{RT} + const \tag{87}$$

или

$$\ln P - \ln P_0 = \frac{\mu q}{R}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right) \Rightarrow P = P_0 \exp\left(\frac{\mu q}{R}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)\right) \tag{88}$$

Это уравнение можно переписать, найдя зависимость плотности от температуры:

$$P = \frac{\rho}{\mu}RT \Rightarrow \rho = \rho_0 \frac{T_0}{T} \exp\left(\frac{\mu q}{R}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)\right) \tag{89}$$

Билет 3

<u>Законы Ньютона, импульс тела и импульс силы, движение центра масс</u>

Свободные тела — тела, на которые не действуют силы. (абстракция)
Сила — мера интенсивности взаимодействия тел, которая проявляется в изменении их количества движения. То есть для поддержания движения сила не требуется, она нужна для изменения состояния движения.

<u>*I закон Ньютона:*</u> Существуют такие инерциальные СО, в которых тело движется равномерно и прямолинейно или покоится, если действие внешних сил равно нулю или скомпенсировано. Такое тело называют свободным.

Галилей: законы механики одинаковы во всех ИСО.
<u>*Преобразование Галилея:*</u>
циальных системах отсчета. Рассмотрим инерциальную систему отсчета и другую систему, движущуюся относительно первой со скоростью $\vec{V}$. Пусть радиус-вектор некоторой материальной точки в исходной система отсчета равен $\vec{r}$, в новой системе отсчета – $\vec{r}'$, а радиус-вектор начала координат новой системы отчета относительно начальной равен $\vec{R} = \vec{R}_0 + \vec{V}t$, $\vec{R}_0 = const$, $\vec{V} = const$. Тогда по правилу сложения векторов

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{R}_0 + \vec{V}t$$

Чтобы найти соотношение скоростей одной и той же материальной точки относительно этих двух систем координат, продифференцируем это равенство:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt} + \vec{V} \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}$$

Это равенство называется преобразованием Галилея. Здесь мы неявно предположили, что время течет одинаково в обеих системах отсчта, то есть, $t = t'$. Это предположение справедливо лишь в нерелятивистском случае. Преобразование можно продифференцировать еще раз и получить равенство ускорений: $\vec{a} = \vec{a}'$.

<u>*Импульс тела:*</u>
Из своих опытов Галилей обнаружил $v \sim Ft$. Масса здесь выступает в виде коэффициента пропорциональности: $v = \frac{1}{m}Ft$
рассмотрим изолированную систему из двух материальных точек. Пусть в результате взаимодействия между ними их скорости изменились. На основании опытных фактов эти скорости связаны как

$$m_1\Delta\vec{u}_1 = -m_2\Delta\vec{u}_2$$

Оказывается, что коэффициенты в этой формуле не зависят от времени воздействия и величины изменения скорости, а характеризуют сами взаимодействующие объекты. Они называются инерционными массами тел, а отношение масс оказывается равно отношению приращений скоростей. Поэтому массы можно измерять относительно друг друга, или относительно эталона. На протяжении длительного времени эталоном массы

Перепишем предыдущую формулу через начальную и конечную скорости первого и второго тела:

$$m_1\vec{u}_1^{\text{нач}} + m_2\vec{u}_2^{\text{нач}} = m_1\vec{u}_1^{\text{кон}} + m_2\vec{u}_2^{\text{кон}}$$

Отсюда можно видеть, что в процессе взаимодействия сохраняется величина произведения массы на скорость – импульс $\vec{p} = m\vec{v}$. То есть, суммарный импульс материальных точек не изменился: $\sum\vec{p} = const$. Это правило можно обобщить на любое другое число материальных точек, или твердых тел, так что получаем закон сохранения импульса: суммарный импульс замкнутой системы материальных (тел) точек постоянен.

Если при столкновении тел они соединяются в более крупные (слипаются, или химически соединяются), либо наоборот раскалываются, то мы можем записать в каких-либо двух инерциальных системах отсчета закон сохранения импульса:

$$m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 = m\vec{u}$$
$$m_1\vec{u}_1' + m_2\vec{u}_2' = m\vec{u}'$$

Согласно закону преобразования Галилея, $\vec{u}_1 - \vec{u}_1' = \vec{u}_2 - \vec{u}_2' = \vec{u} - \vec{u}' = \vec{V}$. Отсюда $(m_1 + m_2)\vec{V} = m\vec{V} \Rightarrow m_1 + m_2 = m$. Это равенство выражает собой аддитивности массы в классической нерелятивистской механике: сумма масс веществ до взаимодействия равно сумме масс веществ после взаимодействия.

II закон Ньютона: $\vec{F} = m\vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

Рассмотренное соотношение, которое получил Галилей, является частным случаем второго закона Ньютона: ускорение, приобретаемое телом прямо пропорционально приложенной силе и сонаправлено с линией действия этой силы. Также этот закон можно переписать через введенное понятие импульса:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{m}\vec{F} \Leftrightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{1}{m}\vec{F}$$

Отсюда видно, что в рамках классической механики любые движения тел описываются дифференциальными уравнениями второго порядка (то есть уравнениями, максимальных порядок производных в который – второй), и производные высших порядков несущественны.

III закон Ньютона: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

Сила действия равна по модулю и противоположна по направлению силе противодействия.

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = const$$

Продифференцируем это равенство

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

Таким образом, получается третий закон Ньютона: силы взаимодействия двух равны по модулю, противоположно направлены и действуют вдоль прямой, соединяющей эти точки. Для всякого действия есть равное по величине и противоположное по направлению противодействие.

Движение центра масс:

Центр масс (инерции) системы мат точек — воображаемая точка, радиус-вектор которой равен

$$\overrightarrow{r_{cm}} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

где $\sum_i m_i$ - суммарная масса.

Продифференцируем:

$$m\vec{v}_{cm} = \sum_i m_i\vec{v}_i = \sum_i \vec{p}_i \Rightarrow m\frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_{ext}$$

Центр масс движется как материальная точка с массой, равной суммарной массе системы, под действием силы, равной сумме всех внешних сил.

