



ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

МЕХАНИКА

СЛЕПКОВ
АЛЕКСАНДР ИВАНОВИЧ

ФИЗФАК МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН
СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ
СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ.
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ
НА [VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ
ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ,
ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ,
НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ
[VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).

Содержание

1	Лекция 1. Кинематика материальной точки	8
1.1	Основные понятия механики материальной точки. Скорость, ускорение, угловая скорость, угловое ускорение	8
1.2	Кинематика материальной точки и простейших систем	9
2	Лекция 2. Кинематика материальной точки и простейших систем.	
	Кинематическая связь	13
2.1	Кинематика материальной точки. Угловая скорость, угловое ускорение	13
2.2	Уравнение кинематической связи	17
2.3	Связь между скоростями и ускорениями точки в различных системах отсчета	19
3	Лекция 3. Динамика материальной точки. Законы Ньютона	21
3.1	Законы Ньютона. Инерциальные системы отсчета. Преобразования Галилея. 1-й закон Ньютона	23
3.2	Понятия массы, импульса и силы в механике Ньютона	24
3.3	2-й Закон Ньютона. Уравнение движения. Начальные условия	25
3.4	3-й Закон Ньютона	25
3.5	Закон всемирного тяготения	26
4	Лекция 4. Законы сохранения в простейших системах	28
4.1	Закон всемирного тяготения	28
4.2	Закон Гука	29
4.3	Силы трения. Законы для сил сухого и вязкого трения	29
4.4	Изолированные и замкнутые системы тел. Закон сохранения импульса	31
4.5	Движение тел с переменной массой. Уравнение Мещерского. Формула Циолковского	33
5	Лекция 5. Движение тел с переменной массой. Механическая энергия	35
5.1	Движение тел с переменной массой. Уравнение Мещерского. Формула Циолковского	35
5.2	Двигатель ракеты - носитель ВОСТОК	36
5.3	Исследования космоса	37
5.4	Механическая энергия	37

5.5	Кинетическая энергия материальной точки и системы материальных точек	40
5.6	Консервативные силы. Поле сил. Потенциальная энергия материальной точки	41
6	Лекция 6. Закон сохранения энергии. Потенциальная энергия	43
6.1	Потенциальная энергия материальной точки в поле силы тяжести . . .	43
6.2	Потенциальная энергия материальной точки в поле упругих сил	44
6.3	Потенциальная энергия материальной точки в гравитационном (кулоновском) поле	45
6.4	Потенциальная энергия системы материальных точек	45
6.5	Закон сохранения механической энергии	46
6.6	Опыты	48
6.7	Связь потенциальной энергии с силой	48
7	Лекция 7. Силы инерции	50
7.1	Законы Ньютона. Силы в инерциальных системах отсчета	50
7.2	Маятник Фуко. Сила Кориолиса	50
7.3	Отклонение падающих тел к Востоку	51
7.4	Принцип эквивалентности	52
7.5	Основы релятивистской механики. Развитие взглядов на скорость света	52
8	Лекция 8. Основные понятия релятивистской механики	54
8.1	Пространство и время в теории относительности. Развитие взглядов на скорость света	54
8.2	Интерферометр Майкельсона	55
8.3	Преобразования Лоренца	57
8.4	Следствия преобразований Лоренца. Относительность одновременности	59
9	Лекция 9. Специальная теории относительности	61
9.1	Интервал	61
9.2	Сложение скоростей	61
9.3	Уравнение движения	62
9.4	Импульс, энергия и масса в теории относительности	63
10	Лекция 10. Кинематика и динамика твёрдого тела	66
10.1	Импульс, энергия и масса в теории относительности	66

10.2	Кинематика твердого тела. Твердое тело как система материальных точек. Степени свободы	66
10.3	Движение с одной закрепленной точкой и свободное движение твердого тела	67
10.4	Динамика твердого тела. Уравнение моментов. Закон сохранения момента импульса	69
11	Лекция 11. Вращательное движение твёрдого тела	71
11.1	Уравнение моментов. Закон сохранения момента импульса	71
11.2	Основное уравнение вращательного движения. Момент инерции	71
11.3	Тензор инерции	74
12	Лекция 12. Вращение вокруг закреплённой оси. Тензор инерции	77
12.1	Вращение вокруг закрепленной оси. Связь между моментом инерции и компонентами тензора инерции	77
12.2	Свободные оси	79
12.3	Способы расчета моментов инерции и моменты инерции некоторых тел	81
13	Лекция 13. Движение гироскопа. Гироскопические силы	84
13.1	Кинетическая энергия при плоском движении твердого тела	84
13.2	Гироскопы, волчки. Движение гироскопа	85
13.3	Движение гироскопа. Гироскопические силы	86
13.4	Волчки	86
14	Лекция 14. Деформации и напряжения в твёрдых телах	89
14.1	Упругая и остаточная деформации. Закон Гука	89
14.2	Типы деформаций	90
14.3	Коэффициент Пуассона	94
14.4	Связь между модулем Юнга и модулем сдвига	94
15	Лекция 15. Колебания	99
15.1	Свободные колебания систем с одной степенью свободы. Свободные колебания в простейших консервативных системах	99
15.2	Затухающие колебания	102
16	Лекция 16. Затухающие и вынужденные колебания	107
16.1	Затухающие колебания	107

16.2	Вынужденные колебания. Уравнение вынужденных колебаний и его решение	107
16.3	Уравнение вынужденных колебаний и его решение	110
16.4	Резонанс. Амплитудные и фазовые резонансные кривые	111
17	Лекция 17. Биения. Колебания в связанных системах	114
17.1	Соотношение между силами при резонансе	114
17.2	Установление колебаний	114
17.3	Сложение колебаний. Биения	115
17.4	Фигуры Лиссажу	116
17.5	Колебания в связанных системах. Уравнение колебаний для связанных систем	119
17.6	Моды колебаний	120
18	Лекция 18. Нелинейные колебания	122
18.1	Моды колебаний	122
18.2	Нелинейные колебания	124
18.3	Параметрические колебания	125
18.4	Автоколебания	127
19	Лекция 19. Автоколебания. Волны	128
19.1	Колебания. Автоколебания	128
19.2	Волны. Распространение импульса в среде. Бегущие волны. Волновое уравнение	129
19.3	Волны на струне	132
19.4	Продольные волны в стержне	133
19.5	Волны в жидкости и газе	134
20	Лекция 20. Волны	136
20.1	Волны смещений, скоростей, деформаций, напряжений	136
20.2	Плотность и поток энергии в бегущей волне. Вектор Умова	136
20.3	Плотность и поток энергии в бегущей волне. Вектор Умова	137
20.4	Отражение волн, моды колебаний. Явления на границе раздела двух сред. Граничные условия	138
20.5	Стоячие волны, моды колебаний	141
21	Лекция 21. Звук. Элементы акустики	144
21.1	Элементы акустики. Звук и его характеристики	144

21.2 Закон Вебера-Фехнера	145
21.3 Эффект Доплера	146
21.4 Акустические резонаторы	147
21.5 Ударные волны	148
21.6 Закон Паскаля	149
21.7 Основное уравнение гидростатики	150
22 Лекция 22. Основы гидродинамики	153
22.1 Стационарное течение несжимаемой жидкости. Идеальная жидкость. Линии тока. Трубки тока	153
22.2 Уравнение Бернулли	153
22.3 Течение вязкой жидкости. Сила вязкого трения. Формула Пуазейля . .	156
22.4 Ламинарное и турбулентное течение. Обтекание тел жидкостью или газом	158
22.5 Подъемная сила. Формула Жуковского. Эффект Магнуса	159

Лекция 1. Кинематика материальной точки

Основные понятия механики материальной точки.

Скорость, ускорение, угловая скорость, угловое ускорение

Пространство однородно (во всех своих частях) и изотропно (не зависит от направления). Физическое пространство такое, каким его представляет геометрия Евклида (Евклидово пространство).

Гаусс проверял евклидовость на опыте (три горы: Хохенгаген, Броккен, Инзельберг):

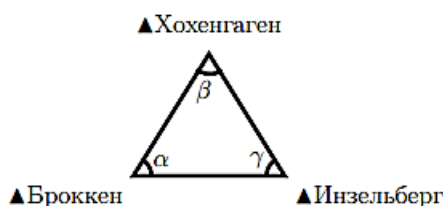


Рис. 1.1. Евклидово пространство

Он измерял внутренние углы треугольника, образованные тремя удаленными горными вершинами.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \pm 2''$$

В диапазоне от 10^{26} до 10^{-35} можно считать, что пространство Евклидово. На Планковской длине пространство неевклидово:

$$l = \sqrt{\frac{\hbar \cdot G}{c^3}}$$

Время — абсолютно (не зависит от тел) и едино (течет одинаково). Решение любой задачи начинается с выбора системы отсчета. Система отсчета — тело отсчета, система координат, часы.

С помощью диска можно посмотреть соотношение двух движений: равномерно прямолинейного и равномерного кругового. Если диск покоится, а мел движется, то при равномерном движении получается только прямая линия. Если диск начинает вращаться, а мел покоится, то получается круговая траектория. Если диск вращается и мел движется, то получается спираль Архимеда. Системы координат:

- декартова – три некомпланарные оси X, Y, Z (правая тройка векторов)
- полярная R, Z, φ

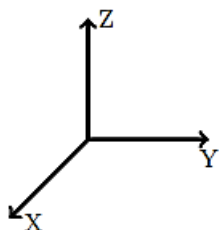


Рис. 1.2. Декартова СК

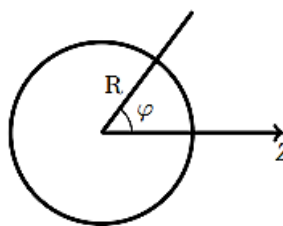


Рис. 1.3. Полярная СК

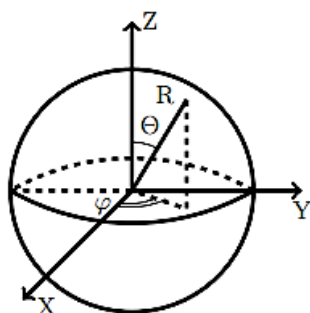


Рис. 1.4. Сферическая СК

- сферическая R , φ , Θ и др.

На каждой оси должен быть нанесен масштаб. Масштаб можно нанести произвольно.

В основе работы часов лежит периодический (колебательный) процесс. Секунда — промежуток времени, в течении которого совершается 9 192 631 770 колебаний электромагнитного излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия-133 (1967 г.).

Метр — длина пути, проходимого в вакууме светом за $\frac{1}{299792428}$ секунды (1983 г.).

Анкерный механизм: из-за трения любой колебательный процесс затухает очень быстро. В анкерном механизме есть резервуар энергии колебаний большого маятника. Колебание маятника происходит с одной и той же частотой. При каждом щелчке потенциальная энергия гири передается маятнику.

Кинематика материальной точки и простейших систем

Материальная точка — физическое понятие для обозначения некоторого тела, размеры которого не существенны в условиях данной задачи.

Если есть система отсчета, в которую входит система координат и часы, то начало радиуса вектора лежит в начале системы координат, а конец в той точке, где на данный момент находится материальная точка.

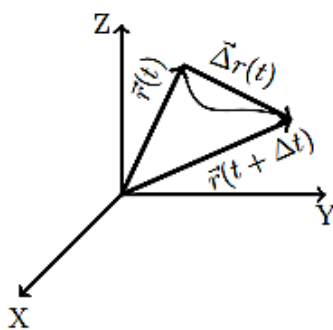


Рис. 1.5. Радиус вектор

Радиус вектор меняется во времени и его можно представить как:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

i, j, k — единичные вектора. Закон движения — зависимость радиус-вектора (координат материальной точки) от времени. Траектория — кривая, по которой движется материальная точка. Путь — длина траектории кривой. Перемещение — вектор, начало которого лежит в начальной точке движения, а конец — в конечной. Разность векторов записывается следующим образом:

$$\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) = \Delta \vec{r}$$

$\Delta \vec{r}$ — перемещение. Скорость — это вектор и записывается как:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \cdot \vec{i} + \frac{dy}{dt} \cdot \vec{j} + \frac{dz}{dt} \cdot \vec{k} = v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j} + v_z \cdot \vec{k}$$

Формула ускорения:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$$

Угловое перемещение — векторная величина. Векторное произведение записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} [\vec{a} \times \vec{b}] &= \vec{c} \\ |\vec{c}| &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi \end{aligned}$$

Формула углового перемещения:

$$d\varphi = \frac{[\vec{r}(t) \times \vec{r}(t + \Delta t)]}{|\vec{r}(t)|^2} \sin \varphi = \varphi$$

Происходит подставление выражения:

$$\vec{r}(t + \Delta t) = \vec{r}(t) + d\vec{r}$$

Тогда:

$$d\vec{\phi} = \frac{[\vec{r}(t) \times \vec{r}(t + \Delta t)]}{|\vec{r}(t)|^2} = \frac{[\vec{r}(t) \times (\vec{r}(t) + d\vec{r})]}{|\vec{r}(t)|^2} = \frac{[\vec{r}(t) \times d\vec{r}]}{|\vec{r}(t)|^2}$$

Таким образом, получается угловая скорость, которая сонаправлена с $d\vec{\phi}$:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\phi}}{dt}$$

Следовательно, угловое ускорение имеет следующий вид:

$$\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

Можно расшифровать связь между скоростью и угловой скоростью:

$$[d\vec{\phi} \times \vec{r}(t)] = -\frac{[\vec{r}(t) \times [\vec{r}(t) \times d\vec{r}]]}{|\vec{r}(t)|^2} = \frac{[[\vec{r}(t) \times d\vec{r}] \times \vec{r}(t)]}{|\vec{r}(t)|^2}$$

Используется двойное векторное произведение:

$$[\vec{a} \times [\vec{b} \times \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

Необходимо воспользоваться следующей записью:

$$d\vec{r} = d\vec{r}_{\perp} + d\vec{r}_{\parallel}$$

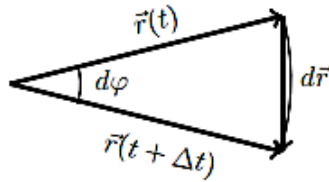


Рис. 1.6. Связь между скоростью и угловой скоростью

$$\begin{aligned} [d\vec{\phi} \times \vec{r}(t)] &= \frac{\vec{r} \cdot (\vec{r} \cdot (d\vec{r}_{\perp} + d\vec{r}_{\parallel}) - (d\vec{r}_{\perp} + d\vec{r}_{\parallel}) \cdot \vec{r} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{r}))}{|\vec{r}|^2} = \\ &= \frac{\vec{r}(\vec{r} \cdot d\vec{r}_{\parallel}) - (d\vec{r}_{\parallel} + d\vec{r}_{\perp})(\vec{r})^2}{|\vec{r}|^2} = -\frac{\vec{r}(t)(\vec{r}(t) \cdot d\vec{r}_{\parallel}) - (d\vec{r}_{\parallel} + d\vec{r}_{\perp})(\vec{r}(t))^2}{|\vec{r}(t)|^2} = \\ &= -\frac{d\vec{r}_{\parallel} \cdot (\vec{r}(t))^2 - (d\vec{r}_{\parallel} + d\vec{r}_{\perp})(\vec{r}(t))^2}{|\vec{r}(t)|^2} = -(d\vec{r}_{\parallel} - d\vec{r}_{\parallel} - d\vec{r}_{\perp}) = d\vec{r}_{\perp} \end{aligned}$$

Таким образом:

$$d\vec{r}_\perp = [d\vec{\phi} \times \vec{r}(t)]$$

Если продифференцировать по времени, то получится:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_\perp = \left[\frac{d\vec{\phi}}{dt} \times \vec{r}(t) \right] = [\vec{\omega} \times \vec{r}(t)]$$

Следовательно, была получена связь между скоростью, которая перпендикулярна \vec{r} , и угловой скоростью.

Время падения 2 тел с одной и той же высоты не зависит от начальных условий. В отверстие под подставкой нужно располагать первое тело, а другое поставить на подставку. При ударе молотком тела одновременно начинают движение. Первое тело будет двигаться вертикально вниз, а второе тело — по параболе. Если тела упали одновременно, то будет слышен один стук.

Лекция 2. Кинематика материальной точки и простейших систем. Кинематическая связь

Кинематика материальной точки. Угловая скорость, угловое ускорение

Воздушная дорожка позволяет силу трения свести к нулю. Если толкнуть тела, то они будут двигаться равномерно прямолинейно и не будут тормозить. Не нужно никаких сил, чтобы тело перемещалось. Если тело толкнули, то оно будет двигаться бесконечно долго и равномерно. Сила нужна, чтобы двигаться с ускорением.

Была найдена связь между скоростью, которая перпендикулярна \vec{r} , и угловой скоростью. Можно расшифровать связь между скоростью и угловой скоростью:

$$[d\vec{\phi} \times \vec{r}(t)] = -\frac{[\vec{r}(t) \times [\vec{r}(t) \times d\vec{r}]]}{|\vec{r}(t)|^2} = \frac{[[\vec{r}(t) \times d\vec{r}] \times \vec{r}(t)]}{|\vec{r}(t)|^2}$$

Используется двойное векторное произведение:

$$[\vec{a} \times [\vec{b} \times \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

Необходимо воспользоваться следующей записью:

$$d\vec{r} = d\vec{r}_\perp + d\vec{r}_\parallel$$

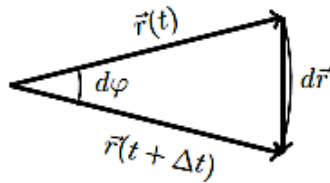


Рис. 2.1. Связь между скоростью и угловой скоростью

$$\begin{aligned} [d\vec{\phi} \times \vec{r}(t)] &= \frac{\vec{r} \cdot (\vec{r} \cdot (d\vec{r}_\perp + d\vec{r}_\parallel)) - (d\vec{r}_\perp + d\vec{r}_\parallel) \cdot \vec{r} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{r})}{|\vec{r}|^2} = \\ &= \frac{\vec{r}(\vec{r} \cdot d\vec{r}_\parallel) - (d\vec{r}_\parallel + d\vec{r}_\perp)(\vec{r})^2}{|\vec{r}|^2} = -\frac{\vec{r}(t)(\vec{r}(t) \cdot d\vec{r}_\parallel) - (d\vec{r}_\parallel + d\vec{r}_\perp)(\vec{r}(t))^2}{|\vec{r}(t)|^2} = \\ &= -\frac{d\vec{r}_\parallel \cdot (\vec{r}(t))^2 - (d\vec{r}_\parallel + d\vec{r}_\perp)(\vec{r}(t))^2}{|\vec{r}(t)|^2} = -(d\vec{r}_\parallel - d\vec{r}_\parallel - d\vec{r}_\perp) = d\vec{r}_\perp \end{aligned}$$

Таким образом:

$$d\vec{r}_\perp = [d\vec{\phi} \times \vec{r}(t)]$$

Если продифференцировать по времени, то получится:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_\perp = \left[\frac{d\vec{\phi}}{dt} \times \vec{r}(t) \right] = [\vec{\omega} \times \vec{r}(t)]$$

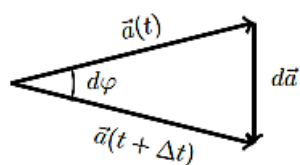


Рис. 2.2. Угловая скорость

$$d\vec{a} = [d\vec{\phi} \times \vec{a}(t)]$$

$$\vec{v}_\perp = [\vec{\omega} \times \vec{r}(t)]$$

Пример 2.1. Рассматривается движение тела (материальной точки) по окружности.

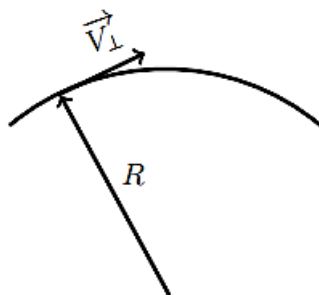


Рис. 2.3. Движение тела по окружности

$$\vec{v}_\perp = [\vec{\omega} \times \vec{r}(t)]$$

$$\vec{v}_\perp \perp \vec{r}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_\perp = [\vec{\omega} \times \vec{r}(t)]$$

Необходимо найти ускорение:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}[\vec{\omega} \times \vec{r}(t)] = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} \right] + \left[\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right] = \\ &= \underbrace{[\vec{\beta} \times \vec{r}]}_{\vec{a}_\tau} + \underbrace{[\vec{\omega} \times \vec{v}]}_{\vec{a}_n}\end{aligned}$$

Таким образом, полное ускорение записывается следующим образом:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$$

Можно определить куда направлены вектора.

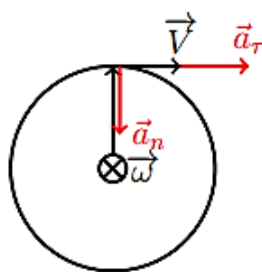


Рис. 2.4. Направление вектора

Окончательное выражение для нормального ускорения записывается следующим образом:

$$\vec{a}_n = [\vec{\omega} \times \vec{v}] = [\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}]] = \underbrace{\vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{r})}_{=0} - \underbrace{\vec{r}(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})}_{=\omega^2} = -\vec{r} \times \omega^2$$

Рассматриваются способы описания движения:

- 1) векторный
- 2) координатный
- 3) естественный

Векторный способ

$$\vec{r} = \vec{A}t + \vec{b} t^2$$

A, B — постоянные векторы.

При дифференцировании можно получить угловую скорость:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{A} + 2\vec{B}t$$

При дифференцировании угловой скорости можно получить ускорение:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 2\vec{B} = \text{const}$$

Если $2\vec{B} = \vec{g}$, то это пример движения поля силы тяжести Земли, когда положительное направление движется вниз. При этом:

$$\vec{A} = \vec{v}_0$$

v_0 — начальная скорость.

Координатный способ — самый распространенный способ описания движения.
Закон движения:

$$x = A \cos \omega t$$

$$y = A \sin \omega t$$

После дифференцировании по времени получается формула для угловой скорости:

$$\vec{v} = \vec{i} \cdot \frac{dx}{dt} + \vec{j} \cdot \frac{dy}{dt} = -A\omega \sin \omega t \cdot \vec{i} + A\omega \cos \omega t \cdot \vec{j}$$

Формула ускорения записывается следующим образом:

$$\vec{a} = \vec{i} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + \vec{j} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = -A\omega^2 \cos \omega t \cdot \vec{i} - A\omega^2 \sin \omega t \cdot \vec{j}$$

Получается движение по окружности:

$$x^2 + y^2 = A^2$$

Естественный способ

Пусть движение происходит по какой-то траектории, вид которой заранее известен. Вводится радиус вписанной окружности (кривизна траектории).

$$Rd\varphi = dl$$

Предполагается, что $d\varphi$ — бесконечно малый. Скорость всегда касательная к траектории, поэтому на равна:

$$\vec{v} = v \cdot \vec{\tau}$$

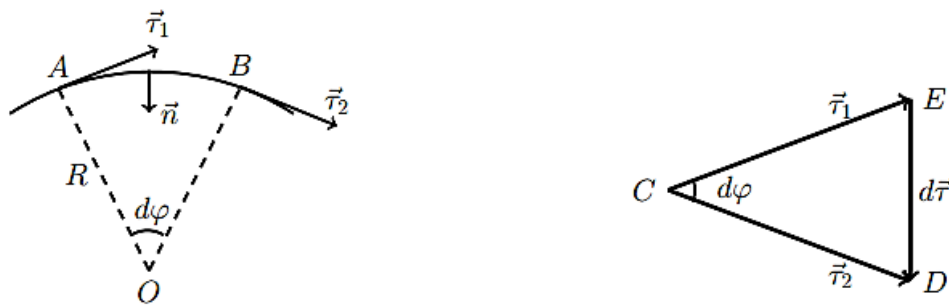


Рис. 2.5. Естественный способ

τ — единичный вектор касательной к траектории. Ускорение записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{dv}{dt} \cdot \vec{\tau} + v \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dt} \\ v \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dt} &= v \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dl} \underbrace{\frac{dl}{dt}}_{=v} = v^2 \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dl} = v^2 \cdot \frac{|\vec{\tau}| \cdot d\varphi \cdot \vec{n}}{R \cdot d\varphi} = v^2 \frac{1}{R} \vec{n}\end{aligned}$$

Было учтено, что:

$$d\vec{\tau} = |\vec{\tau}| \cdot d\varphi \cdot \vec{n}, \quad d\tau \perp R$$

Таким образом:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{\tau} + \frac{v^2}{R} \cdot \vec{n} = a_\tau \vec{\tau} + a_n \vec{n}$$

Уравнение кинематической связи

Очень часто движение тел происходит при наличии некоторых связей, например, движение системы блоков или движение по наклонной поверхности. В простейшем виде уравнение кинематической связи, связывающее кинематические характеристики, записывается следующим образом:

$$f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n,)$$

Способ 1. Использование принципа независимых переменных:

$$\Delta \vec{r}_i = \sum_{k \neq i} \Delta \vec{r}_i^{(k)}$$

Способ 1. Использование постоянства кинематических характеристик связей.

Пример 2.2. *Способ 1.*

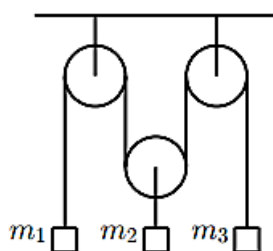


Рис. 2.6. Система из 3 блоков

Блоки невесомы и нити не растяжимы. Начальные координаты: x_1, x_2, x_3 . Координаты через некоторый промежуток времени: x'_1, x'_2, x'_3 . Рассматривается движение по частям. Происходит фиксация m_3 , $\Delta x_1^{(2)}$ — перемещение m_1 за счет m_2 :

$$\Delta x_1^{(2)} = -2 \cdot \Delta x_2$$

Происходит фиксация m_2 в новом положении:

$$\Delta x_1^{(3)} = -1 \cdot \Delta x_3$$

Если разобрать коэффициенты, то получится следующее:

$$\Delta x_1 = \Delta x_1^{(2)} + \Delta x_1^{(3)}$$

$$\Delta x_1 + 2\Delta x_2 + \Delta x_3 = 0$$

$$v_1 + 2v_2 + v_3 = 0$$

$$a_1 + 2a_2 + a_3 = 0$$

Пример 2.3. Способ 2.

Тело скользит по клину, который покоится.

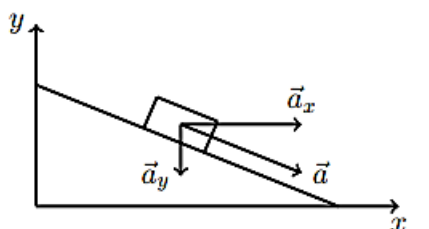


Рис. 2.7. Тело скользит по клину

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-a_y}{a_x}$$

Уравнение кинематической связи для такой системы записывается следующим образом:

$$a_x \operatorname{tg} \alpha + a_y = 0$$

Связь между скоростями и ускорениями точки в различных системах отсчета

Пусть есть система координат k и k' .

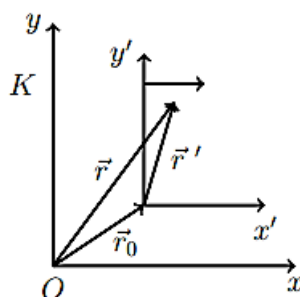


Рис. 2.8. Система координат k и k'

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'$$

Необходимо получить соотношение между скоростями и ускорениями:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}'$$

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}'$$

Пусть есть система отсчета k и система k' , которая вращается относительно системы k .

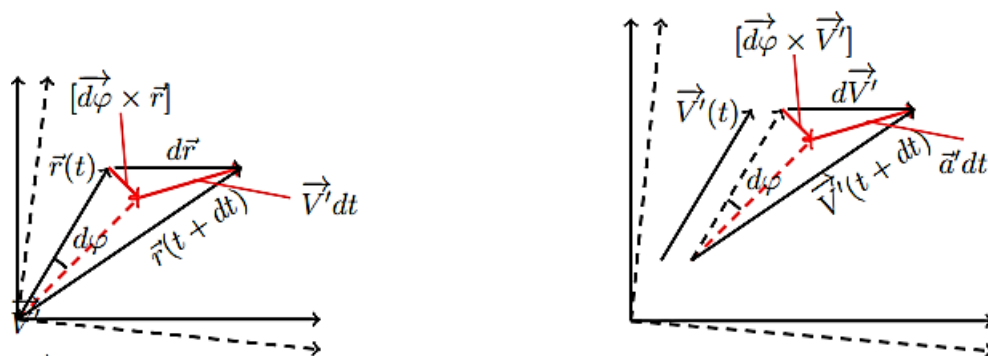


Рис. 2.9. Новая система координат вращается

Вектор \vec{a}' находится в движущейся системе отсчета и двигается вместе с ней.

$$d\vec{r} = [d\vec{\varphi} \times \vec{r}] + \vec{v}' dt$$

Формула для скорости записывается следующим образом:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left[\frac{d\vec{\varphi}}{dt} \times \vec{r} \right] + \vec{v}' = [\vec{\omega} \times \vec{r}] + \vec{v}'$$

$$d\vec{v} = d[\vec{\omega} \times \vec{r}] + d\vec{v}'$$

$$d\vec{v} = \underbrace{\vec{a}' dt + [d\vec{\varphi} \times \vec{v}']}_{d\vec{v}'} + \underbrace{[d\vec{\omega} \times \vec{r}] + [\vec{\omega} \times d\vec{r}]}_{d[\vec{\omega} \times \vec{r}]}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}' + \left[\frac{d\vec{\varphi}}{dt} \times \text{vec} v' \right] + \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} \right] + \left[\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right] = \vec{a}' + [\vec{\omega} \times \vec{v}'] + [\vec{\beta} \times \vec{r}] + [\vec{\omega} \times \vec{v}]$$

Необходимо подставить следующее выражение, чтобы получить формулу ускорения:

$$\vec{v} = \vec{v}' + [\vec{\omega} \times \vec{r}]$$

Таким образом, связь между скоростями и ускорением записывается следующим образом:

$$\vec{a} = \vec{a}' + [\vec{\omega} \times \vec{v}'] + [\vec{\beta} \times \vec{r}] + [\vec{\omega} \times \vec{v}'] + [\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}]]$$

$$\vec{a} = [\vec{\beta} \times \vec{r}] + [\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}]] + 2[\vec{\omega} \times \vec{v}'] + \vec{a}'$$

Если толкнуть тело над поверхностью Земли, то оно движется горизонтально по параболе.

Лекция 3. Динамика материальной точки. Законы Ньютона

Была рассмотрена связь между скоростью и ускорением в разных системах отсчета. Сначала была рассмотрена система k' , которая движется поступательно относительно k .

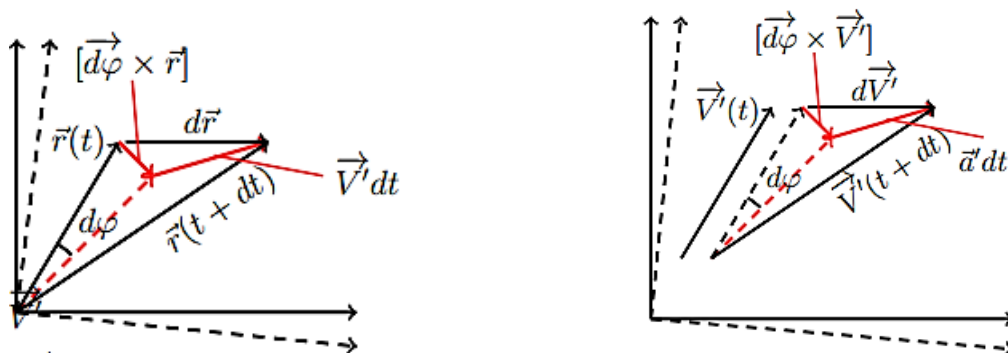


Рис. 3.1. Новая система координат вращается

$$d\vec{r} = \vec{v}' dt + [d\vec{\phi} \times \vec{r}]$$

$$\vec{v} = \vec{v}' + [\vec{\omega} \times \vec{r}]$$

$$d\vec{v} = d\vec{v}' + d([\vec{\omega} \times \vec{r}])$$

$$d\vec{v}' = \vec{a}' dt + [d\vec{\omega} \times \vec{v}']$$

$$\frac{d\vec{v}'}{dt} = \vec{a}' + [\vec{\omega} \times \vec{v}']$$

$$\vec{a} = \vec{\beta} \times \vec{r} + [\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}]] + 2[\vec{\omega} \times \vec{v}'] + \vec{v}'$$

Первый случай

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}'$$

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}'$$

\vec{r} — это радиус вектора материальной точки относительно лабораторной системы отсчета.

\vec{r}_0 — это радиус вектор начало движущийся системы отсчета.

\vec{r}' — это радиус вектор материальной точки относительно движущийся системы отсчета.

Общий случай

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}_s$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_s$$

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}_s$$

Ситуация, когда система S имеет фиксированные оси, а система k' вращается.

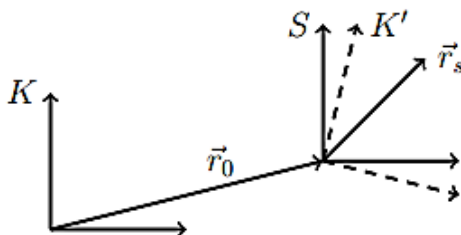


Рис. 3.2. Общий случай

$$\vec{r} = \vec{r}_o + \vec{r}'$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}'$$

$$\vec{a} = \vec{a}_o + \vec{a}'$$

r_s — радиус вектор относительно системы S .

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + [\vec{\omega} \times \vec{r}'] + \vec{v}'$$

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + [\vec{\beta} \times \vec{r}'] + [\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}]] + 2[\vec{\omega} \times \vec{v}'] + \vec{a}'$$

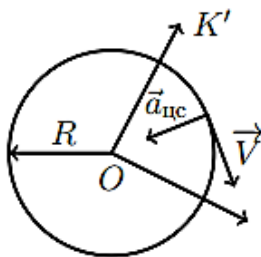
$$\vec{a} = \vec{a}_{\text{пер}} + \vec{a}_{\text{кор}} + \vec{a}'$$

Пример 3.1. Этот пример поясняет появления члена $2[\vec{\omega} \times \vec{v}']$ в формуле ускорения. Пусть есть окружность, система k' вращается с угловой скоростью ω . Радиус окружности R и есть материальная точка, которая движется со скоростью v .

$$a = a_{\text{ус}} = \frac{v^2}{R}$$

Относительно k' материальная точка будет двигаться со скоростью:

$$v' = v - \omega R$$

Рис. 3.3. Окружность с системой k'

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} R$$

Получается следующее ускорение:

$$a = \frac{v^2}{R} = \frac{(v' + \omega R)^2}{R} = \frac{v'^2}{R} + \frac{2\omega R v'}{R} + \frac{\omega^2 R^2}{R} = a' + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega}^2 \times R$$

Законы Ньютона. Инерциальные системы отсчета.

