Práctica 3 de Cálculo con Octave
Estudio de gráficas

Comandos limit y diff

Para analizar la existencia de asíntotas de una función real de una variable real con la ayuda del paquete simbólico de OCTAVE, podemos utilizar el comando **limit** que, para calcular el límite de una función f cuando la variable x tiende al punto a, sigue el formato **limit(f,x,a)**.

Si f es una función de una sola variable, no es necesario especificar ésta en el formato, pudiéndose usar **limit(f,a)**, o también **limit(f)** en lugar de limit(f,0).

Para calcular un límite lateral, el comando dispone de las opciones correspondientes, pudiéndose utilizar las órdenes **limit(f,x,a,'left')** o bien **limit(f,x,a,'right')** para hallar, respectivamente, el límite de la función f en el punto a por la izquierda y por la derecha.

Para estudiar los extremos de una función real con la ayuda de OCTAVE necesitaremos usar el comando **diff**, que permite calcular las derivadas de una expresión algebraica o de una función de una o más variables. Siguiendo el formato **diff(***expresión*,*variable*,k**)** obtendremos la k-ésima derivada de la expresión introducida respecto de la variable que figure como segundo argumento.

Si no hay posibilidad de confusión en cuanto a la variable respecto de la que vamos a derivar, puede omitirse. Y si no se indica un número natural como valor de k, el programa tomará $k = 1$.

A la hora de calcular el límite de varias funciones en un mismo punto, resulta cómodo utilizar la capacidad del comando limit para actuar sobre vectores. Análogamente, utilizando vectores podemos derivar varias funciones o expresiones de forma simultánea respecto de la misma variable.

Las órdenes siguientes sirven de ejemplo sobre el funcionamiento de estos comandos. Por supuesto, al hacer el estudio de una función cara a su representación gráfica (continuidad y asíntotas, crecimiento y extremos, concavidad e inflexión), nos serán de utilidad otros comandos ya vistos como **solve**, **subs**, **double**, etc.

```
>> syms x, limit((1+1/x)^x,x,inf)

>> syms t, limit((1+t)^(1/t),x)

>> syms x, limit([1/x^2,sin(x)/x,log(x)],x,0,'right')

>> syms x y, v=[2*x*y,x/y,x-y,log(x)]

>> diff(v,y), diff(v,x),diff(v,x,2)
```

Ejercicio

Se considera la función

$$h(x) = \frac{2x}{1 + 2^{(x+1)}} :$$

a) Estudia la existencia de asíntotas de la función.

b) Analiza si h tiene algún extremo relativo, y también absoluto.

c) Representa, para valores de x entre -10 y 10, la función h junto con sus asíntotas y los ejes de coordenadas, de forma que el color y el trazo de línea utilizados para representar las rectas difieran de los que presente la curva. Incluye en el dibujo las ecuaciones de las asíntotas, identificando cada una de ellas. Además, resalta los extremos que hayas encontrado.

Ejercicios

1. Sea la función
$$g(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x+1}}$$
   (a) Halla el dominio de g y encuentra sus asíntotas. Justifica tu respuesta con los límites necesarios.
   (b) Encuentra y clasifica los extremos relativos de g. Estudia si esta función tiene algún extremo absoluto.
   (c) Representa la función g junto con sus asíntotas y los ejes de coordenadas para valores de x entre -2π y 2π. Hazlo de forma que los ejes, las asíntotas y la curva presenten colores y trazo de línea diferentes. Incluye además en el dibujo las ecuaciones de las asíntotas, identificando cada una de ellas. Resalta también los extremos encontrados.

2. Se considera la función
$$h(x) = x + \frac{9}{\sqrt{x^2+1}}$$
   (a) Analiza si h tiene alguna asíntota. En caso afirmativo, escribe su ecuación. Justifica tu respuesta.
   (b) Estudia si la función h tiene algún punto de inflexión. Encuentra el subconjunto de los números reales en que la función es convexa, y también el intervalo en el que h es cóncava.
   (c) Representa la curva de ecuación $y = h(x)$ con la(s) asíntota(s) encontrada(s), para valores de la variable x pertenecientes al intervalo [-10,10]. Hazlo de forma que la curva presente un color y trazo de línea diferentes al empleado para dibujar la(s) recta(s). Incorpora también texto al dibujo identificando la(s) asíntota(s), y además resalta los puntos de inflexión.