Теплопроводность, закон Фурье, температурная зависимость коэффициента теплопроводности

Теплопроводность – одно из явлений переноса. Теплопроводность есть перенос энергии за счет тепла от более нагретого к менее нагретому.

В случае переноса энергии в одном измерении справедлив закон Фурье:

$$\text{Тепловой поток: } q = -\chi\frac{dT}{dx}$$

где χ – коэффициент теплопроводности. Он получается аналогично коэффициенту диффузии: Рассмотрим одномерный перенос через некоторую площадку и учтем, что средняя энергия меняется линейно в малой окрестности площадки:

$$j = \frac{\langle\varepsilon\rangle(x-\lambda)N - \langle\varepsilon\rangle(x+\lambda)N}{\Delta t\Delta S} = \frac{\frac{1}{4}n\langle v\rangle\Delta t\Delta S}{\Delta t\Delta S}\big(\langle\varepsilon\rangle(x-\lambda) - \langle\varepsilon\rangle(x+\lambda)\big) \approx -\frac{1}{4}n\langle v\rangle\lambda\frac{d\langle\varepsilon\rangle}{dx} = -\frac{1}{4}n\langle v\rangle\lambda c_V\frac{dT}{dx}$$

где c_V – теплоемкость при постоянном объеме

$$\chi = \frac{1}{4}n\lambda\langle v\rangle c_V \sim \langle v\rangle \sim \sqrt{\frac{T}{m}}$$

Билет 4

Движение тел с переменной массой

Рассмотрим на примере реактивного движения — движения, при котором часть массы тела выбрасывается для ускорения оставшейся части. Запишем изменение импульса системы "ракета – выхлопные газы" за малый промежуток времени dt:

$$(m + dm)(\vec{v} + d\vec{v}) + dm_{gas}\vec{v}_{gas} - m\vec{v} = \vec{F}dt$$

Раскроем скобки и пренебрежем величиной $dmd\vec{v}$, а также введем скорость вылета газов относительно ракеты $\vec{u} = \vec{v}_{gas} - \vec{v}$. В силу закона сохранения массы $m + m_{gas} = const \Rightarrow dm = -dm_{gas}$. Тогда

$$md\vec{v} + dm\vec{u}_{gas} = \vec{F}dt \Rightarrow m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{u} + \vec{F}$$

Это уравнение показывает, что кроме внешней силы на тело действует реактивная сила $\frac{dm}{dt}\vec{u}$. Это уравнение называется уравнением Мещерского. Теперь для простоты предположим, что на ракету не действуют внешние силы, а ракета движется прямолинейно. Поскольку скорость газа направлена в противоположном направлении движению ракеты, то проекция уравнения на направление движения будет

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{dm}{dt}u \Rightarrow dv = -u\frac{dm}{m} \Rightarrow \int\limits_{v_1}^{v_2} dv = -u\int\limits_{m_1}^{m_2}\frac{dm}{m} \Rightarrow \frac{v_2 - v_1}{u} = -\ln\frac{m_2}{m_1} \Rightarrow m_2 = m_1\exp\left(-\frac{\Delta v}{u}\right)$$

Это формула Циолковского.

Зависимость давления насыщенного пара от температуры, теплоемкость насыщенного пара

Так как $v_{\text{пара}} \gg v_{\text{жидкости}}$ и пар – идеальный газ:
Давление:

$$\frac{dP}{dT} = \frac{L}{Tv_{\text{пара}}}, PV = \nu RT = \frac{m}{\mu}RT \Longrightarrow Pv = \frac{RT}{\mu}, v = \frac{RT}{\mu P}$$

$$\frac{dP}{dT} = \frac{\mu L}{RT^2}P \Longrightarrow \frac{dP}{P} = \frac{\mu L}{R}\frac{dT}{T^2} \Longrightarrow \ln P = \left(-\frac{1}{T}\right)\frac{\mu L}{R} + const$$

$$P = P_0\exp\left(\frac{\mu L}{R}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)\right)$$

Теплоемкость:

$$C \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\delta Q}{dT}, \delta Q = dU + \delta A = dh - VdP$$

Где dh – удельная энтальпия $\frac{U}{m} + \frac{PV}{m}$

$$C = \underbrace{\frac{dh}{dT}}_{*} - \frac{VdP}{dT} = C_P - \frac{L}{T}$$

$* : \frac{dh}{dT} = \frac{U + VdP}{dT} = C_P$

Билет 5

Механическая работа, кинетическая энергия и теорема Кенига

Работы силы:

Работа силы F на перемещение ds есть проекция силы на направление перемещения, умноженная на величину перемещения:

$$A = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Так как этот интеграл берется вдоль траектории движения материальной точки, он называется криволинейным, а работа – это работа силы вдоль кривой. Сила здесь должна рассматриваться как суперпозиция сил, действующих на точку. Поэтому и работу можно разложить на сумму работ каждой силы в отдельности:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i \Rightarrow A = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_S \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{s} = \sum_i \int_S \vec{F}_i \cdot d\vec{s} = \sum_i A_i$$

Рассмотрим работу сил по изменению положения материальной точки и применим второй закон Ньютона, а также учтем, что $d\vec{s} = \vec{v}dt$:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow A = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_S \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \vec{v}dt = \int_S d\vec{p} \cdot \vec{v} = m \int_S \vec{v} \cdot d\vec{v}$$

Чтобы переписать выражение под интагралом рассмотрим определение модуля вектора скорости: $v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$. Продифференцируем это выражение: $2vdv = d\vec{v} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot d\vec{v} = 2\vec{v} \cdot d\vec{v}$. Следовательно, скалярное произведение двух векторов можно заменить на модуль скорости умноженный на приращение модуля скорости. Если за какой-то промежуток времени при движении вдоль траектории скорость изменилась от v_1 до v_2, то

$$A = m \int\limits_{v_1}^{v_2} vdv = \frac{1}{2}mv^2 \Big|_{v_1}^{v_2} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = K_2 - K_1$$

Кинетическая энергия:

Здесь введена величина $K = \dfrac{mv^2}{2}$ – кинетическая энергия материальной точки. Мы получили, что суммарная работа сил при перемещении материальной точки равна приращению кинетической энергии этой материальной точки. Обобщая на систему материальных точек, можно сказать, что суммарная работа **всех** сил, действующих на систему материальных точек равна приращению кинетической энергии этой системы. Здесь учитываются как внешние, так и внутренние силы.