Преобразования Галилея. 1-й закон Ньютона

Закон 1

Всякое тело продолжает удерживаться в своем состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока и поскольку оно не принуждается приложенными силами изменить это состояние. Существуют инерциальные системы отсчета, в них каждое тело покоится или движется равномерно и прямолинейно, если на него не действуют другие тела.

Причина ускорения в этих инерциальных системах отсчета — это взаимодействие тел. Если нет взаимодействия тел, то нет и ускорения. Если относительно этой системы отсчета движется поступательно какая-то другая система отсчета и равномерно с постоянной скоростью, то это новая система отсчета тоже будет инерциальной системой отсчета.

В инерциальных системах отсчета действует преобразование Галилея.

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'$$

$$\vec{r} = \vec{v}t + \vec{r}'$$

$$\begin{cases} x = v_x t + x' \\ y = v_y t + y' \\ z = v_z t + z' \\ t = t' \end{cases}$$

В инерциальных системах отсчета есть инварианты, величины которые не меняются при переходе от одной СО в другую:

- длина предмета;
- Δt — временной интервал;
- a — ускорение не изменяется.

Все механические явления в любых инерциальных системах отсчета происходят одинаково, то есть подчиняются одним и тем же законам.

Понятия массы, импульса и силы в механике Ньютона

Сила — мера взаимодействия тел, векторная величина. При одновременном действии тело не движется, то предполагается, что силы равны и противоположно направлены.

Пружина эталонная ($\Pi_{\text{Э}}$) и сжатие эталонной пружины $\Delta l_{\text{Э}}$ дают вместе силу эталонную $F_{\text{Э}}$.

Пример 3.2. Пусть на тело действуют 2 пружины (F_1) с одной стороны. Меняя угол α можем получить любую силу от 0 до 2.

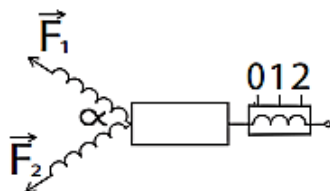


Рис. 3.4. Сила

Масса — мера инертности (скаляр). Масса системы тел равна сумме масс тел:

$$m_{\Sigma} = m_1 + m_2 + m_3$$

Для измерения массы нужно выбрать эталон массы.

Второй закон Ньютона был изначально введен для импульса (векторная физическая величина).

$$\vec{P} = m\vec{v}$$

2-й Закон Ньютона. Уравнение движения. Начальные условия

Закон 2

Изменение количества движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует.

По современной формулировке этот закон записывается следующим образом:

$$\vec{F} = k m \vec{a}$$

F — результирующая всех сил, которые действуют на материальную точку.

m — масса материальной точки.

a — ускорение материальной точки.

k — коэффициент. В системе СИ выбирается:

- m — эталон массы
- t — эталон времени
- l — эталон длины

А сила из второго закона Ньютона так, что $k = 1$.

$$\vec{F} = m \vec{a} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

Если $m = \text{const}$, то:

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \vec{a}$$

3-й Закон Ньютона

Закон 3

Действию всегда есть равное противоположное противодействие, иначе взаимодействия двух тел друг на друга между собой равны и направлены в противоположные стороны.

- 1) Силы возникают парами. Силы приложены к разным телам.
- 2) Силы равны по модулю:

$$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$$

- 3) Силы противоположны:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

- 4) Вдоль одной прямой;
- 5) Одной природы.

В динамику входят 3 закона Ньютона и индивидуальные законы свойства сил (сила Архимеда, закон Гука, сила Кулона и др.).

Закон всемирного тяготения

Три закона Кеплера:

- 1) Каждая планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.
- 2) За равные промежутки времени радиус-вектор, соединяющий Солнце и планету, описывает равные площади.
- 3) Квадраты времен обращений планет относятся как кубы больших полуосей эллиптических орбит, по которым они движутся вокруг Солнца.

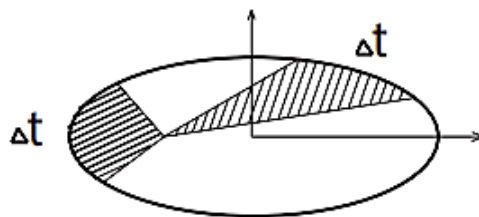


Рис. 3.5. Закон Кеплера

Пусть есть Солнце, и планета движется не по эллипсу, а по окружности.

T_1 — время обращения.

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{R_1^3}{R_2^3}$$

$$\frac{T_1^2}{R_1^3} = \frac{T_2^2}{R_2^3} = \text{const}$$

Необходимо найти ускорение планеты:

$$a = \omega^2 R = \frac{4\pi^2}{T^2} R = \frac{4\pi^2}{\text{const} \cdot R^3} R = \frac{4\pi^2}{\text{const} \cdot R^2}$$

Закон всемирного тяготения выглядит следующим образом:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{R^2}$$

$$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{R^2} \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|}$$

Вблизи поверхности Земли сила равна:

$$F_T = mg \quad g = G \frac{M_3}{R_3^2}$$

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} [\text{см}] \frac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2}$$

Рассматривается инерция тяжелого шара, который подвешен на нити. К нижней нити прикреплен ручка. Если медленно тянуть за нижнюю нить, то обрывается верхняя нить. Но если тянуть за нижнюю нить быстро, то обрывается только нижняя нить.

На весах на одной находятся чаше находятся магниты, а на другой штатив с пробиркой и стакан с водой. Весы находятся в равновесии. Если опустить пустую пробирку в стакан, не касаясь ни дна, ни стен, то видно, что равновесие нарушается. Но если опустить в воду пробирку, которая закреплена к штативу, то равновесие не нарушается.

Лекция 4. Законы сохранения в простейших системах

Закон всемирного тяготения

Закон всемирного тяготения выглядит следующим образом:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{R^2}$$

$$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{R^2} \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|}$$

Вблизи поверхности Земли сила тяжести равна:

$$F_T = mg \quad g = G \frac{M_3}{R_3^2}$$

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} [\text{см}] \frac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2}$$

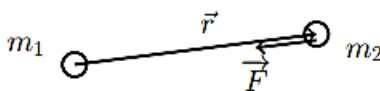


Рис. 4.1. Закон всемирного тяготения

Пример 4.1. Необходимо рассчитать радиус геостационарной орбиты спутника.

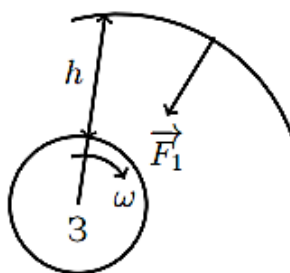


Рис. 4.2. Радиус геостационарной орбиты

Угловая скорость спутника записывается следующим образом:

$$m\omega^2(R+h) = G \frac{mM}{(R+h)^2}$$

Исходя из этого соотношения получается следующее:

$$(R+h)^3 = \frac{GM}{\omega^2} = \frac{GM}{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2}$$

$$\frac{(R+h)^3}{R^3} = \frac{GM}{R^2} \frac{T}{R(2\pi)^2} = g \frac{T^2}{R(2\pi)^2}$$

$$\frac{R+h}{R} = \left(g \frac{T^2}{R(2\pi)^2} \right)^{\frac{1}{3}} \approx 6.6$$

Таким образом, радиус геостационарной орбиты в 6.6 раз больше, чем радиус Земли. Радиус Земли — 6400 км.

$$R+h = 6.6 \cdot 6400 = 42000 \text{ км}$$

$$h = 42000 - 6400 = 35600 \text{ км}$$

Закон Гука

Деформации пропорциональны усилиям, которые их вызывают.

Пример 4.2. Пусть стержень закреплён с одной стороны, а с другой стороны действует сила F .

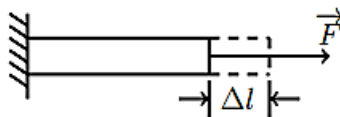


Рис. 4.3. Закон Гука

$$\Delta l = \frac{1}{k} F$$

$$F = k \Delta l$$

Δl — деформация стержня.

Силы трения. Законы для сил сухого и вязкого трения

Сухое тело

Сухое трение — это эффект появления силы сопротивления, действующей вдоль плоскости, вдоль которой соприкасаются эти тела. Она всегда направлена в сторону противоположную перемещению одного тела от другого. Предполагается, что взаимодействует только внешний слой. Касание происходит не во всех точках, а в пятнах касания, которые имеют разные размеры (1 мкм - 50 мкм).

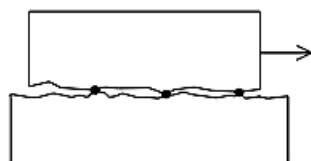


Рис. 4.4. Сухое тело

Если перемещение микроскопическое, то появляется сила трения покоя. Если перемещение не микроскопическое, а заметное, то — сила трения скольжения.

Тела могут быть обработаны по-разному. В зависимости от материала могут быть свои особенности. Трипалогия — наука о трении.

При микроскопических перемещениях появляется сила трения покоя.

$$0 \leq F_{\text{тр покоя}} \leq F_{\text{max}}$$

$$F_{\text{max}} = \mu N$$

μ — коэффициент трения.

$$F_{\text{тр скольжения}} = \mu N$$

Сила трения скольжения направлена против \vec{v} .

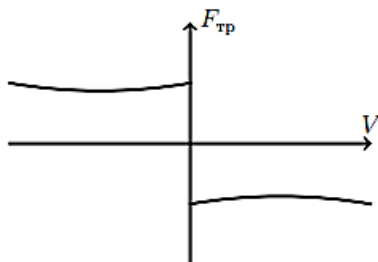


Рис. 4.5. Межмолекулярные связи в пятнах касания

Вязкое (внутреннее) трение

Если скорости относительно малы

$$\vec{F}_{\text{тр}} = -\eta \vec{V}$$

Если скорости средние и большие

$$\vec{F}_{\text{тр}} = -k \vec{v}^2 \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

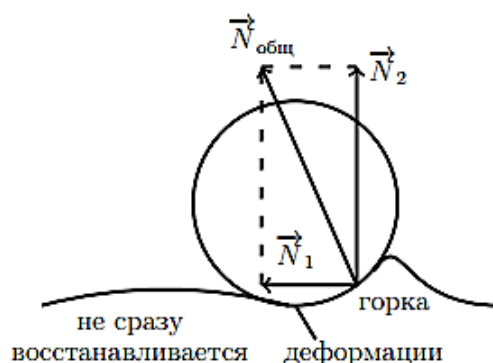


Рис. 4.6. Трение качения

Трение качения

$$N_1 < N_2$$

Тело вкатывается все время на горку. Сила реакции опоры сзади меньше, чем силы реакции опоры спереди.

Изолированные и замкнутые системы тел. Закон сохранения импульса

Замкнутой называется система тел, для которой сумма всех внешних сил равна нулю.

Изолированной называется система тел, на которую вообще не действуют внешние силы. Пусть есть система тел. Пусть есть точки i, j и все материальные точки действуют друг на друга. Для каждой материальной точки второй закон Ньютона можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} m_1 \vec{a}_1 = \vec{F}_1 + \sum_{i=2}^N \vec{f}_{i1} \\ m_2 \vec{a}_2 = \vec{F}_2 + \sum_{i=1, i \neq 2}^N \vec{f}_{i2} \\ \dots\dots\dots \\ m_N \vec{a}_N = \vec{F}_N + \sum_{i=1}^{N-1} \vec{f}_{iN} \end{cases}$$

\vec{F}_i — результирующая внешняя сила, действующая на тело.

\vec{f}_{iN} — внутренние силы системы. В силу 3-его закона Ньютона если есть одна внутренняя сила, то есть парная ей, противоположно направленная:

$$\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i &= \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \\
 \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} &= \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \\
 \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \underbrace{m_i \vec{v}_i}_{\vec{P}_i} &= \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \\
 \frac{d}{dt} \vec{P} &= \sum_{i=1}^N \vec{F}_i
 \end{aligned}$$

Таким образом, можно сформулировать закон сохранения импульса:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i = 0 \Rightarrow \vec{P} = const$$

Суммарный импульс замкнутой системы тел сохраняется неизменным.

Если система незамкнутая, то получается следующее:

$$d\vec{P} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i dt$$

Таким образом, можно сформулировать закон изменения импульса. Изменение импульса системы тел равно суммарному импульсу сил. За большой интервал времени получается импульс внешних сил:

$$\vec{P}_{\text{кон}} - \vec{P}_{\text{нач}} = \vec{N}$$

Теорема 4.1. *Теорема о движении центра масс.*

$$\begin{aligned}
 \vec{v}_i &= \frac{d\vec{r}_i}{dt} \\
 \frac{d^2 \left(\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \right)}{dt^2} &= \sum_{i=1}^N \vec{F}_i
 \end{aligned}$$

Необходимо определить радиус центра масс:

$$\vec{r}_{u,m} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{M}, \quad M = \sum_{i=1}^N m_i$$

Тогда получится следующее:

$$M \frac{d^2 \vec{r}_{u,M}}{dt^2} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$$

$$M \vec{a}_{u,M} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$$

Центр масс системы тел движется так, как двигалась бы материальная точка с массой, равной суммарной массе тел.

Пример 4.3. Определить центр масс системы Земля - Луна, если известно, что масса Земли $M = 5.98 \cdot 10^{24}$ кг, масса Луны $m = 7.34 \cdot 10^{22}$ кг. Расстояние между Землей и Луной — 385000 км.

$$x_{u,M} = \frac{M \cdot 0 + m \cdot R}{M + m} = \frac{7.34 \cdot 10^{22}}{5.98 \cdot 10^{24}} 385000 \approx 4700 \text{ км (от центра Земли)}$$

Движение тел с переменной массой. Уравнение Мещерского. Формула Циолковского

m — масса ракеты

\vec{v} — скорость ракеты.

dm — масса вытекающих газов.

$d\vec{v}$ — изменение скорости ракеты.

\vec{v}_1 — скорость газов относительно Земли.

\vec{F} — результирующая всех внешних сил.

За конечный промежуток времени:

$$\begin{aligned} \vec{P}_{\text{кон}} - \vec{P}_{\text{нач}} &= \vec{F} \Delta t \\ \underbrace{(m - dm)(\vec{v} + d\vec{v}) + dm\vec{v}_1}_{\vec{P}_{\text{кон}}} - \underbrace{m\vec{v}}_{\vec{P}_{\text{нач}}} &= \vec{F} dt \\ m\vec{v} + md\vec{v} - dm\vec{v} - \underbrace{(dm)d\vec{v}}_{=0 \text{ (б. м. } \times \text{ б. м.)}} + dm\vec{v}_1 - m\vec{v} &= \vec{F} dt \\ md\vec{v} + dm(-\vec{v} + \vec{v}_1) &= \vec{F} dt \end{aligned}$$

Скорость газов относительно ракеты записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \vec{v} + \vec{U} \quad \vec{U} = \vec{v}_1 - \vec{v} \\ md\vec{v} + dm\vec{U} &= \vec{F} dt \Leftrightarrow md\vec{v} = -dm\vec{U} + \vec{F} dt \end{aligned}$$

Вводится расход топлива за единицу времени:

$$\mu = \frac{dm}{dt}$$

Тогда:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{dm}{dt} \vec{U} + \vec{F}$$

Таким образом, можно записать уравнение Мещерского:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\mu \vec{U} + \vec{F}$$

Сила, действующая на ракету со стороны вытекающих газов:

$$\vec{F}_{\text{реакт}} = -\mu \vec{U}$$

Рассматривается следующий случай, когда: $\vec{F} = 0$. Тогда остается следующее выражение:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\mu \vec{U}$$

Вектора \vec{v} и \vec{U} коллинеарны.

$$m \frac{dv}{dt} = -\frac{dm}{dt} U \Rightarrow \frac{dv}{U} = -\frac{dm}{m}$$

$$\int_0^{U_K} \frac{dv}{U} = -\int_{m_0}^{m_K} \frac{dm}{m} \Rightarrow \frac{v_K}{U} = -\ln m \Big|_{m_0}^{m_K} = \ln \frac{m_0}{m_K}$$

Следовательно, можно записать уравнение Циолковского:

$$\frac{m_0}{m_K} = e^{\frac{v_K}{U}}$$

Трибометр — инструмент для измерения сил трения. Коэффициент силы трения скольжения не зависит от площади поверхности, соприкасающихся тел, и не зависит от массы.

Рассматривается движения центра массы с помощью дощечки, на которой белым кругом отмечен центр массы. Движение центра массы не зависит от распределения массы в этой системе. Если ударить по центру, то дощечка движется по линии. Если ударить не по центру, то дощечка хоть и вращается, но движется по линии.

Пусть на тележке установлен математический маятник. С помощью этой установки можно показать, что невозможно движение центра масс под действием только внутренних сил.

Реактивная сила возникает под действием вытекающей струи жидкости.

Лекция 5. Движение тел с переменной массой.

Механическая энергия

Движение тел с переменной массой. Уравнение

Мещерского. Формула Циолковского

Пример 5.1. В качестве топлива используют: керосин, этиловый спирт, жидкий водород, гидразин, гептил и др. вещества. В качестве окислителя используют: жидкий кислород, азотная кислота, перекись водорода (гидроксид), жидкий фтор и его соединения и др.

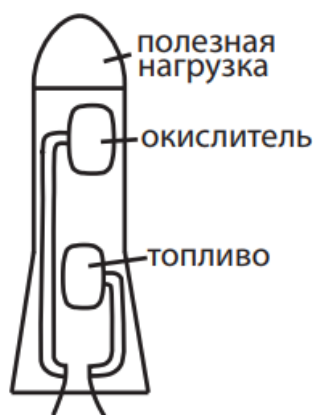


Рис. 5.1. Устройство ракеты

Керосин: $U \sim 2.6$ км/с.

Сгорание водорода в кислороде: $U \sim 4.2$ км/с.

Жидкий фтор в комбинации с водородом и литием: $U \sim 5$ км/с.

$$T \sim \langle E_k \rangle \Rightarrow V \sim \sqrt{T}$$

Скорость вылетающих газов пропорциональна температуре сгорания (жорню).

$$T = 4000 \div 5000 K$$

Формула Циолковского записывается следующим образом:

$$\frac{v_k}{U} = \ln \frac{m_0}{m_k}$$

У ракеты ФАУ получают следующие значения:

$$\frac{m_k}{m_0} = 0,3$$

$$U = 2,6 \frac{\kappa M}{c}$$

$$v_{\kappa} = U \ln \frac{1}{0,3} \approx 3,1 \frac{\kappa M}{c}$$

$$m \frac{\vec{v}_1^2}{R_3} = mg \Rightarrow v_1 = \sqrt{g R_3} = \sqrt{9,8 \cdot 6400 \cdot 10^3} = 7,9 \frac{\kappa M}{c}$$

Так ракета в космос не вылетит, поэтому необходимо создавать многоступенчатые ракеты.

Двигатель ракеты - носитель ВОСТОК

Кислородно-керосиновый 4-камерный жидкостный ракетный двигатель РД-107 с тягой 1 Мн первой ступени ракеты-носителя Восток (ГДЛ-ОКБ, 1954-57):

- рулевые камеры сгорания;
- основные камеры сгорания;
- силовая рама;
- газогенератор;
- теплообменник на турбине.

Ракетные двигатели бывают следующими:

- химические;
- ядерные;
- электрические;
- плазменные.

Пример 5.2. Стартовая масса ракеты Сатурн-5, с помощью которой астронавты (США) впервые высадились на Луну в 1969 году, была равна $M = 3 \cdot 10^6$ кг. Определить минимальный расход топлива для того, чтобы ракета могла оторваться от земли.

$$u \approx 2600 \text{ м/с}$$

$$\mu = \frac{Mg}{u} \approx \frac{3 \cdot 10^6 \cdot 10}{2,6 \cdot 10^3} \approx 1,2 \cdot 10^4 \text{ кг/с}$$

Исследования космоса

В 1988 год был изобретен ракета-носитель. "Энергия" ввела на орбиту советский МКК. Многократный корабль "Буран" впервые в мире осуществил автоматическую посадку на Землю.

1957 — год начала космической эры запуск Первого искусственного спутника Земли.

1961 — год первого в истории полета человека в космос, начало пилотируемой космонавтики.

1959 — первый искусственный спутник Солнца (станция Луна - 1, осуществляющая полет около Луны на расстоянии 6000 км), первое достижение поверхности Луны, первые снимки невидимой стороны Луны.

1968-1972 — пилотируемые полеты астронавтов США на Луну. В 1969 году человек впервые ступил на поверхность Луны.

1973-1978 — работа американских автоматических межпланетных станций, осуществляющих исследования и фотографирования планет Юпитера, Меркурия, Венеры и Марса.

1997-2000 — полеты по программе "Galileo" автоматической межпланетной станции (США), ставшей искусственным спутником планеты Юпитер и осуществляющей исследования и фотосъемки Юпитера и его спутников Европа, Ио, Ганимеда, Каллисто.

2004 — марсоходы *Spint* и *Opportunity* достигли поверхности планеты Марс.

2005 — зонд Гюйгенс достиг поверхности спутника Сатурна Титан.

2008 — аппарат Феникс достиг поверхности Марса.

2011 — станция *Messenger* стала первым искусственным спутником Меркурия.

2012 — аппарат Вояджер-1 вышел в межзвездное пространство.

Механическая энергия

Энергия — запасенная работа. Понятие работы связано с золотым правилом механики.

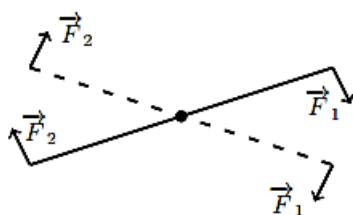


Рис. 5.2. Механическая энергия

$$F_1 \cdot l_1 = F_2 \cdot l_2$$

Работа силы

Если тело находится на гладкой поверхности и на это тело действует сила F , то работа по перемещению этого тела будет равна:

$$A = F \Delta l$$

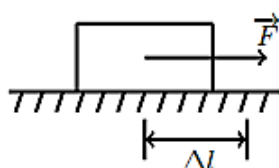


Рис. 5.3. Работа тела 1

Если сила направлена вниз, а тело переместилось на Δl , то работа записывается следующим образом:

$$A = 0$$

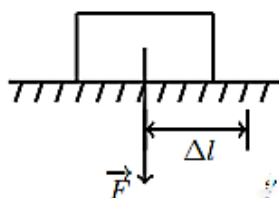


Рис. 5.4. Работа тела 2

Если сила действует на тело под углом α , то работа равна:

$$A = F \Delta l \cos \alpha$$

Пример 5.3. Пусть человек начинает движение с точки 1 и заканчивает в точке 2. Угол между двумя точками — $\Delta\varphi$. R — радиус окружности, по которой человек передвигается. Человек несет санки, действуя на них силой F . Необходимо найти работу силы F .

$$A = F \cdot (2\pi - \Delta\varphi) \cdot R$$

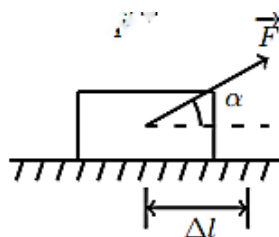
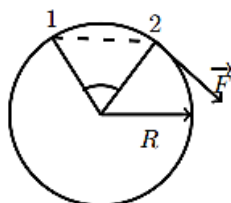
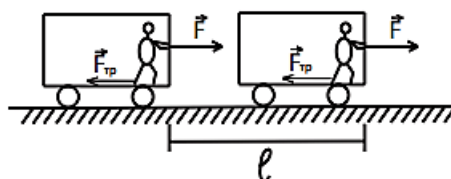


Рис. 5.5. Работа тела 3

Рис. 5.6. Работа силы F

В физике сначала вводится понятие элементарной работы.

Рис. 5.7. Работа силы F

$$A_F = F \cdot l$$

Сила трения действует в обратную сторону:

$$A_{F_{\text{тр}}} = -Fl$$

Тогда работа человека записывается следующим образом:

$$A = A_F + A_{F_{\text{тр}}} = 0$$

Элементарной работой силы \vec{F} на элементарном участке перемещения точки этой силы называется скалярное произведение:

$$\Delta A = (\vec{F} \cdot \Delta \vec{r}) = |\vec{F}| \cdot |\Delta \vec{r}| \cdot \cos \alpha$$

Тогда работа записывается следующим образом:

$$A = \int_1^2 (\vec{F} \cdot \Delta \vec{r})$$

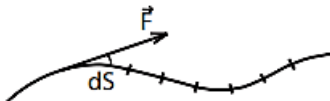


Рис. 5.8. Работа

$$F \cos \alpha = F_s$$

$$A = \int_1^2 F_s dS$$

Таким образом мощность можно записать следующим образом:

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{F_s dS}{dt} = F_s \cdot v$$

Энергия

Энергия — та работа, которую может совершить материальная точка.

Кинетическая энергия материальной точки и системы материальных точек

Кинетическая энергия записывается следующим образом:

$$E_k = \frac{mV^2}{2}$$

Теорема 5.1. Кинетическая энергия равна той работе, которую нужно совершить, чтобы придать материальной точке скорость v . Пусть есть сила F , которая действует на материальную точку. Тогда работа силы F при перемещении из одной точки в другую равна:

$$A = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = \int_1^2 m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = m \int_1^2 d\vec{v} \cdot \vec{v} = m \int_1^2 \vec{v} d\vec{v}$$

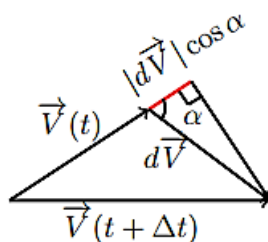


Рис. 5.9. Теорема кинетической энергии

Элементарная работа записывается следующим образом:

$$dA = m(\vec{v} \cdot d\vec{v}) = m\vec{v}|d\vec{v}|\cos\alpha$$

$$dt \rightarrow 0$$

$$d\vec{v} = |d\vec{v}|\cos\alpha$$

Полная работа записывается следующим образом:

$$A = m \int_1^2 \vec{v} d\vec{v} = m \int_1^2 v dv = \left. \frac{mV^2}{2} \right|_1^2 = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}$$

Таким образом:

$$E_k = \frac{mV^2}{2} \Rightarrow E_{K_1} - E_{K_2} = A$$

Консервативные силы. Поле сил. Потенциальная энергия материальной точки

Консервативные силы — такие силы, работа которых не зависит от формы траектории, а определяется только перемещением точки.

Поле сил — область пространства, в которой действуют силы данной природы.

Работа по перемещению из первой точки во вторую выражается через скалярную функцию (потенциальную энергию) U :

$$A_{12} = U_1 - U_2$$

$$A_{13} = U_1 - U_3$$

$$A_{23} = U_2 - U_3$$

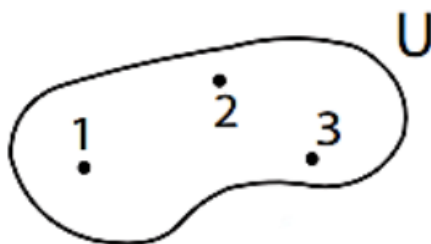


Рис. 5.10. Работа по перемещению

Основное свойство консервативных сил записывается как:

$$A_{12} + A_{23} = A_{13}$$

$$A_{23} = A_{13} - A_{12} = U_1 - U_3 - U_1 + U_2 = U_2 - U_3$$

При выстреле пушки снаряд летит в одну сторону, а пушка отталкивается в другую сторону. Необходимо закапать эфир в пушку и заполнить пушку воздухом и подать ток.

С помощью электромагнита и стального шарика можно наблюдать за переходом потенциальной энергии в кинетическую энергию. Стальной шарик притягивается к электромагниту. Если эту систему отключить, то стальной шарик падает и потенциальная энергия переходит в кинетическую энергию. Внизу находится стекло, от которого отскакивает стальной шарик и снова притягивается к электромагниту.

С помощью горки сложного профиля можно увидеть как потенциальная энергия переходит в кинетическую энергию, и наоборот. На высоте потенциальная энергия, которая переходит в кинетическую энергию при падении. Можно повторить это с горкой, где есть мертвая петля. Верхнюю часть мертвой петли можно убрать. Таким образом, можно доказать, что давление в этой верхней части может быть нулевым. Всегда можно подобрать такую высоту, скатывая с которой шарик может спокойно проходить этот участок как-будто бы участок существует. Если скатывать шарик с большой высоты, то у шарика большая энергия и он ударяется. Если с низкой высоты, то у шарика не хватает энергии.

Лекция 6. Закон сохранения энергии.

Потенциальная энергия

Потенциальная энергия материальной точки в поле силы тяжести

Поле сил — совокупность точек пространства, в которых действует сила. В общем случае это поле может зависеть от координат $F(x, y, z, t)$. Стационарное поле — поле стационарных сил (силы не зависят от t). Работа, которая производится силой по перемещению точки из одной точки в другую, всегда будет зависеть только от разности двух значений скалярной функции. Пусть есть поле сил, зависящая от координат и не зависящая от времени, и в каждой точке задается функция U , соответствующая этой точке.

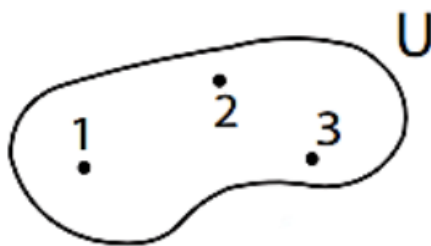


Рис. 6.1. Работа по перемещению

$$A_{12} = U_1 - U_2$$

$$A_{23} = U_2 - U_3$$

Необходимо показать следующее:

$$A_{13} = U_1 - U_3$$

$$A_{12} + A_{23} = A_{13}$$

$$U_1 - U_2 - A_{13} = -A_{23}$$

$$\Delta U = U_3 - U_2 = -A_{23}$$

Таким образом, была введена потенциальная энергия материальной точки в поле сил тяжести. Потенциальная энергия есть величина, которая из конечной точки в начальную, определяется как работа по действующим консервативным силам.

Пример 6.1. Сила тяжести — это стационарное поле консервативных сил.

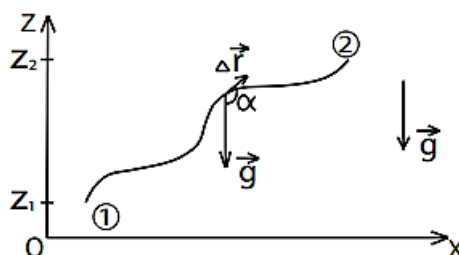


Рис. 6.2. Потенциальная энергия в поле силы тяжести

Работа перемещения из точки 1 в точку 2 записывается следующим образом:

$$\Delta A = m \vec{g} \Delta \vec{r} = m |\vec{g}| |\vec{r}| \cos \alpha = -mg \Delta r \cos \alpha = -mg \Delta z$$

$$A = \int_1^2 m \vec{g} d\vec{r} = - \int_1^2 mg dz = -mg(z_2 - z_1) = U_1 - U_2 = -\Delta U$$

Скалярная функция записывается следующим образом:

$$U = mgz + const$$

Потенциальная энергия материальной точки в поле упругих сил

Пусть закреплена пружина, которую растянули с точки 1 в точку 2. Соответственно, запасенная в ней энергия тоже меняется.

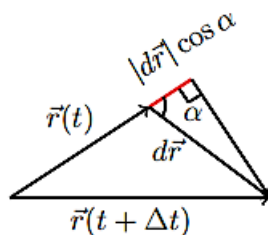


Рис. 6.3. Потенциальная энергия материальной точки в поле упругих сил

Работа упругих сил записывается следующим образом:

$$\vec{F}_{\text{упр}} = dA = -k \vec{r} d\vec{r}$$

$$\vec{r}d\vec{r} = |\vec{r}||d\vec{r}|\cos\alpha = r dr$$

$$A_{12} = -k \int_1^2 \vec{r}d\vec{r} = \int_1^2 r dr = -br \left(\frac{r_2^2}{2} - \frac{r_1^2}{2} \right) = -\frac{kr_2^2}{2} + \frac{kr_1^2}{2} = U_1 - U_2$$

$$U = \frac{kr^2}{2} + const$$

Потенциальная энергия материальной точки в гравитационном (кулоновском) поле

Когда движутся небесные тела, тогда гравитационные силы, которые зависят только от расстояния, могут превращаться в зависящие от времени не стационарные. Тогда их нельзя рассматривать для такого поля. Кулоновская сила записывается следующим образом:

$$\vec{F}_{12} = \alpha \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|^3} \quad \alpha = -Gm_1m_2 \quad \left(\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1q_2 \right)$$

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F}d\vec{r} = \alpha \int_1^2 \frac{1}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} d\vec{r} = \alpha \int_1^2 \frac{1}{r^2} dr = -\alpha \frac{1}{r} \Big|_1^2 = -\frac{\alpha}{r_2} - \left(-\frac{\alpha}{r_1} \right)$$

Таким образом, разность потенциальной энергии записывается следующим образом:

$$A_{12} = -\frac{\alpha}{r_2} - \left(-\frac{\alpha}{r_1} \right) = -\Delta U$$

$$U = \frac{\alpha}{r} + const \quad U(r = \infty) = 0$$

Потенциальная энергия системы материальных точек

Пусть есть система из двух материальных точек, которые перемещаются в 1' и 2'. Необходимо рассматривать работу, совершенную как из 1 в 1', так и из 2 в 2'. На этой основе можно посчитать взаимодействие у этих материальных точек.

$$\vec{F}_{12} = \alpha \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|^3}$$

$$\vec{F}_{21} = \alpha \frac{\vec{r}_{21}}{|\vec{r}_{21}|^3}$$

Выражение работы записывается следующим образом:

$$dA = dA_1 + dA_2 = \vec{F}_{21} \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_2 = \vec{F}_{12}(d\vec{r}_2 - d\vec{r}_1) = \frac{\alpha}{r_{12}^2} dr_{12}$$

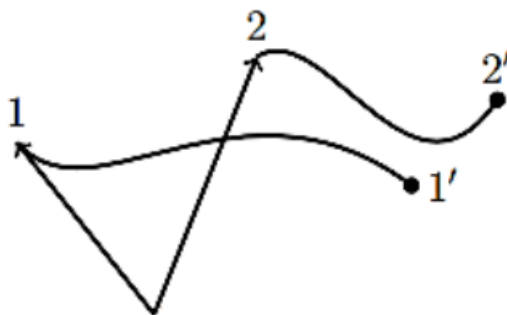


Рис. 6.4. Потенциальная энергия системы материальных точек

$$d\vec{r}_2 = \vec{r}_1(t+dt) - \vec{r}_1(t) \quad d\vec{r}_1 = \vec{r}_2(t+dt) - \vec{r}_2(t)$$

$$d\vec{r}_1 - d\vec{r}_2 = d(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad dr_{12} = dr_{21}$$

$$dA = \alpha \int_{R_{12}}^{R'_{12}} \frac{dr_{12}}{r_{12}^2} = -\alpha \frac{1}{r_{12}} \Big|_{R_{12}}^{R'_{12}} = -\alpha \left(\frac{1}{R'_{12}} - \frac{1}{R_{12}} \right) = -\Delta U$$

$$\int dx = x + const$$

$$U = \frac{\alpha}{r_{12}} + const$$

r_{12} — не вектор, а расстояние между точками.