3. Se considera la función $h(x) = \ln\sqrt{2x^3 + 3x^2}$:
   (a) Encuentra el conjunto de los números reales donde h es continua.
   (b) Estudia si esta función tiene alguna asíntota, hallando los límites necesarios para justificar tu respuesta.
   (c) Analiza y clasifica los extremos relativos de h. Estudia si la función tiene extremos absolutos.
   (d) Representa, para valores de x entre -3/2 y 2π, la función h con el eje OX y sus asíntotas, en el rectángulo del plano [-2,7] x [-4,4]. Hazlo de manera que la gráfica del eje OX, la de las asíntotas y la de la curva presenten un color y un trazo de línea diferentes. Incorpora también texto en el dibujo identificando cada una de las asíntotas con la ecuación correspondiente. Resalta también los extremos encontrados.

4. Sea la función
$$g(x) = \frac{x}{1 + e^{\frac{3}{x^2+1}}} - 1 :$$
   (a) Estudia si g tiene alguna asíntota. Representa $g(x)$ con su(s) asíntota(s) para valores de x pertenecientes al intervalo $[-2\pi, 2\pi]$, en colores distintos y con trazo de línea diferente.
   (b) Calcula la derivada de g. Observando la expresión obtenida, analiza el crecimiento de la función y estudia la existencia de extremos, relativos y absolutos.
   (c) Calcula la derivada segunda de g. A la vista del resultado obtenido, encuentra un punto de inflexión de g. Justifica tu respuesta con los resultados del Cálculo Diferencial.
   (d) Incorpora a la gráfica del apartado a) el punto de inflexión obtenido, e introduce texto para identificar el correspondiente punto en la gráfica de g, y también la(s) asíntota(s) representada(s).

5. Se considera la función
$$h(x) = \frac{x^2 - 3}{x^2 + 8x + 16}$$
   (a) Estudia si h tiene alguna asíntota, calculando los límites necesarios para justificar tu respuesta. Elabora una representación en la que aparezca la gráfica de h con sus asíntotas para valores de x pertenecientes al intervalo [-15,10], de forma que la curva y las rectas presenten colores y trazos de línea diferentes. Incorpora también texto con las ecuaciones de las asíntotas, identificando cada una de ellas.
   (b) Encuentra y clasifica los extremos relativos de h.
   (c) Analiza la concavidad de h y la existencia de puntos de inflexión.
   (d) En una ventana gráfica independiente a la que corresponde al apartado a) y de manera que las dos puedan observarse a la vez, representa la curva para valores de x entre -10 y 10, resaltando en el dibujo los extremos y los puntos de inflexión encontrados e incluyendo además texto para identificarlos.

6. Sea la función f dada por
$$f(x) = \frac{1-2x}{x^2-5x+6}:$$

   (a) Estudia si f tiene alguna asíntota. Calcula los límites necesarios para justificar tu respuesta.

   (b) Elabora una representación en la que aparezcan la gráfica de f y la de sus asíntotas para valores de x entre 0 y 5, de forma que las rectas presenten colores y trazo de línea diferentes a los empleados para dibujar la curva. Incorpora además texto al dibujo con las ecuaciones de las asíntotas, identificando cada una de ellas.

   (c) Encuentra y clasifica los extremos relativos de f.

   (d) Analiza la concavidad de f y estudia la existencia de puntos de inflexión.

   (e) En una ventana gráfica independiente a la correspondiente al apartado *b*) y de manera que ambas ventanas puedan observarse al mismo tiempo, representa la función f para valores de x pertenecientes al intervalo [-4,3], resaltando en el dibujo los extremos y puntos de inflexión encontrados e incluyendo además texto para identificarlos.