Теорема Кёнига:

Кинетическая энергия зависит от скорости, следовательно, от выбора системы отсчета. Выясним, как она преобразуется при преобразовании системы Галилея от одной инерциальной системы отсчета к другой. Согласно преобразованию Галилея (см. предыдущую лекцию), скорость относительно исходной системы равно скорости в новой системе отсчета плюс относительная скорость новой системы в исходной: $\vec{v} = \vec{v'} + \vec{V}$. Тогда

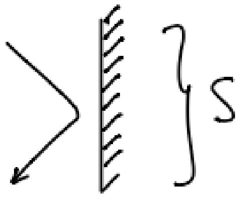
$$v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = \left(\vec{v'} + \vec{V}\right) \cdot \left(\vec{v'} + \vec{V}\right) = v'^2 + V^2 + 2\vec{v'} \cdot \vec{V} \Rightarrow K = K' + \frac{mV^2}{2} + m\left(\vec{v'} \cdot \vec{V}\right) = K' + \frac{mV^2}{2} + \left(\vec{p'} \cdot \vec{V}\right)$$

Это соотношение справедливо для любой системы материальных точек, так как кинетическая энергия, масса и имульс аддитивны. При этом суммарный импульс системы точек выражается через скорость центра масс в новой системе отсчета: $\vec{p'} = \sum_i m_i \vec{v'}_i = m\vec{v'}_{cm}$. Если новая система отсчета есть система отсчета центра масс, то есть $\vec{v'}_{cm} = 0$, то

$$K = K' + \frac{mV_{cm}^2}{2}$$

Это соотношение называется теоремой Кёнига: кинетическая энергия системы материальных точек равна сумме кинетических энергий движения этих точек в системе отчета с началом координат в центре масс, которая движется поступательно со скоростью центра масс, и кинетической энергии всей массы системы, как если бы она была сосредоточена в центре масс и двигалась вместе с ним. Из этой теоремы следует, что кинетическая энергия в СЦМ минимальна.

Связь давления и температуры газа со средней кинетической энергией хаотического движения молекул



$\Delta P_x = 2mv_x$ за время dt до стенки долетают частицы из объёма

$S v_x dt$

И сталкиваются $n S v_x dt$ частиц

$$dp = 2p_x n S v_x dt$$

$$dp = \sum 2p_x n S v_x dt$$

Из них только половина движется к стенке:

$$dp = \sum \left(\frac{1}{2}n\right) 2p_x v_x dt$$

$$p = \frac{F_x}{S}$$

Тогда:

$$P = n\langle p_x v_x \rangle$$

При этом:

$$\langle p_x v_x \rangle = \langle p_y v_y \rangle = \langle p_z v_z \rangle = \frac{1}{3}\langle p v \rangle = \frac{1}{3}\langle m v v \rangle = \frac{1}{3} m \langle v^2 \rangle$$

$$P = \frac{1}{3} n m \langle v^2 \rangle = \frac{1}{3}\rho \langle v^2 \rangle = \frac{2}{3} n \langle E_{кин} \rangle$$

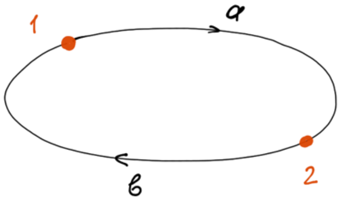
$$\frac{3p}{2n} = \langle E_к \rangle = \frac{3}{2} PV = \frac{3}{2} kT$$

постоянная больцмана

$$p = nkT$$

Билет 6

Консервативные силы, потенциальная энергия, закон сохранения механической энергии



Работа 1→2 и обратно:

$A = A_{1a2} + A_{2в1}$

$A_{2в1} = -A_{1в2}$ $\Rightarrow A = A_{1a2} - A_{1в2}$

т.к. $A_{1a2} = A_{1в2} \Rightarrow A = 0$

Консервативные силы – силы, работа которых зависит только от начального и конечного значений.

$\oint A = 0$

Силы

→ Консервативные

→ Неконсервативные → Диссипативные – силы трения и сопротивления

- Сила $\vec{F}$ всегда противонаправлена вектору $\vec{V}$
- Суммарная работа всех внутренних диссипативных сил в системе – величина всегда отрицательная независимо от системы отсчёта:

$$\boxed{A^{дис.}_{внутр.} < 0}$$

Любая такая сила может быть выражена:

$$\boxed{F = -k(v)V},$$

где V – скорость данного тела относительно др. тела, с которым оно вз-ет. $k(v)$ – положительный коэф., зависящий в общем случае от скорости v

Консервативные силы — силы, работа которых не зависит от траектории, соединяющей начальное и конечное положения материальной точки, а зависят только от этих начального и конечного положений.

Диссипативные силы — силы, при действии которых на механическую систему её полная механическая энергия убывает (то есть диссипирует), переходя в другие, немеханические формы энергии, например, в теплоту. В общем случае диссипативными называются силы, всегда направленные противоположно скоростям частиц, и, следовательно, вызывающие их торможение.

Рассмотрим для примера работу силы тяжести при малом изменении высоты: $dA = mgds\cos\alpha = -mgdz$ (ось Z вертикальна, минус). Тогда, разбивая произвольную траекторию тела на малые участи по высоте, получаем, что полная работа зависит только от разности высот и не зависит от формы траектории:

$$A = -\int_{z_1}^{z_2} mgdz = mg\,(z_1 - z_2)$$

Рассмотрим перемещение по двум разным траекториям:

$$A_{12}^{(1)} = A_{12}^{(2)}$$

Если изменить направление движения по одной из траекторий, то $A_{21}^{(2)} = -A_{12}^{(2)}$. Следовательно, $A_{12}^{(1)} + A_{21}^{(2)} = 0$, то есть, работа консервативных по любому замкнутому контуру равна нулю.

Примером неконсервативной силы является сила трения – это диссипативная сила.