Потенциальная энергия взаимодействия системы материальных точек:

$$U = \sum_{i=1}^N \sum_{(j \neq i, j > i)}^N U_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{(j \neq i, j = i)}^N U_{ij} \quad j > i$$

Пусть есть 3 точки, которые взаимодействуют друг с другом:

$$U = U_{12} + U_{13} + U_{23} = \frac{1}{2}(U_{12} + U_{13} + U_{23} + U_{21} + U_{31} + U_{32})$$

$$U = \frac{\alpha}{r_{12}} \quad U_{12} = U_{21}$$

Закон сохранения механической энергии

В внутренней системе бывают консервативные и не консервативные силы. Внешние силы бывают консервативными, не консервативными и сторонними. С точки зрения кинетической энергии:

$$A = A_{\text{конс}} + A_{\text{неконс}} = K_2 - K_1$$

Работа консервативных сил:

$$-(U_2 - U_1) = A_{12}$$

$$A_{12} + A_{\text{неконс}} = K_2 - K_1$$

$$-(U_2 - U_1) + A_{\text{неконс}} = K_2 - K_1$$

Таким образом, закон сохранения механической энергии выражается следующим образом:

$$(K_2 + U_2) - (K_1 + U_1) = A_{\text{неконс стор}}$$

Изменение механической силы:

$$E_1 - E_2 = A_{\text{неконс стор}}$$

Пример 6.2. Необходимо вычислить вторую космическую скорость — то есть скорость, которую необходимо придать ракете, чтобы она оторвалась от Земли.

$$K_2 + U_2 - \left(\frac{mv_2^2}{2} - \frac{GM_3}{R_3} \right) = 0$$

$$(0 + 0) - (K_1 + U_1) = 0$$

$$v_2^2 = 2G \frac{M_3}{R_3} = 2gR_3 \Rightarrow v_2 = \sqrt{2}v_1 \approx 11,2 \frac{\text{км}}{\text{с}}$$

Пример 6.3. Необходимо найти уравнение кинематической связи.

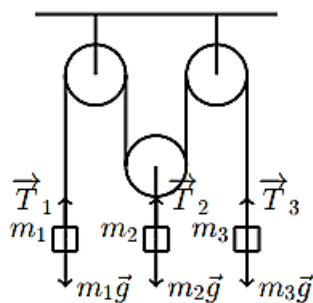


Рис. 6.5. Система блоков

$$m_i a_i = T_i - m_i g \quad | \cdot v_i$$

$$v_i m_i \frac{dv_i}{dt} = (T_i - m_i g) v_i$$

$$d \left(\frac{m_i v_i^2}{2} + m_i g dx_i \right) = T_i dx_i$$

$$d(v_i^2) = 2v_i dv_i \quad v_i dt = dx_i$$

$T_i = \alpha_i T$ — нить невесома и не растяжима.

$$\underbrace{d \sum_{i=1}^N (мех. эн)}_{=0} = \sum_{i=1}^N T_i x_i = dT \sum_{i=1}^N \alpha_i x_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i x_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^N \alpha_i \frac{dx_i}{dt} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^N \alpha_i \frac{d(dx_i)}{dt^2} = 0$$

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i a_i = 0 \Rightarrow a_1 + 2a_2 + a_3 = 0$$

Опыты

Опыт Тимирязева доказал переход одного вида энергии в другой. Имеется система двух блоков. Через них перекинута нить, которая перевязывает гири, одна тяжелая, другая полегче. Если поднять одну гирю на высоту и отпустить, то можно увидеть равноускоренное движение, и гиря падает с возрастающей скоростью, и происходит переход потенциальной энергии в кинетическую. Если включить динамомашину, когда опускается гиря, то загорит лампочка, которая подключена к динамо-машине.

Маятник Галилея. Математический маятник, подвешенный на стойке. На стойке закреплен шпиль, который можно закрепить в различных положениях. Благодаря этому шпильку, он закрепляет колебания математического маятника и в результате чего получается, что радиусы отклонения слева и справа разные, но высота подъема этого маятника будет одна и та же. А это говорит о том, что общая механическая энергия остается постоянной.

Закон сохранения импульса можно увидеть с помощью упругого и неупругого соударения шаров. Подвешены два свинцовых шарика, с помощью которых можно показать неупругий удар, при котором движущийся шарик не отдает скорость неподвижному шару, а начинает колебаться вместе с ним. Упругий удар характеризуется тем, что движущийся шарик налетает на неподвижный, отдает ему скорость, а сам останавливается.

Связь потенциальной энергии с силой

$$dA = F dx$$

$$-dA = dU$$

Если есть одна координата, то:

$$-dU = Fdx$$

В трехмерном пространстве:

$$-dU = F_x \partial x + F_y \partial y + F_z \partial z$$

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

$$\vec{F} = -\vec{i} \cdot \frac{\partial U}{\partial x} - \vec{j} \cdot \frac{\partial U}{\partial y} - \vec{k} \cdot \frac{\partial U}{\partial z} = -\text{grad}U =$$

Изменение введенной функции по различным координатам, определяет координаты силы.

Лекция 7. Силы инерции

Законы Ньютона. Силы в инерциальных системах отсчета

Второй закон Ньютона в не инерциальной системе отсчета выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} m\vec{a}' &= \vec{F} + \vec{F}_{\text{пер}} + \vec{F}_{\text{кор}} \\ F_{\text{пер}} &= -m\vec{a}_{\text{пер}} = -m\vec{a}_0 - m[\vec{\beta} \times \vec{r}'] - m[\vec{\omega}[\vec{\omega} \times \vec{r}']] \\ \vec{F}_{\text{кор}} &= -2m[\vec{\omega} \times \vec{v}'] \end{aligned}$$

Действие сил инерции привело к тому, что Земля изменила форму из-за вращения.

Сила тяжести определяется не только притяжением из закона всемирного тяготения материальных точек, но и так же центробежной силы, силы инерции.

Земля нагревается, воздух поднимается вверх. Если воздух поднимается вверх, то возникает кориолисова сила.

Маятник Фуко. Сила Кориолиса

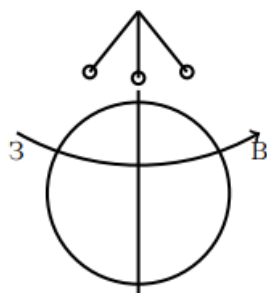


Рис. 7.1. Маятник Фуко

Уравнение движения маятника записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} m\vec{a} &= \vec{F} + \vec{F}_{\text{кор}} + m\vec{g} \\ \vec{F}_{\text{кор}} &= -2m[\vec{\omega} \times \vec{v}] \end{aligned}$$

У угловой скорости вращения Земли выбираются 2 компоненты: горизонтальные и вертикальные.

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= \vec{\omega}_{\text{верт}} + \vec{\omega}_{\text{гор}} \\ \vec{\omega}_{\text{гор}} &= \vec{\omega}_{\parallel} + \vec{\omega}_{\perp} \end{aligned}$$

$$\vec{F}_{\text{кор}} = -2m[\vec{\omega}_{\text{верт}} \times \vec{v}] - 2m[\vec{\omega}_{\parallel} \times \vec{v}] - 2m[\vec{\omega}_{\perp} \times \vec{v}]$$

$\vec{\omega}_{\parallel}$ — угловая скорость, параллельная плоскости колебаний маятника.

Рассматривается система координат, вращающаяся с угловой скоростью $\vec{\omega}_{\text{верт}}$. В этой системе координат составляющая силы кориолиса, приводящая к повороту пропадает.

$$\omega_{\text{верт}} = \omega \times \sin \varphi$$

$$\frac{2\pi}{T_{\Phi}} = \frac{2\pi}{T} \sin \varphi$$

Таким образом, период маятника Фуко записывается следующим образом:

$$T_{\Phi} = \frac{T}{\sin \varphi}$$

Отклонение падающих тел к Востоку

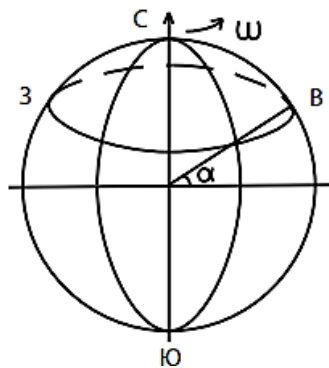


Рис. 7.2. Отклонение падающих тел к Востоку

$$ma_x = (-2m[\vec{\omega} \times \vec{v}])$$

$$v_y = -gt$$

$$v_x = \int_0^t a_x dt = g\omega t^2$$

$$l_0 = \int_0^{\tau} v_x dt = \int_0^{\tau} g\omega t^2 dt = \frac{1}{3}g\omega\tau^3$$

$$\tau = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$l_0 = \frac{2}{3}\omega h \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Принцип эквивалентности

Все физические явления в равномерно ускоренном лифте будут происходить в точности так же, как и в неподвижном лифте, висащем в однородном поле тяжести. Система отсчета, движущаяся с постоянной скоростью вдали от всех масс, эквивалентна системе отсчета свободно падающей в однородном гравитационном поле.

Пример 7.1. Красное смещение. Пусть есть лифт, который движется с ускорением g , направленным вверх. В этом лифте есть источник и приемник. Источник излучает световой сигнал на частоте ω . Световой сигнал проходит расстояние H и принимается приемником. Тогда время движения сигнала записывается следующим образом:

$$\tau = \frac{H}{c}$$

Скорость приемника:

$$v = g\tau$$

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = -\frac{v}{c} = -\frac{g \times \tau}{c} = -\frac{g \times H}{c^2} = -\frac{\Delta U}{c^2}$$

$$U = -GM \left(\frac{1}{R_3 + H} \right)$$

Пример 7.2. Ускорение хода часов на спутниках.

$$\Delta T = T(t + \Delta t) - T(t)$$

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T + \Delta T} - \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi(T - (T + \Delta T))}{T^2} = -\frac{2\pi\Delta T}{T^2} = -\frac{2\pi}{T^2}\Delta T \frac{T}{2\pi} = -\frac{\Delta T}{T}$$

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta U}{c^2} = -\frac{1}{c^2}GM \left(\frac{1}{R_3 + H} - \frac{1}{R_3} \right) = \frac{GM}{c^2} \frac{H}{(R_3 + H)R_3}$$

За сутки:

$$\Delta T = T \frac{GM}{c^2} \frac{H}{(R_3 + H)R_3} \approx 46 \times 10^{-6} \text{ с} = 46 \text{ мкс}$$

Необходимо найти расстояние, которое проходит свет, за 46 мкс.

$$\Delta l = c \times \Delta T = 3 \times 10^8 \times 46 \times 10^{-6} \approx 14 \times 10^3 \text{ м} = 14 \text{ км}$$

Основы релятивистской механики. Развитие взглядов на скорость света

Галилей (1564-1642) — скорость света конечна.

Декарт (1596-1650) — свет это давление, передаваемое через среду с бесконечной скоростью.

Гримальди (1618-1660), Гук (1625-1695), Гюйгенс (1629-1695) волновая точка зрения на свет.

Ньютон (1643-1727) — свет — поток корпускул.

Рёмер (1676), Бредли (1727) — скорость света конечна, $c \sim 2.1 \times 10^8$ м/с.

Опыт Рёмера

$$T_n = t_n + \frac{S_n}{c}$$

$$T_m = t_m + \frac{S_m}{c}$$

$$T_m - T_n = (t_m - t_n) + \frac{S_m - S_n}{c}$$

$$T_m - T_n = T_{\text{ист}} + \tau$$

$$2R_0 = 1.5 \times 10^8 \text{ км}$$

$$\frac{S_m - S_n}{c} = \frac{2R_0}{c} = \tau$$

$$c = \frac{S_m - S_n}{\tau} \approx 2.1 \times 10^8 \text{ м/с}$$

Лекция 8. Основные понятия релятивистской механики

Пространство и время в теории относительности. Развитие взглядов на скорость света

Преобразования Галилея

Если штрихованная система отсчета двигалась относительно не штрихованной, то можно записать преобразования Галилея:

$$x' = x - vt$$

$$y' = y, \quad z' = z$$

$$t' = t$$

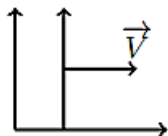


Рис. 8.1. Преобразования Галилея

Галилей (1564-1642) — скорость света конечна.

Декарт (1596-1650) — свет это давление, передаваемое через среду с бесконечной скоростью.

Гримальди (1618-1660), Гук (1625-1695), Гюйгенс (1629-1695) волновая точка зрения на свет.

Ньютон (1643-1727) — свет — поток корпускул.

Рёмер (1676), Бредли (1727) — скорость света конечна, $c \sim 2.1 \times 10^8$ м/с.

Опыт Рёмера

Когда спутник Юпитера только выходит из положения затмения, то расстояние от спутника до Земли S_1 . При каждом последовательном смещении Юпитера по орбите, новый выход спутника из положения затмения в то положение, когда сигнал только-только виден Земли, то разница — диаметр вращения Земли вокруг солнца S_2 . Задержка достигает до 22 минут.

$$\frac{S_2 - S_1}{c} \cong 22 \text{ мин}$$

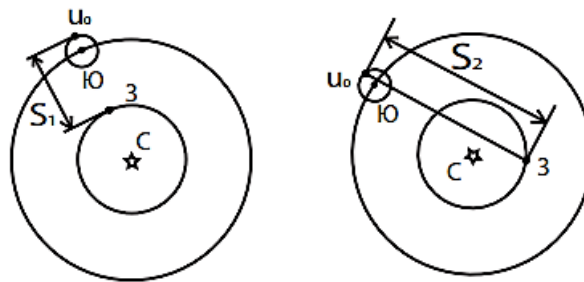


Рис. 8.2. Опыт Рёмера

Зная диаметр орбиты солнечной для Земли, можно оценить скорость света:

$$c = \frac{(150 + 147) \cdot 10^9}{1320} \approx 2,27 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

Система уравнения Максвелла

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \text{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}; \quad j = n_e e v \\ \text{Div} \vec{B} &= 0 \\ \text{Div} \vec{D} &= 4\pi \rho \end{aligned}$$

При переходе от одной инерциальной системы отсчета в другой, необходимо использовать материальные уравнения.

Интерферометр Майкельсона

Была развита теория эфира. Был изобретен прибор — интерферометр, чтобы искать эфир и определить его направление движения относительно Земли. Эфир неподвижен, Земля относительно него движется.

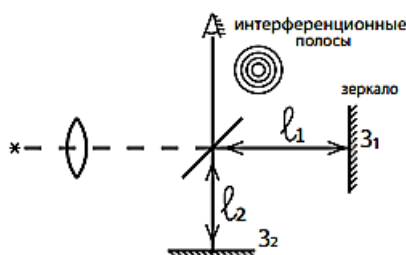


Рис. 8.3. Интерферометр Майкельсона

Свет попадает на делительную пластинку. Излучение как проходит через нее, так и отражается. Лучи собираются в зрительной трубе. Любая подвижка зеркала меньше микрона может быть зарегистрирована по смещению интерференционных полос. Разность хода записывается следующим образом:

$$d_2 = 2l_2$$

$$d_1 = 2l_1$$

$$d_2 - d_1 = 2(l_2 - l_1) = n\lambda$$

Предполагается, что Земля движется со скоростью \vec{v} относительно неподвижного эфира.

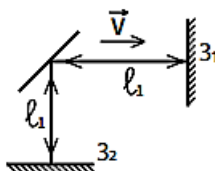


Рис. 8.4. Земля движется со скоростью \vec{v}

$$c = c' + V$$

c' — скорость света относительно Земли.

V — скорость эфира.

Обратно:

$$-c = -c' + V$$

$$t_1 = \underbrace{\frac{l_2}{c - V}}_{c'} + \frac{l_1}{c + V} = \frac{2l_1}{c} \left(\frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}} \right)$$

$$t_2 = \frac{2\sqrt{l_1^2 + S^2}}{c}; \quad S = \frac{Vt_2}{2}$$

$$t_2^2 = \frac{4}{c^2} \left(l_1^2 + \frac{V^2 t_2^2}{4} \right) = \frac{4l_1^2}{1 - \frac{V^2}{c^2}} \cdot \frac{1}{c^2} \Rightarrow t_2 = \frac{2l_1}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

Чтобы определить скорость эфира, необходимо использовать ряд Тейлора:

$$\frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}} \simeq 1 - \left(-\frac{V^2}{c^2} \right) = 1 + \frac{V^2}{c^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \simeq 1 - \left(-\frac{1}{2} \frac{V^2}{c^2} \right) = 1 + \frac{1}{2} \frac{V^2}{c^2}$$

Тогда получается следующее выражение:

$$t_1 - t_2 = \frac{2l_1}{c} \left(1 + \frac{V^2}{c^2} - 1 - \frac{1}{2} \frac{V^2}{c^2} \right) = \frac{l_1 V^2}{c^3}$$

Таким образом, геометрическая разность хода (24 нм) записывается как:

$$\Delta d = 2l_1 \frac{V^2}{c^2}$$

$$\lambda = 590 \text{ нм}$$

$$l_1 = 120 \text{ см}$$

Не была обнаружена конечная скорость эфира с точностью в первый раз. Скорость света универсальна и конечна одинаково во всех системах отсчета.

Преобразования Лоренца

Пусть есть 2 системы: система k стоит на месте, а система k' движется со скоростью V .

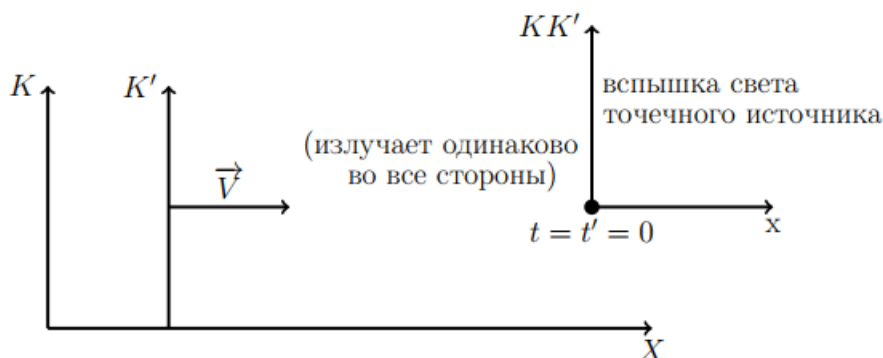


Рис. 8.5. Преобразования Лоренца

Уравнение сферы записывается следующим образом:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = (ct')^2 \quad (8.1)$$

Радиус увеличивается со временем:

$$x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2 \quad (8.2)$$

Однородность пространства необходима для выполнения законов сохранения. Если пространство однородно, то преобразования будут линейными.

$$x' = A_1x + A_2y + A_3z + A_4t + A_5, \quad A_2, A_3 = 0$$

$$y' = y \quad z' = z$$

$$t' = t + 0, \quad x' = x + 0 \quad A_5 = 0$$

Следовательно:

$$x' = A_1x + A_4t$$

В штрихованной системе координат координаты связаны не только координатой x , но и со временем t неподвижной относительно Земли отсчета.

$$x' = 0 = A_1 \left(vt + \frac{A_4}{A_1} t \right) = 0$$

$$Vt = -\frac{A_4}{A_1} t \Rightarrow \frac{A_4}{A_1} = -V$$

$$x' = \gamma(x - Vt) \Rightarrow A_4 = -\gamma V, \quad A_1 = \gamma$$

$$y' = y, \quad z' = z, \quad t' = at + bx$$

$$t : a > 0$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = (ct')^2 \quad x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2$$

$$\gamma^2(x - Vt)^2 + y'^2 + z'^2 = c^2(at + bx)^2$$

$$\gamma^2 x^2 - 2xVt\gamma^2 + \gamma^2 V^2 t^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 a^2 t^2 + 2^2 2abtx + c^2 b^2 x^2$$

Это выражение сравнивается с выражением (8.2).

$$\begin{cases} \gamma^2 - b^2 c^2 = 1 \\ a^2 c^2 - \gamma^2 V^2 = c^2 \\ abc^2 + V\gamma^2 = 0, \quad a > 0; \quad b < 0 \end{cases}$$

Необходимо вычислить γ .

$$b^2 = \frac{\gamma^2 - 1}{c^2} \Rightarrow b = -\frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{c}$$

$$a^2 = \frac{c^2 + \gamma^2 V^2}{c^2} = 1 + \frac{\gamma^2 V^2}{c^2}$$

$$-\sqrt{1 + \gamma^2 \frac{V^2}{c^2}} \sqrt{\frac{\gamma^2 - 1}{c^2}} + V\gamma^2 = 0$$

$$\gamma^4 V^2 = c^2(c^2 + V^2 \gamma^2)(\gamma^2 - 1) = c^2 \gamma^2 + \gamma^4 V^2 - c^2 - V^2 \gamma^2$$

$$c^2 \gamma^2 - V^2 \gamma^2 = c^2$$

$$\gamma^2 = \frac{c^2}{c^2 - V^2} = \frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}} \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

$$b = -\frac{V}{c^2} \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

$$a = \sqrt{1 + \frac{V^2}{c^2} \gamma^2} = \sqrt{1 + \frac{V^2}{c^2} \frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \sqrt{1 + \frac{V^2}{c^2 - V^2}} = \sqrt{\frac{c^2 - V^2 + V^2}{c^2 - V^2}} = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \Rightarrow$$

$$a = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

Необходимо написать преобразования Лоренца от штрихованной к нештрихованной:

$$x' = \gamma(x - Vt) \quad y' = y \quad z' = z \quad t' = \gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right)$$

Штрихованная система движется влево со скоростью \vec{V} :

$$x = \gamma(x' + Vt') \quad y' = y \quad z' = z \quad t = \gamma\left(t' + \frac{V}{c^2}x'\right)$$

Следствия преобразований Лоренца. Относительность одновременности

Пусть есть 2 события: $A_1(x_1, t_1)$ и $A_2(x_2, t_2)$.

$$t'_2 - t'_1 = \gamma\left((t_2 - t_1) - \frac{V^2}{c^2}(x_2 - x_1)\right)$$

Пусть $t_2 = t_1$, тогда:

$$t'_2 - t'_1 = -\frac{\gamma V}{c^2}(x_2 - x_1)$$

Таким образом, получается относительность одновременности.

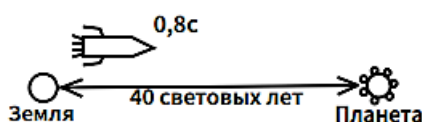


Рис. 8.6. Относительность одновременности

Необходимо найти время, за которое корабль долетит от Земли до удаленной планеты с точки зрения земного наблюдателя, и наблюдателя, который находится на корабле. С точки зрения земного наблюдателя:

$$\Delta t = \frac{40 \text{ св. л.}}{0,8c} = 50 \text{ лет}$$

С точки зрения наблюдателя на корабле:

$$t'_2 - t'_1 = \frac{1}{1 - \frac{(0,8c)^2}{c^2}}$$

$$\Delta t' = \frac{1}{0,6}(50 \text{ лет} - 40 \text{ лет} \cdot 0,8) = \frac{1}{0,6} \cdot 18 \text{ лет} = 30 \text{ лет}$$

Таким образом наблюдается замедление темпа хода движущихся часов.

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma}$$

На движущемся корабле также происходит сокращение длины. Одновременно замеренная длина:

$$x_2 - x_1 = L_0 = \gamma((x'_2 - x'_1) + V(t'_2 - t'_1))$$

$$x'_2 - x'_1 = 0 \Rightarrow L_0 = \gamma V \Delta t' = \gamma L \quad (L_0 > L)$$

Лекция 9. Специальная теории относительности

Интервал

$$t_{12} = t_2 - t_1$$

$$l_{12}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

$$c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = S_{12}^2 = inv$$

Выделяют интервалы следующим образом:

$$c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 > 0 \quad \text{— времениподобный}$$

$$c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 < 0 \quad \text{— пространственноподобный}$$

$$c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = 0 \quad \text{— светоподобный}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \\ x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 \end{cases}$$

Причинно-следственная связь присуща времениподобному интервалу.

Сложение скоростей

Преобразование Лоренца записывается следующим образом:

$$x = \gamma(x' + Vt') \quad y = y' \quad z = z' \quad t = \gamma\left(t' + \frac{V}{c^2}x'\right)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

$$V_x = \frac{dx}{dt} \quad V'_x = \frac{dx'}{dt'}$$

$$V_y = \frac{dy}{dt} \quad V'_y = \frac{dy'}{dt'}$$

Необходимо получить выражение для V'_x :

$$V'_x = \frac{d(\gamma(x - Vt))}{d(\gamma(t - \frac{V}{c^2}x))} = \frac{dx - Vdt}{dt - \frac{V}{c^2}dx} = \frac{\frac{dx}{dt} - V}{1 - \frac{V}{c^2}\frac{dx}{dt}} = \frac{V_x - V}{1 - \frac{V}{c^2}V_x}$$

$$V'_y = \frac{dy'}{dt} = \frac{dy}{\gamma \left(dt - \frac{V}{c^2} dx \right)} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\gamma \left(1 - \frac{V}{c^2} \frac{dx}{dt} \right)} = \frac{V_y}{\gamma \left(1 - \frac{V}{c^2} V_x \right)}$$

Уравнение движения

Импульс (и потенциальная энергия) связан с однородностью и изотропностью пространства (и с однородностью времени).

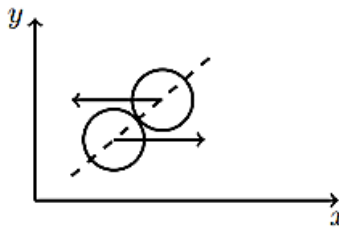


Рис. 9.1. Соударение шаров

$$\underbrace{V_{x1}}_{\text{до}} \neq \underbrace{V_{x2}}_{\text{после}} \quad \underbrace{V_{y1}}_{\text{до}} \neq \underbrace{V_{y2}}_{\text{после}} \quad \underbrace{V_{z1}}_{\text{до}} \neq \underbrace{V_{z2}}_{\text{после}}$$

Импульс определяется следующим образом:

$$\vec{P} = m \frac{d\vec{r}}{d\tau}$$

$d\tau$ — собственное время относительно системы координат, где тело покоится.

$$P_{x1} \neq P_{x2} \quad P_{y1} \neq P_{y2} \quad P_{z1} \neq P_{z2}$$

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma} \Rightarrow \vec{P} = m \frac{d\vec{r}}{dt} \gamma = m \vec{V} \gamma$$

Уравнение движения в релятивистской механике записывается следующим образом:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}$$

Легко проверить движением частиц в электромагнитных полях.

$$\frac{d}{dt}(m \vec{V} \gamma) = m \underbrace{\frac{\vec{V}}{dt}}_{=\vec{a}} \gamma + m \vec{V} \frac{d\gamma}{dt} = \vec{F}$$

\vec{a} и \vec{F} не коллинеарны $\Rightarrow m$ — не мера инертности (т.к. \vec{V} не обязательно сонаправлены с \vec{a}).

Импульс, энергия и масса в теории относительности

Работа произвольной силы записывается следующим образом:

$$A_{12} = K_2 - K_1$$

$$A = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_1^2 \frac{d\vec{P}}{dt} \vec{V} \cdot dt = \int_1^2 d\vec{P} \cdot \vec{V}$$

Необходимо использовать интегрирование по частям:

$$d(\vec{P} \cdot \vec{V}) = d\vec{P} \cdot \vec{V} + \vec{P} \cdot d\vec{V} \Rightarrow d\vec{P} \cdot \vec{V} = d(\vec{P} \cdot \vec{V}) - \vec{P} \cdot d\vec{V}$$

Тогда работа получается следующей:

$$\begin{aligned} A_{12} &= \int_1^2 d(\vec{P} \cdot \vec{V}) - \int_1^2 \vec{P} \cdot d\vec{V} = PV \Big|_{V_1}^{V_2} - \int_1^2 \vec{P} \cdot d\vec{V} \\ \int_1^2 \vec{P} \cdot d\vec{V} &= \int_1^2 m\gamma \vec{V} d\vec{V} = \int_1^2 \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \vec{V} \cdot d\vec{V} = \int_1^2 \frac{1}{2} m \frac{d(V^2)}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \end{aligned}$$

Дальше необходимо сделать замену переменных. Пусть:

$$\xi = 1 - \frac{V^2}{c^2}$$

Тогда:

$$d\xi = -\frac{dV^2}{c^2} \quad dV^2 = -d\xi \cdot c^2$$

$$\int_1^2 \vec{P} \cdot d\vec{V} = -\frac{1}{2} m \int_1^2 c^2 \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} = -\frac{1}{2} mc^2 \cdot 2\xi^{\frac{1}{2}} \Big|_{\xi_1}^{\xi_2} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \Big|_{V_1}^{V_2}$$

Таким образом, выражение для работы получается следующим:

$$A_{12} = mV\gamma V \Big|_{V_1}^{V_2} - \left(-mc^2 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \right) \Big|_{V_1}^{V_2} = mc^2 \left(\frac{V^2}{c^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} + \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \right) \Big|_{V_1}^{V_2} =$$

$$mc^2 \frac{\frac{V^2}{c^2} + 1 - \frac{V^2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \Big|_{V_1}^{V_2} = mc^2 \frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}} \Big|_{V_1}^{V_2} = mc^2 \gamma \Big|_{\gamma_1}^{\gamma_2} = K_2 - K_1$$

Следовательно, кинетическую энергию можно записать следующим образом:

$$K = mc^2 \gamma + const$$

При $V \ll c$ кинетическая энергия определяется как:

$$K = \frac{mV^2}{2}$$

Необходимо найти константу.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{V^2}{c^2}$$

$$K_{V \ll c} = mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{V^2}{c^2} \right) + const = mc^2 + \frac{1}{2} mV^2 = \frac{mV^2}{2} \Rightarrow const = -mc^2$$

$$K = \underbrace{mc^2 \gamma}_{=E} - \underbrace{mc^2}_{=E_0}$$

E — энергия движущейся частицы, E_0 — энергия покоя. m — масса для нерелятивистского случая, m , p , E связаны друг с другом.

$$\vec{P} = m\gamma\vec{V} \quad E = mc^2\gamma$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{E}{c^2} - P^2} &= \sqrt{\frac{m^2 c^4 \gamma^2}{c^2} - m^2 \gamma^2 V^2} = m\gamma \sqrt{c^2 - V^2} = m\gamma c \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} = m\gamma c \frac{1}{\gamma} = \\ &= mc = const \Rightarrow m^2 = \frac{E^2}{c^4} - \frac{P^2}{c^2} \end{aligned}$$

Масса — интеграл движения в релятивистской механике. Связь импульса и энергии:

$$\begin{aligned} \vec{P} = m\gamma\vec{V} &= m \frac{E}{mc^2} = \frac{E}{c^2} \vec{V} \quad E = mc^2 \gamma \Rightarrow \gamma = \frac{E}{mc^2} \\ \vec{P} &= \frac{E}{c^2} \vec{V} \end{aligned}$$

Энергия и импульс аддитивны:

$$\vec{P}_{\Sigma} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \dots$$

$$E_{\Sigma} = E_1 + E_2 + \dots$$

Масса не аддитивна:

$$m_{\Sigma} \neq m_1 + m_2$$

$$m_{\Sigma} = \sqrt{\frac{E_{\Sigma}^2}{c^4} - \frac{P_{\Sigma}^2}{c^2}} = \sqrt{\frac{(E_1 + E_2)^2}{c^4} - \frac{(P_1 + P_2)^2}{c^2}}$$

$$m_1 + m_2 = \sqrt{\frac{E_1^2}{c^4} - \frac{P_1^2}{c^2}} + \sqrt{\frac{E_2^2}{c^4} - \frac{P_2^2}{c^2}} \neq m_{\Sigma}$$

Пример 9.1. Пусть в системе действуют консервативные силы.



Рис. 9.2. Частицы с массой m_1 и m_2

Суммарная энергия равна: $U + K$. Чтобы частица была стабильной:

$$E_{нач} = (U + K)_{нач} = (U + K)_{кон}$$

$$\frac{mV^2}{2} - G \frac{M_3 m}{R_3} = 0$$

Если $K + U < 0$, то частице не удастся улететь от Земли. $m_1, m_2 \Rightarrow$ условие, чтобы система была стационарной, устойчивой:

$$W = \sum_{i=1}^{N-1} (U_i + K_i) < 0$$

$$E = \sum_{i=1}^N (E_{0i} + (U_i + K_i)) = \sum_{i=1}^N m_i c^2 - \Delta mc$$

Лекция 10. Кинематика и динамика твёрдого тела

Импульс, энергия и масса в теории относительности

$$E = mc^2 \sum_{i=1}^N m_i c^2 + \sum_{i=1}^N (U_i + K_i) = \sum_{i=1}^{N-1} m_i c^2 - \Delta mc^2$$

Для составной частицы в $\sum_{i=1}^N m_i c^2$ — сумма масс всех частиц, в Δmc^2 — дефект масс. Железо — один из самых устойчивых элементов.

$${}^{56}_{26}\text{Fe} \quad m_a = 55,934939 \text{ а. е. м.}$$

Дефект массы $\Delta m = 0,5285688 \text{ а. е. м.} = 0,01 m_a$.

