جزوه جلسه بیست و دوم داده ساختارها و الگوریتم

۱۶ آذر ۱۴۰۰

فهرست مطالب

۱ کوتاه ترین مسیر در گراف جهت دار بدون دور

این الگوریتم، کوتاه ترین مسیر را در زمان $\Theta(n+e)$ پیدا می کند.
مراحل الگوریتم به شکل زیر است:

- راس ها را به ترتیب توپولوژیک می چینیم (ترتیب نزولی درجه رئوس خروجی)
- $\mathrm{d[v]}$ برای همه رئوس مشخص شده است. به ترتیب روی رئوس حرکت می کنیم و یالهای خروجی راسی که روی آن قرار داریم را relax می کنیم. الگوریتم را میتوان به ظور مشابه برای یال های ورودی نیز relax کرد.

۱.۱ اثبات درستی الگوریتم

برای اثبات درستی الگوریتم از استقرا استفاده می کنیم. درستی الگوریتم برای حالت تک راسی واضح است.
برای ادامه اثبات از استقرای قوی استفاده می کنیم. کوتاه ترین مسیر از مبدا s به راس y را در نظر می گیریم و آخرین یال ورودی به y را (x, y) می نامیم. طبق فرض استقرا $\mathrm{d[x]}$ مقدار واقعی خود را دارد. حال یال (x, y) را ریلکس می کنیم و $\mathrm{d[y]}$ نیز محاسبه می شود.
طبق این اثبات، $\mathrm{d[y]}$ کوچکتر مساوی مقدار واقعی خود است.
اردر اجرای الگوریتم نیز برابر $\Theta(n+e)$ می باشد (حلقه روی همه رئوس و پیمایش یال های متصل به آنها)

۲ الگوریتم بلمن-فورد

در این الگوریتم برای محاسبه کوتاه ترین مسیر وجود یال منفی بدون دور منفی مشکلی ندارد. اما در صورت وجود دور منفی چه کار میتوان کرد؟

۱. می توان ادعا کرد وقتی دور منفی وجود نداشته باشد خروجی الگوریتم صحیح است اما در صورت وجود دور منفی، تضمینی بر صحیح بودن خروجی نیست.
در قسمت های بعدی به دنبال بهبود این حالت هستیم:

۲. فقط وجود دور منفی را گزارش دهیم

۳. رئوسی که به دور منفی ربطی ندارند را خروجی صحیح و بقیه رئوس را $-\infty$ در نظر بگیریم.

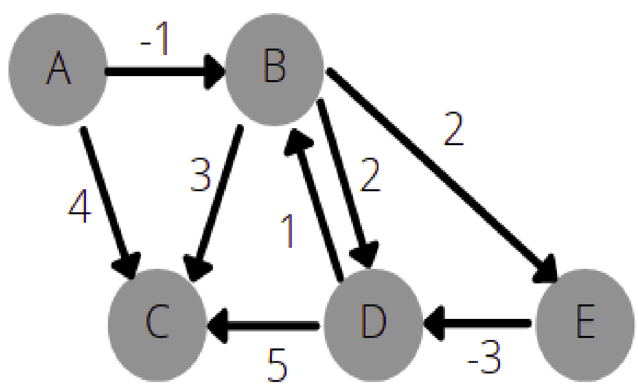
۴. خود دور منفی را گزارش دهیم.

کد مربوط به این الگوریتم نیز قابل مشاهده است.

```
1.  Bellman-Ford:
2.     initialize parents and d arrays
3.     for round in range(n-1):
4.        for edge (u,v) in G:
5.           relax(u, v)
6.     somehow handle negative weight cycles
7.     return parent, d
```

۱.۲ حالت پایه الگوریتم بلمن فورد

در هر یک round حلقه اصلی، هر یال یکبار relax می شود. همچنین حالت پایه خط ششم کد بالا را ندارد.
ترتیب ریلکس کردن یالها نیز مهم است به نحوی که روی اردر زمانی کد تاثیر دارد.



شکل ۱: ترتیب پیمایش یالهای گراف

اگر رئوس به ترتیب AB, AC, BC, BD, BE, DB, DC, ED ریلکس شوند در اولین حلقه و اگر با ترتیب برعکس ریلکس شود در حلقه سوم کوتاه ترین مسیرها پیدا می شوند.
برای بهبود عملکرد الگوریتم تیز می توان بررسی کرد اگر بعد از یک round مسیر ها تغییری نکردند الگوریتم به پایان برسد. برای اثبات درستی این ادعا نیز با استقرای قوی

بعد از راند iام، d[v] کمتر مساوی طول کوتاه ترین مسیر از s به v با حداکثر i یال است. پس مسیرهایی با حداکثر i یال از مبدا به v پیدا شده اند.
همچنین بعد از راند n-1ام مسیر هایی به طول n-1 نیز بررسی شده اند. پس تمام مسیرها بررسی شده اند و الگوریتم به درستی تمام مسیرها را بررسی کرده است.

۲.۲ روش های مقابله با دور منفی

۱.۲.۲ ادامه الگوریتم برای یک مرحله دیگر

کاری که برای n-1 بار انجام دادیم را برای یک بار دیگر انجام دهیم. اگر حداقل یک یال ریلکس شد و طول مسیز یک واحد کاهش یافت نتیجه می گیریم دور منفی وجود دارد.
همچنین برای پیدا کردن دور منفی باید d[v] همه راس ها را صفر در نظر گرفت.

```
1.    for edge (u,v)vin G:
2.        if d[v] > d[u] + w(u, v):
3.            raise ValueError(”There is a negative cycle reachable from s!”)
```

۲.۲.۲ گزارش راس هایی که کوتاه ترین مسیر از s یه آنها $-\infty$ است

در این روش، n راند دیگر الگوریتم را ادامه میدهیم و رئوسی که d[v] انها در هر مرحله آپدیت می شود را به عنوان راس $-\infty$ گزارش دهیم.
راه دیگر DFS زدن روی رئوسی است که بعد از یک مرحله اضافه d[v] آنها تغییر کرده است.

۳.۲.۲ پیدا کردن یک دور منفی

در راند nام که یال (u,v) را آپدیت می شود، پس در نتیجه یک دور منفی در مسیر s به v وجود دارد. با استفاده از parent رئوس و پیمایش گراف، به محض دیدن یک راس تکراری دور منفی را گزارش می دهیم. همچنین خود راس v نیر در دور منفی وجود ندارد

۳.۲ کاربردها

- در شبکه و نقشه مسیریابی و همچنین تبدیل رمز و رمز ارز دور منفی نداریم و باید شناسایی شوند.

- یک دستگاه معادلات داریم که شامل m نامساوی به صورت $x_k - x_i \leq b_k$ می باشند. میتوان جواب های x_i را از الگوریتم بلمن فورد استخراج کرد.
هر $x-i$ را یک راس در نظر می گیریم و برای $x_j - x_i$ یک یال جهت دار با وزن b_k در نظر می گیریم. با اجرای الگوریتم باید در نهایت داشته باشیم: $x_j \leq x_i + b_k$.
در ابتدا x_iها صفر و b_kها منفی هستند. در صورتی که دور منفی داشته باشیم، مسئله قابل حل نیست.