Работу консервативных сил можно рассматривать как изменение некоторой величины – потенциальной энергии, – которая является функцией только координат. Поскольку физически значимым является только относительно изменение такой величины, то точку отсчета потенциальной энергии можно выбирать произвольно. Тогда работа по перемещению из рассматриваемого положения в начало отсчета будет потенциальной энергией:

$$U_1 = A_{10}; U_2 = A_{20} \Rightarrow A_{12} = A_{10} + A_{02} = U_1 - U_2$$

то есть, работа равна убыли потенциальной энергии.

Еще одним примером потенциальной силы является сила упругости: $F = -kx$. Потенциальная энергия деформации

$$U = -\int_x^0 kx dx = \frac{kx^2}{2}$$

[рисунок: пружинка]

Потенциальная энергия:

Закон сохранения механической энергии:

[Галилео. Закон сохранения энергии: http://dx.ua/Y7h5g]
[Видео. Мертвая петля: http://dx.ua/yYkIt]

Закон сохранения энергии — фундаментальный закон природы, установленный эмпирически и заключающийся в том, что *для изолированной физической системы может быть введена скалярная физическая величина, являющаяся функцией параметров системы и называемая энергией, которая сохраняется с течением времени.*

Если сторонние силы отсутствуют или таковы, что не совершают работы в течение интересующего нас времени, то полная механическая энергия частицы в стационарном поле консервативных сил остается постоянной за это время:

$$E = K + U = const$$

Энергии некуда деваться. Она может только переходить из одного состояния в другое

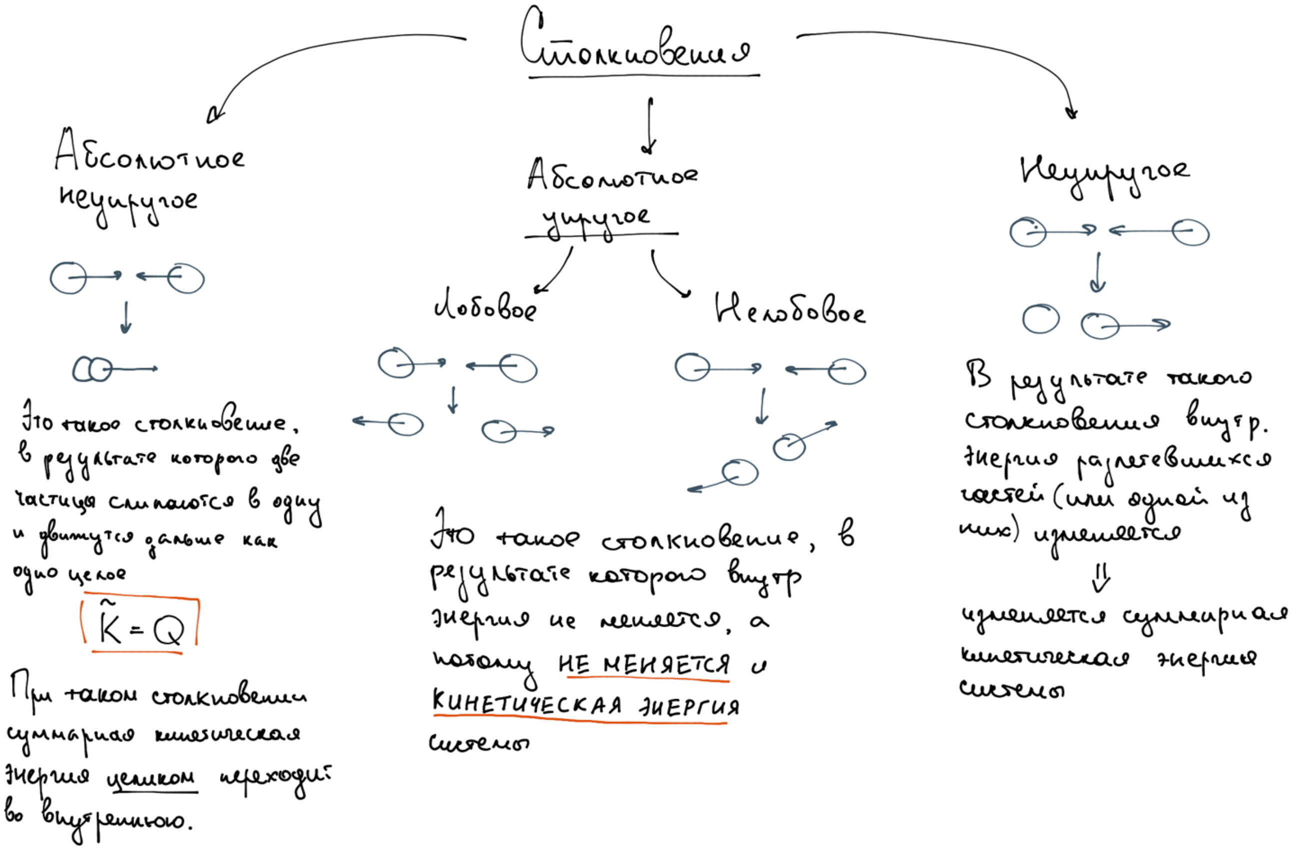
Неравенство Клаузиуса и энтропия, энтропия идеального газа

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0 \Rightarrow \frac{\delta Q}{T} = dS$$

S - степень упорядоченности

Билет 7

<u>Столкновения частиц</u>



[Упругие и неупругие соударения: http://dx.ua/bm47W]

При всех типах столкновений выполняется закон сохранения импульса, если на систему частиц не действуют внешние силы:

$$\sum_i \vec{p}_i^{in} = \sum_i \vec{p}_i^{out}$$

Рассмотрим различные типы соударений двух частиц:

1. Абсолютно упругий центральный удар:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2$$
$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2$$

Кроме того,

$$m_1 \left(v_1^2 - u_1^2\right) = m_2 \left(u_2^2 - v_2^2\right)$$
$$m_1 \left(v_1 - u_1\right) = m_2 \left(u_2 - v_2\right)$$