Пример 10.1. Потеря массы Солнцем при излучении.

$$2e^- + 4p \rightarrow {}^4\text{He} + 2\nu + Q \quad \Phi_C = 3,826 \cdot 10^{26} \text{ Вт}$$

Солнце теряет ежесекундно:

$$\Delta m = \frac{\Phi_C}{c^2} = \frac{3,826 \cdot 10^{26}}{9 \cdot 10^{16}} \approx 4,3 \cdot 10^9 \text{ кг}$$

Масса Солнца:

$$M_C = 2 \cdot 10^{30} \text{ кг} \quad \frac{\Delta}{M_C} = \frac{4,3 \cdot 10^9}{2 \cdot 10^{30}} = 2 \cdot 10^{-21}$$

Кинематика твердого тела. Твердое тело как система материальных точек. Степени свободы

Абсолютно твердое тело — тело, расстояние между двумя точками которого не изменяется. Трех точек достаточно, чтобы описать положение тела в пространстве. У одной материальной точки 3 степени свободы: $N = 3 + 3 + 3 = 9$. Но точки неразрывно связаны, поэтому:

$$l_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}$$

А таких связей $3 \Rightarrow N = 3 + 3 + 3 - 3 = 6$ степеней свободы у абсолютно твердого тела.

Поступательное движение — траектории всех точек одинакова.

Вращательное движение — траектории всех точек — концентрические окружности с центром.

Плоское движение — траектории всех точек лежат в одной плоскости.

X, Y, Z — лабораторная система отсчета.

x, y, z — СО жестко связана с телом, оси параллельны осям лабораторной СО.

x_0, y_0, z_0 — СО жестко связана с телом и вращается вместе с ним.

При вращательном движении:

$$\vec{V}_i = [\vec{\omega} \times \vec{r}_i]$$

При плоском движении:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + [\vec{\omega} \times \vec{r}_B]$$

Угловая скорость при плоском движении:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\phi}}{dt}$$

Относительно точки O происходит только поворот:

$$\vec{V}_O = 0$$

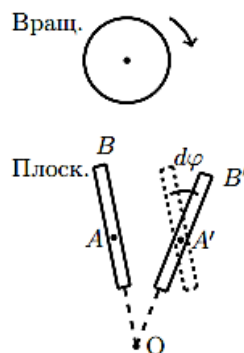


Рис. 10.1. Вращательное и плоское движение

Ось, относительно которой в данный момент тело совершает только вращение называется **мгновенной осью вращения**.

Движение с одной закрепленной точкой и свободное движение твердого тела

Теорема 10.1. *Теорема Эйлера.*

Твердое тело, закрепленное в одной точке, может быть переведено из одного положения в любое другое одним поворотом вокруг неподвижной оси, проходящей через точки перемещения.

$$d\vec{\phi} = d\vec{\phi}_1 + d\vec{\phi}_2 \quad \frac{d\vec{\phi}}{dt} = \frac{d\vec{\phi}_1}{dt} + \frac{d\vec{\phi}_2}{dt} \Rightarrow \vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$$

В каждый момент есть мгновенная ось вращения.

Пример 10.2. Движение с одной закрепленной точкой.

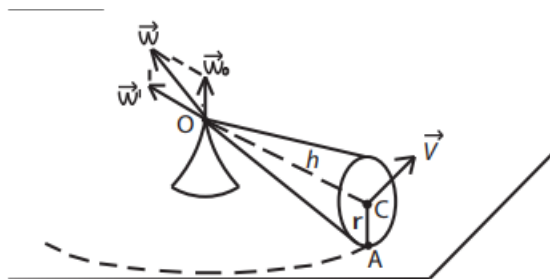


Рис. 10.2. Движение с одной закрепленной точкой

OA — мгновенная ось вращения.

$$\omega_0 = \frac{V}{h} \quad \omega' = \frac{V}{r}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \omega'^2} = \frac{V}{r} \sqrt{1 + \left(\frac{r}{h}\right)^2}$$

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d(\vec{\omega}_0 + \vec{\omega}')}{dt} = 0 + \frac{d\vec{\omega}'}{dt}$$

Если ω' изменяется по направлению, то движение с ускорением.

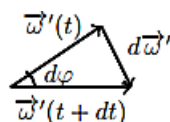


Рис. 10.3. Угловая скорость

Угловое ускорение записывается следующим образом:

$$\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}'}{dt} \quad d\vec{\omega}' = [d\vec{\phi} \times \vec{\omega}']$$

$$\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}'}{dt} = \left[\frac{d\vec{\phi}}{dt} \times \vec{\omega}' \right] = [\vec{\omega}_0 \times \vec{\omega}']$$

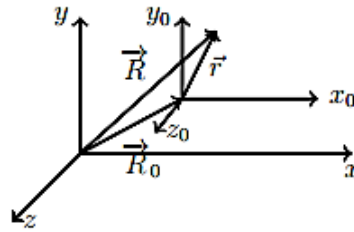


Рис. 10.4. Свободное тело твердого тела

Свободное движение твердого тела

$$\vec{R}_A = \vec{R}_0 + \vec{r}$$

$$\vec{V}_A = \vec{V}_0 + [\vec{\omega} \times \vec{r}]$$

Произвольное движение твердого тела можно свести к суперпозиции вращательного движения вокруг мгновенной оси и поступательного перемещения вдоль этой же оси.

Динамика твердого тела. Уравнение моментов. Закон сохранения момента импульса

Уравнение моментов записывается следующим образом:

$$m_i \frac{d\vec{V}_i}{dt} = \vec{F}_i + \sum_{j=1, j \neq i}^N \vec{f}_{ji}$$

$$\vec{r}_i \times m \frac{d\vec{V}_i}{dt} = [\vec{r}_i \times \vec{F}_i] + \sum_{j=1, j \neq i}^N \vec{r}_i \times \vec{f}_{ji}$$

$$\frac{d[\vec{r}_i \times \vec{V}_i]}{dt} = \underbrace{\left[\frac{d\vec{r}_i}{dt} \times \vec{V}_i \right]}_{=0} + \vec{r}_i \times \frac{d\vec{V}_i}{dt} \Rightarrow \frac{d[\vec{r}_i \times \vec{V}_i]}{dt} = \vec{r}_i \times \frac{d\vec{V}_i}{dt}$$

$$m_i \frac{d[\vec{r}_i \times \vec{V}_i]}{dt} = [\vec{r}_i \times \vec{F}_i] + \sum_{j=1}^N [\vec{r}_i \times \vec{f}_{ji}]$$

$$\sum_{i=1}^N m_i \frac{d[\vec{r}_i \times \vec{V}_i]}{dt} = \sum_{i=1}^N \frac{d[\vec{r}_i \times \vec{p}_i]}{dt} = \sum_{i=1}^N \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Таким образом, получается момент импульса:

$$\vec{L}_i = [\vec{r}_i \times \vec{p}_i]$$

Сумма моментов сил записывается следующим образом:

$$\sum_{i=1}^N [\vec{r}_i \times \vec{F}_i] = \sum_{i=1}^N \vec{M}_i \quad \vec{M}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{i=1, j \neq i}^N [\vec{r}_i \times \vec{f}_{ji}] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{i=1, j \neq i}^N [\vec{r}_i \times \vec{f}_{ji} - \vec{r}_j \times \vec{f}_{ji}]$$

$$[(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{f}_{ji}] = 0 \Leftrightarrow (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \parallel \vec{f}_{ji}$$

Таким образом, окончательное выражение для уравнения моментов записывается следующим образом:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{M}_i$$

Два цилиндра, которые имеют одинаковую массу, но разное распределение масс относительно оси, имеют разное ускорение. Два цилиндра. Один сплошной, другой – полый. Их специально установили на весах. Сплошной цилиндр имеет большее ускорение, а полый – меньшее, потому что момент инерции в сплошном цилиндре минимален, а ускорение – максимально, в полом – момент инерции максимален, а ускорение – минимально.

Лекция 11. Вращательное движение твёрдого тела

Уравнение моментов. Закон сохранения момента импульса

Уравнение момента записывается следующим образом:

$$m_i \frac{d\vec{V}_i}{dt} = \vec{F}_i + \sum_{j=1, j \neq i}^N \vec{f}_{ji} \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

Таким образом, момент сил:

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

Следовательно, момент импульса записывается как:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times \vec{V}_i = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

Если:

$$\vec{M} = 0$$

Тогда:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = const$$

Закон сохранения момента импульса. Суммарный момент импульса системы тел относительно некоторой точки пространства сохраняется неизменным, если момент всех внешних сил относительно этой же точки равен 0.

Основное уравнение вращательного движения. Момент инерции

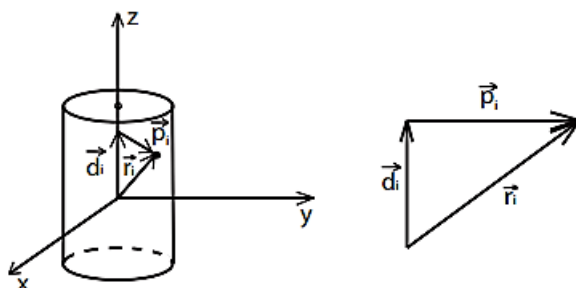


Рис. 11.1. Вращательное движение

Пусть ось z — это ось, вокруг которой происходит вращение. Рассматривается точка пространства m_i . Выбираются оси системы координат: x и y . Скорость материальной точки при движении вокруг оси z :

$$\vec{V}_i = [\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i]$$

$$\begin{aligned} \vec{L}_z &= \left(\sum_{i=1}^N m_i [\vec{\rho}_i \times \vec{V}_i] \right)_z = \sum_{i=1}^N m_i [(\vec{d}_+ \vec{\rho}_i) \times \vec{V}_i]_z = \sum_{i=1}^N m_i (0 + [\vec{\rho}_i \times [\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i]])_z = \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \omega \rho_i^2 = \omega \sum_{i=1}^N m_i \rho_i^2 \end{aligned}$$

Таким образом, момент импульса:

$$L_z = \omega \sum_{i=1}^N m_i \rho_i^2$$

Момент инерции записывается следующим образом:

$$J = \sum_{i=1}^N m_i \rho_i^2$$

Если тело является сплошным, то момент инерции записывается как:

$$J = \int_V \rho^2 dm$$

Теорема 11.1. Теорема Гюйгенса-Штейнера.

Пусть есть твердое тело с центром массы O . Необходимо найти момент инерции твердого тела при вращении относительно оси, которая проходит через точку A . Выбирается произвольная материальная точка m_i . Радиус вектор центра масс обозначается как \vec{a}_i .

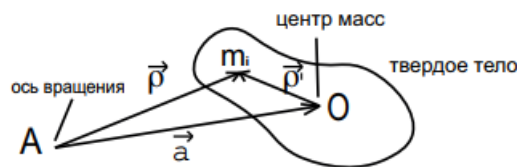


Рис. 11.2. Теорема Гюйгенса-Штейнера

$$J = \sum_i m_i \rho_i^2 = \sum_i m_i (\vec{a} + \vec{\rho}_i')^2 = \sum_i m_i a^2 + \sum_i m_i (\rho_i')^2 + \sum_i m_i 2(\vec{a} \cdot \vec{\rho}_i')$$

По определению центра масс:

$$2\vec{a} \left(\sum_i m_i \vec{\rho}'_i \right) = 0$$

Таким образом, момент инерции получается следующим:

$$J = \left(\sum_i m_i \right) a^2 + J_0 = ma^2 + J_0 = J_A$$

Если известен момент инерции J_0 относительно некоторой оси, проходящей через центр масс, то момент инерции тела J относительно любой другой оси, параллельной первоначальной и находящейся на расстоянии a от нее, равен:

$$J = J_0 + ma^2$$

Пример 11.1. Пусть есть плоскость, с которой скатывается цилиндр. Мгновенная ось вращения — точка, которая покоится относительно поверхности. \vec{N} — сила реакции опоры.

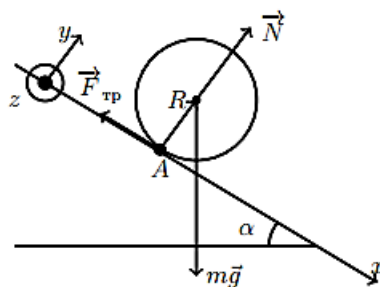


Рис. 11.3. Ось вращения

$$L = \omega J \quad J_A \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \left(\underbrace{\vec{M}_{mp}}_{=0} + \vec{M}_{mg} + \underbrace{\vec{M}_N}_{=0} \right)$$

$$J_A \frac{d\vec{\omega}}{dt} = [\vec{R} \times m\vec{g}]$$

Угловое ускорение записывается следующим образом:

$$\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

Линейная скорость центра масс:

$$\vec{V}_{ц.м} = [\vec{\omega} \times \vec{R}]$$

Таким образом, выражение для ускорения записывается следующим образом:

$$\vec{a} = [\vec{\beta} \times \vec{R}] = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{R} \right]$$

$$\vec{a} = \left[\frac{[\vec{R} \times m\vec{g}]}{J_A} \times \vec{R} \right] \quad a = \frac{mgR^2 \sin \alpha}{J_A} = \frac{mR^2 g \sin \alpha}{mr^2 + J_0} = \frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{J_0}{mr^2}}$$

Тензор инерции

Рассматривается случай, когда тело закреплено в одной точке. Тогда скорость тела:

$$\vec{V}_i = [\vec{\omega} \times \vec{r}_i] \quad \vec{L} = \sum_i [\vec{r}_i \times [\vec{\omega} \times \vec{r}_i]] = \sum_i m_i (\vec{\omega}(\vec{r}_i)^2 - \vec{r}_i(\vec{r}_i \cdot \vec{\omega}))$$

$$\vec{L}_i = m_i (\vec{\omega}(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - \vec{r}_i(x_i\omega_x + y_i\omega_y + z_i\omega_z))$$

В проекции на ось x :

$$\vec{L}_{ix} = m_i (\omega_x(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - x(x_i\omega_x + y_i\omega_y + z_i\omega_z)) = \omega_x m_i(y_i^2 + z_i^2) - \omega_y x_i y_i m_i - \omega_z x_i z_i m_i$$

В проекции на ось y :

$$L_{iy} = -\omega_x y_i x_i m_i + \omega_y m_i(x_i^2 + z_i^2) - \omega_z y_i z_i m_i$$

В проекции на ось z :

$$L_{iz} = -\omega_x z_i x_i m_i - \omega_y m_i z_i y_i + \omega_z m_i(x_i^2 + y_i^2)$$

Следовательно:

$$L_{ix} = J_{xx}\omega_x + J_{xy}\omega_y + J_{xz}\omega_z$$

$$\begin{cases} J_{xx} = m_i(y_i^2 + z_i^2) \\ J_{xy} = -m_i(x_i y_i) \\ J_{xz} = -m_i(x_i z_i) \end{cases}$$

$$\begin{cases} J_{yx} = -m_i(y_i x_i) \\ J_{yy} = m_i(x_i^2 + z_i^2) \\ J_{yz} = -m_i(y_i z_i) \end{cases}$$

$$\begin{cases} J_{zx_i} = -m_i(y_i z_i) \\ J_{zy_i} = -m_i(z_i x_i) \\ J_{zz_i} = -m_i(x_i^2 + y_i^2) \end{cases}$$

Таким образом, можно получить таблицу тензор, которая отображает инерционное свойство тела при вращении:

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

Свойства тензора следующие:

- 1) J_{xx}, J_{yy}, J_{zz} — осевые моменты инерции. $J_{xy}, J_{yx} \dots$ — центробежные моменты инерции.
- 2) Симметричный тензор:

$$J_{xy} = J_{yx}$$

$$J_{xz} = J_{zx}$$

$$J_{yz} = J_{zy}$$

- 3) Можно найти систему координат, где тензор будет иметь диагональный вид (все центробежные моменты инерции равны 0).

Оси системы координат, в которой тензор имеет диагональный вид, называются **главными осями**. Если при этом оси проходят через центр масс, то они называются **главными центральными осями**. Оси, проходящие через центр масс называются **центрными**.

Пример 11.2. Пусть закрепленные стержни невесомы. Длина стержня a . Необходимо записать тензор инерции для этого случая.

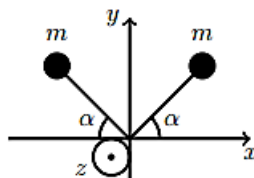


Рис. 11.4. Тензор инерции

$$J_{xx} = 2ma^2 \sin^2 \alpha$$

$$J_{xy} = 0$$

$$J_{xz} = 0$$

$$J_{yy} = 2ma^2 \sin^2 \alpha$$

$$J_{zz} = 2ma^2$$

$$J_{xy} = 0$$

Пусть есть некая система. При движении каждая из тел, входящих в систему, приобретает свой момент импульса. Закон сохранения импульса можно увидеть с помощью двойной спирали, по которой скатывается шарик. Внизу находится железная воздушка, которая отдает импульс когда шарик ударяется о нее. Если импульсы одинаковые, то в момент ударов спираль должна остановиться. Шарик и спираль вращаются в разные стороны.

С помощью маятника Обербека можно определить, как угловое ускорение зависит от момента инерции. На приборе есть крестовина и четыре штыря, на которые надеются грузы одинаковой массы. Когда грузы находятся на самом близком расстоянии от оси вращения, момент инерции минимален, а ускорение большое. Если закрепить грузы на самом конце, то момент инерции станет максимальным, а ускорение – минимальным. Если подвесить дополнительный груз, то ускорение будет увеличиваться. То есть, ускорение зависит также и от массы груза.

Маятник Пешехонова. Его особенность в том, что горизонтальная ось вращения намного выше, чем центр масс. Маятник может вращаться в горизонтальной оси, и в то же время эта горизонтальная ось закреплена в вилке, которая может вращаться по вертикали. Если одновременно запустить это движение и по вертикали, и по горизонтали, можно наблюдать замысловатые колебания этого маятника. Когда маятник находится в нижней точке, он движется рывками, а когда он находится в верхней точке, то его движения более плавные.

О том, как момент сил может оказывать влияние на движение тела, можно судить по большой **катушке**, на которую намотана нить, и которую катают по столу. Если угол между нитью и плоскостью стола большой, то катушка едет в направлении от человека, а если маленький – к нему. Кроме того, есть такой угол, при котором не будет происходить движение, то есть, катушка будет просто проскальзывать.

Лекция 12. Вращение вокруг закреплённой оси. Тензор инерции

Вращение вокруг закреплённой оси. Связь между моментом инерции и компонентами тензора инерции

Эффект самобалансировки основан на том, что тело, не имеющее жестко заданной оси вращения, вращается относительно своего центра масс (к примеру, если раскрутить лежащую на столе шариковую ручку, или мобильный телефон).

Пример 12.1. Пусть закреплённые стержни невесомы. Длина стержня a . Необходимо записать тензор инерции для этого случая.

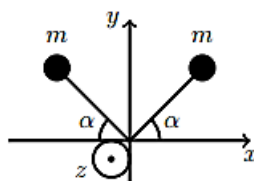


Рис. 12.1. Тензор инерции

$$J_{xx} = 2ma^2 \sin^2 \alpha$$

$$J_{xy} = 0$$

$$J_{xz} = 0$$

$$J_{yy} = 2ma^2 \sin^2 \alpha$$

$$J_{zz} = 2ma^2$$

$$J_{yz} = 0$$

Пусть ось вращения лежит в плоскости x, y .

Предполагается, что оси x, y, z являются главными. Тензор инерции является диагональным:

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

$$L_x = J_x \omega_x$$

$$L_y = J_y \omega_y$$

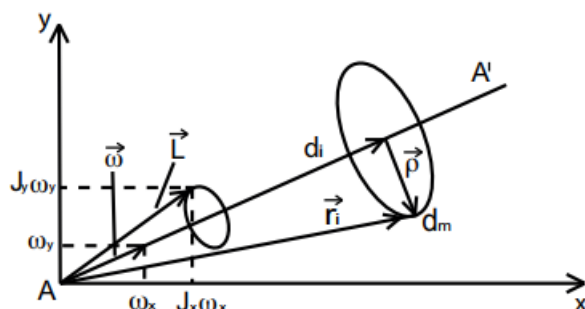


Рис. 12.2. Связь между моментом инерции и компонентами тензора инерции

Тело вращается вокруг оси AA' . В общем случае момент инерции не совпадает с осью вращения. Момент импульса жестко связан с телом.

$$\vec{L}_A = \vec{L}_{AA'} + \vec{L}_\perp$$

Уравнение моментов разобьется на 2 выражения:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

$$\frac{d\vec{L}_{AA'}}{dt} = \vec{M}_{AA'}$$

$$\frac{d\vec{L}_\perp}{dt} = \vec{M}_\perp$$

M_\perp не меняет угловую скорость, но меняет направление оси (напряжение $F_{\text{упр}}$ в оси и т. д.). Необходимо найти связь между моментом инерции и компонентами тензора инерции.

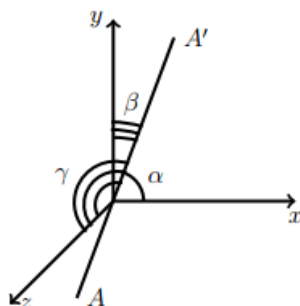


Рис. 12.3. Связь между моментом инерции и компонентами тензора инерции

Момент импульса в проекции на ось AA' записывается следующим образом:

$$L_{AA'} = L_x \cos \alpha + L_y \cos \beta + L_z \cos \gamma$$

$$L_x = J_x \omega_x \quad \omega_x + \omega \cos \alpha$$

$$L_y = J_y \omega_y \quad \omega_y + \omega \cos \beta$$

$$L_z = J_z \omega_z \quad \omega_z + \omega \cos \gamma$$

$$\begin{aligned} L_{AA'} &= J_x \omega_x \cos \alpha + J_y \omega_y \cos \beta + J_z \omega_z \cos \gamma = \\ &= J_x \omega \cos^2 \alpha + J_y \omega \cos^2 \beta + J_z \omega \cos^2 \gamma = J_{AA'} \omega \end{aligned}$$

Момент инерции относительно оси AA' :

$$J_{AA'} = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma$$

Таким образом, момент инерции был выражен компонентами тензора инерции. В общем случае:

$$J_{AA'} = J_{xx} \cos^2 \alpha + J_{yy} \cos^2 \beta + J_{zz} \cos^2 \gamma + 2J_{xy} \cos \alpha \cos \beta + 2J_{xz} \cos \alpha \cos \gamma + 2J_{yz} \cos \beta \cos \gamma$$

Тензор инерции записывается в системе координат, жестко связанной с телом (не в лабораторной). Например:

$$\begin{pmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{pmatrix}$$

Свободные оси

Свободными осями тела называются оси вращения, которые в отсутствии каких-либо связей могут сохранять свое положение в пространстве.

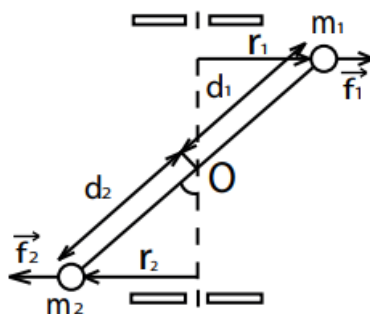


Рис. 12.4. Свободные оси

f_1, f_2 — центробежные силы инерции.

$$f_1 = m_1 \omega^2 r_1$$

$$f_2 = m_2 \omega^2 r_2$$

Чтобы ось была свободной, сумма сил и сумма моментов сил должны равняться 0.

$$f_1 = f_2$$

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 = 0$$

В данном случае сумма моментов сил не равна 0:

$$M_1 = m_1 \omega^2 r_1 d_1 \cos \alpha$$

$$M_2 = m_2 \omega^2 r_2 d_2 \cos \alpha$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2}; \quad \alpha = 0$$

Если $\alpha = 0$, то силы равны 0. Если $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то плечо равно 0.

$$f_1 = f_2 \Rightarrow m_1 \omega^2 r_1 = m_2 \omega^2 r_2$$

$$\omega^2 (m_1 r_1 - m_2 r_2) = 0$$

Таким образом, точка O является центром масс.

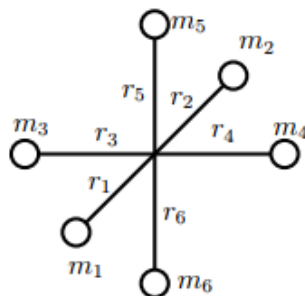


Рис. 12.5. Свободные оси

Пусть 3 гантели расположены перпендикулярно. Точка O — центр масс. При вращении оси могут быть устойчивыми и не устойчивыми. Устойчивые оси — это оси, которые соответствуют минимальному и максимальному моменту инерции. А ось, которая имеет среднее значение, является не устойчивой.

Способы расчета моментов инерции и моменты инерции некоторых тел

Способами расчета моментов инерции и моментов инерции некоторых тел являются:

- прямое интегрирование,
- использование подобия фигур,
- использование связей между моментами инерции относительно различных осей,
- использование симметрии.

Прямое интегрирование

Момент инерции записывается следующим образом:

$$J = \int_V dm \cdot \rho^2$$

Необходимо найти момент инерции палки.

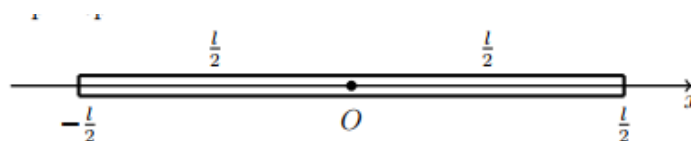


Рис. 12.6. Момент инерции палки

$$J = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} dm x^2 = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{m}{l} dx x^2 = \frac{m}{l} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 dx = \frac{m}{3l} x^3 \Big|_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = \frac{1}{3} \frac{m}{l} \left(\frac{l^3}{8} + \frac{l^3}{8} \right) = \frac{1}{12} m l^2$$

Использование подобия фигур

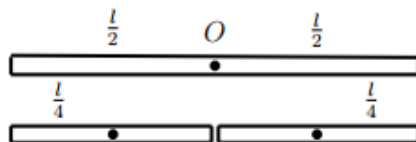


Рис. 12.7. Использование подобия фигур

Если фигура, у которой один характеризующий размер, то момент инерции относительно центра масс:

$$J = kml^2$$

$$J_1 = km_1 \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

По теореме Гюйгенса-Штейнера:

$$J = \left(J_1 + m_1 \left(\frac{l}{4}\right)^2 \right) \cdot 2 = 2 \left(k \frac{m l^2}{2 \cdot 4} + \frac{m l^2}{2 \cdot 16} \right) = km \frac{m^2}{4} + m \frac{l^2}{16} = kml^2$$

$$\frac{3kml^2}{4} = \frac{ml^2}{16} \Rightarrow k = \frac{1}{12}$$

Использование связей между моментами инерции относительно различных осей

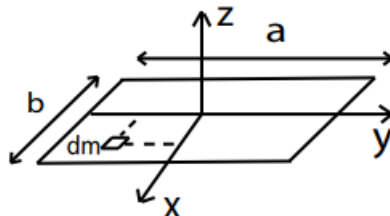


Рис. 12.8. Момент инерции пластины

Момент инерции относительно оси y:

$$dJ_y = dmb^2 \frac{1}{12} \quad dm = \frac{m}{a} dy$$

$$J_y = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dJ_y = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dmb^2 \frac{1}{12} = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{m}{a} dy b^2 \frac{1}{12} = \frac{mb^2}{12}$$

$$J_x = \frac{1}{12} ma^2$$

Рассматривается материальная точка δm :

$$\delta J_z = \delta m(x^2 + y^2) = \delta mx^2 + \delta my^2 = \delta J_y + \delta J_x$$

Для отдельной материальной точки момент инерции относительно оси z выражается через момент инерции относительно оси y и x:

$$\delta J_z = \delta J_y + \delta J_x \quad J_z = J_y + J_x = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$$

Использование симметричности тел

Рассматривается шар с радиусом r . Момент инерции относительно оси x :

$$\delta J_x = \delta m(z^2 + y^2)$$

Момент инерции относительно оси y :

$$\delta J_y = \delta m(x^2 + z^2)$$

Момент инерции относительно оси z :

$$\delta J_z = \delta m(x^2 + y^2)$$

$$\delta J_x + \delta J_y + \delta J_z = \delta m \underbrace{(x^2 + y^2 + z^2)}_{=r^2} 2$$

Для слоя δm :

$$dJ_x + dJ_y + dJ_z = dm 2r^2$$

$$dJ_x = dJ_y = dJ_z = dJ$$

$$3dJ = 2dmr^2 \Rightarrow dJ = \frac{2}{3}dmr^2$$

Момент инерции шара записывается следующим образом:

$$J_{\text{ш}} = \int_0^R \frac{2}{3} dm r^2 = \frac{2}{3} \int_0^R \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3} 4\pi r^2 dr r^2$$

$$J_{\text{шара}} = \frac{2}{5}mR^2 \quad J_{\text{слоя}} = \frac{2}{3}mR^2$$

m — масса сферы.

При большом моменте инерции ускорение маленькое, а при маленьком моменте инерции ускорение большое. При этом, когда студент прижимает к себе гантели, он кружится быстрее, что означает, момент инерции минимальный. Использование велосипедного колеса также показывает закон сохранения момента импульса. Если вращающееся велосипедное колесо отпустить вниз, то студент будет вращаться в одну сторону, а если велосипедное колесо поднять вверх, то студент будет вращаться в противоположном направлении.

Лекция 13. Движение гироскопа. Гироскопические силы

Кинетическая энергия при плоском движении твердого тела

Кинетическая энергия вращения твёрдого тела и работы внешних сил:

$$v_i = \omega \rho_i$$

$$K = \sum_{i=n}^N \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_{i=n}^N \frac{m_i (\omega \rho_i)^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \underbrace{\sum_i m_i \rho_i^2}_J = \frac{J \omega^2}{2}$$

Кинетическая энергия при плоском движении твёрдого тела. Вращение вокруг оси, проходящей через центр масс:

$$K = \sum_{i=n}^N \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_i \frac{m_i (\vec{v}_0 + \vec{u}_i)^2}{2} = \frac{\sum_i m_i (\vec{v}_0)^2}{2} + \frac{\sum_i m_i (\vec{u}_i)^2}{2} + \frac{2 \sum_i m_i (\vec{v}_0 \cdot \vec{u}_i)}{2} =$$

$$= \frac{\sum_i m_i (\vec{v}_0)^2}{2} + \frac{J \omega^2}{2} + (\vec{v}_0 \cdot \underbrace{(\sum_i m_i \vec{u}_i)}_{=p=0}) = \frac{\sum_i m_i (\vec{v}_0)^2}{2} + \frac{J \omega^2}{2}$$

\vec{v}_0 — скорость центра масс, \vec{u}_i — скорость точек относительно центра масс. Суммарный импульс относительно центра масс равен 0 по определению центра масс.

Чтобы найти работу при вращении твёрдого тела, необходимо воспользоваться вращением тела относительно любой оси:

$$K = \frac{J \omega^2}{2}$$

Необходимо воспользоваться теоремой о кинетической энергии.

$$dA = dK$$

$$dK = d \left(\frac{J \omega^2}{2} \right) = \frac{J}{2} \cdot \underbrace{2 \omega d\omega}_{d\omega^2} = J \omega \cdot d\omega$$

Основное уравнение вращательного движения вокруг закрепленной оси:

$$J \cdot \frac{d\omega}{dt} = M$$

ωdt — элементарное угловое перемещение.

$$dK = J \omega d\omega = \omega M dt = \underbrace{\omega dt}_{d\varphi} \cdot M = d\varphi \cdot M = dA$$

M — это M_{\parallel} (параллельное $\vec{\omega}$, коллинеарное угловой скорости).

Теорема 13.1. Теорема Кенига:

При плоском движении твёрдого тела кинетическая энергия равна сумме кинетической энергии поступательного движения и кинетической энергии вращательного движения.

Гироскопы, волчки. Движение гироскопа

Определение 13.1. Гироскоп — аксиально-симметричное твёрдое тело, вращающееся с большой угловой скоростью вокруг своей оси симметрии.

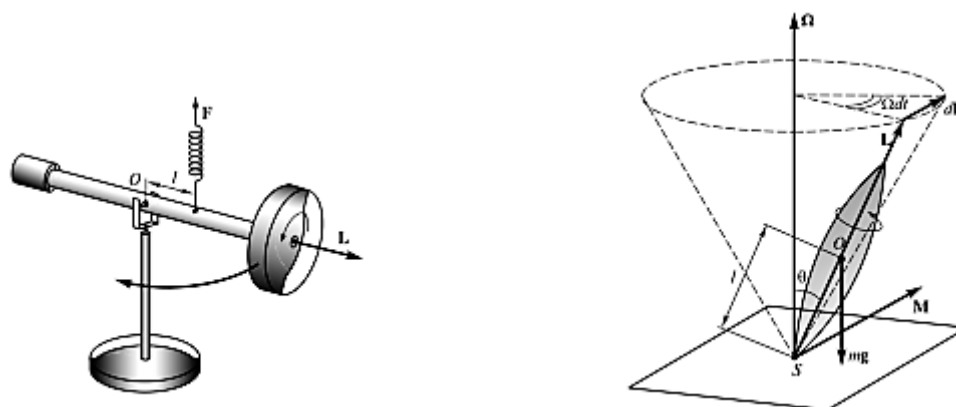


Рис. 13.1. Движение гироскопа

Уравнение момента записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{L}}{dt} &= \vec{M} \\ d\vec{L} &= [\vec{\Omega} \times \vec{L}]dt \\ \vec{\dot{L}} &= [\vec{\Omega} \times \vec{L}] \\ d\vec{L} &= \vec{M}dt \\ d\vec{L} &= [d\vec{\phi} \times \vec{L}]\end{aligned}$$

Угловое перемещение:

$$d\phi = \Omega dt$$

Окончательное уравнение для движения гироскопа:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left[\frac{d\vec{\phi}}{dt} \times \vec{L} \right] = [\vec{\Omega} \times \vec{L}] = \vec{M}$$

$\vec{L}(t)$ не меняется по величине. Не всегда гироскоп вращается вокруг оси, совпадающей с осью симметрии. Дрожание оси вращения — нутация.

Пример 13.1. Пусть J, ω, M гироскопа известны.

$$\Omega \cdot L = M \Rightarrow J \cdot \Omega \cdot \omega = M$$

Таким образом, угловая скорость прецессии:

$$\Omega = \frac{M}{J \cdot \omega}$$

Движение гироскопа. Гироскопические силы

Гироскопические силы стремятся совместить момент импульса гироскопа с направлением угловой скорости вынужденного поворота.

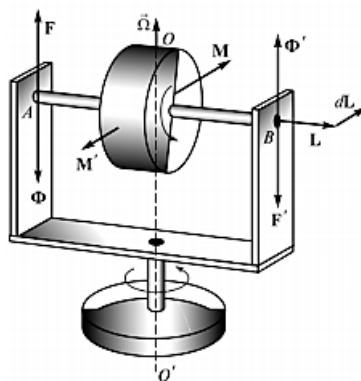


Рис. 13.2. Гироскопические силы

$$F_{\text{кор.}} = -2m[\vec{\Omega} \times \vec{v}]$$

Волчки

Если $F_{\text{тр}} = 0$, то центр масс покоится, точка опоры описывает окружность. Если $F_{\text{тр}} \neq 0$, то момент силы в этом случае записывается следующим образом:

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}_{\text{тр}}]$$

Действие силы трения будет приводить к тому, что центр тяжести будет подниматься.

Ось вращения гироскопа очень устойчива при вращении, и явлении прецессии и нутации можно наблюдать с помощью волчка. Особенность волчка в том, что центр

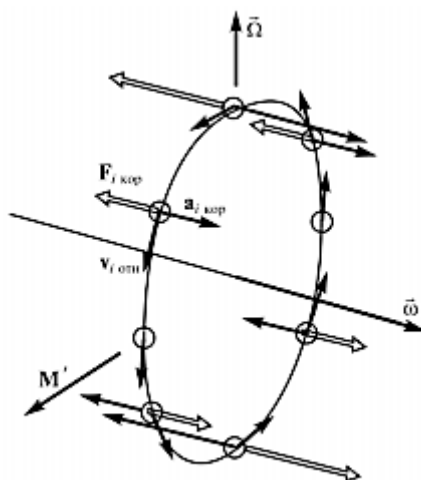


Рис. 13.3. Гирискон во вращении

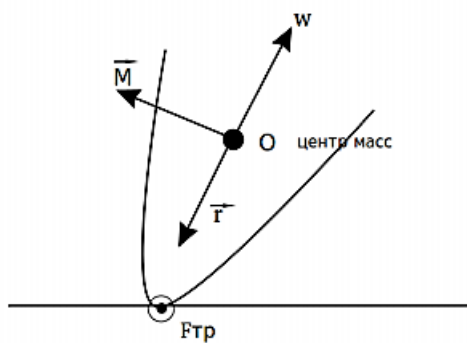
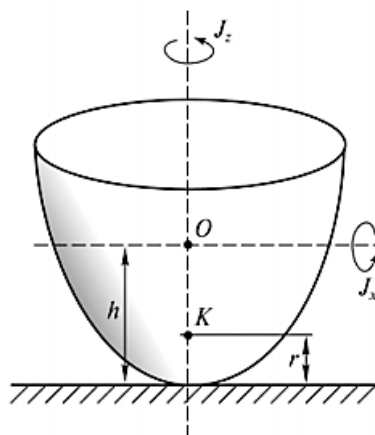
Рис. 13.4. $F_{тр} \neq 0$ 

Рис. 13.5. Устойчивость гироскопа

масс находится ниже, чем точка подвеса. Волчок всегда стремится занять такое положение, чтобы центр массы был выше.

O — центр тяжести (устойчивость вращения).

K — центр кривизны в точке касания.

$$\omega_{\text{критич}} = \left[\frac{(h-r)mg}{J_x \cdot \frac{r}{h} \left(\frac{J_z}{J_x} - \frac{r}{h} \right)} \right]^{1/2}$$

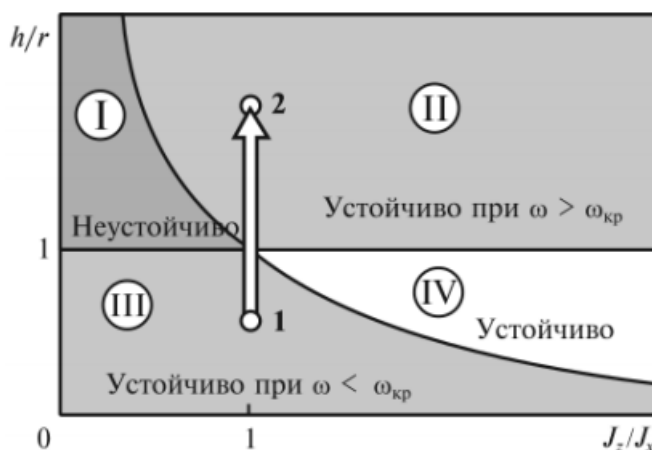


Рис. 13.6. Устойчивость вращения

В первой области движение не устойчивое. Во второй области движение устойчивое при $\omega > \omega_{\text{критич}}$. В третьей области движение устойчивое при $\omega < \omega_{\text{критич}}$. В четвертой области движение устойчивое всегда.

Кельтские камни — в одну сторону крутятся хорошо, в другую — плохо.

Гироскоп в кардановом подвесе — это гироскоп, который имеет три взаимно перпендикулярные оси вращения. При таком расположении гироскопа, он сохраняет направление осей вращения в пространстве, когда находится в кружении.

Чтобы увидеть прецессию гироскопа, необходимо сначала раскрутить его под действием внешнего момента сил и подвесить груз. Можно увидеть, как гироскоп вращается вокруг своей оси.

Прецессия под действием силы тяжести. Для этого используется гироскоп подвешенный на нити, который при раскручивании вращается вокруг своей оси и свободно висит после прецессии.

Лекция 14. Деформации и напряжения в твёрдых телах

Упругая и остаточная деформации. Закон Гука

Пусть есть стержень, к которой прикладывают силу F . S — площадь сечения стержня. l — длина стержня. Δl — изменение длины стержня.

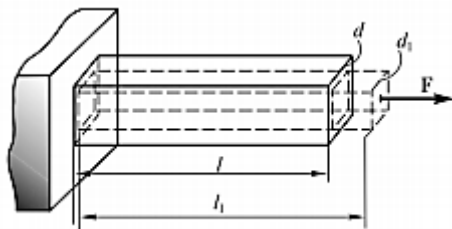


Рис. 14.1. Деформация стержня

$$l_1 - l = \Delta l$$

$$\frac{\Delta l}{l} \ll 1$$

$$\frac{\Delta l}{l} = \varepsilon$$

ε — относительное удлинение. Напряжение можно найти следующим образом:

$$\frac{F}{d} = \sigma$$

Необходимо построить график зависимости напряжения от относительной деформации.

П — предел пропорциональности.

У — предел упругости; (О - У) — упругие деформации.

Т — предел текучести; (У - Т) — необратимые деформации.

Р — разрыв.

Рассматривается область пропорциональной зависимости. Закон Гука записывается следующим образом:

$$\sigma = E\varepsilon$$

E — коэффициент пропорциональности, модуль Юнга.

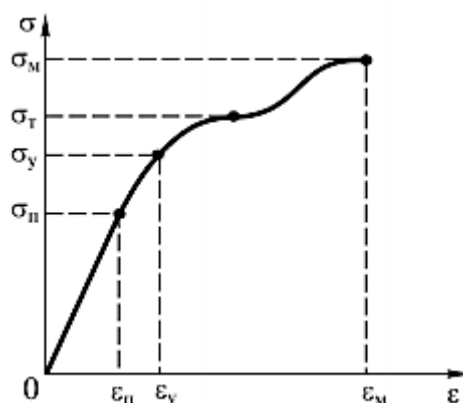


Рис. 14.2. График

Типы деформаций

- 1) Растяжение - сжатие. Расстояние между точками тела изменилось одинаково по всему телу.
- 2) Сдвиг. Закрепив нижнюю пластину, сдвинули всю систему пружинок в бок. Все точки на данной вертикали сместились одинаково при этом сдвиге.
- 3) Изгиб — различное растяжение и сжатие в различных частях тела.
- 4) Кручение — различный сдвиг в различных частях тела.

Растяжение - сжатие

$$\sigma = E\varepsilon$$

Сдвиг

$$\tau_1 = \tau_3$$

$$\tau_2 = \tau_4$$

$$\tau_1 = \tau_2$$

$$\tau_3 = \tau_4$$

$$\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4$$

Закон Гука для сдвига:

$$\tau = G\gamma$$

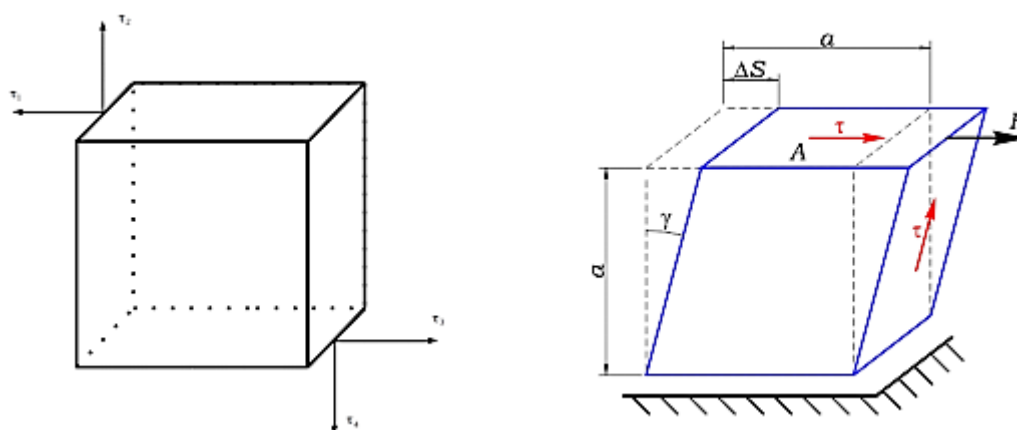


Рис. 14.3. Деформация сдвига

Материал	Модуль Юнга (ГПа)	Модуль сдвига (ГПа)	Предел текучести (ГПа)	Предел прочности при растяжении (ГПа)
Сталь	200-210	77-81	0.19-0.31	0.32-0.71
Медь	110-130	41.5-44	0.07	0.22
Алюминий	69-72	25-26.5	0.022	0.05
Свинец	14-18	5.5-8	0.005	0.014-0.018

Рис. 14.4. Деформация разных материалов

G — модуль сдвига.

Изгиб

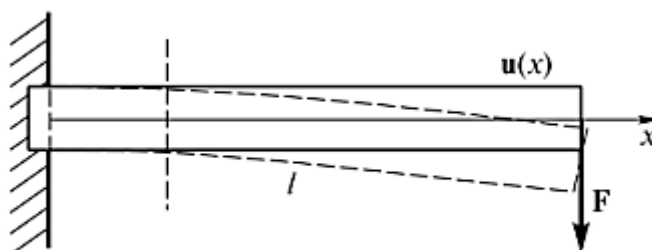


Рис. 14.5. Деформация изгиба

На конец стержня действует сила, что приводит к тому, что стержень наклоняется.

λ — стрела прогиба. Для анализа этой деформации обычно используют гипотезу Бернулли. При деформации изгиба внутри элементарного объема действует и про-

является деформация растяжения-сжатия. Верхние слои растягиваются, а нижние — сжимаются. Стрела прогиба записывается следующим образом:

$$\lambda = u(l) = \frac{F}{E \cdot J} \cdot \frac{l^3}{3}$$

Момент инерции записывается как:

$$J = \int_{-b/2}^{b/2} a(y)y^2 dy$$

Деформация кручения

Деформация кручения сопровождается деформацией сдвига.

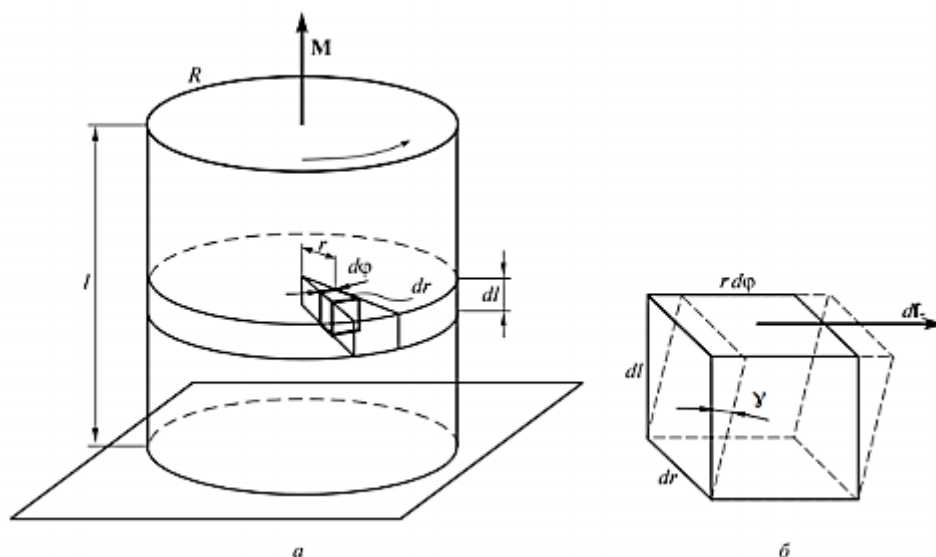


Рис. 14.6. Деформация кручения

$$M = \frac{G\pi R^4}{2l} \cdot \omega$$

Составляется система уравнений:

$$\frac{\omega}{l} = \frac{d\omega}{dl}$$

$$\gamma \cdot dl = d\omega \cdot r$$

Закон Гука:

$$\tau = G \cdot \gamma$$

Сила действует по касательной:

$$dF_{\parallel} = \tau dS = \tau \cdot 2\pi r dr$$

Момент силы относительно оси:

$$dM = dF_{\parallel} \cdot r$$

Момент силы для всего стержня:

$$M = \int_0^R dM$$

Необходимо найти связь:

$$dF_{\parallel} = \tau \cdot 2\pi r dr = G\gamma 2\pi r dr = G \frac{d\omega}{dl} \cdot r \cdot 2\pi r dr = G \frac{\omega}{l} \cdot 2\pi r^2 dr =$$

Для момента силы:

$$dM = dF_{\parallel} \cdot r = G \frac{\omega}{l} \cdot 2\pi r^3 dr$$

Таким образом, окончательное выражение для момента сил записывается следующим образом:

$$M = \int_0^R dM = \int_0^R G \frac{\omega}{l} \cdot 2\pi r^3 dr = G \frac{\omega}{l} \cdot 2\pi \frac{1}{4} R^4$$



Рис. 14.7. Весы Кулона

Коэффициент Пуассона

Если растягивать тело в одном направлении, то его поперечные размеры меняются.

$$\varepsilon_{\perp} = \frac{\Delta l_{\perp}}{l_{\perp}}; \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

Коэффициент Пуассона записывается следующим образом:

$$\mu = -\frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon}$$

Пусть есть куб с ребрами l . После деформации:

$$V' - V = \Delta V = (l + \Delta l)(l + \Delta l_{\perp})^2 - l^3 = l^3 \cdot \underbrace{(1 + \varepsilon)(1 + \varepsilon'_{\perp})^2}_{=(1+\varepsilon)(1+2\varepsilon_{\perp})=1+\varepsilon+2\varepsilon_{\perp}} - l^3$$

$$l^3 \varepsilon + l^3 \cdot 2\varepsilon_{\perp} = l^3 \varepsilon \left(1 + 2\frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon}\right) = l^3 \varepsilon (1 - 2\mu) \geq 0$$

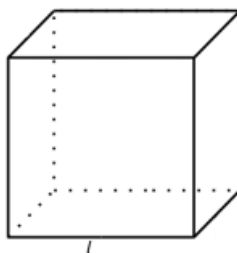


Рис. 14.8. Куб с ребрами l

Объём не может уменьшиться. Следовательно:

$$\mu \leq 0,5$$

Связь между модулем Юнга и модулем сдвига

Вводится система координат.

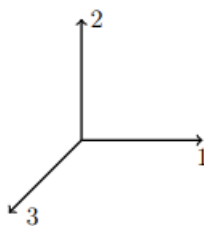


Рис. 14.9. Система координат

Деформация растяжения - сжатия вдоль оси 1:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E}$$

Если $\sigma_1 = 0$, но $\sigma_2 \neq 0, \sigma_3 \neq 0$, то возникнет деформация и в продольном направлении:

$$\varepsilon_1 = -\mu \frac{\sigma_2}{E} - \mu \frac{\sigma_3}{E}$$

В общем случае, когда $\sigma_1 \neq \sigma_2, \sigma_3 \neq 0$:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)) = \frac{1}{E}(\sigma_1(1 + \mu) - \mu(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3))$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2(1 + \mu) - \mu(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3))$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}(\sigma_3(1 + \mu) - \mu(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3))$$

В общем случае ε — это тензор деформации.

Пример 14.1. Рассматривается всестороннее сжатие.

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$$

Рассматривается разность объема:

$$V' - V = (l_1 + \Delta l_1)(l_2 + \Delta l_2)(l_3 + \Delta l_3) - l_1 l_2 l_3 = \Delta l_1 l_2 l_3 + l_1 \Delta l_2 l_3 + l_1 l_2 \Delta l_3$$

$$\underbrace{\frac{V' - V}{V}}_{=l_1 l_2 l_3} = \frac{\Delta l_1 \cdot \cancel{l_2 l_3}}{l_1 \cdot \cancel{l_2 l_3}} + \frac{\Delta l_2}{l_2} + \frac{\Delta l_3}{l_3} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

Таким образом, можно получить модуль всестороннего сжатия:

$$\frac{1}{E} \sigma (3(1 + \mu) - 3\mu \cdot 3) = \frac{1}{E} \sigma \cdot 3 \cdot (1 + \mu - 3\mu) = \underline{\underline{\frac{3\sigma}{E} (1 - 2\mu)}}$$

Пример 14.2. Рассматривается деформация сдвига.

$$\Delta V = 0$$

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$$

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{1}{E}((1 + \mu)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) - 3\mu(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)) = 0$$

$$\underline{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0} \quad (\mu \neq 0)$$

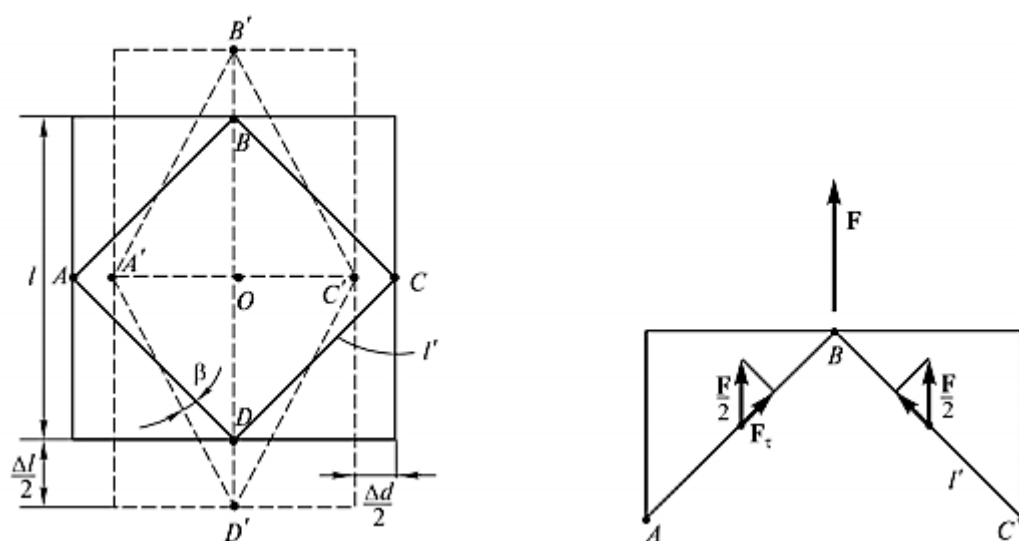


Рис. 14.10. Деформация сдвига

Рассматривается стержень с квадратным сечением. На эту стержень действуют силы F_1, F_2 . Напряжение имеет следующее выражение:

$$\sigma_1 = \frac{F_1}{l \cdot l_3}$$

$$\sigma_2 = \frac{F_2}{l \cdot l_3}$$

Пусть $\sigma_3 = 0$:

$$\sigma_1 + \sigma_2 = 0$$

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = -\sigma$$

$$\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = -\varepsilon$$

$$FF' = \frac{\varepsilon}{2}l$$

$$FF' \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\gamma}{2} \cdot \frac{a}{2}$$

$$\frac{\gamma}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{\varepsilon}{2} \cdot l \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{\gamma}{2} = \varepsilon$$

$$a = l \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\gamma}{2} \cdot \frac{l \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{l \cdot 2}{2} \Rightarrow \frac{\gamma}{2} = \varepsilon$$

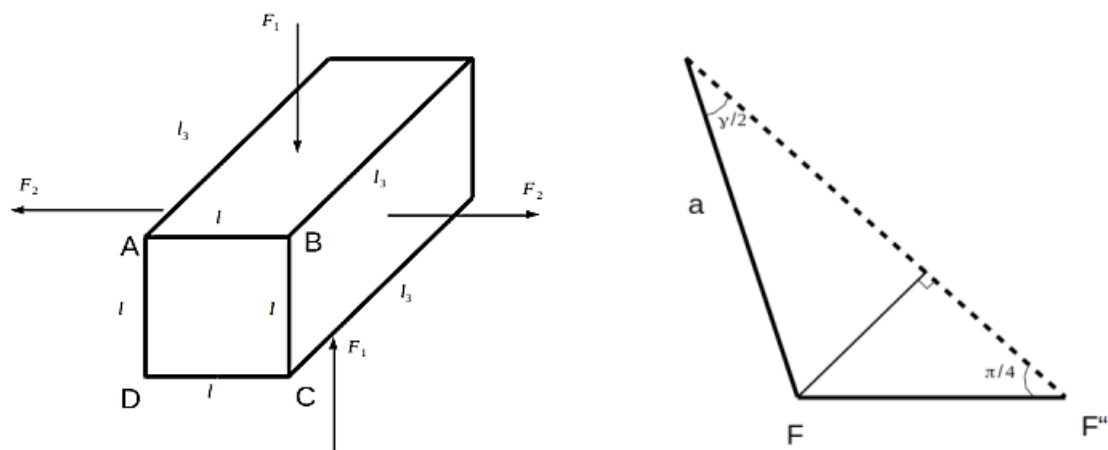
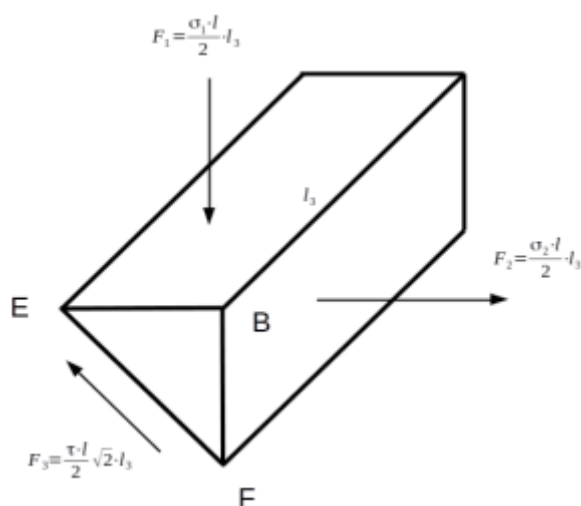


Рис. 14.11. Стержень с квадратным сечением

Рис. 14.12. Призма EBF

Необходимо найти связь между τ и σ . Для этого рассматривается призма EBF .

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$$

$$\left(\tau \cdot \frac{l}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot l_3 \right)^2 = 2 \left(\sigma \frac{l}{2} \cdot l_3 \right)^2$$

$$\tau^2 \cdot \frac{2}{4} = 2 \cdot \sigma^2 \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow \tau = \sigma$$

$$\varepsilon = \frac{1}{E}((1 + \mu) \cdot \sigma + 0)$$

$$\frac{\gamma}{2} = \varepsilon = \frac{1}{E}((1 + \mu) \cdot \tau)$$

Следовательно, связь между модулем Юнга и модулем сдвига следующая:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

Каждый материал имеет свой предел упругости, и если превысить этот предел, то можно наблюдать остаточную деформацию. Если одновременно подвергнуть свинцовую, медную и стальную пластины деформации, то будет видно, что свинцовая сильно деформировалась и не вернулась в первоначальное положение, и только стальная вернулась в начальное положение.

Необходимо поставить А4 между двумя столиками. Положить груз на него не получится, потому что бумага прогибается под собственным весом. Но если изменить поперечное сечение (раскрутить бумагу), то получится подвесить груз. Это показывает то, как прочность тела зависит от формы поперечного сечения.

Лекция 15. Колебания

Свободные колебания систем с одной степенью свободы.

Свободные колебания в простейших консервативных системах

Определение 15.1. Колебания — движения или состояния, обладающие той или иной степенью повторяемости во времени.

Колебаниями называют ограниченные и чаще всего повторяющиеся движения в окрестности некоторого среднего положения (например, устойчивого положения равновесия).

Механическая энергия равна сумме колебательной энергии и начальной энергии в растянутой пружине в положении равновесия. Рассматривается маятник на пружине:

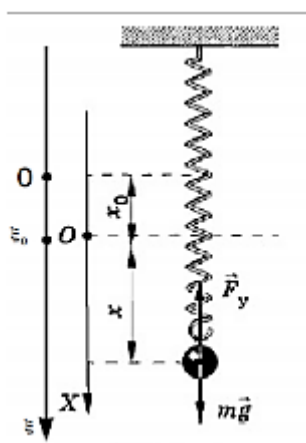


Рис. 15.1. Маятник на пружине

$\xi = 0$ — положение маятника при не растянутой пружине.

ξ_0 — положение равновесия. В положении равновесия:

$$F_{\text{упр}} + mg = 0$$

$$F_{\text{упр}} = -k\xi_0$$

$$k\xi_0 = mg$$

Записывается уравнение движения этого тела:

$$ma = m\ddot{\xi} = F_{\text{упр}} + mg = -k\xi + mg = -k\xi + k\xi_0 = -k \underbrace{(\xi - \xi_0)}_x$$

Уравнение движения можно переписать в следующем виде:

$$ma = m\ddot{\xi} = m\ddot{x} = -kx$$

Уравнение колебания записывается следующим образом:

$$\ddot{x} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_0^2} x = 0$$
$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

В общем виде уравнение имеет следующий вид:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Предполагается, что решением этой задачи является следующая функция:

$$x = A_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$
$$\dot{x} = -A_0 \cdot \omega \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$
$$\ddot{x} = -A_0 \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$
$$-A_0 \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega t + \varphi) + A_0 \cdot \omega_0^2 \cdot \cos(\omega t + \varphi) = 0$$
$$\omega = \omega_0$$

Таким образом, данная функция является решением этого уравнения, если $\omega = \omega_0$:

$$x = A_0 \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

x — смещение от положения равновесия.

A_0 — амплитуда колебаний.

ω_0 — циклическая частота.

Фаза колебаний:

$$\omega_0 t + \varphi = \phi$$

φ — начальная фаза.

Рассматривается соотношение сдвиг фаз со скоростью:

$$x = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$
$$v = \dot{x} = -A_0 \omega_0 (\sin(\omega_0 t + \varphi)) = A_0 \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$
$$a = \ddot{x} = -A_0 \omega_0^2 (\cos(\omega_0 t + \varphi)) = A_0 \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi)$$

Смещение, скорость и ускорение меняются по гармоническому закону. При этом скорость опережает по фазе на $\frac{\pi}{2}$, а ускорение — по фазе на π .

Пример 15.1. Роль начальных условий. Пусть начальный момент времени:

$$x(0) = x_0$$

$$v(0) = v_0$$

Необходимо найти амплитуду колебаний A_0 и начальную фазу колебаний φ .

$$x(0) = A_0 \cos(0 + \varphi) = x_0$$

$$v(0) = -A_0 \omega_0 \sin(\varphi) = v_0$$

$$\underbrace{A_0^2 \cos^2 \varphi + A_0^2 \sin^2 \varphi}_{A_0^2} = x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0} \right)^2$$

Таким образом, амплитуда колебания:

$$\underline{A_0^2 = x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0} \right)^2}$$

$$-\frac{A_0 \omega_0 \sin \varphi}{A_0 \cos \varphi} = -\omega_0 \operatorname{tg} \varphi = \frac{v_0}{x_0}$$

Следовательно, начальная фаза колебаний:

$$\underline{\operatorname{tg} \varphi = -\frac{v_0}{\omega_0 x_0}}$$

Без начальных условий невозможно определить амплитуду и начальную фазу колебаний.

Энергетическое соотношение записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} E_{\text{колеб}} &= E_{\text{мех}} - \frac{k\xi_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{k\xi^2}{2} - mgx - \frac{k\xi_0^2}{2} = \\ &= \frac{mv^2}{2} + \frac{k(\xi_0 + x)^2}{2} - mgx - \frac{k\xi_0^2}{2} = \\ &= \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} + \frac{k\xi_0^2}{2} + \frac{kx\xi_0}{1} - mgx - \frac{k\xi_0^2}{2} \end{aligned}$$

В положении равновесия:

$$k\xi_0 = mg \Rightarrow kx\xi_0 = mgx$$

$$E_{\text{колеб}} = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = E_{\text{кин}} + E_{\text{пот}}$$

$$E_{\text{пот}} = \frac{kA_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)}{2} = \frac{kA_0^2}{2} \cdot \left(\frac{1 + \cos(2(\omega_0 t + \varphi))}{2} \right)$$

$E_{\text{пот}}$ по гармоническому закону, но с удвоенной частотой:

$$E_{\text{кин}} = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA_0^2 \cdot \omega_0^2 \cdot \sin^2(\omega_0 t + \varphi)}{2} = \frac{mA_0^2 \cdot \omega_0^2}{2} \cdot \left(\frac{1 - \cos(2(\omega_0 t + \varphi))}{2} \right)$$

$E_{\text{кин}}$ тоже по гармоническому закону на удвоенной частоте:

$$E_{\text{кин}} + E_{\text{пот}} = \frac{kA_0^2}{2} \left(2 \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{kA_0^2}{2}$$

$$mA_0^2 \cdot \omega_0^2 = mA_0^2 \cdot \frac{k}{m} = kA_0^2$$

Так как система консервативная, силы трения в ней нет.

Затухающие колебания

Рассматривается маятник, который может двигаться в жидкости.

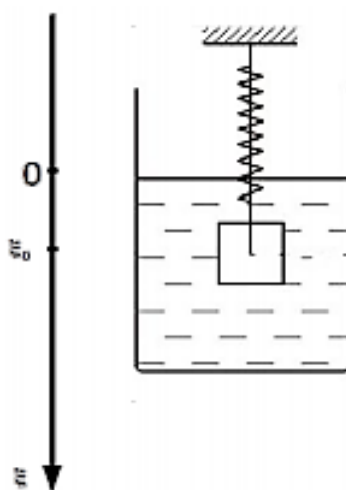


Рис. 15.2. Маятник

Действуют 3 силы:

$$f_{\text{упр}} = -k\xi$$

$$f_{\text{тр}} = -\eta \dot{\xi}$$

$$f_{\text{г}} = mg$$

Уравнение движения имеет следующий вид:

$$ma = m\ddot{\xi} = -k\xi - \eta \dot{\xi} + mg$$

Вводится новая переменная:

$$x = \xi - \xi_0$$

$$\dot{x} = \dot{\xi}$$

Происходит замена переменных:

$$m\ddot{x} = -k\xi - \eta\dot{\xi} + k\xi_0 = -kx - \eta\dot{\xi}$$

$$m\ddot{x} + \eta\dot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{\eta}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad 2\delta = \frac{\eta}{m}$$

Окончательное уравнение:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Предполагается, что решением этого уравнения является функция:

$$x = A_0 e^{-\gamma t} \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\dot{x} = A_0(-\gamma)e^{-\gamma t} \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi) + A_0 e^{-\gamma t}(-\omega_0) \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= A_0 \gamma^2 \cdot e^{-\gamma t} \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi) + A_0(-\gamma)e^{-\gamma t}(-\omega_0) \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi) + \\ &+ A_0(-\gamma)e^{-\gamma t}(-\omega_0) \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi) + A_0 e^{-\gamma t}(-\omega_0) \cdot \omega_0 \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi) = \\ &= A_0 e^{-\gamma t} [\cos(\omega_0 t + \varphi)(\gamma^2 - \omega_0^2) + \sin(\omega_0 t + \varphi) \cdot (\gamma\omega_0 + \omega_0\gamma)] \end{aligned}$$

Уравнение колебаний:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\begin{aligned} &A_0 e^{-\gamma t} [\cos(\omega t + \varphi)(\gamma^2 - \omega^2) + \sin(\omega t + \varphi) \cdot 2\gamma\omega + \\ &+ 2\delta \cos(\omega t + \varphi)(-\gamma) + 2\delta \sin(\omega t + \varphi)(-\omega) + \omega_0^2 \cdot \cos(\omega t + \varphi)] = \\ &= A_0 e^{-\gamma t} [\cos(\omega t + \varphi)(\gamma^2 - \omega^2 - 2\delta\gamma + \omega_0^2) + \sin(\omega t + \varphi)(2\omega\gamma - 2\omega\delta)] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \gamma^2 - \omega^2 - 2\delta\gamma + \omega_0^2 = 0 \\ 2\omega\gamma - 2\omega\delta = 0 \end{cases}$$

Таким образом, можно получить следующие значения:

$$\delta = \gamma$$

$$\gamma^2 - \omega^2 - 2\delta^2 + \omega_0^2 = 0$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

Затухающие колебания происходят не на собственной частоте ω_0 , а на сдвинутой частоте на δ . Окончательный вид решения уравнения движения выглядит следующим образом:

$$x = A_0 e^{-\delta t} \cdot \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \cdot t + \varphi)$$

δ — коэффициент затухания. Рассматривается отношение амплитуд:

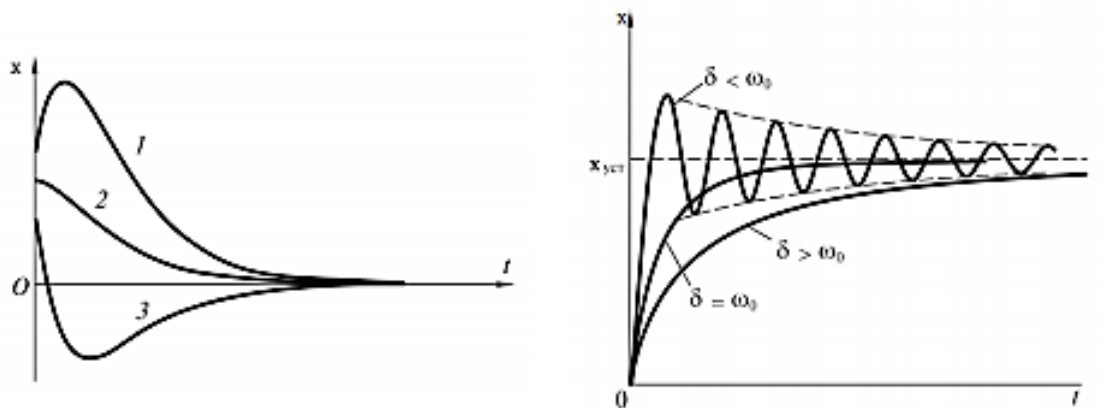


Рис. 15.3. Вид колебаний

$$\frac{A_N}{A_{N+1}} = \frac{A_0 e^{-\delta t_N}}{A_0 e^{-\delta t_{N+1}}} = \frac{e^{-\delta N \cdot T}}{e^{-\delta (N+1)T}} = e^{\delta T}$$

Логарифмический декремент затухания записывается следующим образом:

$$\ln \frac{A_N}{A_{N+1}} = \delta T = \theta$$

τ — время затухания.

$$\tau = \frac{1}{\delta}$$

За это время амплитуда уменьшается в e раз.

$$A_0 e^{-\delta t} = A_0 e^{-1} = \frac{A_0}{e}$$

Число колебаний, за которое амплитуда уменьшается в e раз, определяется следующим образом:

$$N = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{\delta T} = \frac{1}{\theta}$$

Следовательно, можно получить выражение для добротности:

$$Q = \frac{2\pi}{2\theta} = \frac{\pi}{\theta}$$

Рассматривается как период колебаний зависит от момента инерции. Для этого используется крутильный маятник. Подвешиваются два одинаковых груза на края маятника. Пока груз находится на концах, момент инерции большой и период колебаний тоже большой. Дальше груз сдвигается к центру. Момент инерции маленький, что означает период колебаний тоже маленький.