Откуда

$$v_1 + u_1 = u_2 + v_2$$

Подставим это равенство в закон сохранения импульса:

$$(m_1 + m_2) u_1 = -(m_1 + m_2) v_1 + 2(m_1 v_1 + m_2 v_2) \Rightarrow u_1 = -v_1 + 2V_{cm}, V_{cm} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}; u_2 = -v_2 + 2V_{cm}$$

Если вторая частица до столкновения покоилась, то

$$u_1 = v_1 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}; u_2 = \frac{2 m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

Если при этом масса второй частицы очень велика (столкновение со стенкой)

$$u_1 \approx -v_1; u_2 \approx 0$$

Если сталкиваются две одинаковые частицы, то частицы «обмениваются» скоростями:

$$V_{cm} = \frac{v_1 + v_2}{2} \Rightarrow u_1 = v_2, ; u_2 = v_1$$

[Видео. Маятник Ньютона (шарики): http://dx.ua/0Tj9z]

2. Абсолютно неупругое столкновение:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)\, u \Rightarrow u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

При этом часть начальной кинетической энергии перейдет в работу диссипативных сил:

$$\Delta E = K_1 + K_2 - K = \frac{1}{2}\left[m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 - (m_1 + m_2)\, u^2\right] = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\,(v_1 - v_2)^2$$

Здесь $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ – так называемая приведенная масса.

Тепловые машины, второе начало термодинамики

Тепловая машина – устройство, которое преобразует работу в тепло или наоборот. (Двигатель Стирлинга, который работает от разницы температур (внешнего сгорания), двигатели внутреннего сгорания, холодильники и тд)
Двигатель Стирлинга работает в цикле из двух изохор и двух изотерм

Второе начало термодинамики:
Формулировка Клаузиуса:

- Невозможен круговой процесс, единственным результатом которого был бы переход тепла от более холодного к более нагретому

Формулировка Томпсона:

- Невозможен круговой процесс, единственным результатов которого было бы совершение работы за счет теплоты, взятой у какого-либо одного тела.

Билет 8

Момент импульса L и момент силы M, уравнение динамики вращательного движения, закон сохранения момента импульса

Рассмотрим некоторую точку O. Пусть $\boldsymbol{r}$ – радиус-вектор, отложенный из этой точки в начало некоторого вектора $\boldsymbol{V}$. Моментом $\boldsymbol{V}$ относительно O называется векторное произведение $[\boldsymbol{rV}] \equiv \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{V}$. Свойства момента (следуют из свойств векторного произведения):

1. момент вектора не изменится, если начальную точку $\boldsymbol{V}$ перенести в любую другую точку, расположенную на линии $\boldsymbol{V}$.
2. если $\boldsymbol{r}||\boldsymbol{V}$, то $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{V} = 0$.
3. если $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_1 + \boldsymbol{V}_2$, то $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{V} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{V}_1 + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{V}_2$.

Момент силы, действующей на материальную точку относительно начала (полюса) O: $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$. Момент импульса материальной точки относительно полюса $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$.

Моменты силы и импульса зависят от выбора начала координат. Пусть радиусы материальных точек относительно начальной системы отсчета $\boldsymbol{r}_k$, относительно новой системы отсчета – $\boldsymbol{r}'_k$, радиус-вектор и скорость новой системы относительно старой – $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{V}$

$$\boldsymbol{r}_k = \boldsymbol{r}'_k + \boldsymbol{R}, \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{v}'_k + \boldsymbol{R}$$

$$\boldsymbol{L} = \sum_k m_k \boldsymbol{r}_k \times \boldsymbol{v}_k = \sum_k m_k \boldsymbol{r}'_k \times \boldsymbol{v}'_k + \sum_k m_k \boldsymbol{r}'_k \times \boldsymbol{V} + \sum_k m_k \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{v}'_k + \sum_k m_k \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{V} = \boldsymbol{L}' + M\boldsymbol{R}'_{cm} \times \boldsymbol{V} + \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{p}' + M\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{V}$$

Если начало новой системы отсчета совпадает с центром масс, то суммарный импульс в системе центра масс $\boldsymbol{p}' = 0$, и $\boldsymbol{R}'_{cm} = 0$ по определению. Тогда мы получаем аналог доказанной на предыдущей лекции теоремы Кенига:

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}'_{cm} + M\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{V}_c$$

то есть, момент импульса система материальных точек относительно произвольной точки равен сумме момента импульса относительно центра масс и момента импульса системы как целого, если считать, что вся масса системы сосредоточена в центре масс.

Момент импульса (кинетический момент, угловой момент, орбитальный момент, момент количества движения) характеризует количество вращательного движения. Величина, зависящая от того, сколько массы вращается, как она распределена относительно оси вращения и с какой скоростью происходит вращение

Импульс момента M:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{p}\right] + \left[\vec{r}, \frac{d\vec{p}}{dt}\right] = \left[\vec{r}, \vec{F}\right]$$

Так как $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V} = const$, то $\left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{p}\right] = 0 \implies$ по II закону Ньютона $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$, где F – равнодействующая всех сил.

Закон сохранения момента импульса: если момент внешних сил относительно неподвижной точки О равен 0, то момент импульса системы мат точек остается постоянным во времени отн-но этой точки.

Продифференцируем момент импульса материальной точки:

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{M}$$

так как $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{v}, \boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$, следовательно $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \boldsymbol{p} = \frac{1}{m}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v} = 0$. Мы получили уравнение моментов: производная момента импульса материальной точки относительно некоторого неподвижного начала O равна моменту сил, действующих на эту точку относительно того же начала. Для системы материальных точек имеем:

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \sum_k \frac{d\boldsymbol{L}_k}{dt} = \sum_k \left(\frac{d\boldsymbol{r}_k}{dt} \times \boldsymbol{p}_k + \boldsymbol{r}_k \times \frac{d\boldsymbol{p}_k}{dt}\right) = \sum_k \boldsymbol{r}_k \times \left(\boldsymbol{F}_k^{\text{внеш}} + \sum_{i \neq k} \boldsymbol{F}_{ki}\right)$$

$$= \sum_k \sum_{i \neq k} (\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_i) \times \boldsymbol{F}_{ki} + \sum_k \boldsymbol{r}_k \times \boldsymbol{F}_k^{\text{внеш}} = \sum_k \boldsymbol{r}_k \times \boldsymbol{F}_k^{\text{внеш}} = \boldsymbol{M}^{\text{внеш}}$$

так как $(\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_i) || \boldsymbol{F}_{ki}$ по третьему закону Ньютона. То есть, производная момента импульса системы материальных точек относительно некоторого неподвижного начала O равна геометрической сумме моментов всех ***внешних*** сил относительно того же начала.