Рассматривается вертикальное колебание. Для этого используются две пружины разной жесткости, и необходимо определить от чего зависит период колебания. Груз подвешивается к первой пружине. Тот же самый груз подвешивается ко второй пружине, у которой жесткость больше. У второй пружины период колебаний уменьшился. Период колебаний зависит от жесткости пружин. Уравновесив жесткости, можно определить, что период колебаний также зависит от массы подвешенных грузов.

Есть маятник, который совершает гармонические колебания, и если ничего на него не действует, то колебание может продолжаться долго. Если к концу маятника прикрепить лопатку, то сопротивление воздуха увеличивается, и период колебаний уменьшается. Если опустить маятник с лопаткой в сосуд с водой, то можно увидеть меньше колебаний. Чем больше сопротивление окружающей среды, тем меньше период колебаний.

На период колебаний действует сила. Для этого используют постоянный магнит и магнитную стрелку. Чем больше внешняя сила, тем меньше период колебаний.

Гармонические колебания можно представить как движение шарика по окружности. Для этого имеются два шарика на оси колеса и маятник, подвешенный сверху. Можно определить основные закономерности движения гармонических колебаний. Можно определить как изменяется скорость, и как изменяется центростремительное ускорение. Для этого есть шарик со стрелкой. Первый случай, когда стрелка направлена таким образом, чтобы она показывала направление скорости (по касательной к колесу).

Определить величину скорости можно по длине тени стрелки на экране. Если шарик при гармонических колебаниях находится в крайней точке от положения равновесия, то тень стрелки минимальна. Значит скорость в этой точке минимальна.

А когда шарик проходит положение равновесия, и тень от стрелки максимальна, значит и скорость в этой точке максимальна. Второй случай, когда стрелка направлена к центру для определения центростремительного ускорения. Когда тень стрелки максимальна, центростремительное ускорение максимально. А когда шарик проходит через равновесие, тень стрелки минимальна, а значит и центростремительное ускорение минимальное.

Лекция 16. Затухающие и вынужденные колебания

Затухающие колебания

E_N — энергия на N -том колебании:

$$x = A_0 \cdot e^{-\delta t} \cdot \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \cdot t + \varphi)$$

$$E_N = \frac{k(A_{0N})^2}{2}$$

$$A_{0N} = A_0 \cdot e^{-\delta N T}$$

Таким образом, получается следующее:

$$E_N = \frac{k(A_0 \cdot e^{-\delta N T})^2}{2}$$

Рассматривается отношение:

$$\frac{E_N}{E_{N+1}} = \frac{k(A_0 \cdot e^{-\delta N T})^2 \cdot 2}{2 \cdot k(A_0 \cdot e^{-\delta(N+1)T})^2} = \frac{e^{-2\delta N T}}{e^{-2\delta(N+1)T}} = e^{2\delta T}$$

$$\frac{E_N - E_{N+1}}{E_N} = 1 - e^{-2\delta T} \approx 1 - (1 - 2\delta T) = 2\delta T = 2\theta$$

θ — логарифмический декремент затухания. Добротность записывается следующим образом:

$$Q = \frac{E_N - E_{N+1}}{E_N} \cdot 2\pi = \frac{2\pi}{2\theta} = \frac{\pi}{\theta}$$

Добротность — насколько быстро меняется энергия колебаний (как быстро спадает амплитуда колебаний).

Вынужденные колебания. Уравнение вынужденных колебаний и его решение

Уравнение движения:

$$m\ddot{x} = -kx - \eta\dot{x} + \underbrace{F_0 \cos \omega t}_{\text{вынуждающая сила}}$$

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t$$

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t + \varphi_0) + \underbrace{A_0 \cdot e^{-\delta t} \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi)}_{\text{решение однородного уравнения}(\dots=0)}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

Через большой промежуток времени второе слагаемое затухнет и останется только первое. Это уравнение можно решить 2 методами: метод векторных диаграмм и метод комплексных величин.

Метод векторных диаграмм

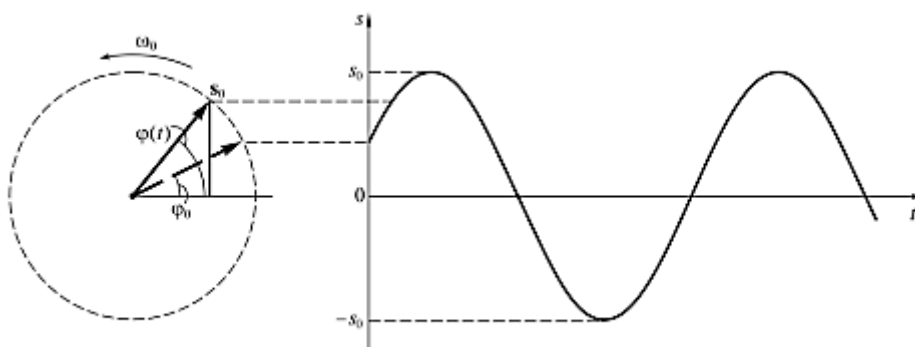


Рис. 16.1. Метод векторных диаграмм

$$x(t) = (\vec{s})_x = A_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$|\vec{s}| = A_0$$

Если есть 2 вектора, то рассматривается сумма этих векторов:

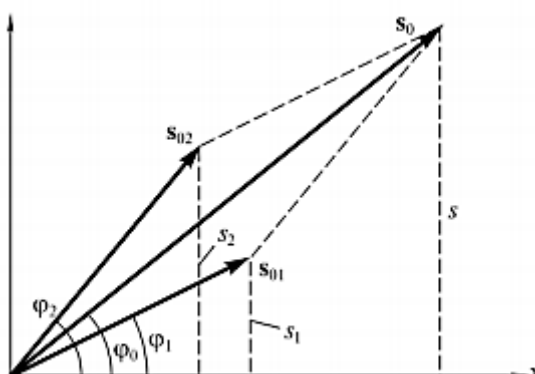


Рис. 16.2. Метод векторных диаграмм

$$\vec{s}_0 = \vec{s}_{01} + \vec{s}_{02}$$

$$(\vec{s}_0)_x = (\vec{s}_{01} + \vec{s}_{02})_x = (\vec{s}_{01})_x + (\vec{s}_{02})_x$$

В данном случае можно применить следующее выражение:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t$$

Необходимо написать соотношение между векторами:

$$x = x_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$\dot{x} = x_0 \cdot \omega \cdot \cos\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\ddot{x} = x_0 \omega^2 \cdot \cos(\omega t + \varphi_0 + \pi)$$

У f_0 нет начальной фазы \Rightarrow ось x вдоль f_0 . По теореме Пифагора:

$$x_0^2 (2\delta\omega)^2 + x_0^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2 = f_0^2$$

$$x_0 = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = -\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = -\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Метод комплексных величин

$$\tilde{x}(t) = x(t) + iy(t)$$

\tilde{x} — комплексная величина.

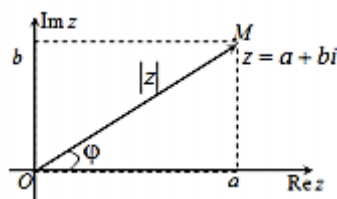


Рис. 16.3. Метод комплексных величин

$$\tilde{x}(t) = \operatorname{Re} \tilde{x}(t) + i \operatorname{Im} \tilde{x}(t)$$

$$x(t) = \operatorname{Re} \tilde{x}(t) = x_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$y(t) = \operatorname{Im} \tilde{x}(t) = x_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

Полное решение выглядит следующим образом:

$$\tilde{x}(t) = x_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) + i \cdot x_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

Свойства:

$$c = a + ib$$

$$(i)^2 = -1$$

$$|c| = \sqrt{c \cdot c^*} = \sqrt{(a + ib)(a - ib)} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$i = e^{i\pi/2}$$

$$\cos \alpha + i \sin \alpha = e^{i\alpha}$$

$$c = |c| \cdot e^{i \cdot \arctan\left(\frac{\text{Re} c}{\text{Im} c}\right)} = |c| \cdot e^{i \cdot \arctan(b/a)}$$

Уравнение вынужденных колебаний и его решение

$$e^\alpha \approx 1 + \alpha$$

$$\ddot{\tilde{x}} + 2\delta \dot{\tilde{x}} + \omega_0^2 \tilde{x} = f_0 \cdot e^{i\omega t}$$

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t$$

Предполагается, что решение имеет следующий вид:

$$\tilde{x}(t) = x_0 \cdot e^{i(\omega t + \varphi_0)}$$

$$\dot{\tilde{x}}(t) = x_0(i\omega) \cdot e^{i(\omega t + \varphi_0)}$$

$$\ddot{\tilde{x}}(t) = x_0(i\omega)^2 \cdot e^{i(\omega t + \varphi_0)} = -x_0\omega^2 \cdot e^{i(\omega t + \varphi_0)}$$

$$x_0 \cdot e^{i(\omega t + \varphi_0)} \cdot (-\omega^2 + 2\delta i\omega + \omega_0^2) = f_0 \cdot e^{i\omega t}$$

$$\begin{aligned} x_0 \cdot e^{i\varphi_0} &= \frac{f_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\delta\omega i} = \\ &= \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2} \cdot e^{i \cdot \arctan \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}}} = \end{aligned}$$

$$= \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}} \cdot e^{-i \cdot \arctan \frac{2\delta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}}$$

Таким образом, решение уравнения записывается следующим образом:

$$\begin{cases} x_0 = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}} \\ \varphi = -\arctan \frac{2\delta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \end{cases}$$

Резонанс. Амплитудные и фазовые резонансные кривые

Необходимо найти резонанс при $\delta \ll \omega_0$:

$$\frac{d((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2)}{d(\omega^2)} = 0$$

$$2(\omega_0^2 - \omega^2)(-1) + 4\delta^2 = 0$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 - 2\delta^2$$

Резонансная частота вынужденных колебаний записывается в следующем виде:

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$

$$x_{0\text{рез}} = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_{\text{рез}}^2)^2 + 4\delta^2 \omega_{\text{рез}}^2}} \stackrel{\delta \ll \omega_{\text{рез}}}{=} \frac{f_0}{2\delta \omega_0}$$

Резонанс скорости наблюдается при частоте ω_0 .

Работа внешней силы

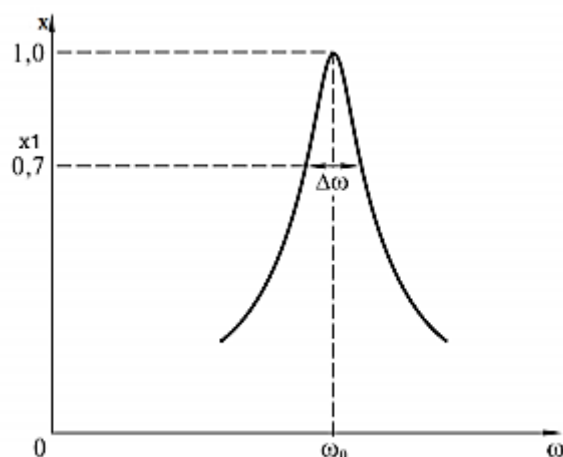
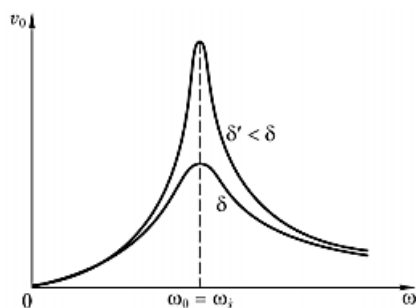
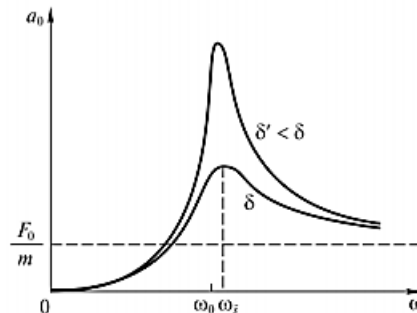
N — средняя мощность.

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot v(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T f_0 \cos(\omega t) \cdot v_0 \cos(\omega t + \varphi_v) dt = \\ &= \frac{1}{T} v_0 f_0 \cdot \int_0^T \frac{1}{2} \left(\cos \frac{2\omega t + \varphi_v}{1} + \cos \varphi_v \right) dt = \frac{1}{T} \cdot \frac{v_0 f_0}{2} \cdot \cos \varphi_v \cdot T = \frac{v_0 \cdot f_0 \cdot \cos \varphi_v}{2} \end{aligned}$$

Добротность определяется следующим образом:

$$Q = \frac{x_{0\text{рез}}}{x_{0\text{ст}}} = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{2\pi}{2\delta T} = \frac{\pi}{\theta}$$

Вынужденные колебания математического маятника. Длины маятников разные. Один маятник тяжелый и он считается маятником возбудителем. Остальные маятники называются маятниками приемниками. Длина одного маятника приемника имеет

Рис. 16.4. Зависимость x_0 от ω Рис. 16.5. Зависимость v_0 от ω Рис. 16.6. Зависимость a_0 от ω

такую же длину, как у маятника возбудителя. Если вынести эту систему из положения равновесия, то возникают определенные закономерности. С большей частотой колеблется маленький, у которого длина совпадает с длиной маятника возбудителя. Если собственная частота маятников приемников намного больше, чем собственная частота маятника возбудителя, то они колеблются в фазе. Если собственная частота маятников приемников намного меньше, чем маятника возбудителя, то они колеблются против фазы.

Явление резонанса можно рассмотреть с помощью гироскопа Фрама, который заключен в кольцевую оправу и сверху закреплена гребенка, которая состоит из тонких пластинок разной длины. Если вывести гироскоп из состояния равновесия, то из-за трения его частота вращения будет постоянно уменьшаться. И как только частота гироскопа совпадет с собственной частотой одной из пластинок, возникает явление резонанса, резкое увеличение амплитуды.

Частотомер представляет собой набор ферромагнитных пластинок, одинаковой

длины, но разной толщины. Вдоль пластинок движется электромагнит который присоединен к сети а значит его частота 50 Гц. Сверху шкала герцев. При движении электромагнитов вдоль этих пластин одна из пластин будет иметь частоту в два раза больше, чем частота электромагнита, то можно услышать характерный звук явления резонанса.

Используются два камертона одинаковой частоты. У ножки одного из камертонов висит шарик индикатор. Если возбудить один камертон, то возникает звуковая волна. И если его установить напротив такого же камертона, то можно увидеть явление резонанса. Если ножки камертона колеблются, то шарик должен двигаться.

Лекция 17. Биения. Колебания в связанных системах

Соотношение между силами при резонансе

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t$$

Сила упругости записывается следующим образом:

$$F_{\text{упр}} = -kx = -kx_0 \cos(\omega t + \varphi_x)$$

$$(F_{\text{упр}})_0 = -kx_0 = -k \frac{f_0}{2\delta\omega_0} = -\frac{k}{m} \frac{m \cdot f_0}{2\delta\omega_0} = -\frac{\omega_0}{2\delta} \cdot F_0$$

При малых δ сила упругости имеет следующее значение:

$$F_{\text{упр}} \gg F_0$$

Сила трения записывается следующим образом:

$$F_{\text{тр}} = -v\dot{x} = -2\delta m\dot{x} = -2\delta m \cdot v_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Коэффициент вязкости имеет следующий вид:

$$\frac{v}{m} = 2\delta$$

$$(F_{\text{тр}})_0 = -2\delta m \cdot \frac{f_0}{2\delta} = -m \cdot f_0 = -F_0$$

Установление колебаний

Решение уравнения колебаний записывается следующим образом:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t + \varphi_0) + A_0 \cdot e^{-\delta t} \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi)$$

Необходимо понять как происходит установление колебаний в маятниках. Пусть на резонансной частоте:

$$\omega_1 = \omega \approx \omega_0$$

$$\delta \ll \omega_0$$

Предполагается что в начальный момент времени:

$$x(0) = 0$$

$$v(0) = 0$$

Тогда:

$$x(0) = x_0 \cos(0 + \varphi_0) + A_0 \cdot e^0 \cdot \cos(0 + \varphi) = 0$$

Если использовать $v(0) = 0$, то получится:

$$\chi_0 = A_0 \quad \varphi_0 = \varphi$$

$$\chi(t) = \chi_0 \cos(\omega t + \varphi_0)(1 - e^{-\delta t})$$

При $t = 0$:

$$1 - e^{-\delta t} = 0$$

При $t \rightarrow \infty$:

$$e^{-\delta t} = 0$$

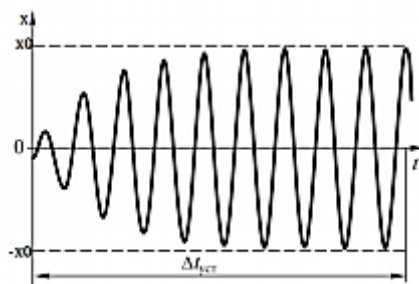


Рис. 17.1. Установление колебаний

Если частоты отличаются от резонансной частоты, то возможно могут быть и биения.

Сложение колебаний. Биения

Пусть 2 колебания происходят в одном направлении. Смещение от положения равновесия для первого колебания:

$$x(t) = x_1 + x_2 = x_{10} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + x_{20} \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Пусть:

$$\omega_1 \approx \omega_2 \quad x_{10} = x_{20} = x_0$$

$$x(t) = x_0 (\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \cos(\omega_2 t + \varphi_2)) =$$

$$= 2x_0 \cdot \cos\left(\frac{(\omega_2 - \omega_1)t}{2} + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{(\omega_2 + \omega_1)t}{2} + \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}\right)$$

$$\frac{(\omega_2 + \omega_1)t}{2} \approx \omega_1 t \approx \omega_2 t$$

Наблюдается период:

$$T = \frac{\pi(n + \frac{1}{2})}{\frac{(\omega_2 - \omega_1)k}{2}}$$

$$\frac{(\omega_2 - \omega_1)}{2} kT = \pi n + \frac{1}{2}$$

Период биений записывается следующим образом:

$$T = \frac{\pi}{\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}} = \frac{\pi}{\frac{\frac{2\pi}{T_2} - \frac{2\pi}{T_1}}{2}} = \frac{T_1 \cdot T_2}{T_1 - T_2}$$

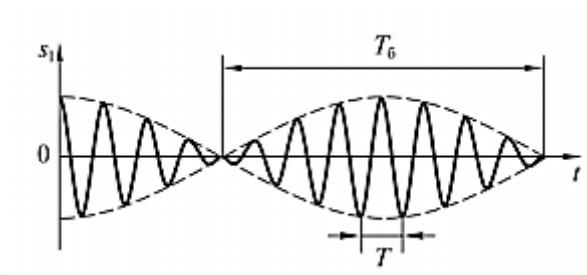


Рис. 17.2. Сложение колебаний

Фигуры Лиссажу

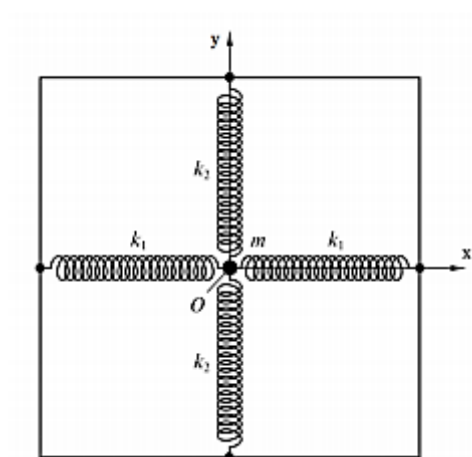


Рис. 17.3. Фигуры Лиссажу

Пусть частоты разные:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$y(t) = y_0 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

На частоты могут накладываться разные ограничения. При $\omega_1 = \omega_2$ можно увидеть замкнутые фигуры, которые описывают тело на поверхности.

$$\frac{x(t)}{x_0} = \cos(\omega_1 t + \varphi_1) = \cos \omega_1 t \cdot \cos \varphi_1 - \sin \omega_1 t \cdot \sin \varphi_1$$

$$\frac{y(t)}{y_0} = \cos(\omega_2 t + \varphi_2) = \cos \omega_2 t \cdot \cos \varphi_2 - \sin \omega_2 t \cdot \sin \varphi_2$$

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega$$

$$\frac{x}{x_0} \cos \varphi_2 - \frac{y}{y_0} \cos \varphi_1 = -\sin \omega t \cdot \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 + \sin \omega t \cdot \sin \varphi_2 \cdot \cos \varphi_1 =$$

$$= \sin \omega t (\sin \varphi_2 \cdot \cos \varphi_1 - \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2) = \underline{\sin \omega t \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

$$\frac{x}{x_0} \sin \varphi_2 - \frac{y}{y_0} \sin \varphi_1 = \cos \omega t \cdot \sin \varphi_2 \cdot \cos \varphi_1 + \cos \omega t \cdot \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 =$$

$$= \underline{\cos \omega t \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

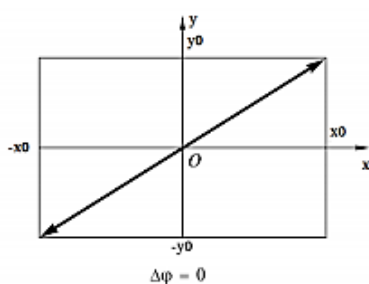
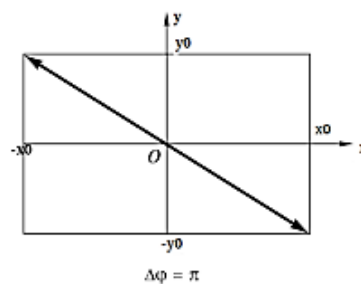
Рассматривается соотношение полученных выражений:

$$\begin{aligned} & (\sin \omega t \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_1))^2 + (\cos \omega t \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_1))^2 = \\ & = \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 \cos^2 \varphi_2 - 2 \frac{y}{y_0} \cos \varphi_1 \cdot \frac{x}{x_0} \cos \varphi_2 + \left(\frac{y}{y_0}\right)^2 \cos^2 \varphi_1 + \\ & + \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 \sin^2 \varphi_2 - 2 \frac{xy}{x_0 y_0} \sin \varphi_2 \sin \varphi_1 + \left(\frac{y}{y_0}\right)^2 \sin^2 \varphi_1 = \\ & = \sin^2 \omega t \cdot \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1) + \cos^2 \omega t \cdot \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1) \end{aligned}$$

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{y}{y_0}\right)^2 - 2 \frac{xy}{x_0 y_0} \underbrace{(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2)}_{\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)$$

Рассматривается зависимость:

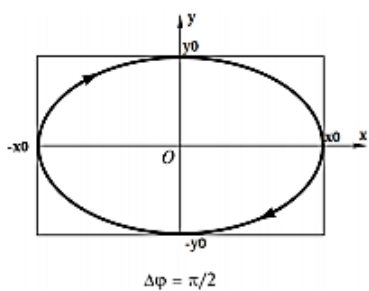
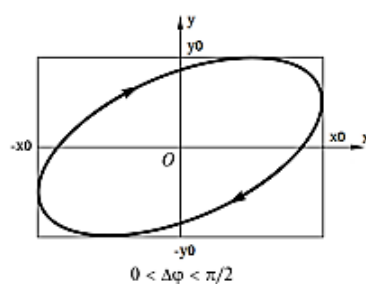
$$\varphi_1 = \varphi_2 \quad \left(\frac{x}{x_0} - \frac{y}{y_0}\right)^2 = 0 \Rightarrow \frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0}$$

Рис. 17.4. $\varphi_1 = \varphi_2$ Рис. 17.5. $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \pi \quad \left(\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} \right)^2 = 0 \Rightarrow \frac{x}{x_0} = -\frac{y}{y_0}$$

$$(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\pi}{2} \quad \left(\frac{x}{x_0} \right)^2 + \left(\frac{y}{y_0} \right)^2 = 1$$

$$0 \leq \varphi_2 - \varphi_1 \leq \frac{\pi}{2}$$

Рис. 17.6. $(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\pi}{2}$ Рис. 17.7. $0 \leq \varphi_2 - \varphi_1 \leq \frac{\pi}{2}$

$$\frac{\pi}{2} \leq \varphi_2 - \varphi_1 \leq \pi$$

Если $\omega_2 \neq \omega_1$:

$$m\omega_1 = n\omega_2$$

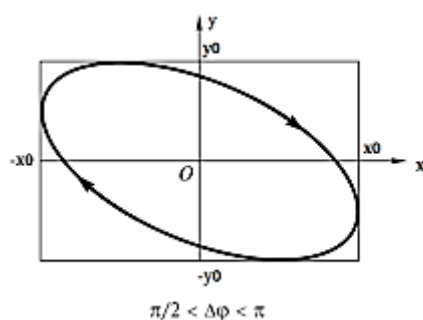


Рис. 17.8. $\frac{\pi}{2} \leq \varphi_2 - \varphi_1 \leq \pi$

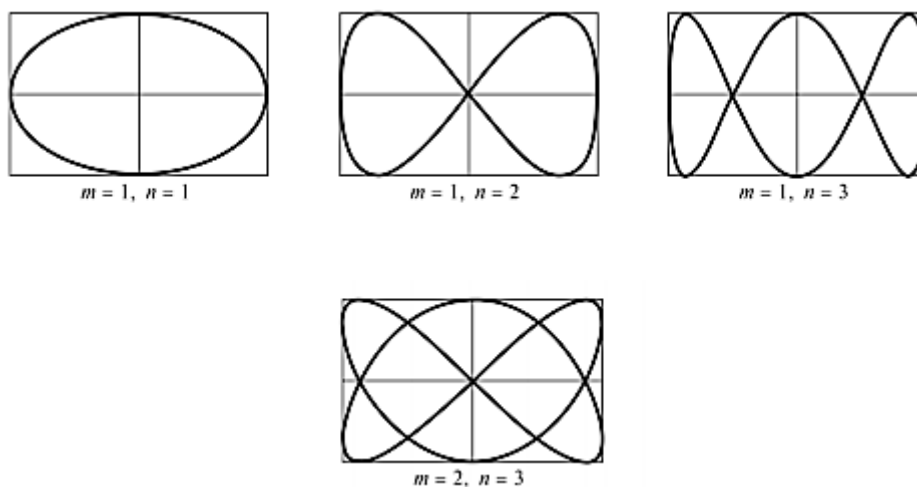


Рис. 17.9. Фигуры Лиссажу

Колебания в связанных системах. Уравнение колебаний для связанных систем

Пусть 2 маятника связаны пружиной с жесткостью k . Предполагается, что маятники отклонились.

$$ml^2 \ddot{\psi} = -mgl \sin \psi + F_{\text{упр}} \cdot l_1$$

$$F_{\text{упр}} = -(\sin \psi_2 \cdot l_1 - \sin \psi_1 \cdot l_1)k$$

$$ml^2 \ddot{\psi}_1 = -mgl \sin \psi_1 - (kl_1)l_1 \cdot (\psi_1 - \psi_2)$$

$$ml^2 \ddot{\psi}_1 + mgl \sin \psi_1 + kl_1^2 \cdot (\psi_1 - \psi_2) = 0$$

$$\ddot{\psi}_1 + \underbrace{\psi_1 \left(\frac{g}{l} + \frac{kl_1^2}{ml^2} \right)}_{\omega_{01}^2} - \underbrace{\frac{kl_1^2}{ml^2}}_{\lambda_1} \psi_2 = 0$$

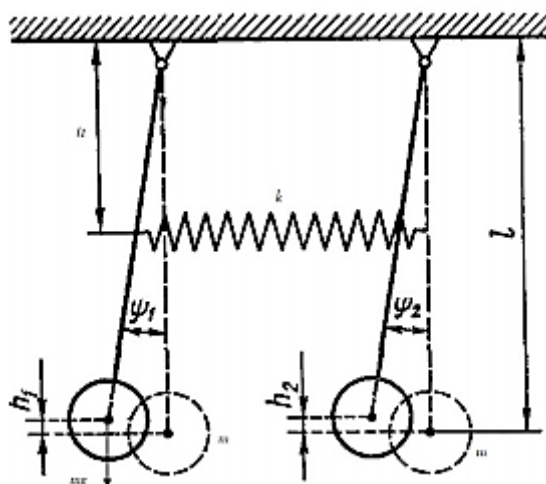


Рис. 17.10. Уравнение колебаний для связанных систем

ω_{01} и ω_{02} — парциальные частоты.

λ_1 и λ_2 — коэффициенты связи.

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \omega_{01}^2 x_1 - \lambda_1 x_2 = 0 \\ \ddot{x}_2 + \omega_{02}^2 x_2 - \lambda_2 x_1 = 0 \end{cases}$$

Моды колебаний

Решая систему уравнений, можно предположить, что установится колебательный процесс.

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega$$

$$x_1 = \operatorname{Re}(\tilde{x}_{10} \cdot e^{i\omega t})$$

$$x_2 = \operatorname{Re}(\tilde{x}_{20} \cdot e^{i\omega t})$$

Необходимо анализировать следующие уравнения:

$$x_1 = \tilde{x}_{10} \cdot e^{i\omega t}$$

$$x_2 = \tilde{x}_{20} \cdot e^{i\omega t}$$

$$\dot{x}_1 = i\omega \tilde{x}_{10} \cdot e^{i\omega t}$$

$$\ddot{x}_1 = (i\omega)^2 \tilde{x}_{10} \cdot e^{i\omega t}$$

Система уравнений записывается следующим образом:

$$\begin{cases} (-\omega)^2 \tilde{x}_{10} + \omega_{01}^2 x_{10} - \lambda_1 x_{20} = 0 \\ (-\omega)^2 \tilde{x}_{20} + \omega_{02}^2 x_{20} - \lambda_2 x_{10} = 0 \end{cases}$$

Сложение двух взаимно перпендикулярных колебаний наблюдается с помощью разворачивающего устройства. На одну из пластин разворачивающего устройства подается сигнал от сети 220 Вольт, а частота 50 Гц. Вторая пластина подсоединена к звуковому генератору, с помощью которого можно изменять частоту. Если подается сигнал на одну пластину, то можно увидеть прямую горизонтальную линию. Если подается сигнал от звукового генератора, то можно увидеть вертикальную прямую линию. Если сложить эти две линии, то получается эллипс. С помощью этого прибора можно увидеть и фигуры Лиссажу.

Сложение колебаний можно рассмотреть с помощью модели стенда, на котором в большом количестве закреплены спички на разной высоте. Результат сложений зависит от периода колебания, от амплитуды колебаний и от разности фаз. Сбоку вставляется шаблон и линия на стенде принимает форму шаблона.

Используется прибор Конопаткина. Менять частоту можно реостатом. Движение происходит с нулевой частоты и амплитуда все увеличивается. Смещение по прежнему будет отставать от силы на $\frac{\pi}{2}$, амплитуда увеличивается и скорость в фазе. Чем быстрее, тем смещение ближе к противофазным колебаниям.

Лекция 18. Нелинейные колебания

Моды колебаний

Решая систему уравнений, можно предположить, что установится колебательный процесс.

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega$$

$$x_1 = \operatorname{Re}(\tilde{x}_{10} \cdot e^{i\omega t})$$

$$x_2 = \operatorname{Re}(\tilde{x}_{20} \cdot e^{i\omega t})$$

Необходимо анализировать следующие уравнения:

$$x_1 = \tilde{x}_{10} \cdot e^{i\omega t}$$

$$x_2 = \tilde{x}_{20} \cdot e^{i\omega t}$$

$$\dot{x}_1 = i\omega \tilde{x}_{10} \cdot e^{i\omega t}$$

$$\ddot{x}_1 = (i\omega)^2 \tilde{x}_{10} \cdot e^{i\omega t}$$

Система уравнений записывается следующим образом:

$$\begin{cases} (-\omega)^2 \tilde{x}_{10} + \omega_{01}^2 x_{10} - \lambda_1 x_{20} = 0 \\ (-\omega)^2 \tilde{x}_{20} + \omega_{02}^2 x_{20} - \lambda_2 x_{10} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-\omega + \omega_{01})^2 x_{10} - \lambda_1 x_{20} = 0 \\ (-\omega + \omega_{02})^2 x_{20} - \lambda_2 x_{10} = 0 \end{cases}$$

Удобнее написать в следующем виде:

$$\begin{cases} (\omega_{01}^2 - \omega^2) x_{10} - \lambda_1 x_{20} = 0 \\ -\lambda_2 x_{10} + (\omega_{02}^2 - \omega^2) x_{20} = 0 \end{cases}$$

Нетривиальное решение будет, если $\det = 0$.

$$(\omega_{01}^2 - \omega^2)(\omega_{02}^2 - \omega^2) - \lambda_1 \lambda_2 = 0$$

Соотношение между амплитудами можно найти следующим образом:

$$\zeta = \frac{x_{20}}{x_{10}} = \frac{\omega_{01}^2 - \omega^2}{\lambda_1}$$

$$\omega^4 - \omega^2(\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2) + \omega_{01}^2 \omega_{02}^2 - \lambda_1 \lambda_2 = 0$$

Решение этого уравнения записывается следующим образом:

$$2\omega_{1,2}^2 = \omega_{01}^2 + \omega_{02}^2 \pm \sqrt{(\omega_{01}^2 - \omega_{02}^2)^2 + 4\lambda_1 \lambda_2}$$

$$2\zeta_{1,2} = \frac{1}{\lambda_1}(\omega_{01}^2 - \omega_{02}^2 \pm \sqrt{(\omega_{01}^2 - \omega_{02}^2)^2 + 4\lambda_1 \lambda_2})$$

Есть 2 частоты: ω_1 и ω_2 . Для первого решения:

$$x_1^{(1)} = \operatorname{Re}(\tilde{x}_{10}^{(1)} \cdot e^{i\omega_1 t}) = \operatorname{Re}(A \cdot e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\omega_1 t}) = A \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

Для второго решения:

$$x_1^{(2)} = B \cdot \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Следовательно:

$$x_1 = A \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B \cdot \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$x_2 = \zeta_1 A \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \zeta_2 B \cdot \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Пример 18.1.

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{kl_1^2}{ml^2}$$

$$\omega_{01}^2 = \omega_{02}^2 = \frac{g}{l} + \frac{kl_1^2}{ml^2}$$

$$\omega_1^2 = \frac{g}{l} \quad \zeta_1 = 1$$

$$\omega_2^2 = \frac{g}{l} + 2\frac{kl_1^2}{ml^2} \quad \zeta_2 = -1$$

Число нормальных колебаний равно числу степеней свободы в колебательной системе.

Парциальные частоты лежат между частотами нормальных колебаний. Связанность выражается следующим образом:

$$\frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\omega_{01}^2 - \omega_{02}^2)^2}$$

Если связанность малая, то из-под корня только:

$$(\omega_{01}^2 - \omega_{02}^2)^2$$

Если $\omega_{01} = \omega_{02}$, то связанность большая всегда.

Нелинейные колебания

Уравнение колебаний можно записать следующим образом:

$$\ddot{x}_1 + f(x) = 0$$

$$f(x) = f_1 \cdot x + f_2 \cdot x^2 + f_3 \cdot x^3 + \dots$$

$$f_1 = \left(\frac{df}{dx} \right)_{x=0}$$

$$f_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 f}{dx^2} \right)_{x=0}$$

$$f_3 = \frac{1}{6} \left(\frac{d^3 f}{dx^3} \right)_{x=0}$$

$f_1 \cdot x_1, f_3 \cdot x^3$ — существенные элементы:

- Если f_1 и f_3 одного знака. Если есть и f_1 , и f_3 — частота больше, чем если бы только f_1 (жёсткая пружина).
- Если f_1 и f_3 имеют разные знаки, то частота уменьшается (по сравнению с ω_0) (мягкая пружина).

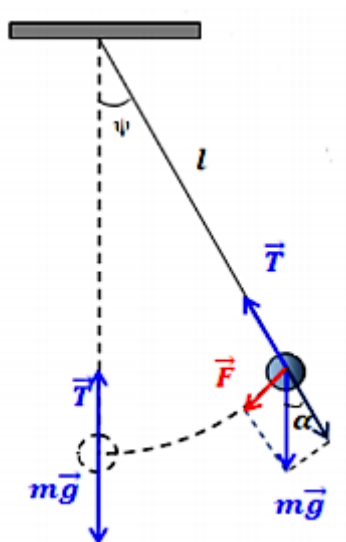


Рис. 18.1. Математический маятник

$$ml^2 \ddot{\psi} = -mgl \sin \psi$$

При малых ψ :

$$\begin{aligned}\sin \psi &\simeq \psi - \frac{1}{6}\psi^3 \\ \psi &= \psi_0 \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi) \\ \ddot{\psi} + \frac{g}{l}(\psi - \frac{1}{6}\psi^3) &= 0 \\ \cos^3 \psi &= \frac{1}{4}(3 \cos(\omega t + \varphi) + \cos(3(\omega t + \varphi))) \\ \psi &= \psi_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi) + \varepsilon \cdot \cos(3(\omega t + \varphi)) \\ \frac{d^2 \psi}{dt^2} + \omega_0^2 \psi - \frac{1}{6}\omega_0^2 \psi^3 &= 0 \\ \cos(\omega t + \varphi)[- \omega^2 \psi_0 + \omega_0^2 \psi_0 - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} \omega_0^2 \psi_0^3 \cdot 3] + \\ + \cos(3(\omega t + \varphi))[\omega_0^2 \psi_0 \cdot \varepsilon + \varepsilon(-9\omega^2)\psi_0 - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} \omega_0^2 \psi_0^3] &= 0 \\ -\omega^2 \psi_0 + \omega_0^2 \psi_0 - \frac{3}{24} \omega_0^2 \psi_0^3 &= 0 \\ \omega^2 &= \omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{8} \psi_0^2\right)\end{aligned}$$

Частота колебаний зависит от амплитуды колебаний. Период колебаний записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}T = \frac{2\pi}{\omega} &= \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \frac{1}{8}\psi_0^2}} \cdot \frac{1}{\omega_0^2} \approx \frac{2\pi}{\omega_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{16}\psi_0^2} = \frac{2\pi}{\omega_0} \left(1 + \frac{1}{16}\psi_0^2\right) = T_0 \left(1 + \frac{1}{16}\psi_0^2\right) \\ \omega_0^2 \psi_0 \cdot \varepsilon + \varepsilon(-9\omega^2)\psi_0 - \frac{1}{24} \omega_0^2 \psi_0^3 &= 0\end{aligned}$$

Здесь $\omega \approx \omega_0$:

$$\varepsilon = -\frac{1}{192}\psi_0^2$$

Параметрические колебания

Уравнение параметрических колебаний записывается в следующем виде:

$$\ddot{x} + \chi_1(t)\dot{x} + \chi_2(t)x = 0$$

Если во время колебаний меняется какой-либо параметр системы, то сам вид колебаний будет реагировать на это изменение. В математическом маятнике можно менять длину математического маятника.

$$2(A^+ + A^-) + A_{\text{тр}} = 0$$

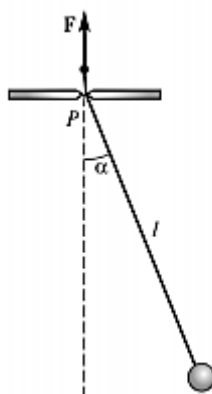


Рис. 18.2. Математический маятник

$$\psi = \psi_0 \cos \omega t$$

$$\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{1}{16} \psi_0^2 \right)$$

A — работа. Когда груз в нижнем положении:

$$\frac{mv^2}{l} = T - mg$$

$$T = mg + \frac{mv^2}{l} \quad (T > mg)$$

Когда груз в верхнем положении:

$$T = mg \cos \psi \quad (T < mg)$$

$$A^- = \left(mg + \frac{mv^2}{l} \right) \Delta l = (mg + m\psi_0^2 \omega^2 l) \cdot \Delta l$$

$$\psi_0 = 3 \cdot \sqrt{1 - \frac{\pi}{3Q \cdot \frac{\Delta l}{l} \cdot \frac{7}{16}}}$$

Добротность имеет следующий вид:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\delta}$$

	Параметрические колебания	Вынужденные колебания
Частота возбуждения	$\frac{2\omega_0}{n}$, $n=1,2,3\dots$ чем больше Q , тем больше n	ω_0
Условия возбуждения	$\frac{\Delta l}{l} \gtrsim 2Q$	F_0 - любая
Полоса частот возбуждения	в любом диапазоне вблизи $\frac{2\omega_0}{n}$	любая частота $0 < \omega_0 < \infty$
При $\delta \rightarrow 0$ (в резонансе)	ψ_0 - конечная величина	амплитуда $\rightarrow \infty$ (нелинейные ограничения)

Рис. 18.3. Сравнение свойств параметрических и вынужденных колебаний

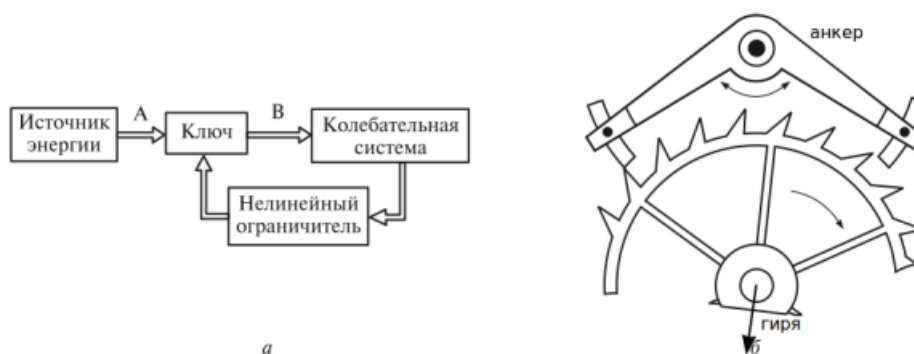


Рис. 18.4. Схема автоколебаний

Автоколебания

Автоколебания возникают тогда, когда из внешнего резервуара энергия поступает в систему в определённые моменты.

- Источник энергии — гиря на ходовом колесе;
- Ключ — зубья ходового колеса;
- Колебательная система — маятник;
- Обратная связь — анкер (равноплечий рычаг).

Любые колебания со временем затухают, но колебания можно усилить если изменить параметры, в данном случае длину. Для этого используют обыкновенный математический маятник, который раскачивают.

Лекция 19. Автоколебания. Волны

Колебания. Автоколебания

Колебания могут быть свободными в консервативной системе, затухающими в не консервативной системе и вынужденными, которые характеризуются гармонической внешней силой. Колебания так же могут быть связанными в системе с более, чем 1 степенью свободы. Для таких колебаний характерны парциальные частоты и нормальные частоты, которые получаются при решении связанных колебаний. Колебания могут быть нелинейными и параметрическими. Характерная частота колебаний в системе: $\frac{2\omega_0}{n}$.

Автоколебания характерны тем, что они нелинейные и существует резервуар энергии. Колебательная система черпает энергию из этого резервуара.



Рис. 19.1. Автоколебательная схема

В этой схеме присутствуют резервуар энергии, ключ, колебательная система, в которой известна частота собственных колебаний, и обратная связь.

Автоколебания — незатухающие колебания, поддерживаемые внешними источниками энергии, в нелинейной диссипативной системе, внешний вид и свойства которых определяются самой системой.

Анкерный механизм — жестко связан с маятником, который имеет свою собственную частоту. Если анкерный рычаг поворачивается, то вместе с ним поворачивается и маятник. Ходовое колесо приводится в движение гирей. Запас энергии в гире.

Когда маятник находится в крайнем положении, паллеты запираются между зубчиками и момент силы относительно оси оказывается равным нулю, и нет никакой подкачки в крайнем положении. Как только маятник оказывается в положении равновесия и имеет максимальную скорость, то зубчик в точности скользит по стороне b_1 паллеты, и ровно в этот момент при подаче энергии в систему, груз, висющий на колесе, опускается. Вот так происходит откачка энергии в анкерном механизме. Если

трение a_1 основано на этих механических часах, то амплитуда будет абсолютно определенной, и частота будет близка к собственной частоте маятника. Если амплитуда будет слишком большая, то запирающий механизм будет подавать ровно столько энергии, чтобы снизить ее и компенсировать потерю на трение до такой степени, чтобы амплитуда стабилизировалась. Роль ключа играет анкер, а роль обратной связи — шестерня. Каждый пол периода происходит подкачка с двух сторон.

Механические часы используются для автоколебаний. В качестве источника энергии используется гиря. Регулировка энергии будет регулироваться качающимся маятником или крутильным маятником. В отличие от параметрики, в автоколебаниях есть запас энергии, который дается гире, и дальше система благодаря анкерному механизму и обратной связи берет столько, сколько надо из этого резервуара.

Как пример автоколебаний можно использовать спираль Роже. Железный сердечник внутри спирали имеет большую магнитную проницаемость. К спирали подвешен груз. При прохождении тока за счет сильного магнитного взаимодействия витки притягиваются друг к другу, и спираль поднимается, и происходит размыкание цепи. Затем под тяжестью груза спираль снова растягивается.

Еще одним примером автоколебаний может служить система биметаллической пластинки с лампочкой, которая соединена размыкателем. Нижняя часть биметаллической пластинки заключена в каркас, на который намотана проволока. При прохождении тока эта проволока нагревает биметаллическую пластинку. Она изгибается и размыкает цепь. Затем она охлаждается, выпрямляется, цепь замыкает, и лампочка начинает гореть.

Несимметричное корыто можно использовать как пример автоколебаний. Если наполнить корыто водой, то происходит смещение от центра масс и корыто переворачивается.

Используется схема, состоящая из резервуара (источник питания), ключа и обратной связи. Для спирали Роже вместо гири берется достаточно большой источник питания, чтобы создать достаточно большое магнитное поле, чтобы точки, по которым идет ток притянулись друг к другу. Это делается для того, чтобы разомкнуть контакт. Когда идет ток, витки притягиваются и контакт размыкается. В роли обратной связи берется пружина, а вместо ключа берется медная скобочка.

Волны. Распространение импульса в среде. Бегущие волны. Волновое уравнение

Колебание — движение вокруг положения равновесия.

Волна — это распространение колебаний в пространстве с конечной скоростью.

Стационарные волны — такие волны, профиль которых перемещается без искажений. Необходимо нарисовать график изменения амплитуды в пространстве, которое создалось колебательной системой. Отмечается на оси u возмущение через U — когда максимум колебаний распространяется с конечной скоростью при возбуждении камертона. В один момент x_1 сделать мгновенную фотографию. В этот момент повышается локальное давление и исходит звуковой сигнал. Следующую мгновенную фотографию необходимо сделать в момент времени t_2 и обозначить через x_2 .

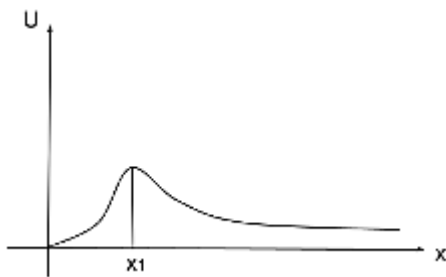


Рис. 19.2. Мгновенная фотография в момент t_1

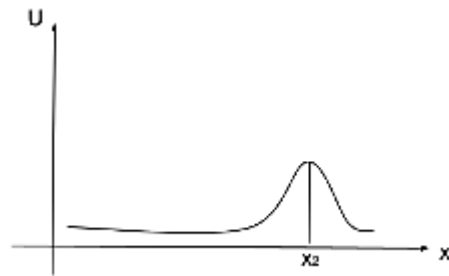


Рис. 19.3. Мгновенная фотография в момент t_2

В отличие от колебательного процесса, имеются и координата, и время. Промежутки во времени и в пространстве не независимы. Распространение колебаний в пространстве происходит с конечной скоростью v .

$$v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

Координата и время связаны через скорость. И по графику видно, что форма возмущения не изменилась.

$$U(x, t) = U(x - vt)$$

Отсюда можно найти полный дифференциал. Дифференцирование должно быть отдельно по времени и отдельно по координате x .

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial t} dt = 0$$

Таким образом, есть инструмент для описания волновых процессов, которые зависят от пространства и от времени.

$$\xi = x - vt$$

Волновое уравнение записывается следующим образом:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial t} dt = 0$$

Скорость выражается следующим образом:

$$\frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial t} = 0$$

В положительном направлении:

$$\frac{\partial U}{\partial x} v + \frac{\partial U}{\partial t} = 0$$

В отрицательном направлении:

$$\frac{\partial U}{\partial x} (-v) + \frac{\partial U}{\partial t} = 0$$

Решение этой функции:

$$U = U_1(x - vt) + U_2(x + vt)$$

Окончательное волновое уравнение:

$$-\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} v^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0 \quad (19.1)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}$$

Самое простое решение — плоская гармоническая волна.

$$U = U_0 \cos(\omega t - kx)$$

Если подставить скорость $v = \frac{\omega}{k}$, то получится:

$$U = U_0 \cos((vt - x)k)$$

Гармоническая волна плоская, потому что волновой фронт представляет собой плоскость. Волновой фронт — это множество точек в плоскости, до которых волна дошла к заданному моменту времени. Если в трехмерном пространстве появляется волновой вектор (\vec{k}) и если записать аргумент \cos в положительном направлении и зафиксировать какой-то момент времени, то получится, что аргумент равен константе. Уравнение плоскости записывается следующим образом:

$$\omega t = \vec{k} \times \vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z = \text{const}$$

Поперечная волна — это когда возмущение перпендикулярно направлению распространения волны.

Продольная волна — это когда возмущение и направление распространения совпадают.

Волны на струне

На каждый элемент массы (δm) на этой струне действует натяжение (\vec{T}), которое не будет меняться. Между вектором \vec{T} и прямой параллельной оси x получаются углы α_1 и α_2 .

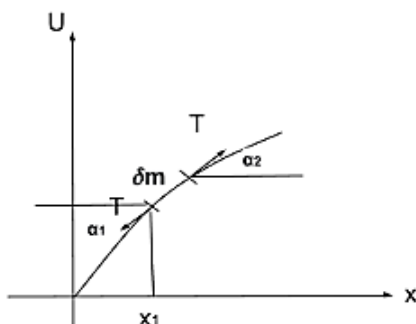


Рис. 19.4. Волны на струне

Необходимо найти изменение смещения по вертикали. Для этой массы можно написать второй закон Ньютона:

$$\delta m \times \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = T \sin \alpha_2 - T \sin \alpha_1$$

При $x = x_1$:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 \approx \sin \alpha_1 = \frac{\partial U}{\partial x}$$

При $x = x_2$:

$$\operatorname{tg} \alpha_2 \approx \sin \alpha_2 = \frac{\partial U}{\partial x}$$

Вторая производная по координате записывается следующим образом:

$$\delta m \times \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = T \times \Delta \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) = T \times \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \times \Delta x$$

Стандартный канонический вид волнового уравнения:

$$\frac{\delta m}{\Delta x} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

Необходимо написать скорость через плотность.

$$\frac{\partial m}{\Delta x} = \rho$$

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \quad (19.2)$$

Чем больше натяжение струны, тем больше распространение упругой волны в струне.

Продольные волны в стержне

На рисунке нарисованы поперечные плоскости, на которые действуют силы и смещают возмущение. Под действием силы происходит упругая деформация. Напряжение есть относительное удлинение на модуль Юнга.



Рис. 19.5. Продольные волны в стержне

$$\sigma = \varepsilon \times E$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

$$l' = l + \Delta l$$

$$\Delta l = U(x_2) - U(x_1)$$

$$\sigma_2 = E \varepsilon_2$$

$$\sigma_1 = E \varepsilon_1$$

Второй закон Ньютона для массы через напряжение на площадь:

$$\partial m \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \sigma_2 S - \sigma_1 S = E \times S \times (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = E \times S \times \Delta \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) \times \Delta x$$

$$\partial m \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = S \times E \times \Delta x \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

$$\partial m = \rho \times \Delta v = \rho \times S x$$

Распространение акустической волны в сплошной среде:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0 \quad (19.3)$$

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Волны в жидкости и газе

$$\Delta p = \frac{dP}{dV} \Delta V \quad (19.4)$$

Δp — изменение давления.

Δl представляем изменение объема за счет изменения всего лишь по одной координате.

S — площадь сечения.

$$E = -\frac{dP}{dV} \times V$$

Дальше записывается выражение для адиабатического процесса, что означает быстрое изменение давления и плотности, чтобы найти скорость звуковой волны.

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma \quad (19.5)$$

$$\frac{dp}{d\rho} \approx \gamma \frac{p_0}{\rho_0} = \gamma \frac{RT}{\mu}$$

Скорость распространения звуковой волны:

$$v = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}} \approx \sqrt{1.5 \frac{8.31 \times 300}{0.029}} \approx 330 \frac{m}{s} \quad (19.6)$$

Модель бегущей волны можно посмотреть с помощью следующего прибора. На горизонтальную ось насаживают несколько десятков дисков, которые смещены на небольшой угол друг относительно друга. На каждый диск опирается вертикальный стержень. В пределах одного периода стержни отогнуты в бок под прямым углом, а остальные стержни одинаковой длины. При движении можно увидеть, что стержни, которые отогнуты в бок, показывают распространение продольной бегущей волны. А вертикальные показывают поперечную бегущую волну.

У одного шланга конец жестко закреплен, а у второго шланга он закреплен через веревку. Если наблюдать распространение бегущей поперечной волны на первом

шланге, то можно увидеть, что волна теряет пол периода и возвращается вниз. Если натянуть шланг, то скорость распространения волны будет больше. Если конец шланга свободен, то волна не теряет пол периода.



Лекция 20. Волны

Волны смещений, скоростей, деформаций, напряжений

Необходимо найти амплитуды при скоростях и деформациях:

$$u = u_0 \times \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

$$v = -u_0 \times \sin(\omega t - kx + \varphi_0)$$

v — колебательная скорость частиц воздуха вокруг положения равновесия, которая будет меньше чем скорость звуковой волны. Волны деформаций:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = u_0 k \sin(\omega t - kx + \varphi_0)$$

Напряжение записывается следующим образом:

$$\sigma = E\varepsilon = Eu_0 k \sin(\omega t - kx + \varphi_0)$$

Отношение скорости частиц к скорости волны вычисляется следующим образом:

$$\frac{v_{r0}}{v} = \frac{u_0 \omega}{v} = u_0 k = \frac{u_0 \cdot 2\pi}{\lambda} \ll 1$$

Скорость частиц в волне гораздо меньше чем скорость распространения волны.

Плотность и поток энергии в бегущей волне. Вектор Умова

Плотность энергии:

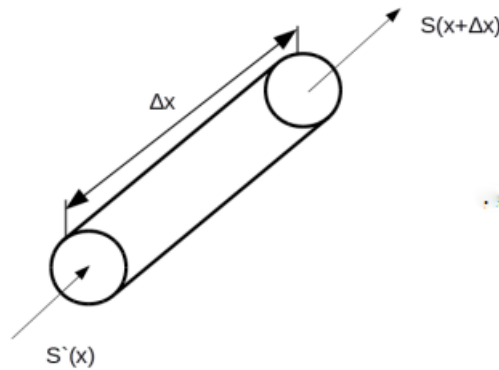
$$\omega = \omega_{\text{кин}} + \omega_{\text{пот}} = \frac{1}{2} \rho_0 v_{\text{ч}}^2 + \frac{1}{2} E \varepsilon^2$$

Пусть есть цилиндр с длиной Δx . $S(x)$ — плотность потока энергии в электромагнитных волнах. s — площадь сечения. w — объёмная плотность энергии.

$$\Delta t \cdot (S(x) - S(x + \Delta x)) \cdot s = \Delta \omega \cdot \Delta x \cdot s$$

Изменение плотности энергии записывается следующим образом:

$$-\frac{S(x + \Delta x) - S(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0; \Delta x \rightarrow 0} \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial \omega}{\partial t}$$

Рис. 20.1. Цилиндр длины Δx

Плотность и поток энергии в бегущей волне. Вектор Умова

Необходимо найти выражение для плотности потока энергии в электромагнитных волнах S .

$$\begin{aligned}
 w &= \frac{1}{2}\rho_0 v_{\text{ч}}^2 + \frac{1}{2}E\epsilon^2 = \frac{1}{2}\rho_0 \cdot \left(\left(\frac{dU}{dt} \right)^2 + \frac{E}{\rho_0} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right) = \\
 &= \frac{1}{2}\rho_0 \cdot \left(\left(\frac{dU}{dt} \right)^2 + v^2 \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right) \\
 \frac{dw}{dt} &= \frac{1}{2}\rho_0 \cdot \left(2 \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + v^2 \cdot 2 \cdot \frac{du}{dx} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right) = \\
 &= \rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \cdot v^2 \frac{d^2 u}{dx^2} + v^2 \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right) = \rho_0 v^2 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right) = \\
 &= \rho_0 v^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \right) = \frac{\partial w}{\partial t} \cdot \rho_0 v^2 = \rho_0 v^2 \cdot \left(-\frac{\partial S}{\partial x} \right)
 \end{aligned}$$

Таким образом, S можно выразить следующим образом:

$$S = -\rho_0 v^2 \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial t}$$

Следовательно, можно получить выражение для скорости. Пусть распространяется гармоническая волна. Тогда плотность энергии:

$$\begin{aligned}
 w &= \frac{1}{2}\rho_0(u_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx) + v^2 u_0^2 k^2 \cdot \sin^2(\omega t - kx)) = \\
 &= \frac{1}{2}\rho_0 u_0^2 \sin^2(\omega t - kx) \cdot (\omega^2 + \omega^2) = \rho_0 u_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx) \\
 k &= \frac{\omega}{v} \Rightarrow v^2 \cdot k^2 = \omega^2
 \end{aligned}$$

Плотность потока энергии записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
 S &= -\rho_0 v^2 \frac{du}{dx} \cdot \frac{du}{dt} = \rho_0 v^2 u_0 \sin(\omega t - kx) \cdot (-u_0) \cdot \omega \cdot \sin(\omega t - kx) = \\
 &= \rho_0 v^2 u_0^2 \cdot \frac{\omega}{v} \cdot \sin^2(\omega t - kx) = v \rho_0 u_0^2 \omega^2 \cdot \sin^2(\omega t - kx) \\
 S &= v \cdot w
 \end{aligned}$$

Таким образом, можно получить вектор Умова:

$$\vec{S} = w \vec{v}$$

Если частоты большие, то используют интенсивность волны:

$$I = \langle w \rangle v = \frac{1}{2} v \rho \cdot \omega^2 \cdot u_0^2$$

Отражение волн, моды колебаний. Явления на границе раздела двух сред. Граничные условия

Граничные условия

- 1) Смещения слева и справа от границы раздела одинаковы
- 2) Напряжения слева и справа от границы раздела одинаковы

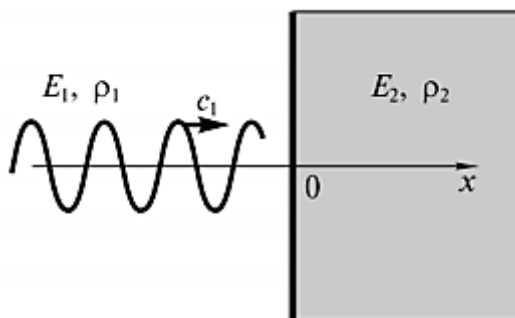


Рис. 20.2. Граничные условия

В первой среде (E_1, ρ_1) возбудилась волна:

$$u_1(x, t) = u_{01}^+ \cdot \cos(\omega t - k_1 x) + u_{01}^- \cdot \cos(\omega t + k_1 x)$$

Во второй среде (E_2, ρ_2) волна возбудилась на границе:

$$u_2(x, t) = u_{02}^+ \cdot \cos(\omega t - k_2 x)$$

Частоты одинаковые, а скорости распространения разные. Поэтому и k волновые числа разные. Первое условие выглядит следующим образом:

$$u_1(0, t) = u_2(0, t)$$

$x = 0$ — положение границы.

$$u_{01}^+ \cdot \cos(\omega t - 0) + u_{01}^- \cdot \cos(\omega t + 0) = u_{02}^+ \cdot \cos(\omega t - 0)$$

$$u_{01}^+ + u_{01}^- = u_{02}^+$$

Второе условие выглядит следующим образом:

$$\sigma_1 \equiv \sigma_2$$

$$\sigma_1 = E \cdot \varepsilon_1 = E_1 \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x}$$

$$\sigma_2 = E_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}$$

Граничное условие:

$$E_1 \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x} = E_1 (u_{01}^+ (-k_1) (-1) \sin(\omega t - k_1 x) + u_{01}^- (k_1) (-1) \sin(\omega t + k_1 x)) =$$

$$= E_1 \left(u_{01}^+ \frac{\omega}{v_1} \sin(\omega t - k_1 x) - u_{01}^- \frac{\omega}{v_1} \sin(\omega t + k_1 x) \right)$$

$$E_1 \left(\frac{u_{01}^+}{v_1} - u_{01}^- \frac{1}{v_1} \right) = \frac{E_2}{v_2} u_{02}^+$$

Таким образом, можно написать волновое сопротивление:

$$\frac{E_1}{v_1} = z_1$$

Граничные условия:

$$\begin{cases} u_{01}^+ + u_{01}^- = u_{02}^+ \\ u_{01}^+ - u_{01}^- = \frac{z_2}{z_1} u_{02}^+ \end{cases}$$

Можно определить прямые и обратные волны:

$$u_{02}^+ = \frac{2u_{01}^+}{1 + \frac{z_2}{z_1}}$$

$$u_{01}^+ \left(\frac{z_2}{z_1} - 1 \right) + u_{01}^- \left(\frac{z_2}{z_1} + 1 \right) = 0$$

$$u_{01}^- = -\frac{u_{01}^+ \left(\frac{z_2}{z_1} - 1 \right)}{\left(\frac{z_2}{z_1} + 1 \right)}$$

Пусть:

$$\begin{aligned} z_1 &= z_2 \\ \frac{E}{v} &= \frac{E}{\sqrt{\frac{E}{\rho}}} = \sqrt{\rho \cdot E} \\ \frac{E_1}{v_1} &= \frac{E_2}{v_2} \\ \sqrt{\rho_1 E_1} &= \sqrt{\rho_2 E_2} \\ u_{01}^- &= 0 \\ u_{02}^+ &= u_{01}^+ \end{aligned}$$

Таким образом, отражения нет.

Пусть:

$$\begin{aligned} z_1 &\gg z_2 \\ u_{01}^- &= u_{01}^+ \\ \sigma_1 = E_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=0} &= E_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \Big|_{x=0} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x} &= \frac{E_2}{E_1} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x} \rightarrow 0 \\ E_1 &\gg E_2 \end{aligned}$$

Записывается типичное граничное условие:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = 0$$

Отсутствие среды, незакрепленный конец.

Пусть:

$$\begin{aligned} z_1 &\ll z_2 \\ u_{01}^- &= -u_{01}^+ \\ u_1(0, t) &= (u_{01}^- + u_{01}^+) \cos \omega t = 0 \\ u_1(0, t) &= 0 \\ u_{01}^+ \cos(\omega t + \varphi_1) &= -u_{01}^- \cos(\omega t + \varphi_2) \\ \cos(\omega t + \varphi_1) &= -\cos(\omega t + \varphi_2) \quad \varphi_1 = \varphi_2 + \pi \end{aligned}$$

Можно увидеть пример закрепленного конца.

Стоячие волны, моды колебаний

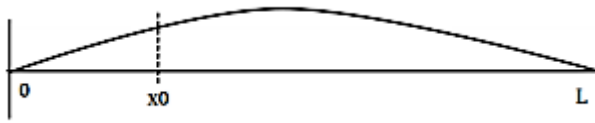


Рис. 20.3. Струна

Пусть есть струна, которая возбуждается в точке вынуждающей силы. Волны в струне можно записать следующим образом:

$$u^+ = u_{01}^+ \cos(\omega t - kx + \varphi)$$

$$u^- = u_{01}^- \cos(\omega t + kx + \varphi)$$

$$u(0, t) = 0 \Rightarrow u(0, t) = u^+(0, t) + u^-(0, t)$$

$$u_{01}^- = -u_{01}^+ = -u_0$$

Тогда в струне бежит волна:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u_0 \cos(\omega t - kx + \varphi) - u_0 \cos(\omega t + kx + \varphi) = -2u_0 \sin(\omega t + \varphi) \cdot \sin(-kx) = \\ &= 2u_0 \cdot \sin kx \cdot \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

Рассматривается второе граничное условие:

$$u(L, t) = 0 \sin kL = 0$$

$$k \left(= \frac{2\pi}{\lambda} \right) \cdot L = \pi n$$

Набор частот:

$$\begin{cases} L = \frac{\pi n}{k} = n \cdot \frac{\lambda}{2} \\ \lambda v = v \end{cases} \Rightarrow v_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{v \cdot n}{2L}$$

Моды колебаний характеризуются:

- 1) тем, что все точки колеблются по гармоническому закону на одной частоте;
- 2) частотой, на которой происходят гармонические колебания;

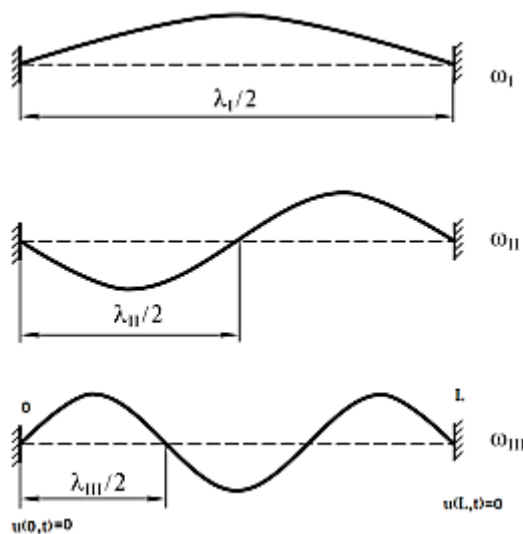


Рис. 20.4. Моды колебаний

3) определённым распределением амплитуд вдоль системы.

$$L = n \cdot \frac{\lambda_n}{2}$$

С помощью прибора Краснушкина можно наблюдать за распространением поперечной бегущей волны. На горизонтальную ось насаживаются ряд физических маятников, на которые опираются стержни с шариками. Крайний маятник приводится в движение двигателем, и волна передается от одного маятника другому.

Улитка Умова. Стальной шланг свернутый в спираль. С помощью улитки Умова можно наблюдать за распространением импульса сжатия и определить скорость звука. Чтобы определить импульс сжатия есть груша. При сжатии груши импульс сжатия проходит по трубке, и происходит запаздывание одного пламени в отношении другого. Зная время запаздывания и длину шланга, можно определить скорость звука.

Модель стоячей волны. Диски не смещены относительно друг от друга на угол, и на каждый диск опирается стержень. Концы подвернутых дисков показывают стоячие продольные волны. А вертикальные стержни показывают стоячие поперечные волны.

Стоячую волну можно увидеть с помощью стальной линейки, которая закреплена на центробежную машину с одной стороны, а свободна с другой. Если вращать с какой-то скоростью, то можно увидеть стоячую волну.