[Закон сохранения момента импульса: http://dx.ua/Dbs6s]

Газ Ван-дер-Ваальса, изотермы

Идея вывода уравнения состояния неидеального газа состоит в том, как «поправить» уравнение сосотояния идеального газа, учтя межмолекулярные взаимодействия.

Сначала учтем отталкивание молекул, находящихся очень близко друг к другу. Примем упрощение, что частицы газа являются твердыми шариками радиуса r объема $V_0 = 4\pi r^3/3$, так что их центры не могут сблизиться на расстояния меньшее $2r$. Для каждой пары таких частиц запрещенный объем, в котором не может находиться каждая из них будет определяться сферой радиуса $2r$, а средний запрещенный объем, приходящийся на одну частицу из пары будет в два раза меньше: $V_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi\,(2r)^3\right) = 4V_0$. Если в объеме V содержится ν молей газа, то эффективно объем, занимаемый газом уменьшается на величину $V - \nu b$, $b = 4N_A V_0$.

Притяжение молекул на дальних расстояниях приводит к уменьшению давления на стенку сосуда. На молекулы, находящиеся у стенки, действует нескомпенсированная сила со стороны остальных молекул, направленная от стенки. Это приводит к уменьшению импульса, который молекулы передают стенке при стоknовении с ней, а значит, к уменьшению давления. Сила, действующая на одну молекулу, пропорциональна плотности числа частиц n. Так как полное число молекул, сталкивающихся со стенкой также пропорционально n, то уменьшение давления поропорционально квардату плостности $\Delta P \sim n^2$. Так как $n = \nu N_A/V$, можно записать поправку к давлению как

$$\Delta P = a\frac{\nu^2}{V^2}$$

где a – некотороая постоянная, характеризующая газ. Тогда

$$P = \frac{\nu RT}{V - \nu b} - \Delta P = \frac{\nu RT}{V - \nu b} - a\frac{\nu^2}{V^2} \Rightarrow \left(P + a\frac{\nu^2}{V^2}\right)(V - \nu b) = \nu RT$$

И для одного моля:

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$$

Изотермы Ван-дер-Ваальса

Билет 9

Момент импульса относительно оси. Вращение относительно движущегося центра.

Моментом импульса относительно неподвижной оси z называется скалярная величина L_z, равная проекции на эту ось вектора момента импульса, определенного относительно произвольной точки 0 данной оси. Значение момента импульса L_z не зависит от положения точки 0 на оси z.
При вращении абсолютно твердого тела вокруг неподвижной оси каждая отдельная точка тела движется по окружности постоянного радиуса r_i с некоторой скоростью v_i. Скорость v_i и импульс m_iv_i перпендикулярны этому радиусу, т.е. радиус является плечом вектора m_iv_i. Поэтому можно записать, что момент импульса отдельной точки относительно оси z равен $L_i = m_iv_ir_i$

$$L_z = mvr = I\omega = m\omega r^2$$

$$L_z = [\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}]_z = \left[(\boldsymbol{r}_{||} + \boldsymbol{r}_\perp) \times (\boldsymbol{p}_{||} + \boldsymbol{p}_\perp)\right]_z = [\boldsymbol{r}_\perp \times \boldsymbol{p}_\perp]_z = r_\perp p_\perp \sin\varphi$$

где $r = R\sin\theta$, а вектора разложены на составляющие параллельные и перпендикулярные оси z.
Если материальная точка вращается вокруг оси z, то $R = const$, $v = \omega R$, $p = mv = v\omega R$ и

$$L_z = m\omega R^2$$

а уравнение вращательного движения запишется как

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z = RF_\perp \sin\varphi_F = lF_\perp \Rightarrow mR^2\frac{d\omega}{dt} = lF_\perp$$

Здесь l называется плечом силы – кратчайшим расстоянием до линии действия силы.

[Видео с падающим поездом: http://dx.ua/SRhrt] – суть в том, что поезд, падая, закручивается вперед
[Видео с прыжками на качелях: http://dx.ua/T1MA3]

Вращение вокруг движущегося центра:

Пусть теперь начало системы отсчета движется с некоторой скоростью $\boldsymbol{V}_O$. $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$, где $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ – в лабораторной системе отсчета.

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{V}_O) \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{M} = \boldsymbol{M} - \boldsymbol{V}_O \times \boldsymbol{p}$$

Здесь $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ – относительная скорость материальной точки. Для системы материальных точек

$$\boldsymbol{L} = \sum_k \boldsymbol{r}_k \times \boldsymbol{p}_k, \boldsymbol{M} = \sum_k \boldsymbol{r}_k \times \boldsymbol{F}_k, \boldsymbol{p} = \sum_k m_k\boldsymbol{v}_k$$

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \sum_k \left(\frac{d\boldsymbol{r}_k}{dt} \times \boldsymbol{p}_k + \boldsymbol{r}_k \times \frac{d\boldsymbol{p}_k}{dt}\right) = \sum_k (\boldsymbol{v}_k - \boldsymbol{V}_O) \times \boldsymbol{p}_k + \boldsymbol{M}_{ext} = \boldsymbol{M} - \boldsymbol{V}_O \times \boldsymbol{p}$$

Тогда, если движущаяся система отсчета – система центра масс, то есть $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}_c = \left(\sum_k m_k\right)\boldsymbol{v}_c$, то $\boldsymbol{V}_O \times \boldsymbol{p} = \boldsymbol{v}_c \times m\boldsymbol{v}_c = 0$, и уравнение вращательного движения принимает тот же вид, что и в случае неподвижного центра:

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{M}$$

Переход жидкость-пар для газа Ван-дер-Ваальса, равновесие фаз и правило Максвелла