Стоячую звуковую волну можно увидеть с помощью трубы Рубенса. Труба Рубенса имеет отверстия, которые заполняются газом. Один конец трубы заглушен

жестко, а на втором конце находится резиновая мембрана. Напротив стоит динамик, который подсоединен к звуковому генератору. На трубе можно увидеть увеличение или уменьшение высоты пламени. С увеличением частоты число волн увеличивается.



Лекция 21. Звук. Элементы акустики

Элементы акустики. Звук и его характеристики

Для интенсивности волны известно выражение:

$$I = \frac{1}{2} \nu \rho_0 \omega^2 u_0^2$$

Интенсивность волны можно выразить через избыточное давления:

$$\begin{cases} \delta p &= -E \varepsilon \\ \nu &= \sqrt{\frac{E}{\rho_0}} \\ \varepsilon &= \frac{\partial u}{\partial x} = k u_0 \sin(\omega t - kx) \end{cases} \Rightarrow \delta p_0 = \nu \rho_0 \omega u_0$$

Интенсивность выражается через избыточную плотность следующим образом:

$$I = \frac{1}{2} \frac{\delta p_0^2}{\rho_0 \nu}$$

Порог болевого ощущения: $\delta p_0 = 300$ Па. Смещение:

$$u_0 = \frac{\delta p_0}{\nu \rho \omega} = 10^{-4} \text{ м}$$

Порог слышимости:

$$\delta p_0 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Па}$$

$$u_0 = 0,8 \cdot 10^{-9} \text{ см}$$

Звук и его характеристики

- Инфразвук: менее 20 Гц;
- Звук: 20 Гц - 20 кГц;
- Ультразвук: 20 кГц - 1 ГГц;
- Гиперзвук: более 1 ГГц.

Характеристики:

- 1) Высота (частота);
- 2) Тембр;
- 3) Громкость.

Интенсивность частоты имеет основной тон ν_1 и обертоны ν_2, ν_3 .

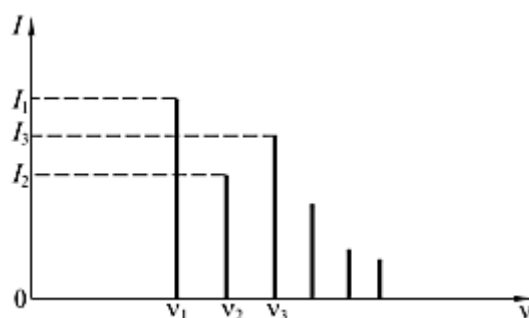


Рис. 21.1. Интенсивность

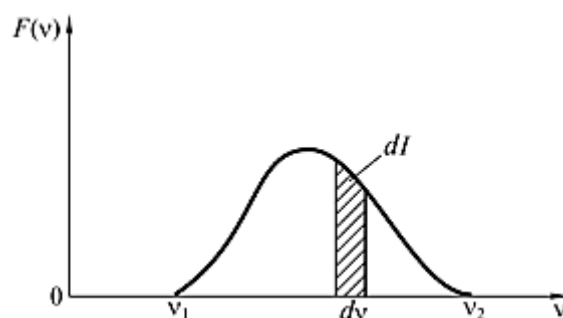


Рис. 21.2. Шум ветра

Закон Вебера-Фехнера

Чувствительность уха человека к звуку пропорциональна логарифму интенсивности звука. Громкость (фон) записывается следующим образом:

$$\beta = \lg \frac{I}{I_{\text{пор}}}$$

Человек ощущает изменение:

$$\frac{\Delta I}{I} \sim 10^{-1}$$

Уровень звукового давления (децибел) выражается как:

$$L_p = 10 \cdot \lg \frac{I}{I_{\text{пор}0}} = 20 \lg \frac{\delta p}{\delta p_{\text{пор}0}}$$

Изменение интенсивности:

$$\frac{dI}{I} = A d\beta$$

$$\frac{1}{A} \int_{I_{\text{пор}}}^I \frac{dI}{I} = \int_0^\beta d\beta$$

$$\frac{1}{A}(\ln I - \ln I_{\text{пор}}) = \beta$$

$$\beta = \frac{1}{A} \ln \frac{I}{I_{\text{пор}}} \quad A = \ln 10$$

$$\delta p_0 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Па}$$

Эффект Доплера

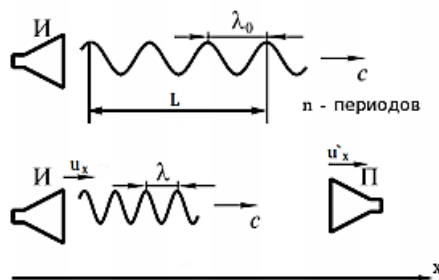


Рис. 21.3. Эффект Доплера

Пусть есть приемник и источник. Необходимо рассмотреть изменение частоты в зависимости от скоростей $u(x)$ и $u'(x)$. Пусть:

$$u_x = 0 \quad u'_x = 0$$

За время t_n излучается импульс, имеющий n периодов. L — длина импульса.

$$L = t_n \cdot c$$

c — скорость звука. Частота звука:

$$\nu = \frac{n}{t_n}$$

Время приёма записывается как:

$$t'_n = t_n$$

Так как источник и приемник покоятся, то время приема не меняется. Таким образом:

$$\nu' = \frac{n}{t'_n} = \frac{n}{t_n} = \nu$$

Пусть:

$$u_x \neq 0 \quad u'_x = 0$$

За время t_n излучается импульс, имеющий n периодов. L — длина импульса.

$$L = t_n \cdot v - t_n \cdot u_x$$

Время приёма записывается как:

$$t'_n = \frac{L}{v} = \frac{t_n(v - u_x)}{v}$$

Следовательно, частота записывается как:

$$v' = \frac{n}{t'_n} = \underbrace{\frac{n}{t_n}}_v \cdot \frac{v}{(v - u_x)} = v \cdot \frac{v}{v - u_x}$$

Пусть:

$$u_x \neq 0 \quad u'_x \neq 0$$

За время t_n излучается импульс, имеющий n периодов. L — длина импульса. $L = t_n(v - u_x)$ Время приёма записывается как:

$$t'_n = \frac{L}{\underbrace{v - u'_x}_{\text{отн. скорость}}} = \frac{t_n(v - u_x)}{v - u'_x}$$

$$v' = \frac{n}{t'_n} = \frac{n(v - u'_x)}{t_n(v - u_x)} = v \cdot \frac{v - u'_x}{v - u_x}$$

Частота сигнала, которую приемник получает, отличается от частоты излучаемого сигнала.

Акустические резонаторы

Акустические резонаторы бывают 2 типов:

- 1) Камертоны;
- 2) Резонаторы Гельмгольца.

Резонаторы Гельмгольца

$$m = \rho l s$$

$$\frac{md^2\xi}{dt^2} = \delta p \cdot S$$

$$\frac{\delta p}{\rho} = -\frac{S \cdot \xi}{V}$$

$$\delta p = \frac{dp}{d\rho} \delta \rho = v^2 \delta \rho$$

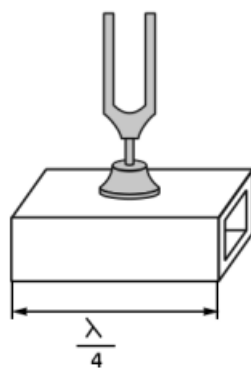


Рис. 21.4. Камертон

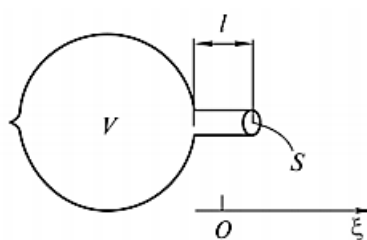


Рис. 21.5. Резонаторы Гельмгольца

Ударные волны

Ударная волна — движущаяся по веществу поверхность разрыва непрерывности скорости течения, давления, плотности и других величин. Тело движется в среде со скоростью, большей скорости звука в среде. Три случая, когда возникают ударные волны:

- 1) c — скорость звука, v — скорость самолёта.

$$v_{\text{тела}} > c_{\text{упр.волн}} (v > v_{\text{звука}})$$

$$\sin \alpha = \frac{c}{v}$$

- 2) Скорость звука зависит от амплитуды импульса.

$$v_3 > v_2 > v_1$$

$$v = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$$

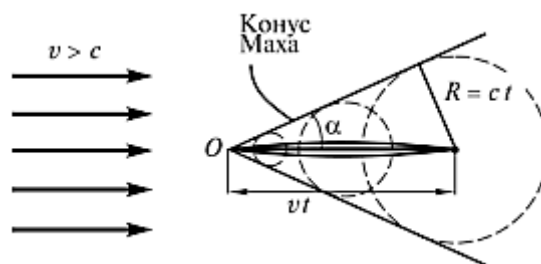


Рис. 21.6. Ударная волна

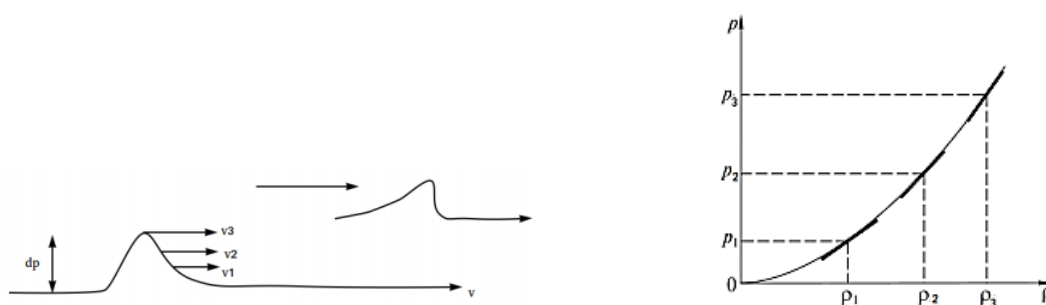


Рис. 21.7. Ударная волна

3) $v_{\text{звука}}$ зависит от координаты.

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

Закон Паскаля

Свойства жидкостей и газов:

- 1) Принимают форму сосуда;
- 2) Отсутствуют касательные напряжения;
- 3) Отсутствуют напряжения растяжения;
- 4) Сила напряжения (сила давления) перпендикулярна площадке, на которую она действует.

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$$

$$\frac{F_1}{AB} = \frac{F_2}{BC} = \frac{F_3}{CA}$$

$$\frac{F_1}{l_1 \cdot l_0} = \frac{F_2}{l_2 \cdot l_0} = \frac{F_3}{l_3 \cdot l_0}$$

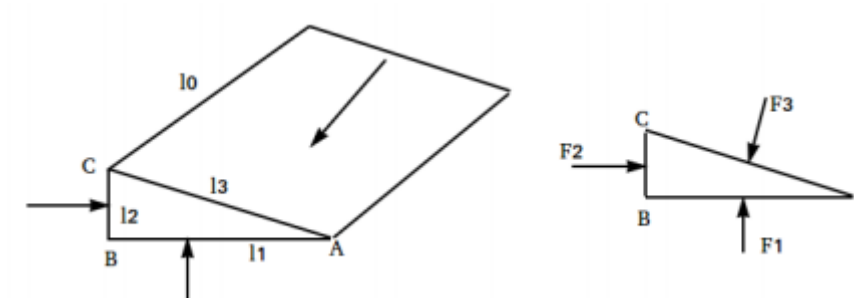


Рис. 21.8. Закон Паскаля

$$P_1 = P_2 = P_3$$

Таким образом, внешнее давление передаётся жидкостью или газом по всем направлениям без изменений.

Основное уравнение гидростатики

Пусть на тело действуют силы давления.

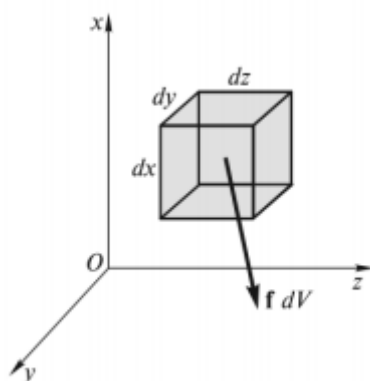


Рис. 21.9. Гидростатика

Массовые силы — силы, зависящие только от массы.

$$F = mg = \underbrace{g\rho}_{f_m} \Delta V$$

f_m — плотность внешней силы.

$$F_d(z) - F_d(z + \Delta z) + f_m \Delta V = 0$$

$$P(z) \cdot S - P(z + \Delta z) \cdot S + f_m \cdot S \Delta z = 0$$

$$\frac{P(z) - P(z + \Delta z)}{\Delta z} + f_m = 0$$

$$\Delta z \rightarrow 0 \quad -\frac{\partial P}{\partial z} + f_m = 0$$

$$\begin{cases} f_{mz} - \frac{\partial P}{\partial z} = 0 & \vec{k} \\ f_{my} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 & \vec{j} \Rightarrow \vec{f}_m - \text{grad } p = 0 \\ f_{mx} - \frac{\partial P}{\partial x} = 0 & \vec{i} \end{cases}$$

$$\text{grad } p = \frac{\partial P}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial P}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial P}{\partial z} \vec{k}$$

Изотермический коэффициент:

$$\gamma = -\frac{1}{V} \left(\frac{dV}{dP} \right)_{T=\text{const}}$$

Модель всестороннего сжатия:

$$\gamma = -V \left(\frac{dP}{dV} \right)_{T=\text{const}}$$

Пусть есть сосуд жидкости.

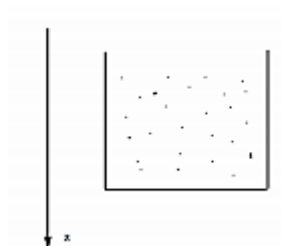


Рис. 21.10. Сосуд жидкости

$$f_m = \rho g$$

$$\rho g = \frac{\partial P}{\partial z}$$

$$\partial P = \rho g \partial z$$

$$P = \rho g z + \text{Const}$$

$$z = 0 \Rightarrow P = P_0$$

$$P = \rho g z + P_0$$

Для газа:

$$-\rho g = \frac{\partial P}{\partial z}$$

$$pV = \frac{m}{\mu}RT$$

$$P = \frac{m}{V} \cdot \frac{RT}{\mu}$$

$$\rho = \frac{P\mu}{RT}$$

$$-\frac{P \cdot \mu g}{RT} = \frac{\partial P}{\partial z}$$

$$\ln P = -\frac{\mu z g}{RT} + Const$$

$$const = \ln P_0$$

$$\frac{P}{P_0} = e^{-\frac{\mu z g}{RT}}$$



Рис. 21.11. Для газа

Источником звука может служить ксилофон. Частота стоячих волн, которые возникают при ударе по пластине, зависит от ее длины. Этот прибор состоит из ряда пластин разной длины. Источником звука также могут послужить пластины одинаковой длины, но разной толщины. Но камертон и органные трубы могут служить источником звука.

Сирена Зеебека используется в роли источника звука. Сирена имеет множество отверстий, которые задают широкую гамму звуков. Диск будет вращаться, и частота звука зависит от прерывания воздуха, который попадает на диск.

Термоакустические звуковые волны. Есть трубы разной длины и зажженные фитиля. При прохождении горячего воздуха через эти трубки происходит колебание в воздухе, и слышен звук.

Эффект Доплера также связан со звуком. Это акустический эффект, который связан с наложением волн. Эффект Доплера можно наблюдать с помощью камертона, который составляет 2000 Герц. При ударе если быстро двигать камертон, то происходит отражение звуковой волны от доски и от стены, и происходит наложение, и поэтому слышно биение.

Лекция 22. Основы гидродинамики

Стационарное течение несжимаемой жидкости. Идеальная жидкость. Линии тока. Трубки тока

Идеальная жидкость — жидкость, лишенная вязкости.

Линии тока — линии, касательные которым в каждой точке совпадают с направлением скорости частицы.

Трубка тока — область пространства, ограниченная замкнутой поверхностью, образованной семейством линий тока.

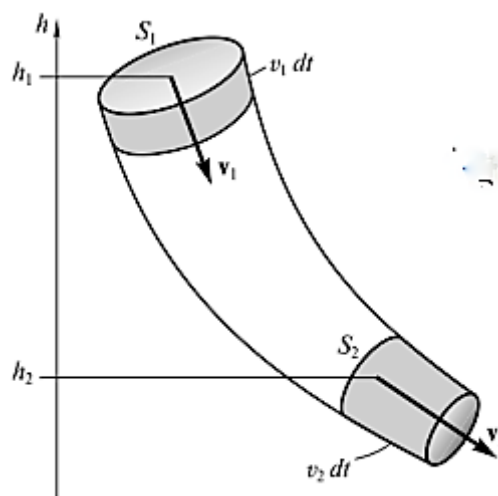


Рис. 22.1. Трубка тока

Предполагается, что жидкость несжимаемая.

$$\delta m = \rho \Delta t v_1 \cdot S_1 = \rho \Delta t v_2 \cdot S_2$$

$$v_1 S_1 = v_2 S_2$$

Уравнение Бернулли

Закон изменения энергии:

$$E_2 - E_1 = A_{\text{давл}}$$

$$\left(mgh_2 + \frac{mv_2^2}{2} \right) - \left(mgh_1 + \frac{mv_1^2}{2} \right) = P_1 \cdot S_1 \cdot l_1 - P_2 \cdot S_2 \cdot l_2$$

$$V_1 = V_2 = V$$

$$\left(\frac{m}{V} gh_2 + \rho \frac{v_2^2}{2} \right) - \left(\rho gh_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} \right) = P_1 - P_2$$

$$P_2 + \rho gh_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} = P_1 + \rho gh_1 + \frac{\rho v_1^2}{2}$$

Таким образом, уравнение Бернулли записывается следующим образом:

$$P + \rho gh + \frac{\rho v^2}{2} = \text{const}$$

Пример 22.1. Вытекание жидкости из широкого сосуда.

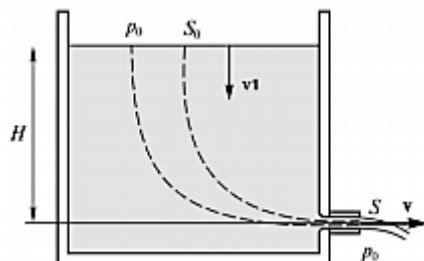


Рис. 22.2. Вытекание жидкости из широкого сосуда

$$P_0 + \rho gh + \frac{\rho v_1^2}{2} = P_0 + 0 + \frac{\rho v^2}{2}$$

v_1 — скорость опускания границы жидкости. Но $v_1 \ll v$ (площадь сечения сосуда больше, чем площадь сечения дырки).

$$v_1 S_0 = v S$$

$$\frac{\rho v^2}{2} = \rho gh$$

$$v = \sqrt{2gh}$$

Пример 22.2. Сосуд Мариотта.

Скорость вытекания постоянна.

$$P_1 < P_0$$

$$P_1 + \rho gh = P_0$$

Пример 22.3. Давление в жидкости, текущей по трубе переменного сечения.

$$\frac{\rho v_2^2}{2} + P_2 = \frac{\rho v_1^2}{2} + P_1$$

Q — расход жидкости по объёму.

$$Q = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{v_1 \cdot \Delta t \cdot S_1}{\Delta t} = v_1 S_1 = v_2 S_2$$

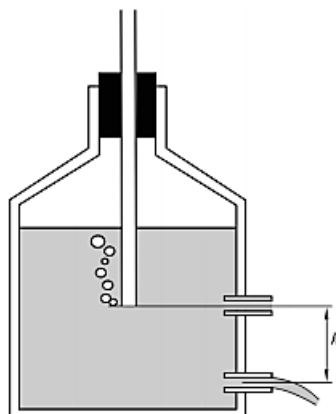


Рис. 22.3. Сосуд Мариотта

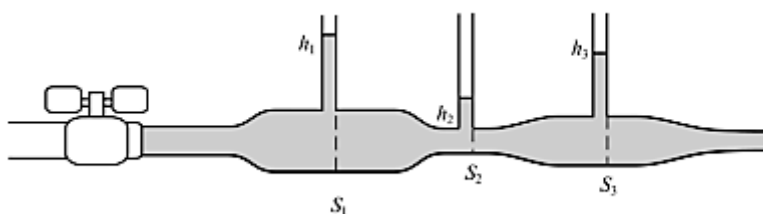


Рис. 22.4. Давление в жидкости, текущей по трубе переменного сечения

$$v_1 = \frac{Q}{S_1} \quad v_2 = \frac{Q}{S_2}$$

$$\frac{\rho \left(\frac{Q}{S_2}\right)^2}{2} + P_2 = \frac{\rho \left(\frac{Q}{S_1}\right)^2}{2} + P_1$$

$$Q^2 \left(\frac{1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1^2}\right) \cdot \frac{\rho}{2} = P_1 - P_2$$

$$Q = \sqrt{\frac{(P_1 - P_2) \cdot 2}{\left(\frac{1}{S_1^2} - \frac{1}{S_2^2}\right) \cdot \rho}}$$

Пример 22.4. Трубка Пито и трубка Прандтля.

P — статическое давление (просто давление);

$\frac{\rho v_2^2}{2}$ — динамическое давление (скоростной напор)

$\frac{\rho v_2^2}{2} + P$ — полное давление (полный напор)

Трубка Пито — прибор для измерения полного напора текущей жидкости (сuspension) или газа.

$$v_A = 0$$

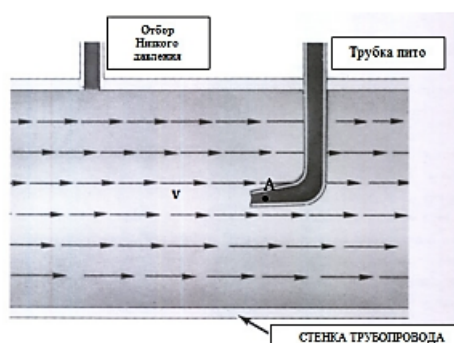


Рис. 22.5. Трубка Пито

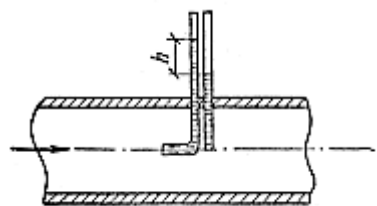


Рис. 22.6. Трубка Прандтля

$$\frac{\rho v^2}{2} + P = \underbrace{\frac{\rho v_A^2}{2}}_{=0} + P_A$$

Трубка Прандтля — аэродинамический прибор для измерения динамического давления. Прибор представляет собой комбинацию трубки Пито и напорной трубки для измерения статического давления потока. В трубке Прандтля имеется одно отверстие в направлении потока для измерения полного давления и несколько отверстий по кольцу вдоль поверхности трубки на некотором расстоянии от её острия для измерения статического давления. Разница между давлениями может быть измерена с помощью манометра, согласно закону Бернулли эта разница является динамическим давлением.

Течение вязкой жидкости. Сила вязкого трения. Формула Пуазейля

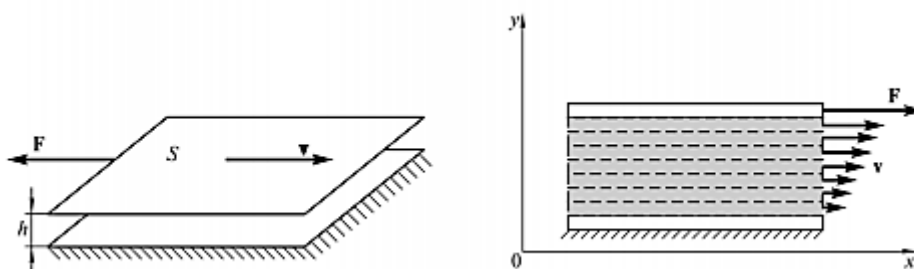


Рис. 22.7. Течение вязкой жидкости

Пусть верхняя пластина движется со скоростью v , а нижняя — покоится. Тогда

на верхнюю пластину действует сила трения.

$$F_{\text{тр}} = -\eta \cdot \frac{v}{d} \cdot S$$

$$F_{\text{тр}} = -\eta \cdot S \frac{dv}{dx}$$

На нижнюю площадь действует сила:

$$F_{\text{тр}} = +\eta \cdot S \cdot \frac{dv}{dx}$$

Пусть есть труба, и по ней течет жидкость.

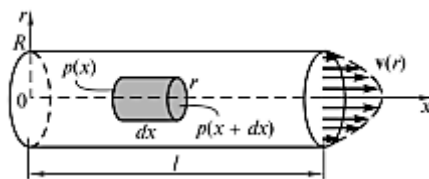


Рис. 22.8. Формула Пуазейля

Если течение стационарно (скорость везде одинакова), то сумма сил, действующих на выделенный объём, равна 0.

$$F_{\text{тр}} = +\eta \cdot S_{\text{бок}} \cdot \frac{dv}{dr}$$

$$P_1 \cdot S - P_2 \cdot S + F_{\text{тр}} = 0$$

$$(P_1 - P_2) \cdot \pi r^2 + \eta \cdot (2\pi r \cdot l) \frac{dv}{dr} = 0$$

$$dv = -\frac{(P_1 - P_2) \cdot \pi r^2}{\eta \cdot (2\pi r \cdot l)} \cdot dr$$

$$dv = -\frac{(P_1 - P_2)}{2\eta \cdot l} \cdot r dr$$

$$v = -\frac{(P_1 - P_2)}{2\eta \cdot l} \cdot \frac{1}{2} r^2 + \text{const}$$

$$v(r = R) = 0$$

$$v(r) = \frac{(P_1 - P_2)}{4\eta \cdot l} (R^2 - r^2)$$

Ламинарное течение жидкости можно показать с помощью прозрачной кюветы, по которому течет вода из крана и сверху подаются струйки подкрашенной жидкости. Струйки этой жидкости параллельны друг к другу. Благодаря ламинарному течению мы можем посмотреть обтекание тел различной формы. Первое тело —

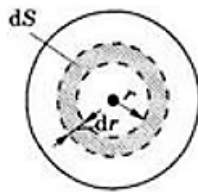


Рис. 22.9. Формула Пуазейля

это каплевидное. Далее используется тело в форме цилиндра. Видно ламинарное обтекание. Если увеличить ток жидкости, то появляются завихрения. Ламинарное течение превращается в турбулентное.

$$Q = \int_0^R 2\pi v r dr = \frac{P_1 - P_2}{4\eta l} \int_0^R (R^2 - r^2) 2\pi r dr$$

Таким образом, формула Пуазейля записывается следующим образом:

$$Q = \frac{P_1 - P_2}{l} \cdot \frac{\pi R^4}{8\eta}$$

Ламинарное и турбулентное течение. Обтекание тел жидкостью или газом

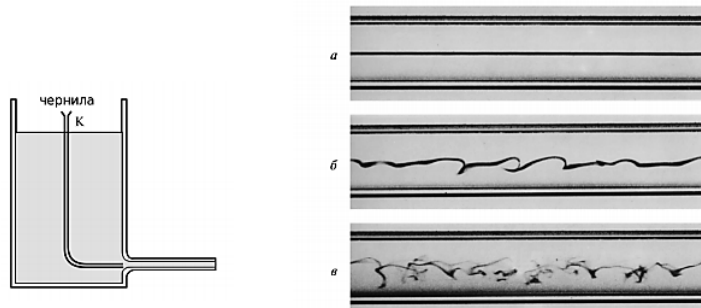


Рис. 22.10. Ламинарное и турбулентное течение

$$\langle v \rangle = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{P_1 - P_2}{l} \cdot \frac{R^2}{8\eta}$$

Для ламинарного течения давление в трубке будет меняться $\sim \langle v \rangle$:

$$P_1 - P_2 = \frac{8\eta}{R} \langle v \rangle \frac{l}{R}$$

Для турбулентного течения:

$$P_1 - P_2 = k\rho \langle v \rangle^2 \cdot \frac{l}{R}$$

Работа сил трения записывается следующим образом:

$$A_{\text{тр}} = (P_1 - P_2) \pi R^2 \cdot l = \frac{8\eta}{R} \langle v \rangle \frac{l}{R} \pi R^2 \cdot l = 8\eta \langle v \rangle \pi l^2$$

$$E = \frac{m \langle v \rangle^2}{2} = \frac{\rho \cdot \pi R^2 l \langle v \rangle^2}{2}$$

$$\frac{E}{A_{\text{тр}}} = \frac{\rho \cdot \pi R^2 l \langle v \rangle^2}{2 \cdot 8\eta \langle v \rangle \pi l^2} = \frac{\rho R^2 \langle v \rangle^2}{2 \cdot 8\eta l}$$

Число Рейнольдса можно найти следующим образом:

$$Re = \frac{\rho R \langle v \rangle}{\eta}$$

Пример 22.5. Оценки чисел Рейнольдса для типичных случаев.

$R = 1$ см, скорость течения $\langle v \rangle = 1$ см/с. Вода:

$$Re = \frac{\rho R \langle v \rangle}{\eta} = \frac{10^3 \cdot (1 \cdot 10^{-2}) \cdot (1 \cdot 10^{-2})}{1.15 \cdot 10^{-3}} = 87$$

Воздух:

$$Re = \frac{\rho R \langle v \rangle}{\eta} = \frac{1.3 \cdot (1 \cdot 10^{-2}) \cdot (1 \cdot 10^{-2})}{1.8 \cdot 10^{-1}} = 7.2$$

Подъемная сила. Формула Жуковского. Эффект Магнуса

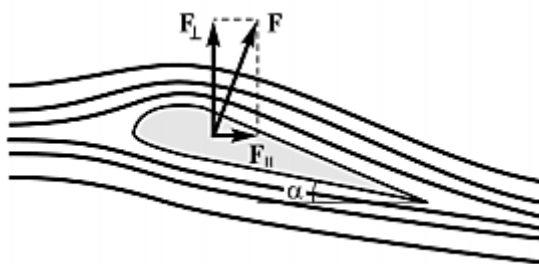


Рис. 22.11. Подъемная сила

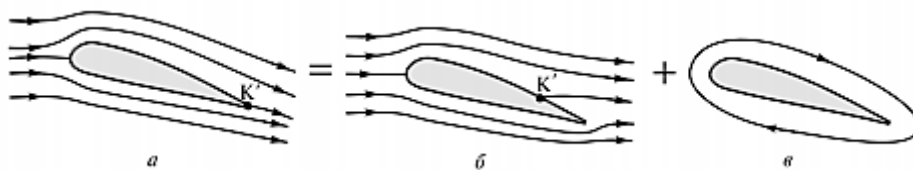


Рис. 22.12. Подъемная сила

$$\frac{\rho v_B^2}{2} + P_B = \frac{\rho v_H^2}{2} + P_H$$

$$v_B > v_H \Rightarrow P_B < P_H$$

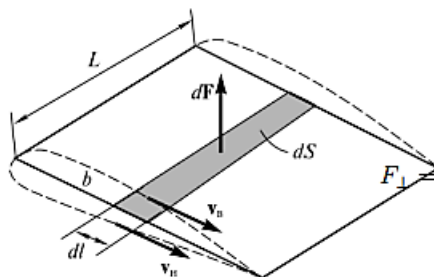


Рис. 22.13. Подъемная сила крыла

С помощью модели крыла самолета можно определить подъемную силу. Подъемная сила может быть определена с помощью аэродинамических весов. Чем больше отклонение стрелки, тем больше подъемная сила. Существует такое понятие, как угол отклонения, при котором подъемная сила максимальна. Этот угол примерно равен 10° . При первом случае крыло находится параллельно, и угла отклонения нет. Если наклонить крыло самолета, то угол отклонения становится больше. Это используется при полетах.

$$dF = (P_H - P_B)Ldl$$

$$P_H - P_B = \frac{\rho v_B^2}{2} - \frac{\rho v_H^2}{2}$$

Таким образом, можно написать формулу Жуковского:

$$F_{\perp} = \int dF = \rho v L \underbrace{\int_0^b (v_B - v_H) dl}_{\text{Гциркуляция}} = \rho v L \Gamma$$

Сосуд Мариотта. Жидкость в сосуде всегда оказывает давление на стенки. В этом сосуде есть 3 отверстия. Скорость вытекания жидкости из отверстий разная. Это видно по траектории движения жидкости. Сверху вставлена трубочка. Если ее опускать, то жидкость не вытекает.

Трубка с переменным сечением. Есть сечение более большое и есть зауженная часть. С помощью этой трубки можно показать, что давление в зауженной части

меньше, а давление в широких частях больше. Определить это можно по высоте жидкости. Если давление больше, то скорость течения жидкости меньше.

Согласно уравнению Бернулли давление внутри газа или жидкости меньше, чем в окружающем воздухе.

Для демонстрации силы давления воздуха используются магдебургские полушария. Если внутри магдебургских полушарий есть воздух, то они легко отрываются друг от друга. Если откачать из них воздух, то их невозможно разорвать.

При ламинарном течении слои жидкости не перемешиваются, а это значит, что если движение повернуть в обратном направлении, то картина должна восстановиться. Для этого используется прозрачный сосуд, в котором находятся два цилиндра. Один полый, а другой сплошной. Один цилиндр может вращаться внутри другого. Между ними зазор, который заполнен глицерином. Вводится столбик подкрашенного глицерина. Если совершить движение сначала по часовой стрелке, а потом против часовой, то столбик глицерина восстанавливается.

Гидравлический пресс представляет собой два гидравлических сосуда большого и маленького диаметра, заполненные машинным маслом. Маленький цилиндр используется как насос. Если начать качать рычагом, то за счет увеличения давления можно зафиксировать дощечку.

На тележке находится цилиндр, который может вращаться. За счет того, что при вращении скорость по направлению вращения увеличивается, а давление уменьшается, а с другой стороны напротив потока воздуха скорость уменьшается, а давление увеличивается, возникает эффект Магнуса. Появляется разность давлений, возникает сила, которая заставляет двигаться тележку если ее поместить в поток воздуха. Если цилиндр меняет направление вращения, то тележка будет двигаться в другую сторону. Это свойство Магнуса впервые использовал Флеттнер. Таким способом он создал судно Флеттнера.

Еще одним проявлением эффекта Магнуса является скатывание цилиндров. При скатывании не тяжелых цилиндров по наклонной поверхности, тело закручивается, и его сила направлена против потока воздуха. В результате чего появляется дополнительная сила, которая искривляет траекторию движения тела.

Вихревые дымовые кольца являются примерами турбулентного течения газа. Чем сильнее ударить, тем больше скорости у этих колец.



ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
Л Е К Ц И И У Ч Е Н Ы Х М Г У