Билет 10

Движение в гравитационном поле, законы Кеплера, траектории небесных тел

Движение в гравитационном поле:

Сила гравитации является частным случаем центральной силы:

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}, \boldsymbol{F} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

Гравитационная постоянная есть $\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$. Гравитационным полем называется область пространства, где в любой точке на помещенные туда тело действует сила гравитации. Напряженность гравитационного поля:

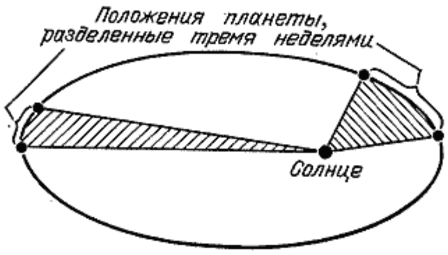
$$\boldsymbol{g} = \frac{\boldsymbol{F}}{m_2} = -\gamma \frac{m_1}{r^2} \frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

Если имеется несколько притягивающих центров (например, задача о полете спутника в Солнечной системе), то

$$\boldsymbol{g} = \sum_k \boldsymbol{g}_k = -\gamma \sum_k \frac{m_k}{r_k^2} \frac{\boldsymbol{r}_k}{r_k}$$

Первый закон Кеплера. Каждая планета (мат точка) движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце (притягивающий центр).

Второй закон Кеплера (закон равных площадей). Радиус-вектор планеты за равные промежутки времени описывает равновеликие площади. Другая формулировка этого закона: *секториальная скорость планеты постоянна.*



Третий закон Кеплера. Квадраты периодов обращений планет вокруг Солнца пропорциональны кубам *больших полуосей* их эллиптических орбит.

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$

Что то же самое, что и $\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3} = \cdots$ Квадраты периодов обращения планет относятся как кубы больших полуосей эллиптических орбит, по которым планеты движутся вокруг Солнца.

На самом деле в третий закон Келера еще входят массы тел. Это уточнение сделал Ньютон:

$$\frac{T_1^2(M + m_1)}{T_2^2(M + m_2)} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$

Где M – масса Солнца, m_1, m_2 – массы небесных тел

Третий закон Кеплера можно также выразить как зависимость между периодом T обращения по орбите тела с массой M и большой полуосью орбиты a (G – гравитационная постоянная):

$$\frac{a^3}{T^2(M + M_2)} = (\frac{G}{4\pi})^2$$

Здесь необходимо сделать следующее замечание. Для простоты часто говорится, что одно тело обращается вокруг другого, но это справедливо только для случая, когда масса первого тела пренебрежимо мала по сравнению с массой второго (притягивающего центра). Если же массы сравнимы, то следует учитывать и влияние менее массивного тела на более массивное.

[Wiki. Законы Кеплера: http://dx.ua/NfMNK]

Траектории движения тел:
Коротко:
Если полная энергия $E < 0$, то тело движется по замкнутой траектории – эллипсу (финитное движение).
Если полная энергия $E \geq 0$, то тело движется не по замкнутой траектории, а уходит на бесконечность от притягивающего центра.

Почему так:

Закон сохранения импульса:

$$L = mrv_\perp = mr^2\frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow \frac{d\varphi}{dt} = \frac{L}{mr^2}$$

Тогда полная энергия

$$E = \frac{mv^2}{2} - \gamma\frac{mM}{r} = \frac{mv_r^2}{2} + \frac{mv_\perp^2}{2} - \gamma\frac{mM}{r} = \frac{m}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(\frac{L^2}{2mr^2} - \gamma\frac{mM}{r}\right)$$

То есть слагаемое $\frac{L^2}{2mr^2} - \gamma\frac{mM}{r}$ можно рассматривать как эффективную потенциальную энергию. Ее график имеет минимум, и, если полная энергия $E < 0$, то тело движется по замкнутой траектории – эллипсу (финитное движение). Если $E \geq 0$, то движение инфинитное – тело уходит на бесконечность от притягивающего центра.

Термодинамические потенциалы, соотношения Максвелла

$f(P,V,T) = 0$ – функция состояния $\Longrightarrow V = V(P,T)$
Приращение функции по всем переменным: $dV = \underbrace{\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T dP}_{d_1V} + \underbrace{\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dT}_{d_2V}$ – разное приращения V

Возьмем изохорический процесс ($V = const$):

$$\left(\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T dP + \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dT\right)_V = dV = 0;\ \text{Поделим на } dT$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V + \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = 0;\ \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P;\ \text{Поделим на } \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P = -1$$

ТД потенциалы:

U – Внутренняя энергия $U = U(S,V)$	$\delta Q = \delta A + dU$ $TdS = PdV + dU$ $dU = TdS - PdV$ $U = U(S,V)$ $U = \underbrace{\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V}_{T} dS + \underbrace{\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S}_{-P} dV$
F – Свободная энергия $F = F(T,V)$	$F \overset{\text{def}}{=} U - TS$ $dF = dU - SdT - \underbrace{TdS}_{PdV+dU}$ $dF = dU - SdT - PdV - dU$ $dF = -SdT - PdV$ $F = F(T,V)$

	$F = \underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V}_{-S} dT + \underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T}_{-P} dV$
H – Энтальпия $H = H(S, P)$	$H \overset{\text{def}}{=} U + PV$ $dH = \underbrace{dU}_{TdS-PdV} + PdV + VdP$ $dH = TdS - PdV + PdV + VdP$ $dH = TdS + VdP$ $H = H(S, P)$ $H = \underbrace{\left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)_P}_{T} dS + \underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial P}\right)_S}_{V} dP$
G – Потенциал Гиббса $G = G(T, P)$	$G \overset{\text{def}}{=} U - TS + PV$ $dG = \underbrace{dU}_{TdS-PdV} - SdT - TdS + VdP + PdV$ $dG = -SdT + VdP$ $G = G(T, P)$ $dG = \underbrace{\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_P}_{-S} dT + \underbrace{\left(\frac{\partial G}{\partial P}\right)_T}_{V} dP$

$\delta Q = cdT = TdS$, откуда $c_P = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P$ и $c_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V$

Соотношения Максвелла:

Билет 11

<u>**Кинематика твердого тела (преобразование скорости и угловой скорости, плоское движение, мгновенный центр вращения)**</u>

<u>**Внутренняя энергия идеального газа и газа Ван-дер-Ваальса, расширение газа в вакуум**</u>

Билет 12

<u>**Момент инерции**</u>

<u>**Распределение Максвелла**</u>

Билет 13

<u>**Динамика твердого тела, гироскоп**</u>

<u>**Условия термодинамического равновесия, максимальная и полезная работа**</u>

Билет 14

<u>**Колебания материальной точки, комплексное представление колебаний**</u>

<u>**Процесс Джоуля-Томсона**</u>

Билет 15

<u>**Вынужденные колебания, резонанс**</u>

<u>**Термодинамические системы, уравнение состояния, идеальный газ**</u>

Билет 16

Физический маятник, центр качаний, теорема Гюйгенса

Физический маятник – любое твердое тело, которое совершает колебания вокруг некоторой неподвижной точки О.

Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси описывается уравнением

$$\frac{dL}{dt} = M \Rightarrow I_O \frac{d^2\theta}{dt^2} = M$$

где I – момент инерции тела относительно оси

Если движение происходит под действием силы тяжести:

$$\boldsymbol{M} = \int\limits_V \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{g} dm = \left(\int\limits_V \boldsymbol{r} dm\right) \times \boldsymbol{g} = m\boldsymbol{R}_c \times \boldsymbol{g} \Rightarrow M = -mga\sin\theta$$

где R_c – расстояние от оси вращения до центра масс

Уравнение движения для малых углов отклонения:

$$I_O \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mga\sin\theta \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mga}{I_O}\theta = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{mga}{I_O}, T = 2\pi\sqrt{\frac{I_O}{mga}}$$

Центр качания физического маятника — точка на прямой, соединяющей точку подвеса с центром масс, лежащая на расстоянии приведённой длины от оси вращения.

Проводя аналогию с математическим маятником, можно ввести так называемую приведенную длину $l_{\text{пр}} = \frac{I_O}{ma}$. Эта длина показывает, какой длины математический маятник нужно взять с той же массой, что и масса твердого тела, чтобы он совершал колебания с такой же частотой. Подставляя теорему Гюйгенса-Штейнера, получаем

$$l_{\text{пр}} = \frac{1}{ma} I_O = \frac{1}{ma}\left(I_c + ma^2\right) = a + \frac{I_c}{ma} \tag{66}$$

Точка маятника, отстоящая от точки подвеса на расстояние $l_{\text{пр}}$, называется центром качания.

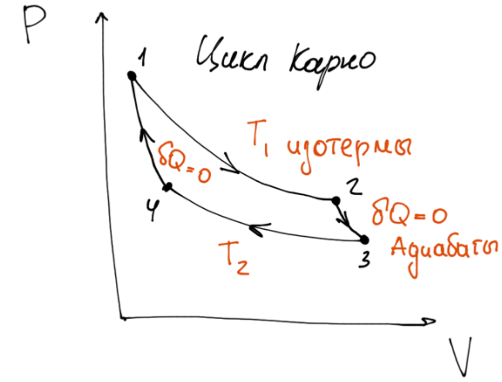
Для центра качания справедлива теорема Гюйгенса: если подвесить физический маятник за центр качания, то период колебаний не изменится, а первоначальная точка подвеса станет новым центром качания. Этот результат получается, если посчитать приведенную длину для новой точки подвеса:

$$l'_{\text{пр}} = a' + \frac{I_c}{ma'}, a + a' = l_{\text{пр}} \Rightarrow a' = l_{\text{пр}} - a = \frac{I_c}{ma}, l'_{\text{пр}} = \frac{I_c}{ma} + \frac{I_c}{m\left(I_c/ma\right)} = \frac{I_c}{ma} + a = l_{\text{пр}} \tag{67}$$

Коэффициент полезного действия, цикл Карно, теоремы Карно

КПД – характеристика, присущая тепловым машинам. Она равна отношению полезной работы к подведенному теплу.

$$\eta = \frac{A}{Q_+} = 1 - \frac{Q_-}{Q_+}$$



Пусть $\nu = 1$ моль

- $1 \to 2$: Изотермическое расширение:

Положительная работа: $A_{12} = RT_1 \ln \frac{V_1}{V_2} = Q_1$

- $2 \to 3$: Адиабатическое расширение:

Работа за счет изменения внутренней энергии

Уравнение политропы: $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma - 1}$

Давление изменится до P_2:

$$A_{23} = \frac{R}{\gamma - 1}(T_1 - T_2)$$

- $3 \to 4$: Изотермическое сжатие:

$$A_{34} = -RT_2 \ln \frac{V_2}{V_1} = -Q_2$$
$$= \quad RT_2 \ln \frac{V_1}{V_2} = A_{12}$$

- $4 \to 1$: Адиабатическое сжатие:

Уравнение адиабаты: $\left(\frac{V_4}{V_1}\right)^{\gamma - 1} = \frac{T_1}{T_2}$

$$A_{41} = -\frac{R}{\gamma - 1}(T_1 - T_2)$$

$$\eta \overset{\text{def}}{=} \frac{\sum A}{Q} = \frac{RT_1 \ln \frac{V_1}{V_2} - RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}}{RT_1 \ln \frac{V_1}{V_2}} = 1 -$$

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

$$\left|\frac{Q_1}{Q_2}\right| = \left|\frac{T_1}{T_2}\right|.$$

$$A = Q_1 - Q_2.$$

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}.$$

Билет 17

Неинерциальные системы отсчета и силы инерции

Поверхностное натяжение, формула Лапласа

Билет 18

Преобразования Лоренца, релятивистское преобразование скорости

Работа в квазистатическом процессе, первое начало термодинамики

Билет 19

Релятивистские эффекты сокращения длины и замедления времени, эффект Допплера

<u>Теплоемкость, теплоемкость идеального газа, связь со степенями свободы, политропические процессы</u>

Билет 20

<u>Энергия и импульс релятивистской частицы, масса покоя</u>

<u>Распределения Максвелла (без вывода) и Больцмана</u>